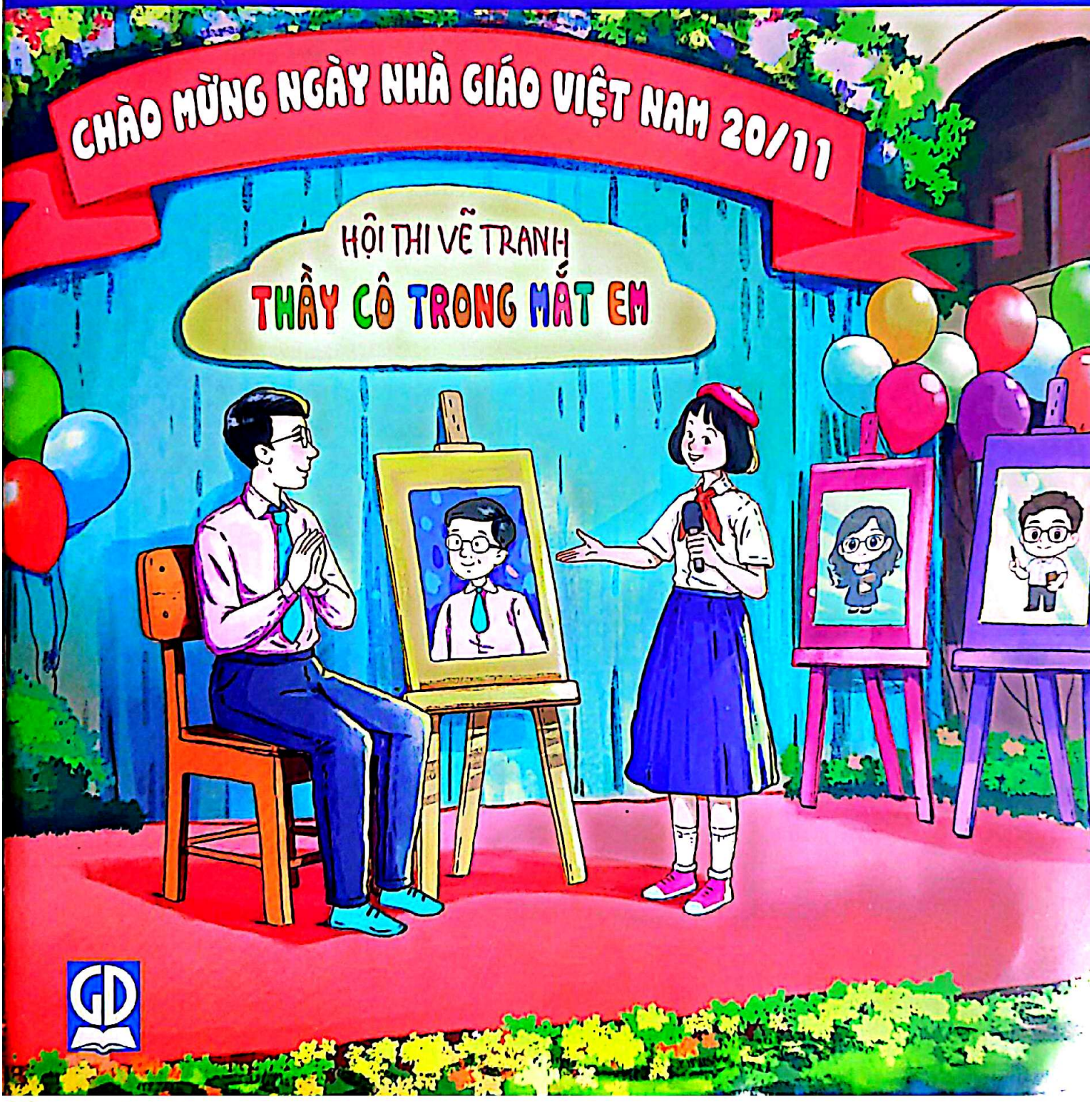
Toán tuổi thơ 2

TẠP CHÍ Toán học & Tuổi trẻ
ISSN 1859-2740
SỐ 272+273
THÁNG 11 NĂM 2025

TRUNG HỌC CƠ SỞ

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM CHIA SẺ KỊP THỜI VỚI NGÀNH GIÁO DỤC TỈNH TUYÊN QUANG SAU MƯA LŨ

Ngày 17/10, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đồng hành cùng đoàn công tác của Bộ GD&ĐT do Thứ trưởng Lê Tấn Dũng dẫn đầu đã đến thăm và làm việc tại tỉnh Tuyên Quang về việc khắc phục hậu quả hai cơn bão số 10, 11.

Sau hai cơn bão số 10 và 11 vừa qua, ngành giáo dục tỉnh Tuyên Quang đã có 54 trường học bị nước lũ ngập sâu, sạt lở,... gây thiệt hại nghiêm trọng, ước tính trên 28 tỉ đồng.

Làm việc tại Sở GD&ĐT tỉnh Tuyên Quang, Thứ trưởng Lê Tấn Dũng đã chia sẻ với những khó khăn, mất mát mà thầy và trò các trường học ở Tuyên Quang đã trải qua trong đợt mưa lũ vừa qua. Thứ trưởng đánh giá cao sự sát sao, nhanh chóng vào cuộc của các cơ sở giáo dục trên địa bàn tỉnh Tuyên Quang để hạn chế tối đa thiệt hại. Thứ trưởng cũng đề nghị Sở có các giải pháp trước mắt và lâu dài để ổn định việc học, đảm bảo an toàn cho học sinh và giáo viên trên địa bàn, đảm bảo các em không thiếu sách giáo khoa khi trở lại trường học.

Nhằm hỗ trợ ngành giáo dục Tuyên Quang nhanh chóng khắc phục hậu quả thiên tai, Bộ GD&ĐT và Công đoàn Giáo dục Việt Nam đã trao tặng cho ngành Giáo dục đào tạo Tuyên Quang số tiền trị giá 300 triệu đồng.



Đoàn công tác Bộ GD&ĐT trao số tiền hỗ trợ cho Sở GD&ĐT tỉnh Tuyên Quang

Cùng chia sẻ khó khăn với các em học sinh của tỉnh, thông qua Sở GD&ĐT Tuyên Quang, NXBGDVN đã hỗ trợ các em số sách giáo khoa trị giá khoảng 100 triệu đồng.

Ông Ngô Văn Hoan – Phó Tổng Giám đốc NXBGDVN bày tỏ: *"Sau mỗi đợt thiên tai, mưa lũ, việc giúp các em học sinh ở các vùng bị thiệt hại có lại sách vở để tiếp tục học là ưu tiên hàng đầu của NXBGDVN. Sách không chỉ là công cụ học tập mà còn là nguồn động viên tinh thần, tiếp sức cho thầy trò vượt qua khó khăn".*



Ông Ngô Văn Hoan – Phó Tổng Giám đốc NXBGDVN trao sách giáo khoa cho đại diện Sở GD&ĐT Tuyên Quang

Trước đó, đoàn công tác Bộ GD&ĐT đã đến thăm và động viên Trường Phổ thông Dân tộc Nội trú THCS&THPT Chiêm Hóa. Đây là ngôi trường có gần 490 học sinh nội trú. Trong đợt thiên tai vừa qua, khu kí túc xá của trường bị hư hỏng nặng, với 26 phòng hỏng toàn bộ hệ thống điện, nước, công trình vệ sinh và cửa ra vào. Khu vực nhà ăn, bếp, nhà đa năng và khu nhà công vụ cũng bị ảnh hưởng nghiêm trọng.

Nhằm giúp thầy và trò nhà trường nhanh chóng ổn định việc sinh hoạt và học tập, đoàn công tác đã tặng nhà trường 1 chiếc tivi và 1 loa kéo. Riêng NXBGDVN ủng hộ cho nhà trường số tiền mặt là 20 triệu đồng.



Đại diện NXBGDVN trao số tiền trị giá 20 triệu đồng cho Trường Phổ thông Dân tộc Nội trú THCS&THPT Chiêm

Hiện tại, NXBGDVN đang khẩn trương tiếp tục rà soát thiệt hại ở nhiều địa phương khác bị ảnh hưởng bởi mưa lũ vừa qua để có kế hoạch hỗ trợ kịp thời, lan tỏa tinh thần "tương thân tương ái" – không để học sinh nào bị bỏ lại phía sau.

BAN TRUYỀN THÔNG
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Toán tuổi thơ 2

TRUNG HỌC CƠ SỞ

TẠP CHÍ CỦA VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập:
TRẦN HỮU NAM
Thư kí tòa soạn:
VÕ THỊ HỒNG THU

ỦY VIÊN
NGND. Vũ Hữu Bình
TS. Nguyễn Minh Đức
ThS. Đặng Hiệp Giang
TS. Nguyễn Minh Hà
ThS. Nguyễn Ngọc Hân
PGS. TS. Vũ Đình Hòa
ThS. Trần Quang Hùng
TS. Lê Thống Nhất
PGS. TS. Tạ Duy Phượng
TS. Phạm Đức Tài
NGND. PGS. TS. Tôn Thân
GS. TS. Lê Anh Vinh
TS. Trần Quang Vinh

TÒA SOẠN

Số 187B Giảng Võ, phường Ô Chợ Dừa, Hà Nội
Điện thoại - Email:
✆ Biên tập: 024.35682702;
Email: bbttoantuoitho@gmail.com
✆ Phát hành: 024.35682701; 024.35142649;
Email: tapchitoantuoitho@gmail.com
✆ Hành chính: 024.35121606

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Biên tập - Chế bản: **Nguyễn Quang Tuấn, Vũ Thị Mai, Đỗ Trung Kiên**
Mĩ thuật: **Trần Ngọc Trường**
Phát hành: **Trần Thị Minh Hiền (Trưởng phòng)**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch HĐTV kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục:
LÊ HỒNG SƠN

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các nhà toán học nhỏ 2
Một số bài toán xác suất
Nguyễn Tiến Lâm

Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc 8
Chuyện ở chung cư Yên Bình
Nguyễn Như Mai

Giải toán thế nào? 13
Xoay quanh một giả thiết đẹp
Hoàng Lê Nhật Tùng

Thách đấu 21
Trận đấu thứ hai trăm hai mươi
Võ Quốc Bá Cẩn

Ôn thi vào lớp 10 25
Đề thi thử môn Toán chuyên
Nguyễn Thanh Giang

Vào thăm vườn Anh 28
Our beloved teachers
Nguyễn Minh Khang

Góc Olympic 29
Kì 83
Cao Ngọc Toản

Rừng cười 31
Mặt gì?
Trần Thị Huyền

Học ra sao? 37
Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định
Nguyễn Đức Trường

Minh họa bìa 1: Lê Mạnh Cường
(Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông)

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi. **Mã số:** 8BTT272M25.
Giấy phép xuất bản: số 534/GP-BTTTT, cấp ngày 19/11/2020 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In tại: Xí nghiệp Bản đồ 1, CN công ty TNHH MTV Trắc địa Bản đồ, tổ 7, phường Phúc Đồng, TP. Hà Nội.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2025.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

MỘT SỐ BÀI TOÁN XÁC SUẤT

NGUYỄN TIẾN LÂM *(CLB Toán A1, Hà Nội)*

1. Lý thuyết

Với mỗi tập X hữu hạn, kí hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hợp X.

Phép thử ngẫu nhiên: Phép thử ngẫu nhiên là một hành động mà ta không đoán trước được kết quả của nó, tuy nhiên có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của hành động đó.

Không gian mẫu: Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử T được gọi là không gian mẫu của phép thử T và thường được kí hiệu là Ω.

Biến cố: Xét phép thử T có không gian mẫu Ω. Khi đó nếu A là tập con của Ω thì ta nói A là biến cố (liên quan tới phép thử T).

Trong kết quả của việc thực hiện phép thử T, nếu có một phần tử của biến cố xảy ra thì ta nói "biến cố A xảy ra".

Xác suất: Giả sử A là biến cố liên quan tới phép thử T và phép thử T có một số hữu hạn các kết quả có thể, đồng khả năng. Khi đó ta gọi tỉ số $\frac{|A|}{|\Omega|}$ là xác suất của biến cố A và kí hiệu là P(A). Như vậy $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

Ta gọi $|A|$ là số kết quả thuận lợi của biến cố A, tức là các kết quả mà A xảy ra.

Các bước để giải một bài toán xác suất:

+) Xác định rõ phép thử và tính số phần tử của không gian mẫu.

+) Gọi tên được biến cố và tính được số kết quả thuận lợi cho biến cố.

+) Tính xác suất theo công thức ở trên.

Hai quy tắc đếm cơ bản:

+) Quy tắc nhân: Một hành động được chia làm nhiều bước thực hiện thì số cách thực hiện hành động này bằng tích số cách của các bước.

+) Quy tắc cộng: Một hành động có nhiều phương án thực hiện thì số cách thực hiện hành động này bằng tổng số cách của các phương án.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho tập hợp $S=\{1; 2;...; 20\}$. Chọn ngẫu nhiên hai phần tử của tập hợp S. Tính xác suất để chọn được hai phần tử mà:

a) Tích hai phần tử đó là số lẻ.

b) Tích hai phần tử đó là số chẵn.

c) Tích hai phần tử đó chia hết cho 3.

d) Tích hai phần tử đó chia hết cho 6.

e) Tổng bình phương hai phần tử đó chia hết cho 3.

f) Phần tử này chia hết cho phần tử kia.

Lời giải. Trước hết ta đếm số cách chọn ngẫu nhiên hai phần tử của tập hợp S.

Phần tử thứ nhất có 20 cách chọn, phần tử thứ hai có 19 cách chọn. Tuy nhiên cách chọn hai phần tử a, b giống cách chọn hai phần tử b, a nên số cách chọn hai phần tử là

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

$\frac{20\cdot 19}{2}=190$ cách. Không gian mẫu Ω có 190 phần tử.

Một cách tổng quát, nếu tập hợp S có $n\geq 2$ phần tử thì sẽ có $\frac{n(n-1)}{2}$ cách chọn hai phần tử của S.

a) Gọi A là biến cố chọn được hai phần tử có tích là số lẻ.

Tích hai phần tử đó là số lẻ khi và chỉ khi cả hai phần tử đều là số lẻ. Có 10 số lẻ nên tương tự như trên, có $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ cách chọn hai phần tử đều là số lẻ. Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là 45.

Xác suất của biến cố A là $\frac{45}{190}=\frac{9}{38}$.

b) Gọi B là biến cố chọn được hai phần tử có tích là số chẵn.

Tích hai phần tử đó là số chẵn khi và chỉ khi hai phần tử được chọn ra có ít nhất một phần tử là số chẵn. Vì có 190 cách chọn hai phần tử tùy ý và 45 cách chọn hai phần tử đều là số lẻ nên có $190-45=145$ cách chọn hai phần tử trong đó có ít nhất một phần tử là số chẵn. Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là 145.

Xác suất của biến cố B là $\frac{145}{190}=\frac{29}{38}$.

Chú ý. Cũng có thể chia trường hợp: có đúng một số chẵn và cả hai số đều chẵn.

c) Gọi C là biến cố chọn được hai phần tử có tích chia hết cho 3.

Tích của hai phần tử chia hết cho 3 khi và chỉ khi trong hai phần tử đó có ít nhất một phần tử chia hết cho 3.

Vì có 14 phần tử không chia hết cho 3 nên có $\frac{14\cdot 13}{2}=91$ cách chọn hai phần tử không chia hết cho 3. Suy ra có $190-91=99$ cách chọn hai phần tử mà có ít nhất một phần tử chia hết cho 3. Số kết quả thuận lợi cho biến cố C là 99.

Xác suất của biến cố C là $\frac{99}{190}$.

d) Gọi D là biến cố chọn được hai phần tử có tích chia hết cho 6.

Ta đếm số cách chọn ra hai phần tử mà tích của chúng chia hết cho 6. Có ba khả năng:

+) Cả hai phần tử chia hết cho 6: vì có 3 số chia hết cho 6 nên có $\frac{3\cdot 2}{2}=3$ cách chọn hai phần tử đều chia hết cho 6.

+) Có đúng một phần tử chia hết cho 6: có 3 cách chọn ra một phần tử chia hết cho 6 và có 17 cách chọn ra phần tử còn lại không chia hết cho 6. Do đó trong trường hợp này có $3\cdot 17=51$ cách chọn.

+) Cả hai phần tử đều không chia hết cho 6 (phải loại đi các phần tử 6, 12, 18): thế thì phải có một phần tử chia hết cho 2 (có 7 cách chọn) và một phần tử chia hết cho 3 (có 3 cách chọn). Do đó trong trường hợp này có $7\cdot 3=21$ cách chọn.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố D là $3+51+21=75$.

Xác suất của biến cố D là $\frac{75}{190}=\frac{15}{38}$.

d) Gọi E là biến cố chọn được hai phần tử có tổng bình phương chia hết cho 3.

Ta có một kết quả quen thuộc trong số học là nếu $x, y\in\mathbb{Z}$ mà x^2+y^2 chia hết cho 3 thì x, y đều chia hết cho 3.

Như vậy để tổng bình phương hai phần tử chia hết cho 3 thì cả hai phần tử phải cùng chia hết cho 3. Có 6 phần tử chia hết cho 3 nên có $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ cách chọn ra hai phần tử đều chia hết cho 3. Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố E là 15.

Xác suất của biến cố E là $\frac{15}{190}=\frac{3}{38}$.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

f) Gọi F là biến cố chọn được hai phần tử mà phần tử này chia hết cho phần tử kia.

Trước hết, cho trước số nguyên dương n và với số nguyên dương $a \le n$ thì số bội của a trong tập hợp $S = \{1; 2; ...; n\}$ là $\left[\frac{n}{a}\right]$, trong đó $\left[\frac{n}{a}\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\frac{n}{a}$. Nếu không tính a thì số bội thực sự của a là $\left[\frac{n}{a}\right] - 1$.

Cho a chạy từ 1 tới 20 thì số bội thực sự của a tương ứng là 19, 9, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0,..., 0. Suy ra có $19+9+5+4+3+2+1+1+1+1=46$ cách chọn ra hai phần tử mà phần tử này chia hết cho phần tử kia. Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố F là 46.

Xác suất của biến cố F là $\frac{46}{190} = \frac{23}{95}$.

Ví dụ 2. Cho số nguyên dương $T = 300 \cdot 600 \cdot 900$. Liệt kê tất cả các ước dương của T, sau đó chọn ngẫu nhiên ra một ước. Tính xác suất để ước chọn được:

a) Là số chính phương.

b) Chia 4 dư 1.

Lời giải. Trước hết, phân tích số T ra thừa số nguyên tố ta được $T = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^6$.

Mỗi ước dương của T có dạng $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ trong đó $x, y, z \in \mathbb{N}$ và thỏa mãn $x \le 7, y \le 4, z \le 6$.

Mỗi cách chọn bộ (x, y, z) sẽ cho ta một ước dương.

Vì $x \in \{0; 1; ...; 7\}$, $y \in \{0; 1; ...; 4\}$, $z \in \{0; 1; ...; 6\}$ nên có 8 cách chọn x, 5 cách chọn y, 7 cách chọn z. Do đó T có $8 \cdot 5 \cdot 7 = 280$ ước dương.

Suy ra không gian mẫu có 280 phần tử.

Chú ý. Số ước dương của số $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ là $(x+1)(y+1)(z+1)$.

a) Ước chính phương của số T có dạng $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ với a, b, c là các số tự nhiên chẵn thỏa mãn $a \le 7, b \le 4, c \le 6$.

Tương tự như trên ta có 4 cách chọn a, 3 cách chọn b, 4 cách chọn c.

Suy ra có $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ ước chính phương.

Gọi A là biến cố chọn được ước chính phương.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là 48.

Xác suất của biến cố A là $\frac{48}{280} = \frac{6}{35}$.

b) Ước chia 4 dư 1 là ước lẻ nên có dạng $3^m \cdot 5^n$ với m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $m \le 4, n \le 6$.

Chú ý là $3^m \cdot 5^n \equiv (-1)^m \pmod 4$ nên để ước chia 4 dư 1 thì m chẵn còn n tùy ý.

Có 3 cách chọn m và 7 cách chọn n nên có $3 \cdot 7 = 21$ ước chia 4 dư 1.

Gọi B là biến cố chọn được ước dương chia 4 dư 1.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là 21.

Xác suất của biến cố B là $\frac{21}{280} = \frac{3}{40}$.

Ví dụ 3. Có ba cặp vợ chồng ngồi ngẫu nhiên vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 3 ghế. Tính xác suất để:

a) Mỗi cặp vợ chồng đều ngồi đối diện nhau.

b) Không có cặp vợ chồng nào ngồi đối diện nhau.

Lời giải. Xếp 6 người vào 6 chiếc ghế thì có $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ cách xếp.

Không gian mẫu có 720 phần tử.

a) Gọi A là biến cố mỗi cặp vợ chồng đều ngồi đối diện nhau.

Xếp cặp vợ chồng đầu tiên: có 3 vị trí chọn chỗ ngồi và có 2 cách đảo vị trí chồng-vợ nên có $3 \cdot 2 = 6$ cách.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Tương tự, xếp cặp vợ chồng thứ hai có $2 \cdot 2 = 4$ cách, xếp cặp vợ chồng thứ ba có $1 \cdot 2 = 2$ cách.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.

Xác suất của biến cố A là $\frac{48}{720} = \frac{1}{15}$.

b) Trước hết, ta đếm số cách sắp xếp ba cặp vợ chồng mà có ít nhất một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau. Lưu ý là nếu có hai cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau thì cặp còn lại cũng ngồi đối diện nhau. Điều này có nghĩa là chỉ có hai khả năng:

+) Mỗi cặp vợ chồng đều ngồi đối diện nhau: theo ý a) thì số cách sắp xếp là 48.

+) Có đúng một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau:

Chọn ra một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau có 3 cách chọn. Sắp xếp cặp vợ chồng này ngồi đối diện nhau có 6 cách xếp (theo ý a). Như vậy có $3 \cdot 6 = 18$ cách xếp một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau.

Hai cặp vợ chồng còn lại không cặp nào ngồi đối diện nhau. Ta đếm bằng cách loại trừ:

Xếp 4 người một cách tùy ý có $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ cách, loại đi các cách xếp mà có cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau (có 8 cách), tức là có $24 - 8 = 16$ cách xếp hai cặp vợ chồng còn lại mà không có cặp nào ngồi đối diện nhau.

Trong trường hợp này có $18 \cdot 16 = 288$ cách xếp.

Như vậy có $48 + 288 = 336$ cách xếp ba cặp vợ chồng mà có ít nhất một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau.

Suy ra có $720 - 336 = 384$ cách xếp ba cặp vợ chồng mà không có cặp vợ chồng nào ngồi đối diện nhau.

Gọi B là biến cố không có cặp vợ chồng nào ngồi đối diện nhau thì số kết quả thuận lợi cho biến cố B là 384.

Xác suất của biến cố B là $\frac{384}{720} = \frac{8}{15}$.

Chú ý. Khi một cặp vợ chồng ngồi đối diện nhau, ta có thể coi một cặp vợ chồng đấy là một người.

Ví dụ 4. Lúc đầu, An đứng ở ô số 1. An thực hiện liên tiếp bốn bước nhảy, mỗi bước sẽ nhảy ngẫu nhiên vào một ô trống trong ba ô còn lại. Hãy tính xác suất để sau bốn bước nhảy, An sẽ trở lại ô số 1.

1	2
3	4

Lời giải. Mỗi bước An có 3 lựa chọn nhảy nên số cách nhảy của bốn bước là $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ cách.

Không gian mẫu có 81 phần tử.

Gọi A là biến cố mà sau bốn bước nhảy, An đứng ở ô số 1.

Xét dãy các ô mà An nhảy trong bốn bước như sau: $1 \to A \to B \to C \to 1$.

Chú ý là hai ô A, C khác ô 1. Xét hai khả năng:

+) B là ô 1: có 3 cách chọn ô A và 3 cách chọn ô C nên trong trường hợp này có $3 \cdot 3 = 9$ cách nhảy.

+) B khác ô 1: có 3 cách chọn ô A, 2 cách chọn ô B và 2 cách chọn ô C nên trong trường hợp này có $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ cách nhảy.

Như vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $9 + 12 = 21$.

Xác suất của biến cố A là $\frac{21}{81} = \frac{7}{27}$.

Ví dụ 5. Điền ngẫu nhiên vào mỗi ô vuông của bảng 3×3 một trong ba số $-1, 0, 1$. Tính xác suất để:

a) Tổng các số được điền trong mỗi hàng đều bằng 0.

b) Tổng các số được điền trong mỗi hàng và trong mỗi cột đều bằng 0.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Mỗi ô vuông có một trong ba cách điền nên số phần tử của không gian mẫu là 3^9.

a) Để tổng các số được điền trong mỗi hàng đều bằng 0 thì mỗi hàng chứa ba số $-1, 0, 1$ hoặc hàng đó chứa toàn số 0.

Số cách điền ba số $-1, 0, 1$ này vào ba ô trên một hàng là $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Số cách điền ba số 0 vào ba ô trên một hàng là 1. Vì thế có 7 cách điền các số vào một hàng sao cho tổng các số ở hàng đó bằng 0.

Suy ra có $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ cách điền các số vào bảng để tổng các số ở mỗi hàng đều bằng 0.

Xác suất cần tìm là $\frac{7^3}{3^9} \approx 1{,}74\%$.

b) Tương tự như trên thì mỗi hàng chứa ba số $-1, 0, 1$ hoặc chứa toàn số 0 và mỗi cột cũng chỉ chứa ba số $-1, 0, 1$ hoặc chứa toàn số 0.

+) Nếu không có hàng nào chứa toàn số 0 thì với mỗi cách điền số ở hàng đầu tiên, có đúng hai cách điền số ở hàng thứ hai và một cách điền số ở hàng thứ ba. Do đó số cách điền số để tổng mỗi hàng và mỗi cột đều bằng 0 là $6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

+) Nếu có đúng một hàng chứa toàn số 0, giả sử là hàng đầu tiên thì với mỗi cách điền số ở hàng thứ hai có đúng một cách điền số ở hàng thứ ba. Số cách điền trong trường hợp này là $6 \cdot 3 = 18$.

+ Nếu có hai hàng chứa toàn số 0 thì toàn bộ bảng là 0. Số cách điền trong trường hợp này là 1.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{12 + 18 + 1}{3^9} \approx 0{,}157\%$.

3. Bài tập vận dụng

Bài 1. Có ba cặp vợ chồng ngồi ngẫu nhiên vào một dãy 6 ghế hàng ngang. Tính xác suất để:

a) Mỗi cặp vợ chồng đều ngồi cạnh nhau.

b) Có đúng hai cặp vợ chồng mà chồng ngồi cạnh vợ.

c) Không có cặp vợ chồng nào mà chồng ngồi cạnh vợ.

Bài 2. Điền ngẫu nhiên vào mỗi ô vuông của bảng 3×3 một trong ba số $-1, 0, 1$. Tính xác suất để tổng các số được điền trong mỗi hàng, trong mỗi cột và trong mỗi đường chéo chính đều bằng 0.

Bài 3. Ba bạn Phúc, Lộc, Thọ lần lượt viết lên bảng các số tự nhiên từ 1 tới 9 sao cho số người sau viết không trùng với số người trước viết. Tính xác suất để số bạn Phúc viết chia hết cho số bạn Lộc viết và số bạn Lộc viết chia hết cho số bạn Phúc viết.

Bài 4. Một robot di chuyển trên một bảng 7 ô vuông được đánh số từ 1 đến 7.

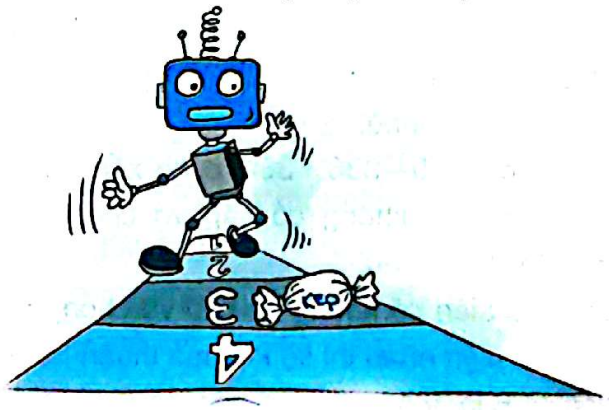
1	2	3	4	5	6	7

Ban đầu robot đứng ở ô số 4. Mỗi bước, nó có thể nhảy sang trái hoặc sang phải, mỗi hướng có xác suất bằng nhau và mỗi lần nhảy chỉ di chuyển đúng một ô. Tại ô số 1 và ô số 7 có đặt kẹo và khi robot đến một trong hai ô này, nó lấy kẹo và dừng lại. Tính xác suất để robot lấy kẹo sau đúng 3 bước.

Bài 5. Tô màu mỗi đỉnh của hình vuông ABCD bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Tính xác suất để không có hai đỉnh kề nhau nào được tô cùng màu.

Bài 6. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh của một đa giác đều 12 đỉnh. Tính xác suất để ba đỉnh đó là ba đỉnh của một tam giác:

a) vuông; b) tù; c) nhọn; d) cân; e) đều.



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



PHẢI CHĂNG MỘT ĐÁP SỐ ĐẸP?

HUỲNH THANH TÂM *(Phường Bình Định, Gia Lai)*

Bài toán. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 - xy - x + y + 2026$.

Lời giải. Ta có

$$A = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 2y + 2) + 2025$$

$$A = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2\right] + 2025 \geq 2025.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 2025.

Nếu lời giải trên là đúng thì quả thật đây là một bài toán cho đáp số đẹp! Bạn có nghĩ như vậy không?

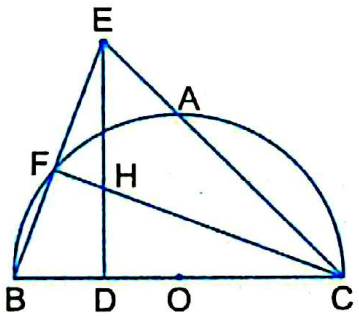
Kết quả **(TTT2 số 269+279)**

ĐÃ LÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CHƯA?

Phân tích. Lời giải đã mắc sai lầm khi so sánh biểu thức $HF \cdot HC$ với đại lượng biến thiên $\frac{DE^2}{4}$ mà không phải với một hằng số. Sai lầm này thường hay mắc phải khi giải toán cực trị.

Lời giải hoàn chỉnh.

Dễ thấy $\Delta EDB = \Delta CDH$ (g.c.g) nên $DB = DH$.



Đặt $BC = x$, $DB = DH = y$, ta có

$HE = DE - DH = DC - DH = (x - y) - y = x - 2y$.

Các tam giác EFH và CDH đồng dạng nên

$$HF \cdot HC = HD \cdot HE = y(x - 2y) = \frac{2y(x-2y)}{2}$$

$$\leq \frac{(2y + x - 2y)^2}{8} = \frac{x^2}{8} = \frac{BC^2}{8}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2y = x - 2y$ hay $y = \frac{x}{4}$, suy ra $BD = \frac{BC}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $HF \cdot HC$ là $\frac{BC^2}{8}$ khi điểm D cách điểm B một đoạn bằng $\frac{BC}{4}$.

HONG HA'

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng, được thưởng kì này: *Lê Quang Huy*, 9A1, THCS Nguyễn Hiền, Nam Ninh, **Ninh Bình**; *Hoàng Lê Anh Tuấn*, 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

VI MẠNH TƯỜNG



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



CHUYỆN Ở CHUNG CƯ YÊN BÌNH



NGUYỄN NHƯ MAI *(Hà Nội)*

Chuyện xảy ra ở chung cư Yên Bình. Chung cư Yên Bình có bảy tòa nhà cao tầng. Mang tên Yên Bình đúng là yên bình, việc bảo vệ rất là chu đáo. Ấy thế mà chiều hôm ấy tại tòa nhà A3 lại xảy ra một vụ mất trộm.

Cô Hòa, chủ căn hộ số 6 tầng 21 hôm ấy đi sang hàng xóm trò chuyện với bạn. Nhân lúc con gái đi học chưa về. Rảnh rang, cô chỉ định đi một lúc rồi về nên chủ quan không đóng khóa cửa, mà cứ để hé cửa. Lúc cô quay về thì thấy một kẻ lạ mặt vừa chạy ra.

Cô Hòa ú ớ kêu và đuổi theo không kịp. Một bạn học sinh ở phòng bên cạnh, nhanh tay bấm điện thoại gọi chú Cường bảo vệ trực ở dưới sảnh. Chú Cường phát chuông cảnh báo cư dân toàn tòa nhà A3.

Tên trộm cũng nghe thấy chuông báo động. Hắn rất khôn ngoan và xảo quyệt, biết lúc này xuống ngay tầng 1 chắc chắn sẽ bị đón lõng.

Đang ở trong cầu thang, hắn bấm dừng tạm ở một tầng bất kì, rồi sẽ tính sau.

Tại tầng 10, anh Hoài nghe báo động, ngó ra thấy hai người đàn ông bước ra từ hai cửa thang máy A và B. Anh Hoài trở thành nhân chứng xác nhận ai là kẻ tình nghi chuẩn bị tẩu thoát.

Theo suy đoán của bạn: Kẻ tình nghi ấy là ai?

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Kết quả (TTT2 số 267)

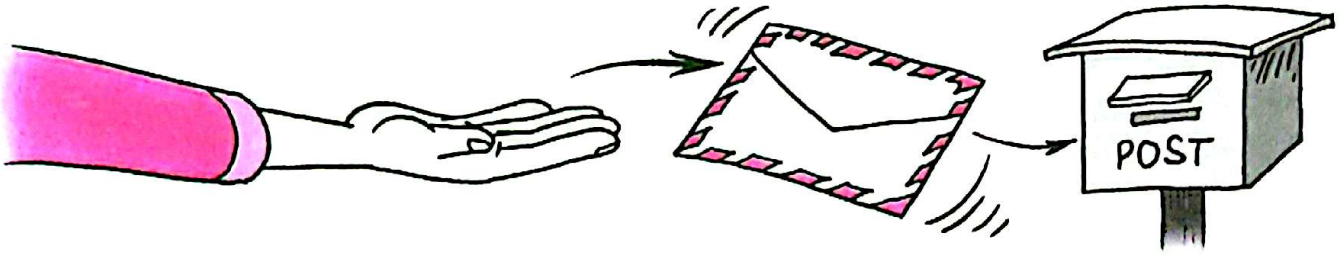
TRUY TÌM CỔ VẬT

Anh Hải đã biết Lan là người đã trót lấy tiền vì Lan là người xuống xe cuối và trong cuộc trò chuyện, Hoa chưa hề nhắc đến số tiền bị mất nhưng Lan lại biết đó là hai trăm nghìn. Điều này cho thấy anh Hải là người thông minh, tinh tế. Nhờ anh mà tình bạn của bốn bạn nhỏ vẫn gắn kết như trước.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau có lập luận tốt, được thưởng kì này: *Trần Minh Đức*, 6A6, THCS Yên Lạc, Tam Hồng, **Phú Thọ**; *Nguyễn Hoàng Bảo Quyên*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Bùi Đoàn Yên Nhi*, 9A1, THCS Nguyễn Hiền, Nam Ninh, **Ninh Bình**; *Nguyễn Khánh Ngọc*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Trường Vinh, **Nghệ An**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 7A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Thám Tử Sê-Lốc-Cốc



CÁCH GỬI BÀI ĐẾN TOÁN TUỔI THƠ

1. Bài gửi đăng

- Bài viết đã gửi đến Toán Tuổi thơ thì không được gửi đến báo hay tạp chí khác.
- Nếu bài trích hoặc sưu tầm ở tài liệu khác thì phải ghi rõ nguồn gốc tài liệu. Nếu bài dịch ở tài liệu nào thì cần gửi kèm bản gốc.
- Bài viết có đủ và chính xác các thông tin: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại, số tài khoản ngân hàng (nếu có) để tòa soạn tiện liên lạc và gửi nhuận bút.

2. Bài giải của học sinh

- Mỗi chuyên mục hay mỗi bài "Thi giải toán qua thư": giải vào một tờ giấy, phía trên cùng có ghi rõ họ tên, địa chỉ rõ ràng, chính xác (lớp, trường, huyện quận, tỉnh thành).
- Chuyên mục "Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ": giải liền 5 bài, có thể giải bằng tiếng Anh hoặc tiếng Việt.

3. Hình thức gửi bài

- Bài gửi đăng nên gửi kèm file vào email: bbttoantuoitho@gmail.com hoặc gửi bản in qua đường bưu điện.
- Bài giải của học sinh gửi về tòa soạn theo địa chỉ: **Tạp chí Toán Tuổi thơ, Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, P. Cát Linh, Q. Đống Đa, Hà Nội.**

4. Thời hạn gửi bài

Thời hạn gửi bài là 1 tháng kể từ ngày phát hành. Do đó các bạn không nhất thiết phải chuyển phát nhanh mà chỉ cần gửi thường hoặc gửi bảo đảm.

TTT

Được quét bằng CamScanner

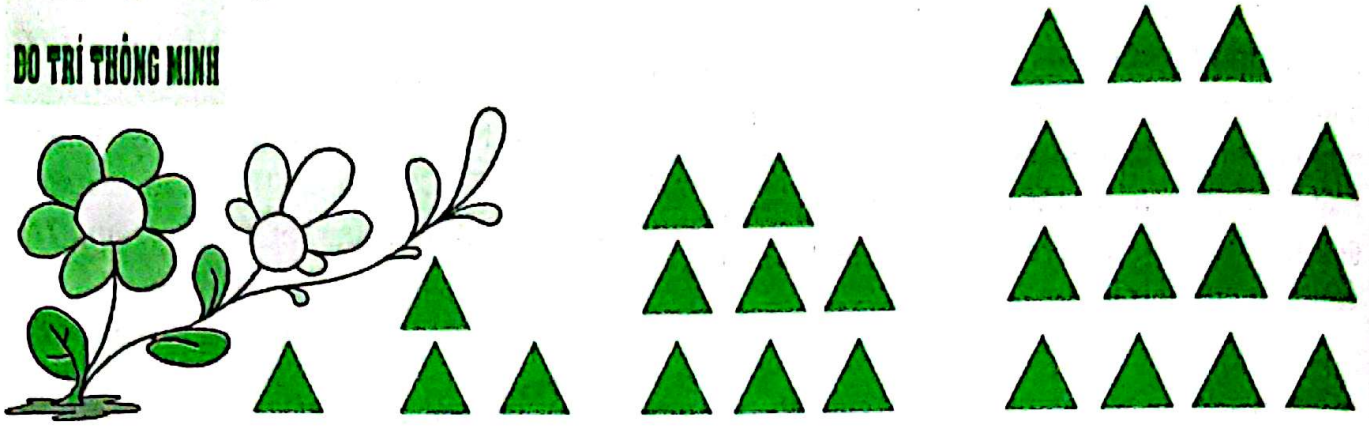
Được quét bằng CamScanner



ĐỒ THỊ THÔNG MINH

Kì này CÓ BAO NHIÊU TAM GIÁC?

Dựa vào quy luật cho bởi các hình dưới đây, hỏi hình thứ 6 có bao nhiêu tam giác?

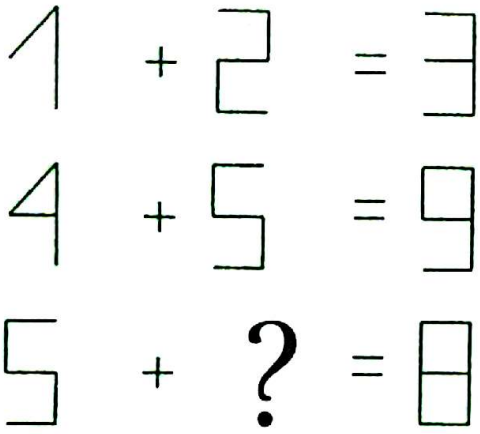


Hình 1 *Hình 2* *Hình 3* *Hình 4*

MINH HẢI *(Hưng Yên)*

Kết quả THAY BỞI HÌNH NÀO? (TTT2 số 269+270)

Mỗi kí hiệu biểu thị số hạng của phép tính cộng là một hình có đường thẳng đối xứng theo phương thẳng đứng. Khi ta loại bỏ phần bên phải của mỗi kí hiệu đối với đường thẳng này thì phần còn lại của mỗi kí hiệu có hình dạng là một chữ số.



Do đó dấu ? thay bởi hình B.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau chỉ ra đúng quy luật, được thưởng kì này: *Nguyễn Nam Phong*, 6A4, *Đào Thuận Hải*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Quang Đăng*, 8A1, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, **Phú Thọ**; *Chu Ngọc Khánh Hà*, 9A1, THCS Nguyễn Hiền, Nam Ninh, **Ninh Bình**; *Bùi Thị Mai Linh*, 8A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

TRẦN THỊ THẢO



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



COMPA VUI... TÍNH

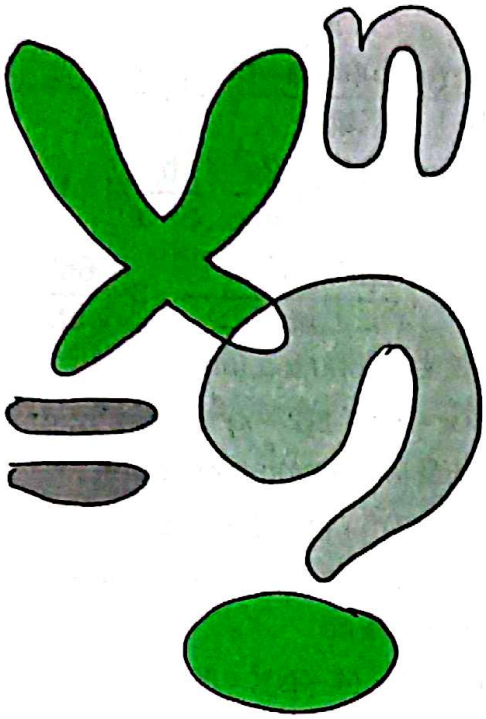
Kì này ĐA GIÁC ĐỀU 2025 CẠNH

Bài toán. Trong đa giác đều 2025 cạnh ta chọn ra 811 đỉnh. Hãy chứng tỏ rằng có ba đỉnh trong các đỉnh đã chọn là ba đỉnh của một tam giác cân.

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Nhận xét. Một số bạn mắc sai lầm là từ $x^n > 2026^n$ suy ra $x > 2026$. Điều này là không hoàn toàn đúng vì khi n là số nguyên dương chẵn thì x cũng có thể là số âm. Các bạn sau có lời giải tốt: *Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Lưu Khánh Nhật, Nguyễn Khánh Ngọc*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, phường Trường Vinh, **Nghệ An**.

QUANG ANH





Kết quả (TTT2 số 269+270)

CÓ LÀ SỐ NGUYÊN KHÔNG?

Lời giải. Từ $x^n = 2025^n + 2026^n$ suy ra $x^n > 2026^n$.

Ta cũng có $n > 2025$ và $2026^{n-1} > 2025^{n-1}$ nên $n \cdot 2026^{n-1} > 2025^n$.

Từ đó ta có $2027^n = (2026+1)^n$

$= 2026^n + n \cdot 2026^{n-1} + \ldots + n \cdot 2026 + 1$

$> 2026^n + 2025^n = x^n$.

Vậy $2026^n < x^n < 2027^n$, suy ra $2026 < |x| < 2027$ nên x không là số nguyên.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



GIẢI TOÁN THẾ NÀO?

XOAY QUANH MỘT GIẢ THIẾT ĐẸP

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

Trường THCS Trần Duy Hưng, Hà Nội

Trong quá trình làm toán, chắc hẳn các bạn từng gặp những giả thiết có dạng như $x+y+z=3$, $ab+bc+ca=1$,... Đó là những gợi ý quan trọng giúp ta xử lí những câu hỏi của bài toán. Trong bài viết này, tác giả sẽ xuất phát với một giả thiết cơ bản là $x+y+z=0$ và các kết quả tương ứng giúp bạn đọc có cái nhìn sâu hơn về chúng.

+ *Kết quả 1*: $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

+ *Kết quả 2*: $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2$.

Việc chứng minh các kết quả xin dành cho bạn đọc. Sau đây xin đi vào một số bài toán áp dụng.

Bài toán 1. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $2ab+bc+2ca=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{bc}{8a^2}+\dfrac{ca}{b^2}+\dfrac{ab}{c^2}$.

(Thi tuyển sinh vào THPT chuyên Lam Sơn, năm 2020).

Lời giải. Với $2ab+bc+2ca=0$, theo kết quả 1 ta có

$$A=\frac{bc}{8a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=\frac{(2ab)^3+(bc)^3+(2ca)^3}{8(abc)^2}$$

$$=\frac{3(2ab)(bc)(2ca)}{8(abc)^2}=\frac{3}{2}.$$

Bài toán 2. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau và khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right).$$

Lời giải. Gọi $M=\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}$, ta có

$$\frac{c}{a-b}M=1+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)$$

$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}$$

$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(a-b)(c-a-b)}{ab}=1+\frac{2c^2}{ab}=1+\frac{2c^3}{abc}.$$

Tương tự, $\dfrac{a}{b-c}M=1+\dfrac{2a^3}{abc}$, $\dfrac{b}{c-a}M=1+\dfrac{2b^3}{abc}$.

Do đó $Q=3+\dfrac{2(a^3+b^3+c^2)}{abc}=3+\dfrac{6abc}{abc}=9$.

Bài toán 3. Giải phương trình

$$(x-1)^3+(x-3)^3+8(2-x)^3=0.$$

Lời giải. Viết lại phương trình thành

$$(x-1)^3+(x-3)^3+(4-2x)^3=0.$$

Nhận thấy rằng $(x-1)+(x-3)+(4-2x)=0$, theo kết quả 1 ta có

$$(x-1)^3+(x-3)^3+(4-2x)^3=3(x-1)(x-3)(4-2x).$$

Do đó $3(x-1)(x-3)(4-2x)=0$.

Từ đó ta tìm được $x=1$, $x=2$, $x=3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;2;3\}$.

Nhận xét. Dựa theo ý tưởng bài toán trên, ta có thể xây dựng các bài tương tự sau: Giải các phương trình

$$(x^2+x+1)^3+(2-x-2x^2)^3+(x^2-3)^3=0.$$

$$(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3).$$

Bài toán 4. Với a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau, chứng minh $\sqrt{\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}}$ là một số hữu tỉ.

Lời giải. Đặt $x=a-b$, $y=b-c=y$, $z=c-a$ thì $x+y+z=0$, theo kết quả 2 ta có

CS Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|.$$

Do a, b, c là các số hữu tỉ nên $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\in\mathbb{Q}$

Từ đó $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ là một số hữu tỉ.

Bài toán 5. Rút gọn biểu thức

$$A=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}$$
$$+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}.$$

Hướng dẫn. Để ý rằng

$1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{(-k)^2}$ có

$1+(k-1)+(-k)=0$, theo kết quả 2 ta có

$$1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}=\left(1+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{-k}\right)^2$$

hay $\sqrt{1+\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{1}{k^2}}=1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

Thay lần lượt $k=3, 4, 5, \ldots, n$ vào đẳng thức trên rồi cộng theo vế ta thu được dạng rút gọn của biểu thức A.

Bài toán 6. Rút gọn biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}}+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}$$

với x, y là các số thực khác 0.

Hướng dẫn. Để ý rằng $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$

$$=\frac{1}{(x^2)^2}+\frac{1}{(y^2)^2}+\frac{1}{\left[-(x^2+y^2)\right]^2}$$

có $x^2+y^2+\left[-(x^2+y^2)\right]=0$, theo kết quả 2 ta có

$$\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{-x^2-y^2}\right)^2$$

hay

$$\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}=\left|\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right|$$
$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Từ đó thay lại vào biểu thức và áp dụng kết quả 2 lần nữa để thu gọn biểu thức P.

Bài toán 7. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(Thi tuyển sinh vào THPT chuyên Sư phạm, năm 2015).

Lời giải. Đặt $m=\frac{a}{x}, n=\frac{b}{y}, p=\frac{c}{z}$ thì giả thiết $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ trở thành $m+n+p=0$.

Theo kết quả 2 ta có

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)^2$$
$$=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1^2=1.$$

Bài toán 8. Cho các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Chứng minh rằng $\frac{(b+c)^2}{a^4}+\frac{(c+a)^2}{b^4}+\frac{(a+b)^2}{c^4}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Lời giải. Do $\frac{(b+c)^2}{a^4}=\left(\frac{b+c}{a^2}\right)^2$ nên để xuất hiện biểu thức $\frac{a^2}{b+c}$, ta nhân hai vế của giả thiết với $a+b+c$. Ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=a+b+c$$

hay

$$\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c=a+b+c$$

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

hay $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$

Đặt $x=\frac{a^2}{b+c}$, $y=\frac{b^2}{c+a}$, $z=\frac{c^2}{a+b}$ thì $x+y+z=0$, theo kết quả 2 ta có

$$\frac{(b+c)^2}{a^4}+\frac{(c+a)^2}{b^4}+\frac{(a+b)^2}{c^4}$$

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2.$$

Vậy biểu thức $\frac{(b+c)^2}{a^4}+\frac{(c+a)^2}{b^4}+\frac{(a+b)^2}{c^4}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Nhận xét. Với ý tưởng như trên, ta có bài toán với cấu trúc tương tự như sau: Cho a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{(b+c)^3}+\frac{b^6}{(c+a)^3}+\frac{c^6}{(a+b)^3}=\frac{3(abc)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Bài toán 9. Cho các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=2$. Chứng minh rằng biểu thức $\frac{a^3}{(b+c)^6}+\frac{b^3}{(c+a)^6}+\frac{c^3}{(a+b)^6}-\frac{3abc}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$ là lập phương của một số hữu tỉ.

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)=2(a+b+c)$$

hay $\frac{(b+c)^2}{a}+\frac{(c+a)^2}{b}+\frac{(a+b)^2}{c}=0.$

Đặt $x=\frac{a}{(b+c)^2}$, $y=\frac{b}{(c+a)^2}$, $z=\frac{c}{(a+b)^2}$ thì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, suy ra $xy+yz+zx=0$.

Ta có $\frac{a^3}{(b+c)^6}+\frac{b^3}{(c+a)^6}+\frac{c^3}{(a+b)^6}-\frac{3abc}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]$$

$=(x+y+z)(x+y+z)^2=(x+y+z)^3$ là lập phương của một số hữu tỉ.

Xoay quanh giả thiết này, chắc chắn sẽ còn nhiều kết quả thú vị, bạn đọc có thể tìm hiểu và nghiên cứu thêm. Để kết thúc bài viết, tác giả đưa ra một số bài để bạn đọc luyện tập.

Bài 1. Với a, b, c là các số thực thuộc đôi một khác nhau thuộc đoạn $[0;2]$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}.$$

Bài 2. Giải phương trình

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(3x-2)^2}+\frac{1}{(3-4x)^2}=1.$$

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x+y+z=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q=\frac{x^4}{x^4-(y^2-z^2)^2}+\frac{y^4}{y^4-(z^2-x^2)^2}$$

$$+\frac{z^4}{z^4-(x^2-y^2)^2}.$$

Bài 4. Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ chia hết cho 18.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}.$$

Bài 6. Cho các số nguyên a,b,c thỏa mãn $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a+b+c)$. Chứng minh rằng $a+b+c$ chia hết cho 27.

Bài 7. Cho các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=2$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{(b+c)^4}+\frac{b^2}{(c+a)^4}+\frac{c^2}{(a+b)^4}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



GIẢI TOÁN THẾ NÀO?

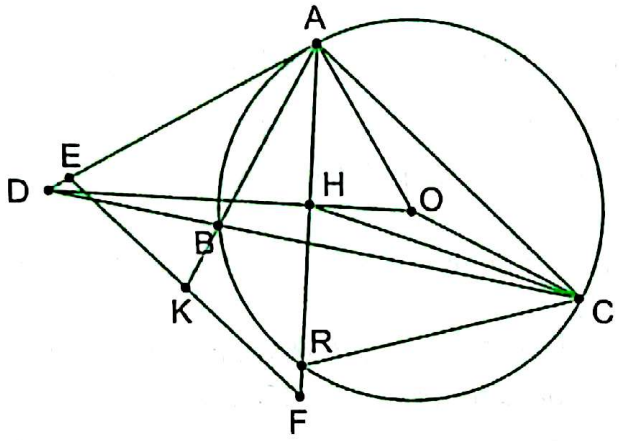
MỞ RỘNG MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG KÌ THI VÀO LỚP 10 THPT, NĂM 2025

NGUYỄN VIẾT CHƯƠNG *(Hà Tĩnh)*

Trong kì thi tuyển sinh năm 2025, có rất nhiều bài toán hay với những ý tưởng đẹp. Bài viết này tác giả xin tổng hợp lại một số bài toán và hướng mở rộng cho các bài toán đó.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại D. Từ điểm E trên AD kẻ đường thẳng song song với AC, đường thẳng này cắt đường thẳng qua A và vuông góc với OD tại F. Chứng minh rằng đường thẳng AB đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

Lời giải. Gọi H, R theo thứ tự là giao điểm của AF với OD và đường tròn (O), K là giao điểm của AB với EF.



Ta có $OH \cdot OD = OA^2 = OC^2$, suy ra các tam giác OHC và OCD đồng dạng nên $\widehat{OHC} = \widehat{OCD}$.

Từ đó ta có $\widehat{HAC} + \widehat{HCA} = \widehat{RHC} = 90^\circ - \widehat{OHC}$

$= 90^\circ - \widehat{OCD} = 90^\circ - \dfrac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$

$= \widehat{BAC} = \widehat{BAH} + \widehat{HAC}$, suy ra $\widehat{HCA} = \widehat{BAH}$. Kết hợp với $\widehat{HAC} = \widehat{AFK}$ (do EF // AC), suy ra các tam giác HAC và KFA đồng dạng nên $\dfrac{HA}{KF} = \dfrac{AC}{FA}$. (1)

Lại do các tam giác ACR và FAE đồng dạng nên $\dfrac{AC}{FA} = \dfrac{AR}{FE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{HA}{KF} = \dfrac{AR}{FE} = \dfrac{2HA}{FE}$, suy ra FE = 2KF, dẫn đến KE = KF.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là khai thác yếu tố tiếp tuyến và song song để nhận ra hai cặp tam giác đồng dạng, từ đó liên hệ tỉ số AR: AH = 2 : 1. Việc chứng minh trung điểm trở nên tự nhiên nhờ cấu trúc đồng dạng này.

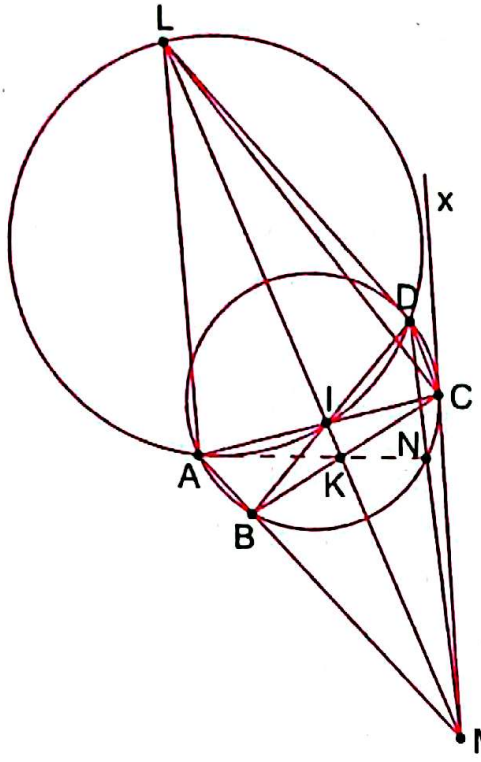


Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Bài toán 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt đường thẳng AB tại điểm M. Đường thẳng MD cắt đường tròn (O) tại điểm N (N khác D). Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng AN, BC, IM đồng quy.

Lời giải. Gọi K, L theo thứ tự là giao điểm của IM với BC và đường tròn (AID). Ta đi chứng minh ba điểm A, K, N thẳng hàng.



Ta có $\widehat{ALK} = \widehat{ALI} = \widehat{ADI} = \widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{ACK}$, suy ra tứ giác ALCK nội tiếp nên $\widehat{KAC} = \widehat{KLC}$. (1)

Lại có $\widehat{MLD} = \widehat{ILD} = \widehat{IAD} = \widehat{CAD} = \widehat{DCx}$, suy ra tứ giác MLDC nội tiếp nên

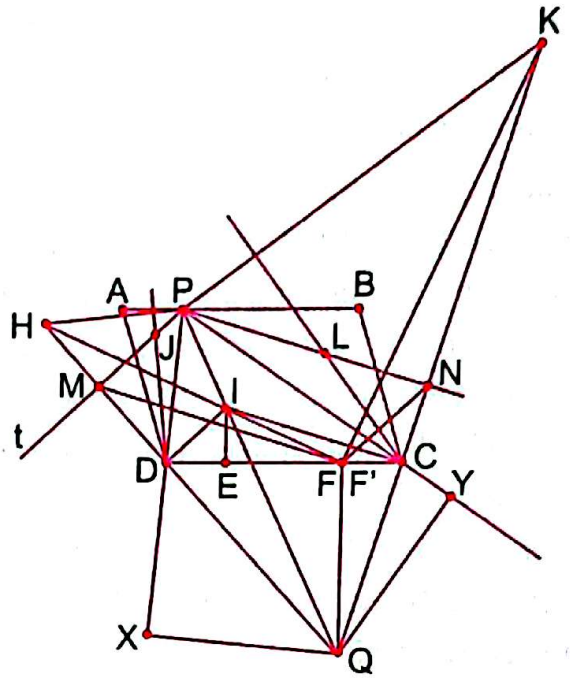
$\widehat{MLC} = \widehat{MDC} = \widehat{NDC} = \widehat{NAC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KAC} = \widehat{NAC}$ nên tia AK trùng với tia AN, tức ba điểm A, K, N thẳng hàng.

Nhận xét. Điểm mở đầu quan trọng là tìm ra hai tứ giác nội tiếp ALCK và MLDC. Khai thác các góc bằng nhau trong hai tứ giác này giúp chứng minh ba điểm A, K, N thẳng hàng - một ý tưởng quen thuộc kiểu Pascan rút gọn.

Bài toán 3. Cho hình bình hành ABCD có điểm P thuộc cạnh AB (P khác A và B). Gọi J, L theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PAD và PBC. Gọi H, K theo thứ tự là trực tâm của các tam giác PJD và PLC. Đường tròn nội tiếp của tam giác PCD tiếp xúc với CD tại E. Lấy điểm F thuộc đoạn CD sao cho CF = DE. Chứng minh rằng tam giác HFK vuông tại F.

Lời giải. Ta kí hiệu các điểm như hình vẽ.



Ta có $\widehat{MPD} = \frac{1}{2}\widehat{APD} = \frac{1}{2}\widehat{PDC} = \widehat{PDI}$, suy ra MP // DI, kéo theo DI ⊥ DH.

Tương tự ta cũng có CI ⊥ CK.

Gọi Q là giao điểm của DH và CK thì Q là tâm đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PCD.

Gọi X, Y, F' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của Q trên PD, PC, CD, khi đó ta có

$CF' = CY = PY - PC = PX - PC = PD + DF' - PC$
$= PD + CD - CF' - PC.$

Suy ra $CF' = \frac{PD + CD - PC}{2} = DE = CF$ nên F' ≡ F.

Các tam giác DFQ và DMP đồng dạng nên $\frac{DF}{DM} = \frac{DQ}{DP}$, kết hợp với $\widehat{MDF} = \widehat{PDQ}$ suy ra

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

các tam giác MDF và PDQ đồng dạng, dẫn đến $\widehat{DMF} = \widehat{DPQ} = \frac{1}{2}\widehat{DPC}$.

Tương tự ta cũng có $\widehat{CNF} = \frac{1}{2}\widehat{DPC}$.

Do đó $\widehat{DMF} = \widehat{CNF}$, kéo theo $\widehat{HMF} = \widehat{KNF}$. (1)

Các tam giác MDF và PDQ đồng dạng nên $\widehat{DFM} = \widehat{DQP}$.

Tứ giác DICQ nội tiếp nên $\widehat{DQP} = \widehat{DCI}$.

Do đó $\widehat{DFM} = \widehat{DCI}$, suy ra MF // IC // PN.

Tương tự thì NF // PM.

Từ đó suy ra tứ giác MPNF là hình bình hành nên PN = MF, MP = FN.

Lại có $\widehat{PKN} = \widehat{LPC} + \widehat{LCP} = \frac{1}{2}\widehat{BPC} + \frac{1}{2}\widehat{BCP}$

$= \frac{1}{2}\widehat{BCD} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{ADC}) = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ADC}$

$= 90^\circ - \widehat{JDI} = \widehat{JPH}$, suy ra các tam giác HMP và PNK đồng dạng nên $\frac{HM}{PN} = \frac{MP}{NK}$ hay

$\frac{HM}{MF} = \frac{FN}{NK}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra các tam giác HMF và FNK đồng dạng nên $\widehat{MHF} = \widehat{NFK}$.

Từ đó ta có $\widehat{HFK} = \widehat{MFN} - \widehat{MFH} - \widehat{NFK}$

$= \widehat{MPN} - \widehat{MFH} - \widehat{MHF} = \widehat{tMF} - \widehat{DMF} = \widehat{tMD} = 90^\circ$.

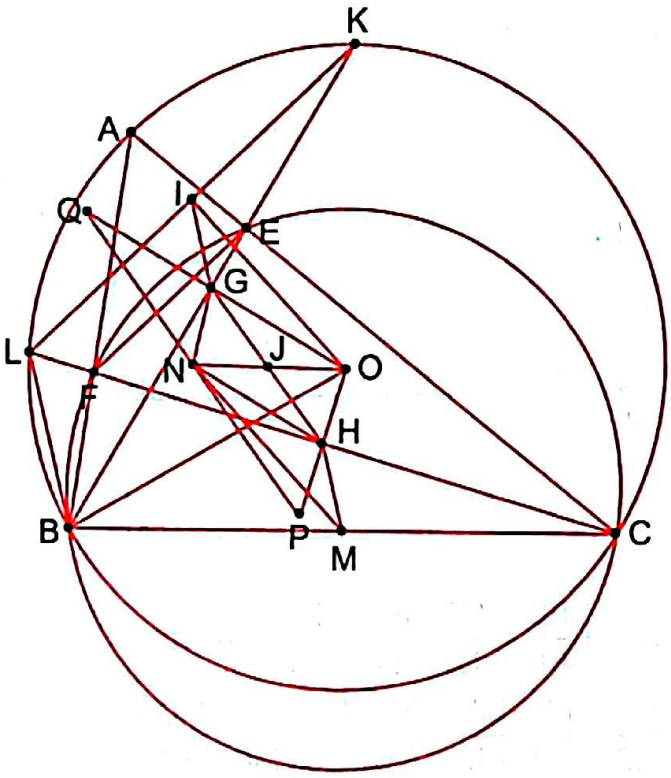
Điều đó có nghĩa là tam giác HFK vuông tại F.

Nhận xét. Cách nhìn quyết định là nhận ra Q là tâm đường tròn bàng tiếp và F là hình chiếu của Q trên BC.

Từ đó suy ra MPNF là hình bình hành và các tam giác HMF, FNK đồng dạng, dẫn đến vuông góc tại F.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (J) bất kì đi qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Gọi P, Q theo thứ tự là các điểm đối xứng với O qua CF, BE. Các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, PQ. Chứng minh rằng MN vuông góc với EF.

Lời giải. Gọi G là giao điểm của OQ và BE, H là giao điểm của OP và CF; K, L theo thứ tự là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với BE, CF; I là trung điểm của KL, J là trung điểm của GH.



Ta có $IG = \frac{1}{2}LB = HM$ và IG // LB // HM nên tứ giác IGMH là hình bình hành, suy ra J là trung điểm của IM.

Tứ giác GNHO là hình bình hành nên J là trung điểm của ON.

Từ đó suy ra tứ giác INMO cũng là hình bình hành, do đó MN // OI. (1)

Mặt khác, $\widehat{EFC} = \widehat{EBC} = \widehat{KBC} = \widehat{KLC}$ nên KL // EF.

Chú ý rằng OI ⊥ KL nên OI ⊥ EF. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN vuông góc với EF.

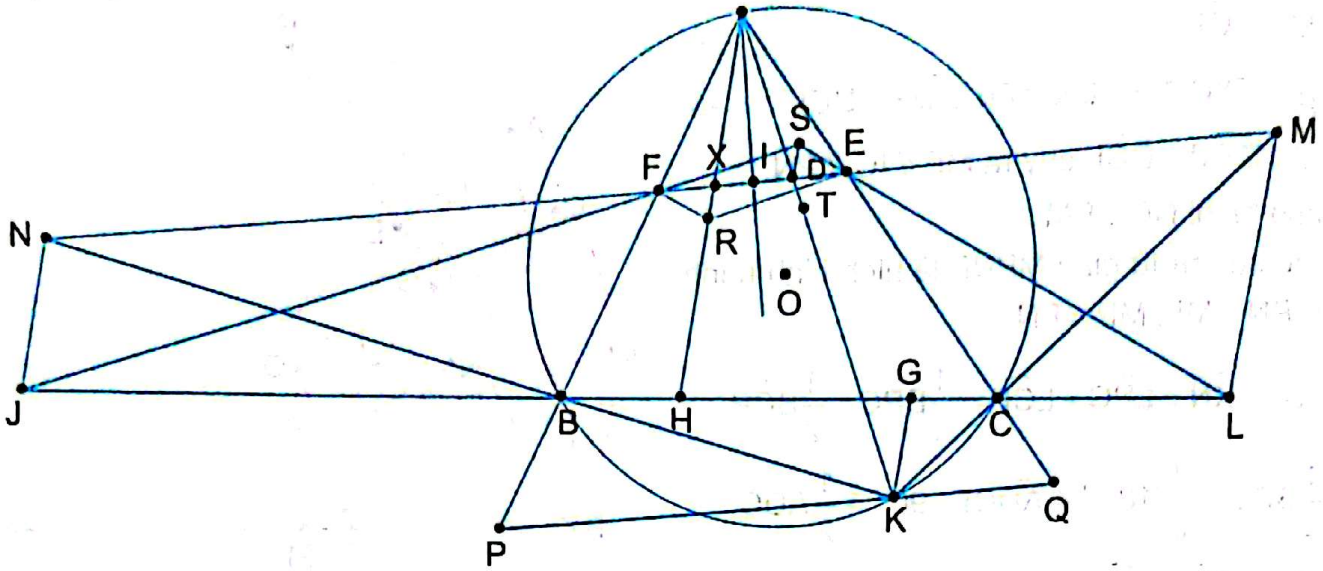
Nhận xét. Bài toán dựa trên việc phát hiện các trung điểm để dựng nên chuỗi các hình bình hành. Từ các quan hệ song song MN// OI và vuông góc OI ⊥ EF, suy ra MN ⊥ EF một kết quả hình học gọn gàng.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O). Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho AE = AF. Lấy điểm H trên cạnh BC và điểm K trên cung BC không chứa A sao cho $\widehat{BAH} = \widehat{CAK}$. KB, KC cắt EF theo thứ tự tại N, M. Các điểm J, L thuộc BC sao cho NJ // AH // ML. Gọi S là giao điểm của JF và LE, T là điểm đối xứng với S qua EF. Chứng minh ba điểm A, T, K thẳng hàng.

Lời giải. Kẻ SD và KG song song với AH (D thuộc EF, G thuộc BC). Qua K, kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB, AC theo thứ tự tại P, Q.



Ta có $\frac{FD}{FN} = \frac{SD}{NJ}, \frac{ED}{EM} = \frac{SD}{ML}$, suy ra

$$\frac{FD}{ED} = \frac{FN}{NJ}\cdot\frac{ML}{EM} = \frac{FN}{NB}\cdot\frac{NB}{NJ}\cdot\frac{ML}{MC}\cdot\frac{MC}{EM}$$

$$= \frac{PK}{KB}\cdot\frac{KB}{KG}\cdot\frac{KG}{KC}\cdot\frac{KC}{KQ} = \frac{PK}{KQ}.$$

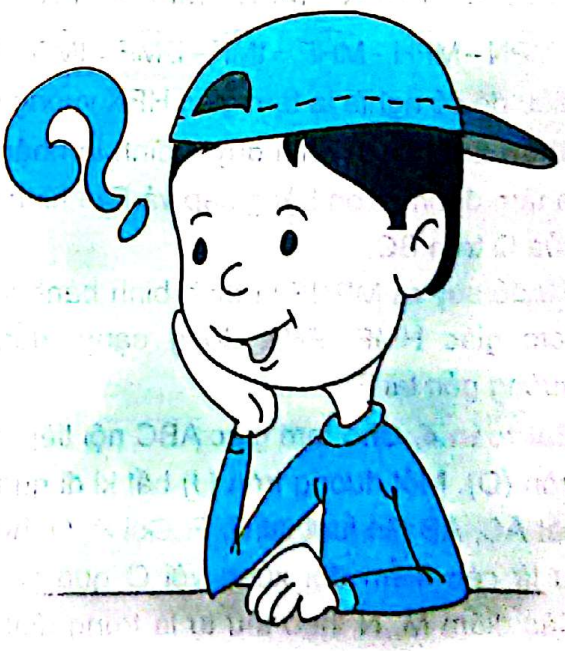
Do đó ba điểm A, D, K thẳng hàng.

Kẻ FR song song với SE (R thuộc AH) và gọi X là giao điểm của AH với EF.

Dễ thấy các tam giác FXR và EDS đồng dạng nên $\frac{FR}{ES} = \frac{FX}{ED} = 1$, suy ra FR = ES, dẫn tới tứ giác FSER là hình bình hành.

Gọi I là trung điểm của EF thì S đối xứng với R qua I, mà T đối xứng với S qua EF nên T đối xứng với R qua AI, suy ra T thuộc AK hay ba điểm A, T, K thẳng hàng.

Nhận xét. Tư duy chủ đạo là dựng hình bình hành FSER để khai thác tính đối xứng do giả thiết AE = AF. Nhờ đó, điểm T là điểm đối xứng của S qua EF nằm trên đường thẳng AK, hoàn tất chứng minh ba điểm thẳng hàng.



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

TỪ ĐẲNG THỨC ĐẾN BẤT ĐẲNG THỨC

HOÀNG ĐỨC HÙNG *(Trường Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội)*
DƯƠNG THỊ THOA *(Trường Trung học Vinschool Smart City, Hà Nội)*

Bất đẳng thức một phần quan trọng và thú vị, thường góp mặt trong các kì thi học sinh giỏi toán cấp THCS. Trong bài viết này, chúng ta sẽ khởi đầu từ một đẳng thức cơ bản, từ đó xây dựng và phát triển các kỹ năng cần thiết để giải quyết hiệu quả các bài toán bất đẳng thức được tạo nên từ đẳng thức.

Đẳng thức: Với a, b, k là các số thực, ta luôn có $(a^2+k)(b^2+k)=(k+1)\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+k-1\right]$

$+\frac{1}{2}\left[(k-1)(a-b)^2+2(ab-1)^2\right]$.

Bài toán 1. Cho a, b, k là các số thực và $k\ge 1$. Chứng minh rằng

$$(a^2+k)(b^2+k)\ge(k+1)\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+k-1\right].$$

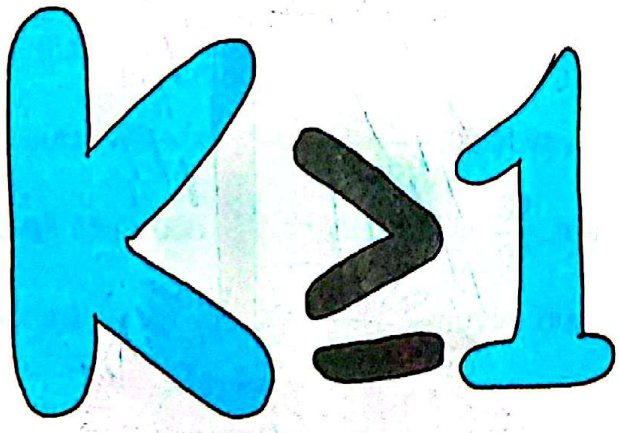
Lời giải. Với $k\ge 1$ thì

$(k-1)(a-b)^2+2(ab-1)^2\ge 0$.

Do đó từ đẳng thức mở đầu ta suy ra

$$(a^2+k)(b^2+k)\ge(k+1)\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+k-1\right].$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=\pm 1$ hoặc $k=1$, $ab=1$.



Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$(a^2+8)(b^2+8)(c^2+8)\ge 729$.

Lời giải. Với $k=8$ theo bài toán 1, ta được

$$(a^2+8)(b^2+8)\ge 9\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+7\right].$$

Do đó $(a^2+8)(b^2+8)(c^2+8)$

$\ge 9\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+7\right](c^2+8)$

$=\frac{9}{2}\left[(a+b)^2+2+12\right](2+c^2+6)$

$\ge\frac{9}{2}\left(\sqrt{2}|a+b|+\sqrt{2}|c|+6\sqrt{2}\right)^2$

$=9\left(|a+b|+|c|+6\right)^2\ge 9(a+b+c+6)^2=729$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{(4a^2+5)(4b^2+5)(4c^2+5)}\le\frac{1}{144}.$$

Lời giải. Ta chứng minh

$(4a^2+5)(4b^2+5)(4c^2+5)\ge 144(a+b+c)$.

Đặt $x=2a$, $y=2b$, $z=2c$ và với $k=5$ theo bài toán 1, ta được

$(4a^2+5)(4b^2+5)(4c^2+5)$

$=(x^2+5)(y^2+5)(z^2+5)$

$\ge 6\left[\frac{1}{2}(x+y)^2+4\right](z^2+5)$

$=3\left[(x+y)^2+2+6\right](2+z^2+3)$

$\ge 3\left(\sqrt{2}|x+y|+\sqrt{2}\sqrt{z}+3\sqrt{2}\right)^2$

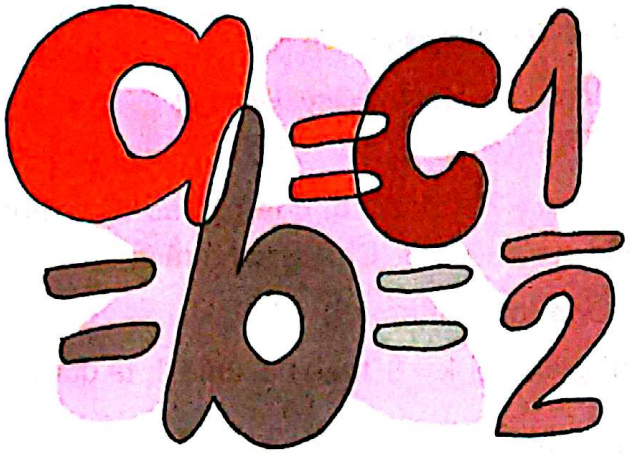
$\ge 6(x+y+z+3)^2\ge 72(x+y+z)=144(a+b+c)$.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

$\Rightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.



Bài toán 4. Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c+d}{(9a^2+7)(9b^2+7)(9c^2+7)(9d^2+7)} \le \frac{1}{3072}.$$

Lời giải. Ta chứng minh

$(9a^2+7)(9b^2+7)(9c^2+7)(9d^2+7)$
$\ge 3072(a+b+c+d).$

Đặt $x=3a, y=3b, z=3c, t=3d$ và với $k=7$ theo bài toán 1, ta được

$(9a^2+7)(9b^2+7)(9c^2+7)(9d^2+7)$

$=(x^2+7)(y^2+7)(z^2+7)(t^2+7)$

$\ge 8\left[\frac{1}{2}(x+y)^2+6\right]\cdot 8\left[\frac{1}{2}(z+t)^2+6\right]$

$=16\left[(x+y)^2+4+8\right]\left[4+(z+t)^2+8\right]$

$\ge 16\left(2|x+y|+2|z+t|+8\right)^2$

$\ge 64(x+y+z+t+4)^2$

$\ge 1024(x+y+z+t)=3072(a+b+c+d).$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=t=1$

$\Rightarrow a=b=c=d=\frac{1}{3}$.

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$(a^{10}-a^8+3)(b^{10}-b^8+3)(c^{10}-c^8+3)\ge 27.$

Lời giải. Dễ chứng minh được

$a^2(a^6-1)(a^2-1)\ge 0$ với mọi số thực a.

Do đó $a^{10}-a^8-a^4+a^2\ge 0$, suy ra

$a^{10}-a^8+3\ge a^4-a^2+3$

$=\frac{1}{2}(a^2-1)^2+\frac{1}{2}(a^4+5)\ge\frac{1}{2}(a^4+5).$

Tương tự, ta cũng có

$b^{10}-b^8+3\ge\frac{1}{2}(b^4+5),$

$c^{10}-c^8+3\ge\frac{1}{2}(c^4+5).$

Suy ra $(a^{10}-a^8+3)(b^{10}-b^8+3)(c^{10}-c^8+3)$

$\ge\frac{1}{8}(a^4+5)(b^4+5)(c^4+5)$

$=\frac{1}{8}(x^2+5)(y^2+5)(z^2+5)$

$\ge\frac{1}{8}\cdot 72(x+y+z)=9(a^2+b^2+c^2)=27$ theo bài toán 3 và với $x=a^2, y=b^2, z=c^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a^2=b^2=c^2=1$.

Nhận xét. Tương tự lời giải bài toán 5, ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}=3$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$(a^{4n+2}-a^{2n+2}+3)(b^{4n+2}-b^{2n+2}+3)(c^{4n+2}-c^{2n+2}+3)\ge 27.$

Việc chứng minh bài toán này xin dành cho bạn đọ



CS Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

THÁCH ĐẤU

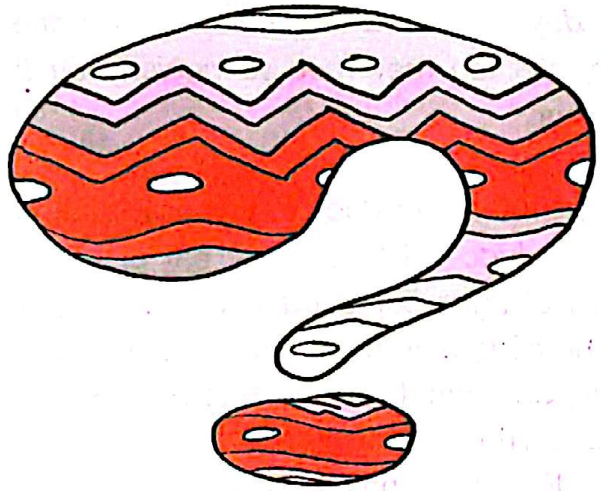
TRẬN ĐẤU THỨ HAI TRĂM HAI MƯƠI

Người thách đấu: Võ Quốc Bá Cẩn *(Trường Archimedes Academy Trung Yên, Hà Nội).*

Bài toán thách đấu: Cho số nguyên dương lẻ $n \geq 3$ và các số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Gọi A là số nhỏ nhất trong các số $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}, \ldots, \frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1}$ và B là số lớn nhất trong các số $\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \frac{1}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n^2+x_1^2}}$. Chứng minh rằng $A \leq 2\sqrt{2}B$.

Kết quả

TRẬN ĐẤU THỨ HAI TRĂM MƯỜI TÁM (TTT2 số 269+270)



Đề bài. Viết các số dạng $\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương không vượt quá 100 và $(a, b) = 1$, theo thứ tự tăng dần. Hỏi, số được viết liền ngay trước số $\frac{37}{69}$ là bao nhiêu?

Lời giải. (*Dựa theo bạn Nguyễn Mạnh Đạt, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Hải Phòng*)

Dễ thấy $\frac{52}{97} < \frac{37}{69}$. Ta sẽ chứng minh $\frac{52}{97}$ là số được viết liền ngay trước $\frac{37}{69}$. Thật vậy, giả sử số liền trước $\frac{37}{69}$ không phải là $\frac{52}{97}$ mà là một số $\frac{x}{y}$ với x, y là các số nguyên dương, $(x, y) = 1$. Thế thì ta có $\frac{52}{97} < \frac{x}{y} < \frac{37}{69}$.

Suy ra $97x - 52y > 0$ và $37y - 69x > 0$.

Vì thế $97x - 52y \geq 1$, $37y - 69x \geq 1$.

Như vậy $y = 69(97x - 52y) + 97(37y - 69x) \geq 69 + 97 > 100$, mâu thuẫn.

Vậy số được viết liền ngay trước số $\frac{37}{69}$ là $\frac{52}{97}$.

HONG HA

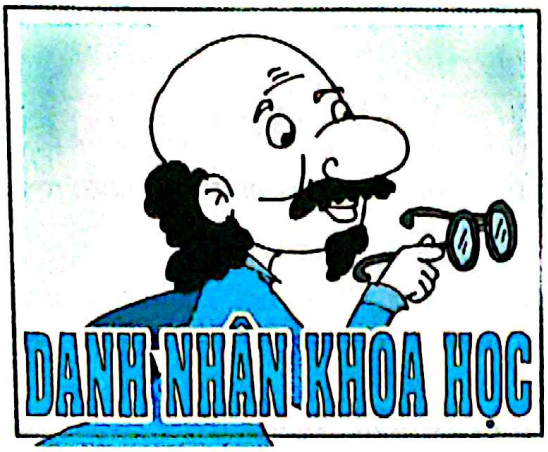
Nhận xét. Đây là bài toán khó. Đăng quang trong trận đấu này là bạn *Nguyễn Mạnh Đạt*. Ngoài việc cho lời giải đúng, bạn còn tổng quát cả bài toán.

VÕ QUỐC BÁ CẨN



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



GALILEI VÀ VỤ ÁN TRÁI ĐẤT QUAY

NGUYỄN NHƯ MAI

Hành trình khởi nghiệp

Galileo Galilei (gọi tắt là Galile) là con đầu lòng của chàng nhạc sĩ nghèo Vincenzo xứ Florenxia, nước Italia. Sinh năm 1564 và mất năm 1642.

Thấy con thông minh, ông Vincenzo tự kèm cặp con tự học cho đến năm 17 tuổi. Ông gửi Galile đến học Y khoa tại Trường Đại học Piza, hy vọng sau này con trở thành bác sĩ để thoát cảnh nghèo của gia đình nghệ sĩ.

Nghe lời cha, anh rất chăm học, nhưng tình cờ được đọc cuốn *"Những nguyên lí"* của Oclit. Vẻ đẹp toán học đã mê hoặc anh. Galile không dám trái lời cha, chỉ dám đến học lén lớp toán học cao cấp do một giáo sư nổi tiếng giảng dạy. Theo đề xuất của vị giáo sư này, Galile được đặc cách chuyển sang học khoa Toán.

Tốt nghiệp đại học, đúng như dự đoán của cha, Galile không xin được việc, phải về quê làm anh giáo làng.

Trong những buổi dự lễ tại nhà thờ, anh quan sát sự chuyển động lắc lư của những chùm nến treo trên vòm nhà thờ. Từ đó, anh phát hiện ra chu kỳ chuyển động của con lắc. Dựa vào nguyên lý đó, sau này đồng hồ quả lắc ra đời.

Phải chạy chọt mãi, anh mới xin được chân phụ giảng ở Trường Đại học Piza. Galile không theo lối mòn của Arixtot mà tiến hành nghiên cứu theo phương pháp thực nghiệm.

Trên tháp Piza, Galile đã tiến hành thực nghiệm nổi tiếng về sự rơi của hai quả cầu có khối lượng khác nhau.

Bị những kẻ ganh ghét kèn cựa, Galile rời bỏ Florenxia quê hương, đến làm giáo sư tại Trường Đại học Padu, Venexia.

Tại đây, Galile đã tiến hành nghiên cứu cơ học, chế tạo máy móc và nghiên cứu thiên văn học.

Thuyết Địa tâm và thuyết Nhật tâm

Suốt 1400 năm trước đó, thuyết Địa tâm của Arixtot được coi là chân lý bất di bất dịch. Trái Đất được coi là trung tâm vũ trụ, xoay quanh nó là bảy "hành tinh": Mặt Trăng, Sao Thủy, Sao Kim, Mặt Trời, Sao Hỏa, Sao Mộc và Sao Thổ.

Sau đó, thuyết này lại được nhà triết học Ptolemee hoàn chỉnh để lưu truyền.

Đến thế kỷ 16, xảy ra một chuyện "động trời": thuyết Nhật tâm xuất hiện.

Đó là lý thuyết của nhà tu hành kiêm thiên văn học Nicolai Copernicus, người Ba Lan.

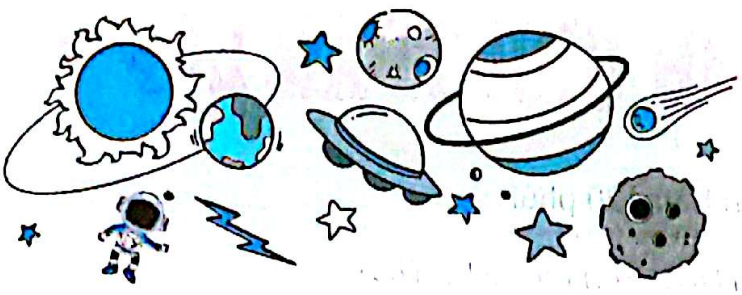
Sau nhiều năm quan sát và tính toán, ông phản bác thuyết Địa tâm của Arixtot là hoàn toàn sai lầm.

Copernicus đề xuất thuyết mới: Trái Đất không còn là "cái rốn" của vũ trụ nữa, mà chỉ là một hành tinh quay xung quanh Mặt Trời.

Công trình này chỉ được bí mật truyền tay; mãi đến năm 1543, khi đang hấp hối, cuốn sách *"Về chuyển động của các thiên thể"* của ông mới tìm được cách xuất bản. Tòa Thánh La Mã hốt hoảng ra lệnh thu hồi và tiêu hủy cuốn sách, coi đó là "tà thuyết", "dị giáo".

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



Nhưng không ngờ, mấy chục năm sau, cuốn sách ấy lại rơi vào tay Gioocđano Bruno – một thầy tu trẻ người Italia.

Ông bị Giáo hội truy tố theo tội "tà giáo", phải bỏ chạy ra nước ngoài. Tại đây, ông tiếp tục truyền bá học thuyết mới.

Giáo hội lo sợ ảnh hưởng của ông, đánh lừa ông trở về nước.

Gioocđano liền bị bắt giam vào ngục tối, tra tấn dã man, bắt ông phải lên tiếng từ bỏ thuyết Nhật tâm. Tám năm tù đày không khuất phục được ông, Tòa án pháp đình La Mã phán quyết xử tử ông.

Gioocđano khẳng khái tuyên bố:

"Các ông nhân danh Chúa kết tội tôi, nhưng chính các ông run sợ trước chân lý, chứ không phải tôi."

Gioocđano Bruno bị đưa lên dàn thiêu ở Roma ngày 17-2-1600.

Galile vào cuộc

Bấy giờ, Galile đã nổi tiếng là một nhà bác học có uy tín. Ông là người phát minh ra chiếc kính viễn vọng đầu tiên dùng để quan sát Mặt Trăng, tiếp đó phát hiện bốn vệ tinh quay quanh Sao Mộc. Ông viết cuốn sách *"Tín sứ của các vì sao"* gây ra tiếng vang lớn. Bốn vệ tinh quay quanh Sao Mộc được mang tên ông.

Galile tiếp tục quan sát Sao Kim có tuần tròn, tuần khuyết, chứng tỏ hành tinh này cũng chuyển động quanh Mặt Trời. Mặt Trời cũng có vết đen, chứ không "hoàn hảo" như khẳng định của Arixtot. Ông được đề cao là nhà bác học số một của Italia. Đầy tự tin, Galile mang kính thiên văn đến Roma tổ chức nhiều cuộc quan sát trực tiếp bầu trời. Viện Hàn lâm Linxây công nhận ông là Viện sĩ danh dự.

Các hồng y giáo chủ và đích thân Giáo hoàng buộc phải ra mặt tiếp ông, nhưng ra lệnh cấm ông không được phép nhắc đến học thuyết của Copernicus.

Dù sao thì Trái Đất vẫn quay

Buộc phải theo lệnh cấm, nhưng Galile vẫn tiến hành nghiên cứu quy luật lên xuống của thủy triều như một hiện tượng minh chứng Trái Đất quay.

Ông lặng lẽ viết tác phẩm *"Đối thoại về hai hệ thống chính của vũ trụ"*.

Cuốn sách được in ra như một tiếng sét nổ giữa bầu trời u ám.

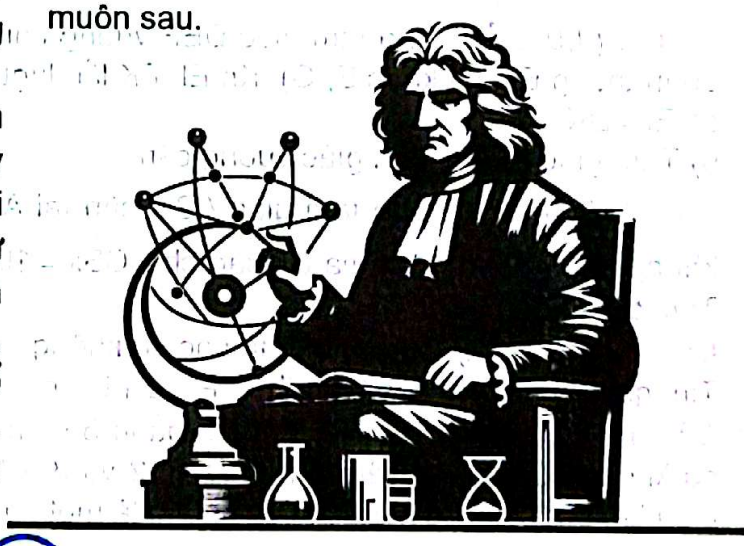
Giáo hội La Mã lập tức bắt Galile giam vào ngục tối ở Roma, dùng nhục hình tra tấn.

Ngày 22 tháng 6 năm 1633, Tòa án Giáo hội tổ chức phiên tòa kết án Galile.

Nhà bác học già 69 tuổi, ốm yếu bị dẫn ra trước pháp đình; quân lính dùng gậy đánh vào chân, bắt ông phải quỳ gối, phủ nhận thuyết Nhật tâm. Khi bị lôi ra ngoài cửa, Galile bật đứng dậy, thốt lên:

"Dù sao thì Trái Đất vẫn quay!"

Ông tiếp tục bị giam cầm, nhưng đã "bí mật vượt ngục" bằng cách gửi công trình nghiên cứu tới bạn bè ở Đức và Tây Ban Nha. Dù bị chặn lại, nhưng cuối cùng vẫn lọt ra được tới Hà Lan. Đó là tác phẩm *"Luận về hai khoa học mới"* (1636). Năm 1642, ông già Galile 78 tuổi trút hơi thở cuối cùng. Nhưng ngôi sao sáng Galileo Galilei vẫn rực rỡ chiếu sáng trên bầu trời khoa học thế giới mãi tới muôn sau.



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ OLYMPIC HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 7

Thời gian làm bài: 120 phút

TẠ MINH HIẾU *(Trường THCS Yên Lạc, Phú Thọ)*

Câu 1. *(3,0 điểm)* Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{25} + (2^2 \cdot 3)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + (-2024)^0 + \left|-\frac{1}{4}\right|$.

b) $B = \frac{(2^3 \cdot 3^5)^2 - 15 \cdot 4^2 \cdot 6^9}{8^4 \cdot 81^3 - 9 \cdot 4^6 \cdot 27^4}$.

c) $C = \frac{2a}{5b} + \frac{5b}{6c} + \frac{6c}{7d} + \frac{7d}{2a}$ biết $\frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a}$ và $a, b, c, d \neq 0$.

Câu 2. *(3,0 điểm)* Tìm x, y biết:

a) $-1\frac{1}{9} + \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}$.

b) $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$, với $x \neq 0$.

c) $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x - 8$.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Ba lớp 7A, 7B, 7C tham gia hưởng ứng phong trào Tết trồng cây. Số cây lớp 7A trồng được bằng 32,5% tổng số cây của cả ba lớp. Biết số cây lớp 7B và lớp 7C trồng được tỉ lệ theo 1,5 và 1,2. Số cây lớp 7A trồng được ít hơn số cây lớp 7B trồng được là 12 cây. Hỏi mỗi lớp 7A, 7B, 7C đã trồng được bao nhiêu cây?

Câu 4. *(2,0 điểm)* Chứng minh rằng $ab(a^2+2)(b^2+2)$ luôn chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên a, b.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Cho biểu thức $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $T < 0,1$.

Câu 6. *(1,0 điểm)* Tìm giá trị nguyên $x \neq 5$ để biểu thức $K = \frac{7-x}{x-5}$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 7. *(4,0 điểm)* Cho tam giác DEF vuông cân tại D. Gọi G là trung điểm của EF, H thuộc đoạn thẳng EG (H khác E, G). Kẻ EI, FK lần lượt vuông góc với DH tại I, K. Chứng minh rằng:

a) $EI = DK$.

b) Tam giác KGI là tam giác vuông cân.

Câu 8. *(1,0 điểm)* Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 40^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = 10^\circ$. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Tính số đo góc BDC.

Câu 9. *(1,0 điểm)* Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a + 3c = 2023$ và $a + 2b = 2024$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c$.

Câu 10. *(1,0 điểm)* Bạn An viết lên bảng 5 số nguyên dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng, với mọi cách viết của An, ta luôn tìm được hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút

NGUYỄN THANH GIANG *(Trường THPT chuyên Hưng Yên)*

Bài 1. *(2,0 điểm)*

1) Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2x^{2025}-4(x+1)x^{2026}+2x+1}{2x^2+3x}$ tại $x=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

2) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(6;0)$, $B(0;-3)$ và đường thẳng (d) có phương trình $y=-(m+2)x+2m+2$ (m là tham số, $m\neq -2$, $m\neq \dfrac{-5}{2}$). Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) chia tam giác OAB (O là gốc toạ độ) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 2. *(2,0 điểm)*

1) Tìm các số nguyên tố x, y, z thoả mãn $x=y^z+z^y+24$.

2) Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3-5n-1$ không là số chính phương.

Bài 3. *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình $21(x^3+x^2+x)=4\sqrt{7}(x^2+1)\sqrt{x^4+1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2}. \end{cases}$



Bài 4. *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC. Đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB và AC của tam giác lần lượt tại I và J. E là điểm thuộc cung nhỏ IJ, tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) cắt các đường thẳng AJ, AI lần lượt tại M, N. Đường thẳng IJ cắt OM, ON lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{IQ}{EN}=\dfrac{EM}{JP}$.

b) Các đường thẳng NP, MQ, OE đồng quy.

Bài 5. *(1,0 điểm)*

1) Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp X. Tính xác suất của biến cố A: "Số lấy được là số lớn hơn 59000".

2) Với a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b^2+c^3=\dfrac{325}{9}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^3+c^4$.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN CHUYÊN

(Đề đăng trên TTT2 số 271)



Bài 1. 1) Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$3x - 2 + \frac{9}{x} = 5\sqrt{x + \frac{3}{x}}.$$

Đặt $t = \sqrt{x + \frac{3}{x}} > 0$ thì phương trình trên trở thành $3t^2 - 5t - 2 = 0$, suy ra $t = 2$ (do $t > 0$).

Với $t = 2$ ta có $x + \frac{3}{x} = 4$ hay $x^2 - 4x + 3 = 0$, suy ra $x = 1$, $x = 3$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có hai nghiệm là 1; 3.

2) Đặt $a = 2x - y$, $b = x + 2y$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a + b + 6 \\ ab = 3 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a + b + 6 \\ 2ab = 6. \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình ta thu được $(a + b)^2 - (a + b) - 12 = 0$, suy ra $a + b = 3x + y \in \{-3; 4\}$.

+ Với $3x + y = -3$ hay $y = -3x - 3$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$(5x + 3)(-5x - 6) = 3$ hay $25x^2 + 45x + 21 = 0$

phương trình này vô nghiệm.

+ Với $3x + y = 4$ hay $y = 4 - 3x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$(5x - 4)(-5x + 8) = 3$ hay $25x^2 - 60x + 35 = 0$,

suy ra $x = 1$, $y = 1$ hoặc $x = \frac{7}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$.

Vậy hệ có nghiệm (x, y) là $(1, 1); \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Bài 2. 1) Phương trình được viết lại thành

$$x^4 - 5x^2 - x^3y - 3x^2y + 5xy + 15y = 0$$

hay $x^2(x^2 - 5) - x^2y(x + 3) + 5y(x + 3) = 0$

hay $x^2(x^2 - 5) - y(x + 3)(x^2 - 5) = 0$

hay $(x^2 - 5)(x^2 - xy - 3y) = 0$.

Do x là số nguyên nên $x^2 - 5 \neq 0$, suy ra $x^2 - xy - 3y = 0$ hay $(x + 3)(y - x + 3) = 9$.

Từ đây xét các trường hợp ta thu được các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn là:

$(-12, -16)$; $(-6, -12)$; $(-4, -16)$; $(-2, 4)$; $(0, 0)$; $(6, 4)$.

2) Ta có $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$,

suy ra $ab + bc + ca \geq 3\sqrt{abc}$.

Do đó $P \geq 6\sqrt{abc} + \frac{3}{abc}$

$$= 3\left(\sqrt{abc} + \sqrt{abc} + \frac{1}{abc}\right) \geq 9.$$

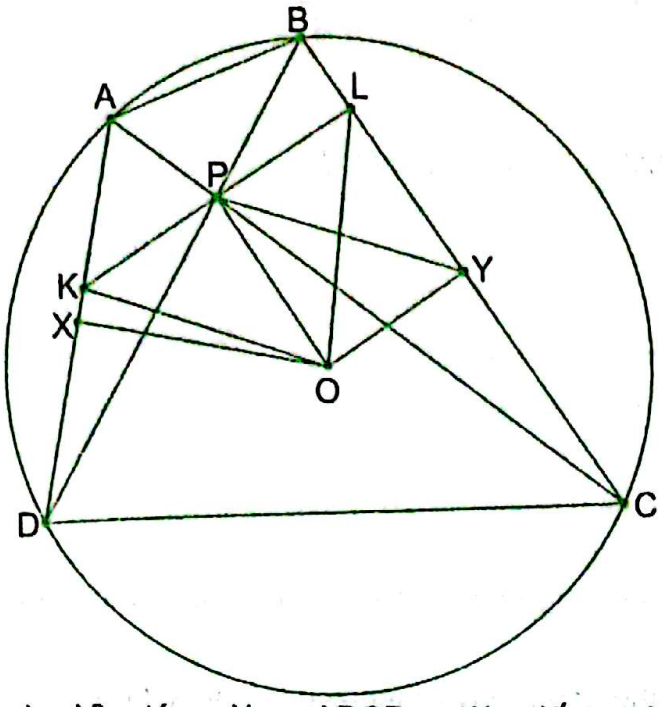
Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 9.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

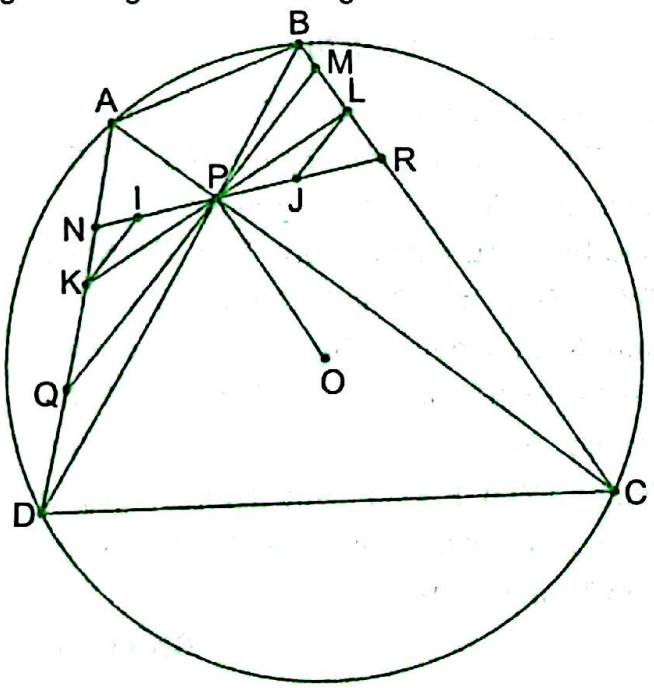
Bài 3.



a) Vì tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{PAD} = \widehat{PBC}$, $\widehat{PDA} = \widehat{PCB}$, suy ra các tam giác PAD và PBC đồng dạng. Hai tam giác này có trung tuyến tương ứng là PX, PY do đó các tam giác PXA và PYB đồng dạng nên $\widehat{PXA} = \widehat{PYB}$.

b) Dễ thấy P, X thuộc đường tròn đường kính KO; P, Y thuộc đường tròn đường kính LO. Từ đó theo ý a) ta có $\widehat{POK} = \widehat{PXA} = \widehat{PYB} = \widehat{POL}$, suy ra tam giác OKL cân tại O nên P là trung điểm của LK.

c) Dễ thấy PK, PL lần lượt là các đường phân giác trong của các tam giác PQN và PMR.



Lấy I, J lần lượt thuộc các cạnh PN, PR sao cho KI // PQ và LJ // PM.

Khi đó tam giác PIK cân tại I. Áp dụng định lí Thales và tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{KI}{PQ}+\frac{KI}{PN}=\frac{IN}{PN}+\frac{PI}{PN}=1\Rightarrow\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PN}=\frac{1}{KI}. \quad (1)$$

Tương tự thì $\frac{1}{PM}+\frac{1}{PR}=\frac{1}{LJ}$. (2)

Theo ý b) thì PK = PL do đó hai tam giác cân PIK và PJL bằng nhau nên KI = LJ. (3)

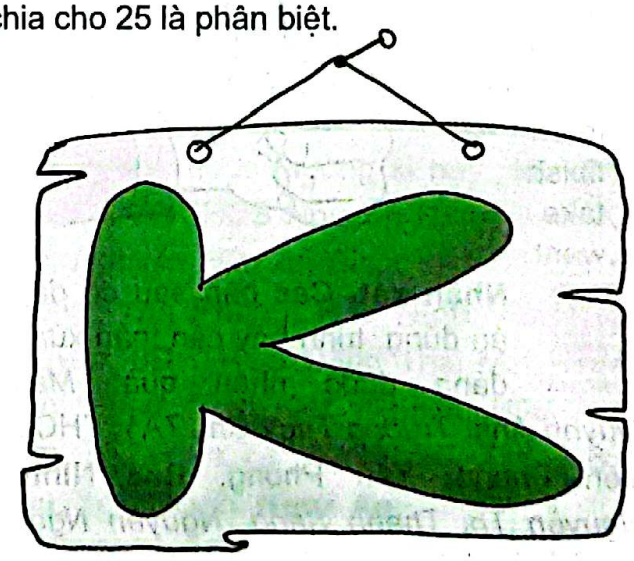
Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PN}=\frac{1}{PM}+\frac{1}{PR}$.

Bài 4. Do có tất cả 25 điểm mà không có ba điểm nào thẳng hàng nên số đoạn thẳng tạo ra là $\frac{24\times25}{2}=300$ đoạn.

Mà có 12 đoạn không có điểm chung nên bất kì màu nào cũng chỉ có thể tô tối đa 12 đoạn, suy ra số màu ít nhất cần tô là $\frac{300}{12}=25$.

Tiếp theo ta chỉ ra có cách tô các đoạn thẳng bằng 25 màu thỏa mãn bài toán.

Kí hiệu các điểm trên là $A_1, A_2, ..., A_{25}$ và các màu là 0, 1, 2,..., 24. Với mỗi đoạn nối A_iA_j ta tô bởi màu có số là số dư của $i+j$ chia cho 25. Khi đó số màu cần tô là 25 và tam giác $A_iA_jA_k$ có ba cạnh khác màu vì i, j, k phân biệt nên số dư của $i+j$, $i+k$, $j+k$ khi chia cho 25 là phân biệt.



CS Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



Kì này OUR BELOVED TEACHERS

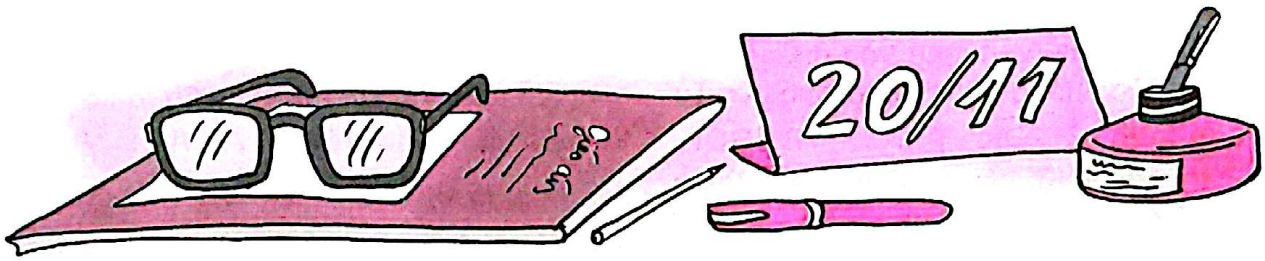
NGUYỄN MINH KHANG *(Hà Nội)*

Chào các bạn nhỏ của Vườn Anh!

Sắp đến ngày Nhà giáo Việt Nam 20/11 rồi! Đây là dịp đặc biệt để chúng mình thể hiện tình cảm và lòng biết ơn đến thầy cô – những người luôn tận tâm dạy dỗ chúng ta mỗi ngày.

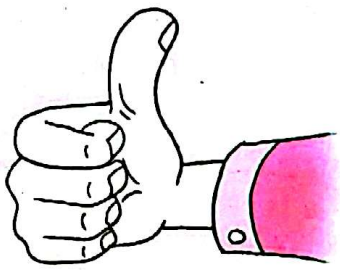
Hôm nay, Vườn Anh có một thử thách nhỏ dành cho các bạn: Hãy cùng tìm và sửa lỗi sai trong mỗi câu về các hoạt động trong ngày Nhà giáo nhé! Mỗi câu đều có một lỗi sai đang "ẩn nấp" - bạn có đủ tinh mắt để phát hiện ra không?

1. Every year on Teacher's Day, students were preparing special gifts and performances to show their appreciation.
2. Not only students but also their parents attends the ceremony organized by the school.
3. The principal gave a long speech in which he express his gratitude to all the teacher for their dedication.
4. Many students enjoy writing poems and composed songs to thank their beloved teachers.
5. Although it was heavy raining, the celebration still took place outdoor as planned.



Kết quả CHÀO NĂM HỌC MỚI (TTT2 số 269+270)

1. ready
2. do
3. follow
4. improve
5. learn
6. finish
7. take
8. want



Nhận xét. Các bạn sau có đáp án đúng, trình bày cẩn thận xứng đáng được nhận quà: *Mẫn Quỳnh Anh, Trương Thùy Chi*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Thanh Sang, Nguyễn Ngọc Gia Linh*, 8A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trần Diệu Trang*, 7B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.

Các bạn sau được khen: *Trần Thị Ngọc Trâm*, 7A, *Trần Quỳnh Chi, Nguyễn Việt Anh Khôi, Nguyễn Thị Ngọc Khuê*, 8A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Hoàng Xuân Phúc*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Đình Anh Dũng*, 9A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.

Chủ Vườn

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

KÌ 83

CAO NGỌC TOẢN
(TP. Huế)

Bài 1. Tìm số tự nhiên n sao cho $3^n = n^2 + 1$.

Bài 2. Tìm tất cả các số $\overline{abc}$ biết rằng: $a^5 + b^5 + c^5 - 5(a^3 + b^3 + c^3) + 4(a + b + c) = 3360$.

Bài 3. Cho 1348 số nguyên dương $n_1, n_2, ..., n_{1348}$ có tổng bằng 2022. Hãy chỉ ra rằng tồn tại 7 số trong các số trên có tổng các bình phương bằng 22.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Gọi D là trung điểm của cạnh AB, kẻ DH vuông góc với BC tại H. Trên tia đối của tia HD lấy điểm E sao cho HE = HD. Tính số đo góc AEB.

Bài 5. Với a, b, c là các số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} - a - b - c.$$

Kết quả Kì 81 (TTT2 số 269+270)

Bài 1. Với $n \geq 4$ thì $n^7 + n^5 - 2n > 2424$, suy ra $n \leq 3$.

Thử các số tự nhiên $n \leq 3$ ta thấy $n = 3$ thỏa mãn.

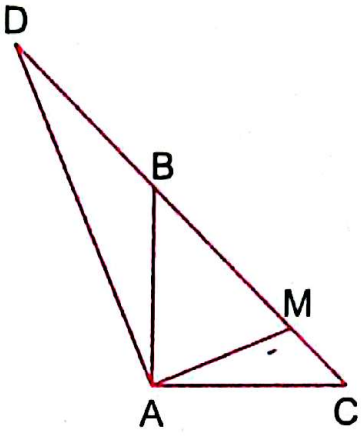
Bài 2. Đặt $a = x + 2024$, $b = 2025 - x$ thì $a + b = 4049$. Do đó ta có $|a| + |b| = a + b$, suy ra $(|a| + |b|)^2 = (a + b)^2$, kéo theo $|ab| = ab$ nên $ab \geq 0$. Khi đó ta có $(x + 2024)(2025 - x) \geq 0$, suy ra $-2024 \leq x \leq 2025$.

Vậy có 4050 số nguyên thỏa mãn bài toán.

Bài 3. Vì có 100 số tự nhiên đôi một phân biệt $a_1, a_2, ..., a_{100}$ và mỗi số không chia hết cho 7 nên tập hợp số dư của phép chia 100 số tự nhiên đó cho 7 gồm 6 phần tử là {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất 17 số có cùng số dư khi chia cho 7. Ta dễ tìm thấy hai số a_i, a_j $(1 \leq i, j \leq 100)$ có cùng số dư khi chia cho 7. Do đó $a_i^6 - a_j^6$ chia hết cho 7.

Bài 4. Tam giác ABM cân tại B nên $\widehat{BAM} = \widehat{BMA}$.



Ta lại có $\widehat{BAM} + \widehat{BAD} = 90^\circ = \widehat{BMA} + \widehat{BDA}$, suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$, kéo theo BD = BA = BM. Vậy B là trung điểm của DM.

Bài 5. Với x, y dương, z không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$, ta có

$$S = 4(x^3 + y^3) + 3z = 4(x^3 + y^3) + 3(1 - x - y)$$
$$= (4x^3 - 3x + 1) + (4y^3 - 3y + 1) + 1$$
$$= (2x - 1)^2(x + 1) + (2y - 1)^2(y + 1) + 1 \geq 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 1, đạt được tại $x = y = \frac{1}{2}$, $z = 0$.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt, được thưởng kì này: *Vũ Cường Thịnh*, 8A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Kinh Bắc; *Nguyễn Hữu An Bình*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Phan Khôi Nguyên*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, Trường Vinh; *Phan Tuấn Kiệt*, *Nguyễn Hữu Thanh Lâm*, 7A, *Phan Tấn Sang*, 9C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.

NGUYỄN QUANG TUẤN

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

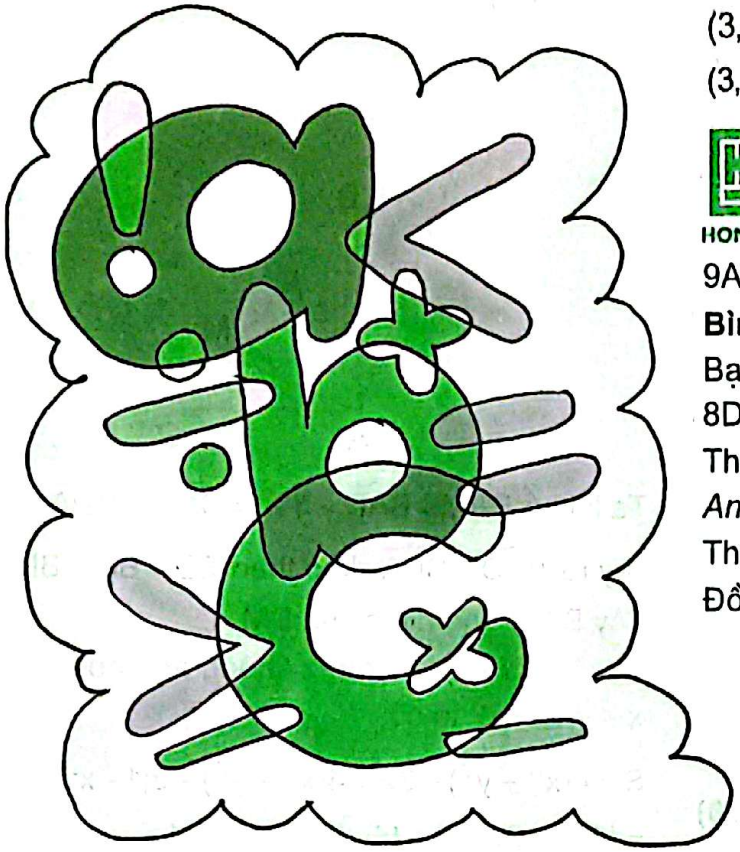


Các bạn hãy giải bài toán sau bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé! Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

Problem 62(272+273). Let a, b, c be non zero integers, $a \neq c$, such that $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Prove that $a^2+b^2+c^2$ cannot be a prime.

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH

Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội



Kết quả **Problem 60(269+270).**

Assume that $a \le b \le c$. If $a \ge 3$ then $ab+bc+ca \le 3bc \le abc$, a contradiction. Since a is prime, it is left that $a = 2$. The inequality becomes $2b+2c+bc > 2bc$, hence $\frac{1}{c}+\frac{1}{b} > \frac{1}{2}$.

If $b \ge 5$, then $c \ge 5$ and $\frac{1}{2} < \frac{1}{c}+\frac{1}{b} < \frac{1}{5}+\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, false.

Therefore $b \le 5$, that is:

+ $b = 2$ and c is any prime.
+ $b = 3$ and c is 3 or 5.

Answer: (a, b, c) = (a, 2, 2), (2, b, 2), (2, 2, c), (3, 3, 2), (3, 3, 2), (2, 3, 3), (2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2).

HONG HA'

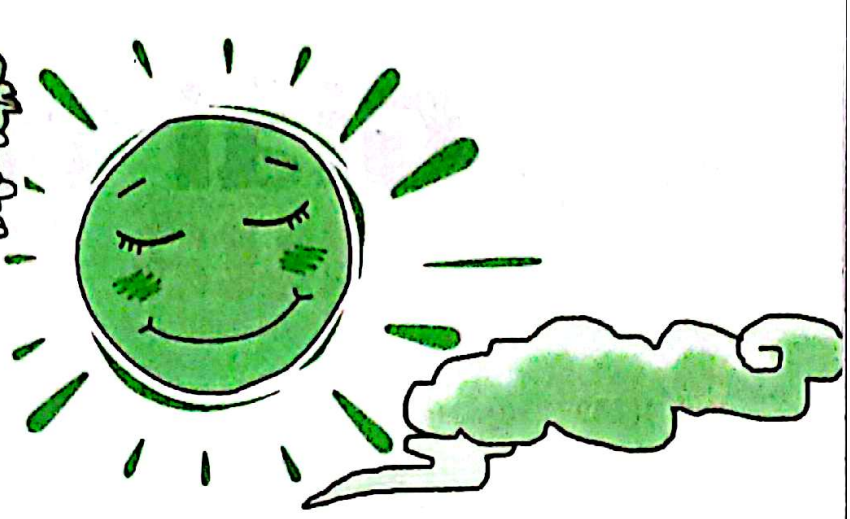
Nhận xét. Chúc mừng bạn sau có lời giải đúng, được thưởng kì này: *Lê Quang Huy, Bùi Đoàn Yến Nhi*, 9A1, THCS Nguyễn Hiền, Nam Ninh, **Ninh Bình**; *Nguyễn Đình Anh Dũng*, 9A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Phan Khôi Nguyên*, 8D, *Nguyễn Khánh Ngọc*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Trường Vinh, **Nghệ An**; *Hoàng Lê Anh Tuấn*, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *La Thanh Vân*, 9T, THCS Kim Đồng, Tân Lạc, **Phú Thọ**.

ĐỖ ĐỨC THÀNH



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

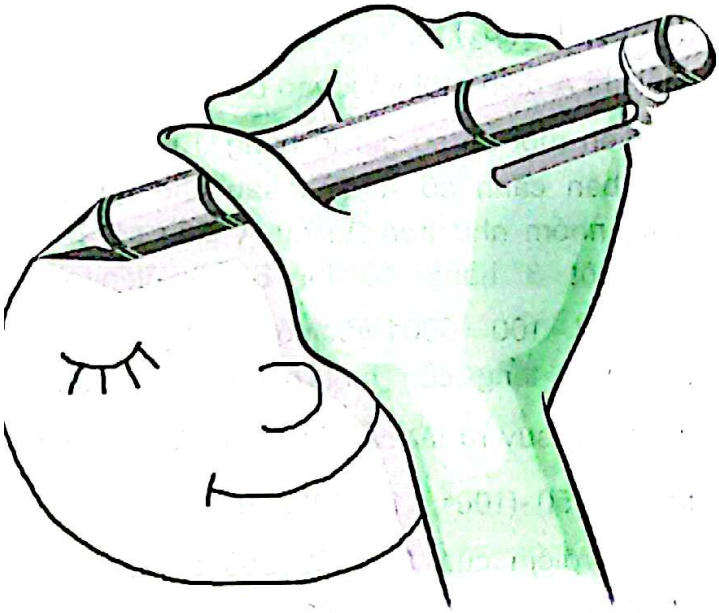


● *Kì này*

Mặt gì?

Mặt gì gợn sóng lung linh
Nên làn sóng sánh, ân tình thuỷ chung?
Mặt gì rực rỡ tầng không
Toả ngàn tia, trải nắng hồng khắp nơi?
Mặt gì cánh buồm thảnh thơi
Ra khơi, vào lộng muôn người dõi theo?
Mặt gì sóng lặng, trong veo
Bóng mây trôi dưới cầu treo đôi bờ?
Mặt gì đầy nắng ngủ mơ
Là khi trống đánh hết giờ ra chơi?
Thân thương hiện trên mặt gì
Những khi gặp gỡ nụ cười nở hoa?
Mặt gì trước lớp hiện ra
Bao bài học mới thầy cô tặng mình?
Phẳng phiu - chứa đựng - ân tình!
Là những "gương mặt" chúng mình mến yêu!

TRẦN THỊ HUYỀN
(Trường TH thị trấn Vũ Thư, xã Vũ Thư, Hưng Yên)



Kết quả (TTT2 số 269+270)

Con gì?

Con đường xe cộ lại qua
Con sóng dào dạt vỗ bờ cát êm
Con sông nước chảy êm đềm
Con thuyền xuôi mái chèo đêm trăng đầy
Con đê mát cỏ chiều nay
Đàn trâu thong thả cuối ngày nghỉ ngơi
Triều lên con nước đầy vơi
Con đập thủy điện ở nơi đầu nguồn
Con mắt nhìn khắp bốn phương
Con tim mang nặng yêu thương cuộc đời
Bao nhiêu bí ẩn tuyệt vời
Nằm trong con chữ của người Việt Nam.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau được thưởng: *Chu Ngọc Khánh Hà*, 9A1, THCS Nguyễn Hiền, Nam Ninh, **Ninh Bình**; *Nguyễn Thị Thanh Sang*, Nguyễn Thị Tú Quyên, 8A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Ngô Diễm Ngân*, 7A1, *Nguyễn Hữu An Bình*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

Các bạn sau được khen: *Ngô Thị Mai Duyên, Mẫn Thùy Lâm, Nguyễn Phương Thảo, Ngô Yên Oanh*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 7A, *Nguyễn Đức Mạnh, Trần Quỳnh Chi, Nguyễn Thị Hoàng Yến*, 8A, ThCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Lê Quang Huy*, 9A1, THCS Nguyễn Hiền, Nam Ninh, **Ninh Bình**.

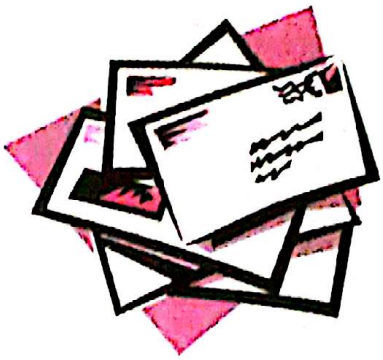
VUA TẾU

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(269+270). Hai số 8^{2025} và 125^{2025} viết liền nhau trong hệ thập phân thì được số mới có bao nhiêu chữ số?

Lời giải. Giả sử số 8^{2025} có m chữ số, số 125^{2025} có n chữ số (m, n là các số nguyên dương).

Ta có $10^{m-1} < 8^{2025} < 10^m$ và

$$10^{n-1} < 125^{2025} < 10^n.$$

Do đó $10^{m+n-2} < 8^{2025} \cdot 125^{2025} < 10^{m+n}$

hay $10^{m+n-2} < 1000^{2025} < 10^{m+n}$

hay $10^{m+n-2} < 10^{6075} < 10^{m+n}$.

Từ đó suy ra $m+n-2 < 6075 < m+n$, kéo theo $m+n-1 = 6075$ nên $m+n = 6076$.

Vậy nếu viết hai số 8^{2025} và 125^{2025} liền nhau thì tạo thành số mới có 6076 chữ số.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: *Trương Thùy Chi, Nguyễn Trung Dũng, Nguyễn Hải Đăng, Nguyễn Duy Gia Hưng, Nguyễn Hoàng Bảo Quyên, Nguyễn Quang Vinh*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Trần Văn Hoàng*, 6A2, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao; *Vũ Nhật Thành*, 7A6, THCS Yên Lạc, Tam Hồng, **Phú Thọ**; *Trần Sơn Hà*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, Trường Vinh; *Nguyễn Văn Huy Khánh, Nguyễn Duy Khoa*, 6E, *Nguyễn Kim Tài An, Thái Bùi Hà Anh, Trương Đình Quốc Anh, Bùi Hữu Anh Quân*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Hữu Thanh Lâm*, 7A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Nguyễn Việt Anh, Đặng Văn Hoàng, Đinh Trần Bảo Khánh, Nguyễn Đình Sơn Lâm, Nguyễn Hà Vy*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 7A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; *Nguyễn Anh Thư*, 7D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài 2(269+270). Hai bạn A và B chơi một trò chơi như sau: A chơi trước, lần lượt hai bạn điền ngẫu nhiên một số từ 1 đến 100^2 vào bảng ô vuông cỡ 100×100. Điểm của A là tổng lớn nhất trong 100 hàng, điểm của B là tổng lớn nhất trong 100 cột, ai có điểm lớn hơn thì thắng. Hỏi A hay B có chiến lược thắng hay họ sẽ hòa?

Lời giải. Ta chứng minh B có chiến lược để thắng.

Giá trị trung bình của mỗi hàng hay mỗi cột là $\dfrac{1+2+\ldots+100^2}{100} = 500050$.

Ta đánh số các cột từ trái qua phải là $c_1, c_2, \ldots, c_{100}$ và chia thành 50 nhóm gồm $(c_1, c_2), (c_2, c_3), \ldots, (c_{99}, c_{100})$.

Mỗi khi A điền một số x vào cột nào đó thì B sẽ điền một số có giá trị bằng 100^2+1-x vào bên cạnh số A điền sao cho hai số cùng nhóm như trên. Ví dụ A điền số 100 vào cột 3 hàng 10 thì B sẽ điền số $100^2+1-100 = 9901$ vào cột 4 hàng 10.

Như vậy tổng của một nhóm luôn bằng 100^2+1, suy ra tất cả các hàng đều có giá trị bằng $50 \cdot (100^2+1) = 500050$.

Do đó điểm của A là 500050 bằng đúng điểm trung bình của mỗi hàng.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

ở hàng cuối cùng, B không điền như bình thường mà xáo trộn vị trí của ít nhất một ô, tức là có ít nhất hai ô bị xáo trộn, khi đó sẽ có một cột có tổng các số nhỏ hơn 500050 và một cột có tổng các số lớn hơn 500050, do đó B thắng A.

Nhận xét. Đa số lời giải của các bạn đều đưa ra chiến lược B chỉ hòa mà không thắng được A. Chẳng hạn nếu A ghi một số bất kì thì B ghi số đó vào ô bên cạnh. Hay có bạn đưa ra chiến lược nếu A ghi số x vào ô (m, n) thì B ghi số 100^2+1-x vào ô đối xứng với ô (m, n) qua đường chéo chính.

NGUYỄN NGỌC HÂN

Bài 3(269+270). Tìm tất cả các số nguyên dương x, y và số nguyên tố lẻ p sao cho $p^x = y(y+2)$.

Lời giải. Do p là số nguyên tố lẻ và x là số nguyên dương nên p^x là số nguyên dương lẻ, suy ra y và $y+2$ là các số nguyên dương lẻ liên tiếp, kéo theo $(y, y+2)=1$.

Do đó $y+2=p^m$, $y=p^n$ với m, n là các số tự nhiên và $m>n\geq 0$.

Do $m>n$ nên $p^m:p^n$, suy ra $y+2:y$, dẫn đến $2:y$. Kết hợp với y là số nguyên dương lẻ, suy ra $y=1$.

Từ đó $p^x=3$, dẫn đến $p=3$, $x=1$.

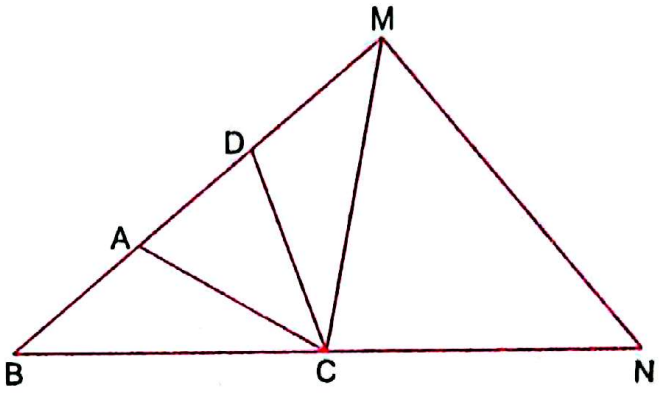
Vậy $p=3$, $x=y=1$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Duy Hưng*, 7A4, THCS Tam Dương, Tam Dương; *Vũ Nhật Thành*, 7A6, THCS Yên Lạc, Tam Hồng, **Phú Thọ**; *Đào Thuận Hải, Nguyễn Duy Gia Hưng, Mẫn Văn Nam, Nguyễn Yến Oanh*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 7A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; *Nguyễn Linh Đan*, 7D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**; *Trần Sơn Hà*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, Trường Vinh, **Nghệ An**.

NGUYỄN PHÚC BÌNH

Bài 4(269+270). Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC}=40^o$, $\widehat{ACB}=30^o$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $MA=NC=BC$. Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác vuông.

Lời giải. Trên đoạn BM lấy điểm D sao cho $DM=AB$.



Ta có $BD=MA=BC$, suy ra tam giác BCD cân tại B nên ta có

$$\widehat{BDC}=\frac{180^o-\widehat{ABC}}{2}=\frac{180^o-40^o}{2}=70^o.$$

$$\widehat{DAC}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=40^o+30^o=70^o.$$

Suy ra $\widehat{BDC}=\widehat{DAC}$ nên tam giác ACD cân tại C, suy ra $CD=CA$. Khi đó

$\Delta CDM=\Delta CAB$ (c.g.c) nên $MC=BC=NC$.

Từ đây suy ra tam giác BMN vuông tại M.

Nhận xét. Một số bạn làm đúng nhưng rất tiếc không ghi họ tên và địa chỉ. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Duy Hưng*, 7A4, THCS Tam Dương, Tam Dương, **Phú Thọ**; *Đặng Văn Hoàng, Nguyễn Phúc Hưng, Đinh Trần Bảo Khánh, Nguyễn Đình Lộc*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Nguyễn Kim Tài An, Bùi Hữu Anh Quân*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

QUANG ANH

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



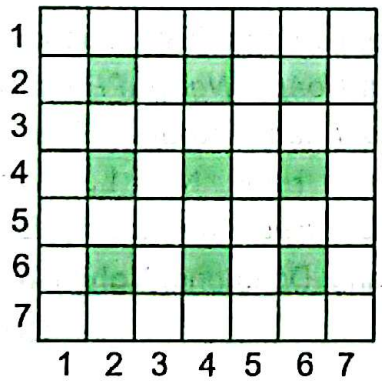
Bài 5(269+270). Xét bảng ô vuông cỡ 7×7. Hỏi phải tô màu ít nhất bao nhiêu ô vuông đơn vị của bảng sao cho mọi hình vuông cỡ 2×2 đều chứa ít nhất một ô được tô màu?

Lời giải. Bảng ô vuông cỡ 7×7 có $(7-1)\times(7-1)=36$ hình vuông cỡ 2×2.

Mỗi ô vuông đơn vị được tô nằm trong nhiều nhất bốn hình vuông cỡ 2×2 (những ô vuông đơn vị ở biên thì nằm trong một hoặc hai hình vuông cỡ 2×2). Do đó nếu có T ô được tô thì tổng số ô trên các hình vuông cỡ 2×2 không vượt quá 4T. Vì cần tổng đó không nhỏ hơn $36\times1=36$ (do mỗi hình vuông cỡ 2×2 cần ít nhất một ô được tô) nên $4T\geq36\Rightarrow T\geq9$.

Vậy cần tô ít nhất 9 ô.

Một cách tô thỏa mãn như hình sau:



Nhận xét. Đây là bài toán dễ. Hầu hết các bạn gửi lời giải tới toà soạn đều đúng. Tuy nhiên vì đây là bài toán cực trị, cụ thể là tìm giá trị nhỏ nhất của k (số ô được tô màu), ta cần làm đủ các bước

- Chỉ ra một chặn dưới cho k, tức là chứng minh $k\geq m$.
- Chỉ ra dấu bằng có thể xảy ra, tức là có thể xây dựng được cấu hình thoả mãn với m ô được tô màu.

Một số bạn đã không thực hiện bước thứ hai. Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn: *Phạm Hà Mi*, 8A1, THCS Nguyễn Hiền, Nam Ninh, **Ninh Bình**; *Vũ Bảo Linh*, AE8.1, THCS Nam Từ Liêm, **Hà Nội**; *Nguyễn Khôi Nguyên*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; *Nguyễn Thị Ngọc Châm*, *Nguyễn Minh Nhật*, *Nguyễn Đức Chấn Phong*, *Nguyễn Tuấn Thành*, 8A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Kinh Bắc, **Bắc Ninh**; *Thái Hữu Đạt*, 8A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Võ Hoàng Phúc*, 8A, *Đặng Ngọc Minh*, *Hoàng Đức Minh*, *Thái Hải Nam*, 8C, *Nguyễn Trọng Dũng*, *Phan Khôi Nguyên*, 8D, *Nguyễn Khánh Ngọc*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Trường Vinh, **Nghệ An**.

NGUYỄN TIẾN LÂM



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Bài 6(269+270). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c > \sqrt[3]{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[3]{ab^2-2}}{(b+2c)^2}+\frac{\sqrt[3]{bc^2-2}}{(c+2a)^2}+\frac{\sqrt[3]{ca^2-2}}{(a+2b)^2}\le\frac{a+b+c}{27}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{\sqrt[3]{ab^2-2}}{(b+2c)^2}\le\frac{\sqrt[3]{ab^2-2}}{\left(3\sqrt[3]{bc^2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{9}\sqrt[3]{\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\left(a-\frac{2}{b^2}\right)}\le\frac{1}{27}\left(\frac{2}{c^2}+a-\frac{2}{b^2}\right).$$

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại, ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[3]{3}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán bất đẳng thức hay nhưng không khó. Ý tưởng chính của bài toán là sử dụng bất đẳng thức AM-GM bằng cách tách ghép để triệt tiêu các phân thức. Các bạn sau đây có lời giải đúng, ngắn gọn: *Nguyễn Bảo Châu, Tạ Minh Hằng, Nguyễn Hữu Đức Trí*, 8A6, THCS Yên Lạc, Tam Hồng, **Phú Thọ**.

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

Bài 7(269+270). Với x, y là các số thực thỏa mãn $1\le x, y\le 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(x+y)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right).$$

Lời giải. * Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Từ giả thiết $1\le x, y\le 3$, suy ra $2\le x+y\le 6$.

Ta có $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{2}{xy}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$.

Suy ra $P=(x+y)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\ge\frac{8}{x+y}\ge\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{3}$ khi $x=y=3$.

* Tìm giá trị lớn nhất của P.

Không giảm tính tổng quát, giả sử $1\le y\le x\le 3$. Đặt $t=\frac{x}{y}$ thì $1\le t\le 3$.

Ta có $P=(yt+y)\left(\frac{1}{y^2t^2}+\frac{1}{y^2}\right)=y(t+1)\frac{1+t^2}{y^2t^2}$

$$=\frac{(t+1)(t^2+1)}{yt^2}\le\frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2}\ (\text{vì } y\ge 1).$$

Ta chứng minh $\frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2}\le\frac{40}{9}$ với $1\le t\le 3$.

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với $9t^3-31t^2+9t+9\le 0$ hay

$(t-3)(9t^2-4t-3)\le 0$

bất đẳng thức này đúng vì $t-3\le 0$ và

$9t^2-4t-3=(4t^2-4t)+(3t^2-3)+2t^2>0$.

Do đó $P\le\frac{40}{9}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi chẳng hạn $x=3, y=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{40}{9}$, khi chẳng hạn $x=3, y=1$.

Nhận xét. Đây là một bài bất đẳng thức khá cơ bản và không khó nên có rất nhiều lời giải gửi về tòa soạn. Xin tuyên dương các bạn sau cho lời giải đúng, trình bày sạch đẹp: *Nguyễn Bảo Châu, Tạ Minh Hằng, Nguyễn Hữu Đức Tín*, 8A6, THCS Yên Lạc, Tam Hồng, **Phú Thọ**; *Võ Hoàng Phúc*, 8A, *Phan Khôi Nguyên*, 8D, *Lưu Khánh Nhật*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Trường Vinh, **Nghệ An**; *Đặng Gia Uy*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Lê Thanh Nghị, **Hải Phòng**.

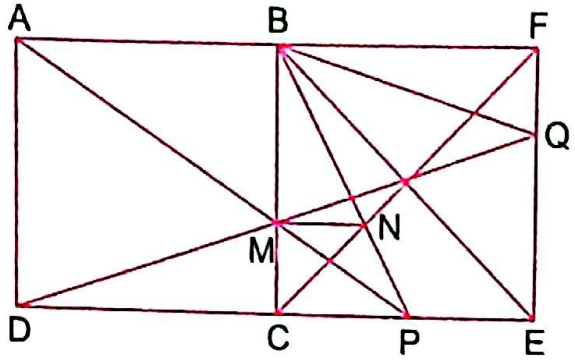
ĐÀO VĂN NAM

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Bài 8(269+270). Cho hai hình vuông ABCD và BCEF có chung cạnh BC. Gọi P nằm trên đoạn CE và Q nằm trên đoạn EF sao cho AP và DQ cắt nhau trên BC. Chứng minh rằng $\widehat{PBQ} = 45^\circ$.

Lời giải. Gọi N là giao điểm của BP và CF.



Theo định lí Thales ta có

$\frac{NB}{NP} = \frac{BF}{CP} = \frac{AB}{CP} = \frac{MB}{MC}$, suy ra MN // AB, dẫn đến tam giác CMN vuông cân tại M.

Vì MC là đường trung bình của tam giác DEQ nên $\frac{CM}{EQ} = \frac{1}{2}$, kéo theo $\frac{CN}{EQ} = \frac{\sqrt{2}CM}{EQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác, tam giác BCE vuông cân tại C nên $EB = \sqrt{2}CB$, kéo theo $\frac{CB}{EB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Do đó ta có $\frac{CN}{EQ} = \frac{CB}{EB}$. Kết hợp với $\widehat{BCN} = \widehat{BEQ}$ $(= 45^\circ)$, suy ra các tam giác CBN và EBQ đồng dạng nên $\widehat{CBN} = \widehat{EBQ}$.

Từ đó suy ra

$\widehat{PBQ} = \widehat{PBE} + \widehat{EBQ} = \widehat{PBE} + \widehat{CBN} = \widehat{CBE} = 45^\circ$.

Nhận xét. Bài toán này không khó. Một số bạn dùng phương pháp đại số để giải nên phần trình bày dài. Các bạn sau có lời giải đúng: *Trịnh Bảo Bình*, 8T, THCS Kim Đồng, Tân Lạc, **Phú Thọ**; *Trịnh Hoàng Nam, Đặng Gia Uy*, 9A, *Phạm Minh Hải*, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Lê Thanh Nghị, **Hải Phòng**; *Đào Duy Thành Công, Lê Nguyễn Ngọc Diệp*, 9A1, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, *Nguyễn Khôi Nguyên*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Thái Hữu Đạt*, 8A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Võ Hoàng Phúc*, 8A, *Đặng Ngọc Minh, Hoàng Đức Minh, Thái Hải Nam*, 8C, *Phan Khôi Nguyên*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, Trường Vinh, **Nghệ An**.

LƯU CÔNG ĐÔNG

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Bùi Hữu Anh Quân, Nguyễn Kim Tài An, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Thái Hữu Đạt*, 8A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Phan Khôi Nguyên, Võ Hoàng Phúc*, 8A, THCS Đặng Thai Mai, Trường Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Khôi Nguyên*,9A1 *Nguyễn Duy Gia Hưng*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 7A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Đặng Gia Uy*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Lê Thanh Nghị, **Hải Phòng**; *Nguyễn Duy Hưng*, 7A4, THCS Tam Dương, Tam Dương, **Phú Thọ**.



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



HỌC RA SAO?

CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG *(Trường THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)*

Bài toán về chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định là bài toán khó, cần phải có kỹ năng phân tích bài toán, tìm tòi một các sâu sắc để tìm ra được lời giải. Thông thường đối với dạng toán này, chúng ta suy luận theo các bước như sau:

Bước 1. Tìm hiểu đề toán.

- Xác định yếu tố cố định: điểm, đường,...
- Xác định yếu tố chuyển động: điểm, đường,...
- Xác định yếu tố không đổi: độ dài đoạn thẳng, số đo góc,...
- Xác định các quan hệ không đổi: song song, vuông góc, thẳng hàng, đồng quy,...

Bước 2. Dự đoán, xác định điểm cố định.

Để xác định điểm cố định, ta lấy hai đường thẳng của họ (thường chọn vị trí đặc biệt) và tìm giao điểm S của chúng. Dự đoán điểm cố định là S. Ngoài ra, chúng ta có thể phán đoán, xác định điểm cố định bằng phần mềm Sketchpad bằng cách cho hoạt náo điểm di động.

Bước 3. Tìm hướng giải.

Dựa vào giả thiết để tìm mối quan hệ giữa điểm cố định S (dự đoán) và các yếu tố khác của đề bài.

Điểm cố định S của bài thông thường thuộc một đường cố định, cách một điểm cố định (đã có) một khoảng cách không đổi,...

Ví dụ 1. Trên đường tròn (O) lấy một điểm A cố định và một điểm B thay đổi. Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt đường tròn (O) tại C. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh CM luôn đi qua một điểm cố định.

Tìm hiểu đề toán

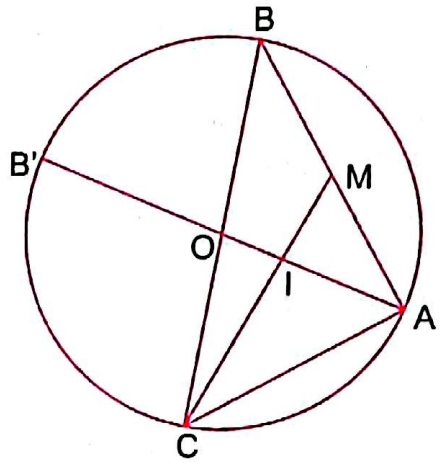
Yếu tố cố định: Các điểm O, A.

Yếu tố chuyển động: Điểm B, kéo theo điểm C, M.

Quan hệ không đổi: $AB \perp AC$, $MB = MC$.

Dự đoán điểm cố định

Lấy một vị trí đặc biệt của B là B' sao cho A, O, B' thẳng hàng. Khi $B \equiv B'$ thì $M \equiv O$ và $C \equiv A$. Đường thẳng CM trở thành đường thẳng AO. Gọi I là giao điểm của CM và AO, dự đoán I là điểm cố định.



Tìm hướng giải

Căn cứ vào hình vẽ, ta nhận thấy I là giao điểm các đường trung tuyến của tam giác ABC.

Lời giải. Nối OA cắt CM tại I. Do $AB \perp AC$ nên B, O, C thẳng hàng, suy ra I là trọng tâm của tam giác ABC, mà O, A cố định nên I cố định.

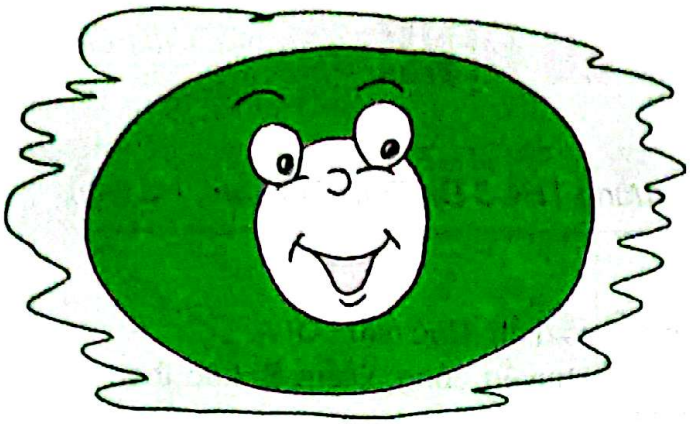
Vậy CM đi qua I là điểm cố định thuộc trung tuyến OA thỏa mãn $IA = 2IO$.

Nhận xét. Để xác định điểm cố định, ta nên lấy điểm đặc biệt (nếu có thể). Do đó ta lấy điểm B' là một điểm đặc biệt. Từ đó dễ phán đoán ra điểm cố định.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

- Điểm cố định thông thường sẽ nằm trên đường cố định. Do đó, dễ dàng dự đoán điểm cố định thuộc đường thẳng OA.



Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và một đường thẳng d cắt (O) tại C, D. Điểm M di động trên d sao cho $MC > MD$ và ở ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Tìm hiểu bài toán

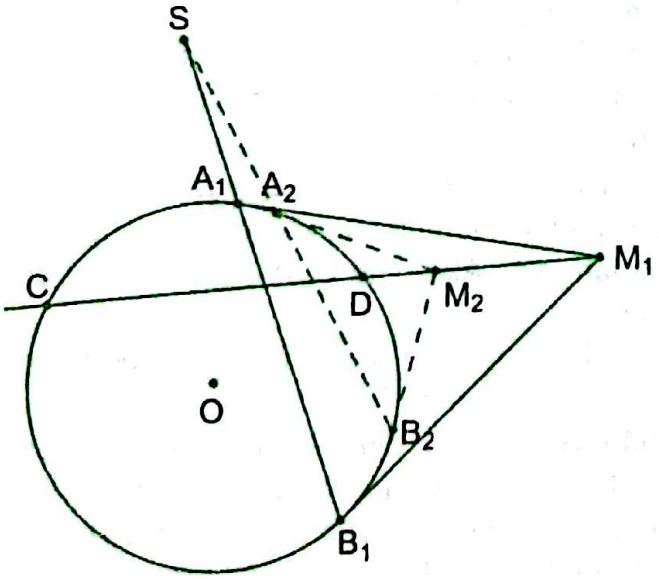
Yếu tố cố định: Đường tròn (O), đường thẳng d, kéo theo điểm C, D cố định.

Yếu tố chuyển động: Điểm M di động, kéo theo điểm A, B di động.

Quan hệ không đổi: $MA \perp OA$, $MB \perp OB$, $OM \perp AB$.

Dự đoán điểm cố định

Lấy hai vị trí của điểm M là M_1 và M_2 khi đó ta được hai đường thẳng A_1B_1 và A_2B_2 cắt nhau tại S, dự đoán S là điểm cố định.



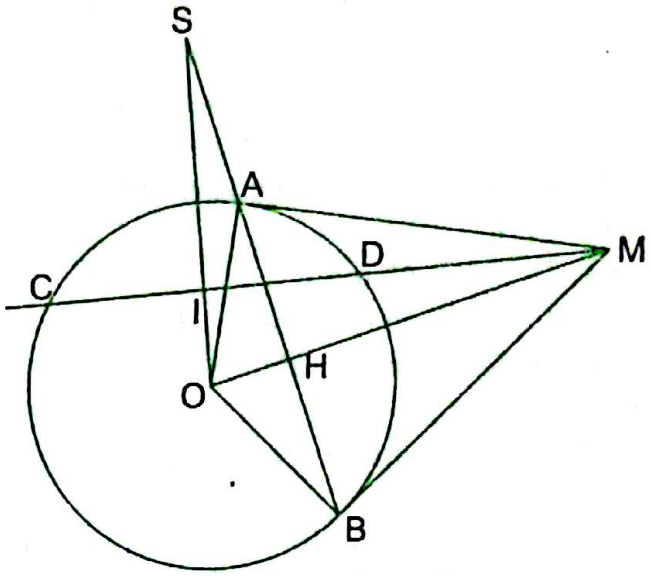
Tìm hướng giải

Quan sát hình vẽ, dự đoán $OS \perp CD$.

Do CD và O là yếu tố cố định, nên đường thẳng kẻ từ O vuông góc với CD là đường thẳng cố định. Vậy ta cần tính OS, để chứng tỏ S cách O một khoảng cách không đổi, từ đó suy ra S là điểm cố định.

Lời giải. Gọi H là giao điểm của AB và OM.

Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với CD tại I và cắt AB tại S, khi đó I là điểm cố định.



Các tam giác OIM và OHS đồng dạng nên $OI \cdot OS = OH \cdot OM$.

Tam giác OAM vuông tại A có AH là đường cao, suy ra $OA^2 = OH \cdot OM$.

Suy ra $OI \cdot OS = OA^2$, dẫn đến $OS = \dfrac{OA^2}{OI}$ không đổi. Do đó S là điểm cố định.

Nhận xét. Từ một điểm cố định kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng cố định là một đường cố định. Do đó ta tìm được điểm cố định S thuộc đường thẳng OI.

- Có thể thay đổi giả thiết thì điểm cố định cũng thay đổi. Chẳng hạn: Cho C, D, M cố định. Đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn qua C và D. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.
- Có thể chứng minh được tứ giác CDOH nội tiếp, mà C, O, D cố định nên ta có câu hỏi sau: Chứng minh khi M di động thì điểm H thuộc một đường tròn cố định.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O; R) có dây $BC < 2R$ cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC. BD và CE là các đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua A và vuông góc với DE luôn đi qua một điểm cố định.

Tìm hiểu đề toán

Yếu tố cố định: Đường tròn (O; R) và các điểm B, C.

Yếu tố chuyển động: Điểm A di động, kéo theo các điểm D, E di động.

Quan hệ không đổi: $BD \perp AC$, $CE \perp AB$.

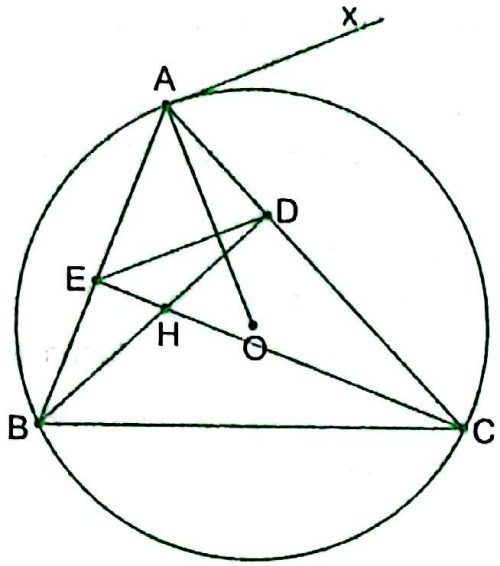
Dự đoán điểm cố định

Khi vẽ thì đường thẳng qua A và vuông góc với DE, nhận thấy đường thẳng này có thể đi qua O cố định.

Tìm hướng giải

Căn cứ vào dự đoán, ta chứng minh $AO \perp DE$.

Lời giải. Kẻ Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A thì $Ax \perp AO$ và $\widehat{CAx} = \widehat{ABC}$.



Dễ thấy tứ giác BCDE nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$.

Do đó $\widehat{CAx} = \widehat{ADE}$, suy ra Ax // DE.

Từ đó suy ra $AO \perp DE$.

Vậy đường thẳng qua A và vuông góc với DE luôn đi qua điểm O cố định.

Nhận xét. Thực chất bài toán này bắt nguồn từ bài toán chứng minh $AO \perp DE$. Như vậy nhiều bài toán chứng minh đi qua điểm cố định, bản chất là bài toán chứng minh quen thuộc.

- Nếu gọi M là trung điểm của BC thì ta có kết quả quen thuộc là AH // OM. Từ đó ta có một số câu hỏi sau:

+ Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE và vuông góc với DE luôn qua một điểm cố định.

+ Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua H và vuông góc với DE luôn đi qua một điểm cố định.

+ Tìm vị trí điểm A để diện tích tam giác ADE là lớn nhất.

- Ta cũng có thể mở rộng bài toán: Cho đường tròn (O; R) có dây $BC < 2R$ cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC và AH là đường cao của tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua A và vuông góc với MN luôn đi qua một điểm cố định.

Ví dụ 4. Cho đường tròn tâm O và điểm P cố định ở bên trong đường tròn (P khác O). Hai dây AB và CD thay đổi qua P và vuông góc với nhau. M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Tìm hiểu đề toán

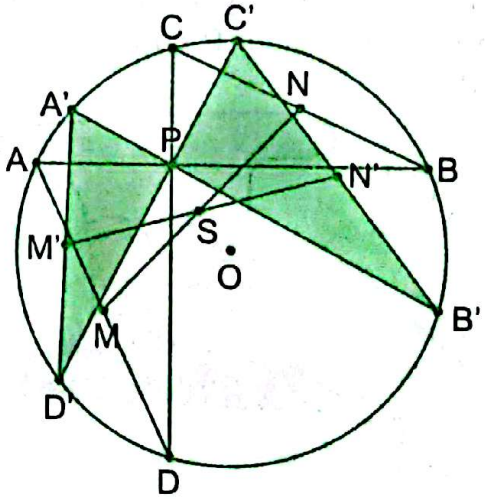
Yếu tố cố định: Điểm P và đường tròn (O).

Yếu tố chuyển động: Các dây cung AB, CD.

Quan hệ không đổi: $AB \perp CD$, $MA = MD$, $NB = NC$.

Dự đoán điểm cố định

Lấy hai vị trí của hai dây cung là $AB \perp CD$ và $A'B' \perp C'D'$ khi đó ta được hai đường thẳng MN và M'N' cắt nhau tại S, dự đoán S là điểm cố định.



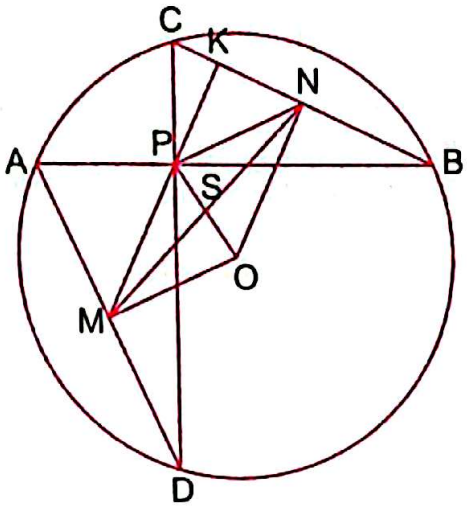
Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Tìm hướng giải

Quan sát hình vẽ, dự đoán S là trung điểm của OP và MN. Vậy ta sẽ chứng minh tứ giác MPNO là hình bình hành. Dễ dàng nhận thấy $ON \perp BC$ do đó ta tìm cách chứng minh $MP \perp BC$.

Lời giải. Giả sử MP cắt BC tại K.



Ta có $\overset{\frown}{PCK} = \overset{\frown}{PAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD).

$\overset{\frown}{PAM} = \overset{\frown}{APM}$ (do tam giác AMP cân tại M)

Suy ra $\overset{\frown}{PCK} = \overset{\frown}{APM}$.

Do đó $\overset{\frown}{PCK} + \overset{\frown}{CPK} = \overset{\frown}{APM} + \overset{\frown}{MPD} = 90^\circ$, dẫn đến $MP \perp BC$.

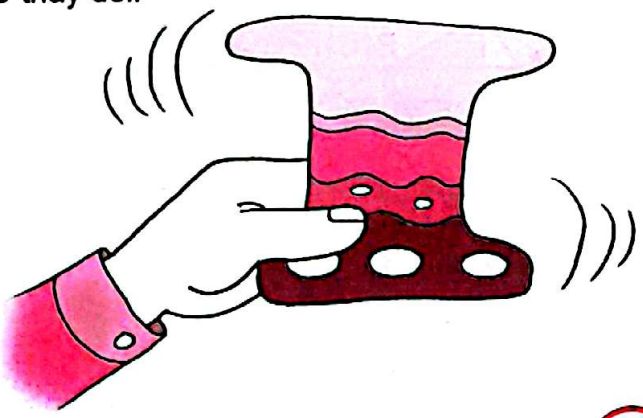
Kết hợp với $ON \perp BC$ ta được MP // ON.

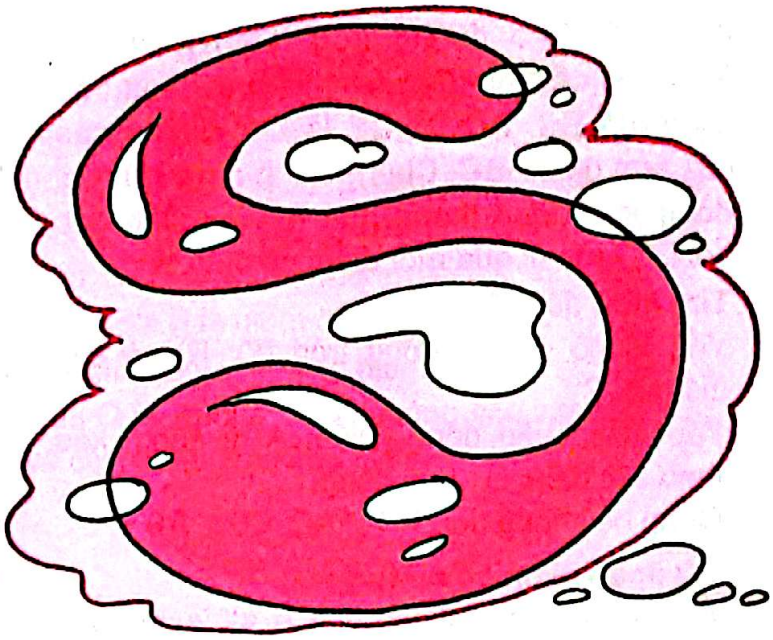
Chứng minh tương tự NP // OM.

Do đó tứ giác PMON là hình bình hành, suy ra OP và MN cắt nhau tại trung điểm I của PO mà O, P cố định nên I cố định.

Vậy MN luôn đi qua điểm I cố định.

Nhận xét. Bài toán gốc là chứng minh MP vuông góc với BC. Để xây dựng bài toán này, chúng ta đã tạo ra điểm P cố định, còn AB, CD thay đổi.





Ví dụ 5. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. M là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn (O), C là một điểm trên tia AM sao cho AC = BM. Chứng minh rằng đường thẳng d vuông góc với AM tại C luôn đi qua một điểm cố định.

Tìm hiểu đề toán

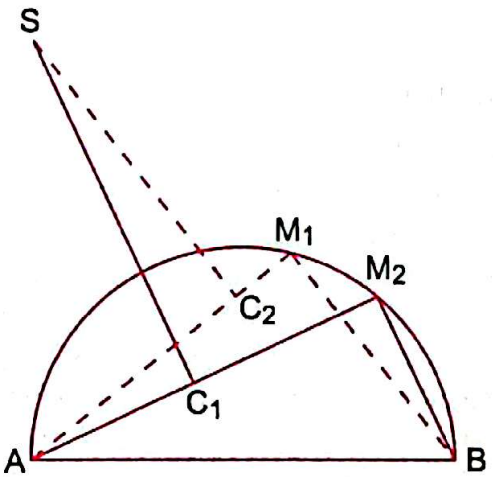
Yếu tố cố định: Điểm O, đường kính AB.

Yếu tố chuyển động: Điểm M, kéo theo điểm C và đường thẳng d.

Quan hệ không đổi: $AM \perp BM$, AC = BM, $d \perp AM$.

Dự đoán điểm cố định

Lấy hai vị trí của điểm M là M_1 và M_2 khi đó ta được hai vị trí C_1, C_2. Hai đường thẳng vuông góc kẻ từ C_1, C_2 cắt nhau tại S, dự đoán S là điểm cố định.



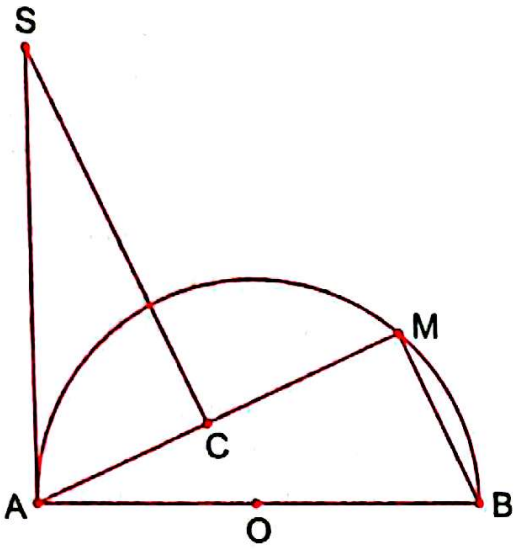
Tìm hướng giải

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Quan sát hình vẽ, dự đoán $AS \perp AB$ và $AS = AB$. Do đó, rất tự nhiên ta cần chứng minh $\Delta ACS = \Delta BMA$ để suy ra $AS = AB$.

Lời giải. Qua A kẻ đường thẳng d' vuông góc với AB, cắt đường thẳng d tại S, khi đó d' cố định.



Ta có $\Delta ACS = \Delta BMA$ (g.c.g)

nên $AS = AB$ (không đổi). Mà d' cố định, A cố định nên S là điểm cố định.

Nhận xét. Bản chất của bài toán này là phép quay tâm A, góc quay 90^o. Bài toán còn cách hỏi khác là: Khi điểm M di động thì điểm C chuyển động trên đường nào?

Ví dụ 6. Cho đường tròn tâm O và dây AB cố định, M là một điểm tuỳ ý trên cung AB. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng MB. Từ K kẻ KP vuông góc với đường thẳng AM tại P. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên cung AB thì đường thẳng KP luôn đi qua một điểm cố định.

Tìm hiểu đề toán

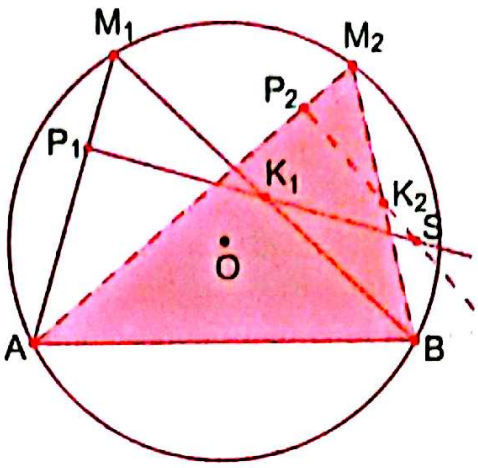
Yếu tố cố định: Đường tròn (O), dây cung AB.

Yếu tố chuyển động: Điểm M di động, kéo theo các điểm K, P di động.

Quan hệ không đổi: $KB = KM$, $KP \perp AM$.

Dự đoán điểm cố định

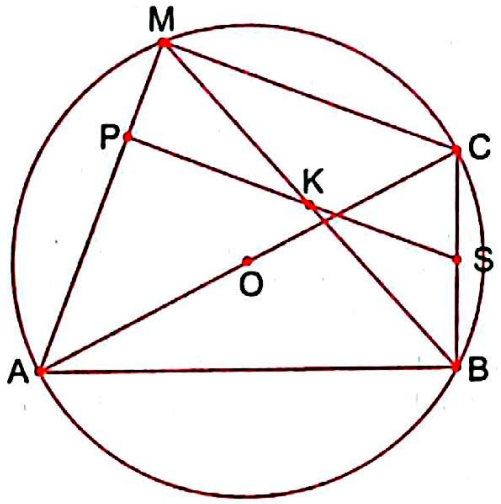
Lấy hai vị trí của điểm M là M_1 và M_2 ta được đường thẳng K_1P_1 và K_2P_2 cắt nhau tại S, dự đoán S là điểm cố định.



Tìm hướng giải

Quan sát hình vẽ, dự đoán $BS \perp BA$. Suy luận tự nhiên, ta kẻ đường kính AC, dự đoán S là trung điểm của BC.

Lời giải. Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Gọi S là giao điểm của KP và BC.



Dễ thấy PK // MC (do cùng vuông góc với AM), suy ra KS là đường trung bình của tam giác BCM nên SB = SC.

Do các điểm A, O cố định nên điểm C cố định.

Do các điểm B, C cố định nên trung điểm S của BC cố định.

Vậy đường thẳng KP luôn đi qua điểm S cố định.

Nhận xét. Có thể thay đổi đề bài chẳng hạn như:

- Chứng minh rằng khi M chuyển động trên cung AB thì P luôn nằm trên một đường tròn cố định.
- Tìm vị trí điểm M để độ dài đoạn thẳng BP là lớn nhất.

CS Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Một số bài toán vận dụng

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Trên đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, lấy điểm C sao cho $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi H là giao điểm thứ hai của đường thẳng BC với đường tròn (O).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AC, BC và khoảng cách từ A đến đường thẳng BC theo R.

b) Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng AC, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại điểm N (khác B). Chứng minh rằng bốn điểm C, M, N, H nằm trên cùng một đường tròn và tâm đường tròn đó luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài 2. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và A là điểm di động trên nửa đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu vuông góc của A trên BC và M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD.

a) Chứng minh CN vuông góc với AM.

b) Chứng minh các tam giác DMN và DBA đồng dạng.

c) Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với MN. Chứng minh rằng d luôn đi qua một điểm cố định.

d) Tìm vị trí của điểm A để đoạn MN có độ dài lớn nhất và tính độ dài lớn nhất đó theo R.

Bài 3. Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và AB < AC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O).

a) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.

b) Chứng minh rằng tứ giác BHCE là hình bình hành và HA · HD = HK · HM.

c) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC, HJ cùng đi qua một điểm.

d) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho điểm M bất kì trên nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Qua điểm H cố định trong đoạn OB, vẽ đường thẳng d vuông góc với AB. Gọi giao điểm của MA, MB và tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) với d lần lượt là D, C, I. Gọi E là giao điểm của AC và đường tròn (O). Gọi K là giao điểm OI và ME.

a) Chứng minh rằng IE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Cho M di chuyển trên đường tròn (M không trùng với A, B). Chứng minh rằng OI · OK không đổi và ME luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AB và điểm C ở trên nửa đường tròn. Dựng hình vuông ACDE sao cho D nằm cùng phía với điểm B bờ là đường thẳng AC. Chứng minh rằng khi C di động trên nửa đường tròn thì CE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không cắt (O). M là một điểm thay đổi trên d. Từ M vẽ hai tiếp tuyến MA và MB đến (O) (A, B là hai tiếp điểm). Chứng minh AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 7. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R). Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Dựng đường tròn tâm H bán kính HA cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng qua A vuông góc với MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng qua H vuông góc với MN luôn đi qua một điểm cố định.



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

NGUYỄN VĂN BẢN *(Trường THCS Thanh Yên, Điện Biên)*

Các bài toán trong chủ đề này thông thường là các bài tính toán các yếu tố hình học mà kiến thức sử dụng chủ yếu là hệ thức lượng trong tam giác vuông lồng ghép với tam giác đồng dạng. Với các mảng kiến thức này ta cũng có thể ứng dụng vào việc chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau, hai đường thẳng song song, các biểu thức có yếu tố hình học bằng nhau,... và ứng dụng trong việc giải quyết các bài toán thực tiễn.

1. Các bài toán liên quan đến tỉ số lượng giác của góc nhọn

Kiến thức cần nhớ: Các khái niệm sin, cos, tan, cot, tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, các hằng đẳng thức, các kĩ năng biến đổi biểu thức,...

Bài toán 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 0^\circ$.

2) $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ$.

3) $\dfrac{(\cot 44^\circ + \tan 46^\circ)\cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - \cot 72^\circ \tan 72^\circ$.

4) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \ldots + \sin^2 80^\circ$.

5) $\cos^2 10^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ$.

6) $\tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \ldots \tan 89^\circ$.

Lời giải. 1) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 0^\circ$

$= \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 0^2 = \dfrac{5}{4}$.

2) $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - 2.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{4\sqrt{3}-3}{3}$.

3) $\dfrac{(\cot 44^\circ + \tan 46^\circ)\cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - \cot 72^\circ \tan 72^\circ$

$= \dfrac{2\tan 46^\circ \cdot \cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1 = \dfrac{2\sin 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1 = 1$.

4) Sử dụng công thức $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, ta được $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \ldots + \sin^2 80^\circ$

$= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ)$

$+(\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) = 4$.

5) $\cos^2 10^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ$

$= (\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) = 2$.

6) Sử dụng công thức $\tan(90^\circ - x) = \cot x$, ta có $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$, suy ra $\tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \ldots \tan 89^\circ$

$= (\tan 1^\circ \tan 89^\circ)(\tan 2^\circ \tan 88^\circ)\ldots$

$\ldots(\tan 44^\circ \tan 46^\circ)\tan 45^\circ = 1$.

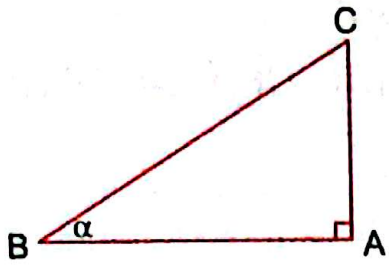
Bài toán 2. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh rằng $\sin\alpha < \tan\alpha$ và $\cos\alpha < \cot\alpha$.

Lời giải. Xét tam giác ABC vuông tại A, có

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

$\hat{B} = \alpha$.



Ta có $\sin\alpha = \frac{AC}{BC} < \frac{AC}{AB} = \tan\alpha$.

Chứng minh tương tự ta được $\cos\alpha < \cot\alpha$.

Bài toán 3. Không dùng máy tính cầm tay hoặc bảng số, hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác của các góc sau theo thứ tự tăng dần.

$\cot 40^\circ$, $\sin 50^\circ$, $\tan 70^\circ$, $\cos 55^\circ$.

Lời giải. Dễ chứng minh được rằng với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$ và $\alpha < \beta$ thì $\sin\alpha < \sin\beta$, $\cos\alpha > \cos\beta$, $\tan\alpha < \tan\beta$, $\cot\alpha > \cot\beta$.

Lại có $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$, $\cot 40^\circ = \tan 50^\circ$, áp dụng kết quả trên ta được $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ < \sin 50^\circ < \cot 40^\circ = \tan 50^\circ < \tan 70^\circ$.

Bài toán 4.

1) Cho $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Tìm $\tan 15^\circ$.

2) Cho $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\tan\alpha + 3\cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}$.

3) Cho $\tan\alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha}$.

4) Cho $\sin\alpha = \sqrt{2} - 1$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\tan\alpha - 2\cot\alpha}{\cos\alpha}$.

5) Cho $3\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

6) Biết $\sin x + \cos x = m$. Tính $\left|\sin^4 x - \cos^4 x\right|$.

Lời giải.

1) Ta có

$$\tan^2 15^\circ = \frac{1}{\cos^2 15^\circ} - 1 = \frac{4}{2+\sqrt{3}} - 1 = (2-\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

2) $A = \dfrac{\tan\alpha + 3\dfrac{1}{\tan\alpha}}{\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha}} = \dfrac{\tan^2\alpha + 3}{\tan^2\alpha + 1}$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + 2}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = 1 + 2\cos^2\alpha = 1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{17}{9}.$$

3) Do $\tan\alpha = 3$ nên $\cos\alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của B cho $\cos^3\alpha \neq 0$, ta được

$$B = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \dfrac{3\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \dfrac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}}$$

$$= \frac{\tan\alpha(\tan^2\alpha + 1) - (\tan^2\alpha + 1)}{\tan^3\alpha + 3 + 2\tan\alpha(\tan^2\alpha + 1)}$$

$$= \frac{3(9+1) - (9+1)}{27 + 3 + 2\cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}.$$

4) Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos\alpha > 0$.

Ta có $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

$$= \sqrt{1 - (\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)},$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}},$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \sqrt{2(\sqrt{2}+1)}.$$

Do đó

$$A = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}} - 2\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}} = -\frac{4\sqrt{2}+3}{2}.$$

5) Ta có $3\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 3\sin^4\alpha - (1 - \sin^2\alpha)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^4\alpha + 4\sin^2\alpha - 3 = 0$$

$\Leftrightarrow (2\sin^2\alpha - 1)(2\sin^2\alpha + 3) = 0$, suy ra

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Do đó $A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

6) Ta có

$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$

hay $m^2 = 1 + 2\sin x\cos x$, suy ra

$\sin x\cos x = \frac{m^2-1}{2}$.

$\left|\sin^4 x - \cos^4 x\right|$.

$= \left|(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)\right|$

$= \left|(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)\right|$

$= |m|\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |m|\sqrt{1-2\sin x\cos x}$

$= |m|\sqrt{1-(m^2-1)} = |m|\sqrt{2-m^2}$.

Bài toán 5. Chứng tỏ giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

$M = \cos^6 x + 2\sin^6 x + \sin^4 x\cos^2 x$

$+4\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x$.

Lời giải.

$M = (\sin^6 x + \cos^6 x) + \sin^4 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$+4\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

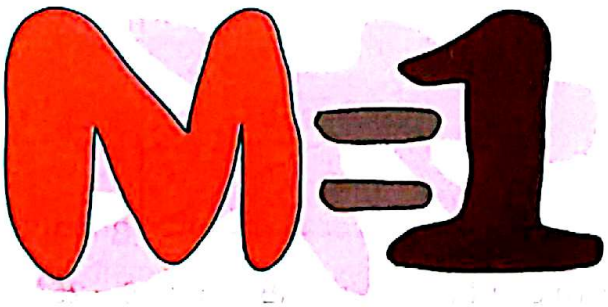
$+\sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 + \sin^2 x(1-\sin^2 x) + \sin^4 x - \sin^2 x$

$= 1 + \sin^2 x - \sin^4 x + \sin^4 x - \sin^2 x = 1$.

Chứng tỏ giá trị của biểu thức M không phụ thuộc vào x.



Bài toán 6. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $1 + \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$.

b) $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{2}{\cos x}$.

Lời giải. a) $1 + \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x$

$= 1 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}$

$= \frac{\cos^3 x + \sin x\cos^2 x + \sin^2 x\cos x + \sin^3 x}{\cos^3 x}$

$= \frac{(\cos^3 x + \sin^3 x) + \sin x\cos x(\cos x + \sin x)}{\cos^3 x}$

$= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^3 x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$

b) $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}$

$= \frac{\cos x(1-\sin x) + \cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$

$= \frac{\cos x - \sin x\cos x + \cos x + \sin x\cos x}{\cos^2 x}$

$= \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}$.

2. Một số bài toán liên quan đến hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Ngoài các công thức trong SGK Toán 9 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống), bằng cách sử dụng kiến thức tam giác đồng dạng để chứng minh, ta cũng có được các công thức sau:

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có $AB^2 = BH\cdot BC$, $AC^2 = CH\cdot BC$,

$AH\cdot BC = AB\cdot AC$, $BH\cdot CH = AH^2$,

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

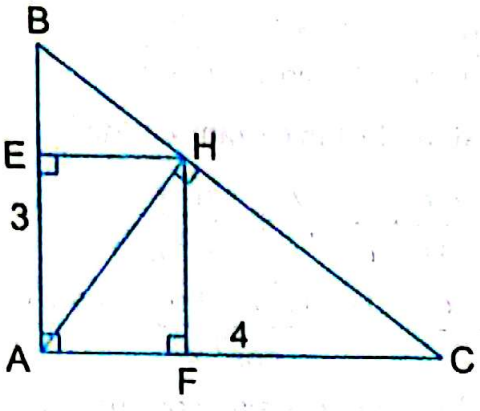
Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 3 cm, AC = 4 cm, đường cao AH. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Tính diện tích tứ giác AEHF.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Lời giải.

Ta có $AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = 2,4$ (cm).



Từ $AE \cdot AB = AF \cdot AC = AH^2$, suy ra

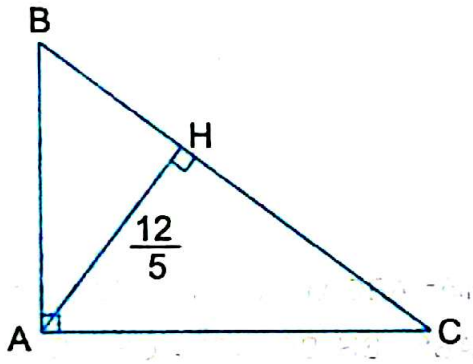
$AE = \dfrac{AH^2}{AB}$, $AF = \dfrac{AH^2}{AC}$.

Dễ thấy tứ giác AEHF là hình chữ nhật nên

$S_{AEHF} = AE \cdot AF = \dfrac{AH^4}{AB \cdot AC} = \dfrac{2,4^4}{3 \cdot 4} = 2,7648$ (cm^2).

Bài toán 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 5$ cm, đường cao $AH = \dfrac{12}{5}$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH và CH.

Lời giải. Giả sử $BH \le CH$.



Ta có $(CH - BH)^2 = (CH + BH)^2 - 4CH \cdot BH$

$= BC^2 - 4AH^2 = 5^2 - 4 \cdot \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 = \dfrac{49}{25}$.

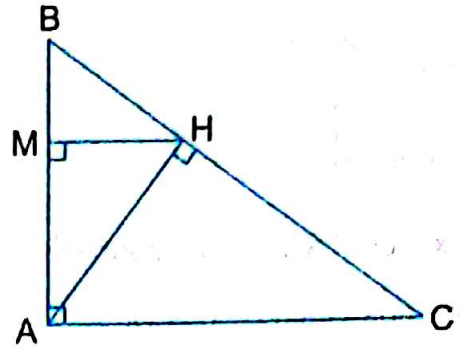
Suy ra $CH - BH = \dfrac{7}{5}$.

Kết hợp với $BH + HC = BC = 5$ ta được

$CH = \dfrac{16}{5}$ (cm), $BH = \dfrac{9}{5}$ (cm).

Bài toán 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HM vuông góc với AB tại M. Chứng minh rằng $BM = \dfrac{AB^3}{BC^2}$.

Lời giải. Tam giác AHB vuông tại H có $BM = \dfrac{BH^2}{AB}$.



Tam giác ABC vuông tại A có $BH = \dfrac{AB^2}{BC}$.

Do đó $BM = \dfrac{AB^4}{AB \cdot BC^2} = \dfrac{AB^3}{BC^2}$.

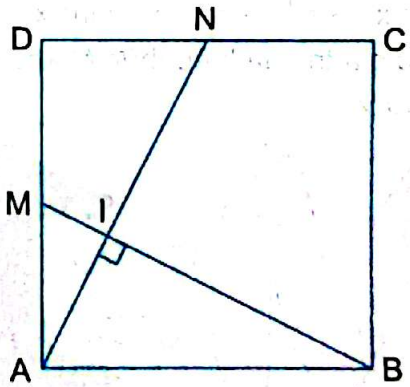
Bài toán 4. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $2\sqrt{5}$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC và I là giao điểm của AN với BM.

a) Chứng minh rằng AN vuông góc với BM.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng MI, AI và diện tích tứ giác BINC.

Lời giải. a) $\Delta ADN = \Delta BAM$ (c.g.c) nên $\widehat{DAN} = \widehat{ABM}$.

Do đó $\widehat{MAI} + \widehat{AMI} = \widehat{ABM} + \widehat{AMB} = 90^\circ$, suy ra $AN \perp BM$.



b) Ta có $BM^2 = AM^2 + AB^2 = 5 + 20 = 25$,

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

suy ra $BM = 5$ (cm).

$$MI = \frac{AM^2}{MB} = \frac{(\sqrt{5})^2}{5} = 1 \text{ (cm)}.$$

$$AI^2 = AM^2 - MI^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow AI = 2 \text{ (cm)}.$$

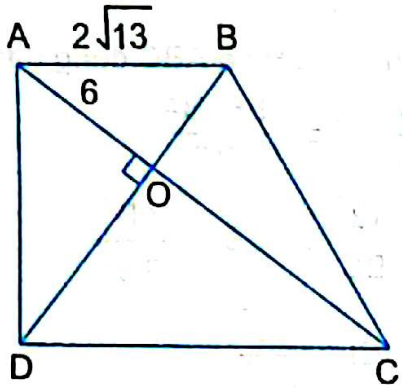
$$S_{BCNI} = S_{BCN} + S_{BIN} = \frac{1}{2}(BC \cdot CN + BI \cdot IN)$$

$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot 3) = 11 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài toán 5. Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O. Biết $AB = 2\sqrt{13}$, $OA = 6$. Tính diện tích hình thang.

Lời giải. Tam giác AOB vuông tại O có

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 6^2} = 4.$$



Tam giác ABD vuông tại A, đường cao AO có

$$BD = \frac{AB^2}{OB} = \frac{(2\sqrt{13})^2}{4} = 13,$$

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - (2\sqrt{13})^2} = 3\sqrt{13}.$$

Tam giác ADC vuông tại D có

$$AC = \frac{AD^2}{OA} = \frac{(3\sqrt{13})^2}{6} = \frac{39}{2},$$

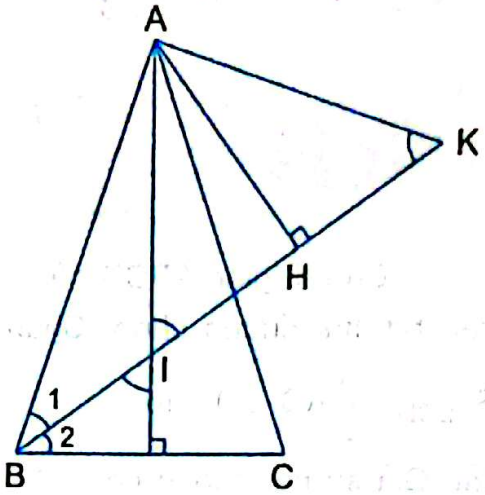
$$DC = \frac{OD \cdot AC}{AD} = \frac{9 \cdot 19{,}5}{3\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{2}.$$

Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD(AB + DC)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{13}\left(2\sqrt{13} + \frac{9\sqrt{13}}{2}\right) = 126{,}75.$$

Bài toán 6. Cho tam giác ABC cân tại A có I là giao điểm của các đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$, $IB = 3$. Tính độ dài cạnh AB.

Lời giải. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AB, đường thẳng này cắt BI tại K.



Ta có $\widehat{AIK} = 90^\circ - \widehat{B_2} = 90^\circ - \widehat{B_1} = \widehat{AKI}$, suy ra tam giác IAK cân tại A.

Kẻ $AH \perp BK$ tại H thì $IH = HK$.

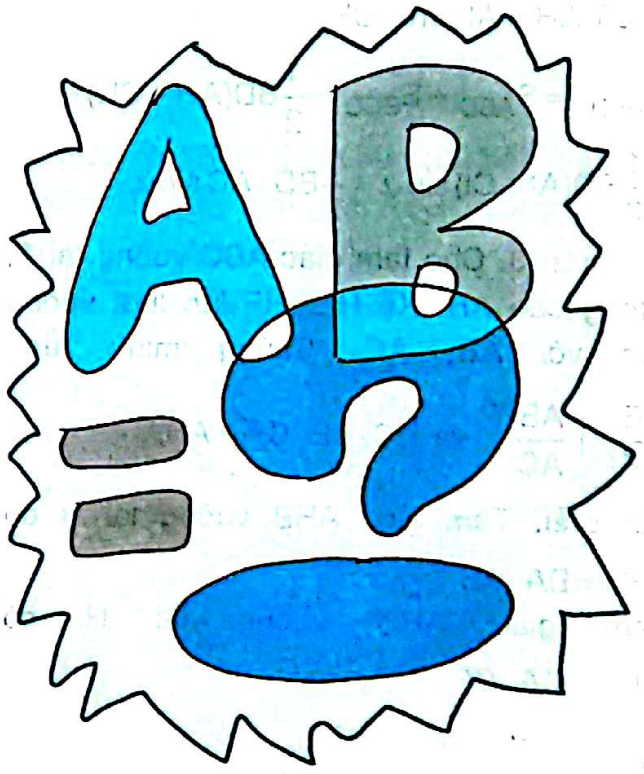
Tam giác ABK vuông tại A có $AK^2 = KH \cdot KB$

hay $KH \cdot (2KH + IB) = AI^2$

hay $2KH^2 + 3KH - 20 = 0$.

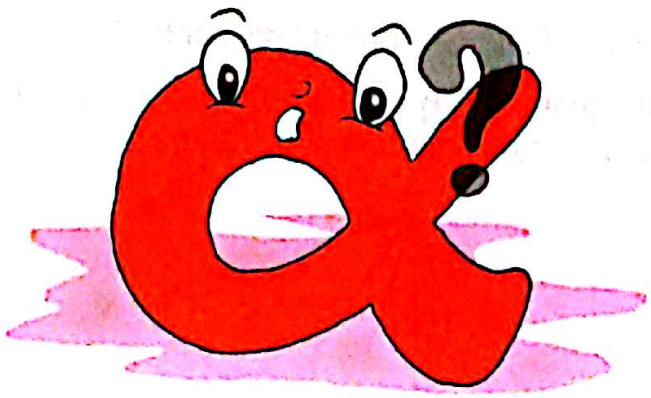
Từ đây ta tìm được $KH = \frac{5}{2}$, suy ra $KB = 8$.

Từ đó $AB = \sqrt{BK^2 - AK^2} = \sqrt{8^2 - 20} = 2\sqrt{11}$.



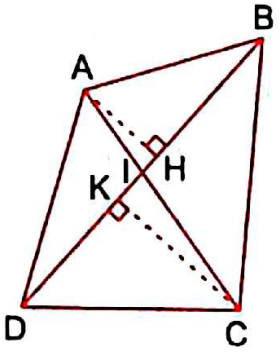
CS Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



Bài toán 7. Cho tứ giác ABCD có α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo. Chứng minh rằng $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\alpha$.

Lời giải. Giả sử hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I có $\widehat{AIB} = \alpha$ là góc nhọn. Kẻ đường cao AH của tam giác ABD và đường cao BK của tam giác BCD.



Ta có $AH = AI\sin\alpha$, $CK = CI\sin\alpha$.

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD(AH + CK)$$

$$= \frac{1}{2}BD(AI + CI)\sin\alpha = \frac{1}{2}BD \cdot AC\sin\alpha.$$

Bài toán 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh rằng $\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$ và $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$.

Lời giải. Tam giác AHB vuông tại H có $BH^2 = BA \cdot BE$.

Tam giác AHC vuông tại H có $CH^2 = CA \cdot CF$.

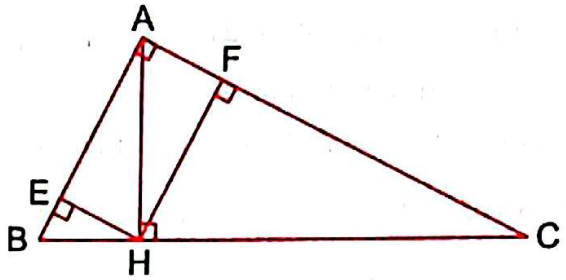
Suy ra $\frac{BH^2}{CH^2} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BE}{CF}$. (1)

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH có $BH = \frac{AB^2}{BC}$, $CH = \frac{AC^2}{BC}$, suy ra

$\frac{BH^2}{CH^2} = \frac{AB^4}{AC^4}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{AC} \cdot \frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^4$ hay

$\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$.



Các tam giác EBH và ABC đồng dạng nên

$\frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BE = \frac{BH \cdot BA}{BC}$.

Mà $BH = \frac{AB^2}{BC}$ nên $BE = \frac{AB^3}{BC^2}$.

Tương tự, $CF = \frac{AC^3}{BC^2}$.

Do đó $BC \cdot BE \cdot CF = BC \cdot \frac{AB^3}{BC^2} \cdot \frac{AC^3}{BC^2}$

$= \left(\frac{AB \cdot AC}{BC}\right)^3 = AH^3$.

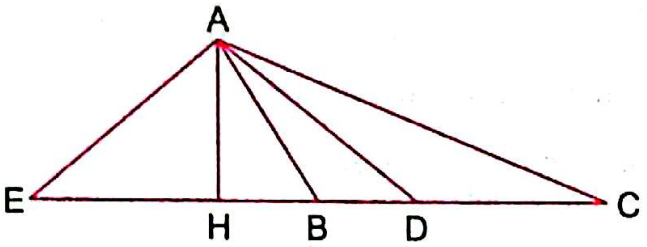


CS Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Bài toán 9. Cho tam giác ABC có $BC = 40$ cm, đường phân giác $AD = 45$ cm, đường cao $AH = 36$ cm. Tính các độ dài các đoạn BD và CD.

Lời giải. Tam giác AHD vuông tại H có $HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{45^2 - 36^2} = 27$ (cm).



Dựng phân giác ngoài của góc BAC cắt BC tại E thì $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DH \cdot DE$.

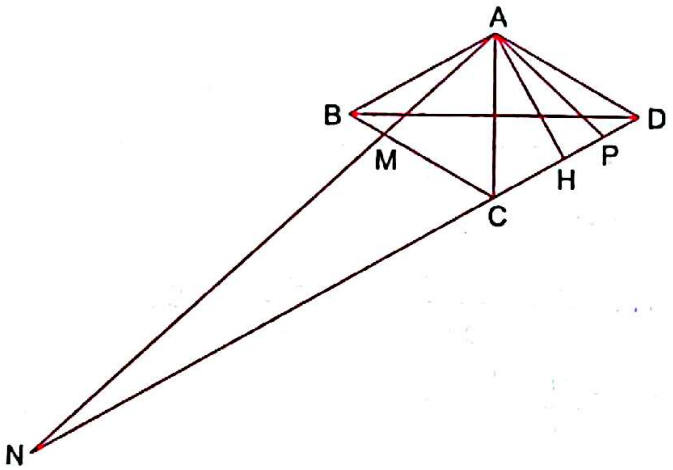
Suy ra $DE = \dfrac{AD^2}{DH} = \dfrac{45^2}{27} = 75$ (cm).

Sử dụng tính chất đường phân giác với tam giác ABC ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{75 - DB}{75 + DC}$.

Kết hợp với $DB + DC = 40$ ta tìm được $DB = 15$ cm và $DC = 25$ cm.

Bài toán 10. Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 120^\circ$, tia Ax tạo với tia AB góc $\widehat{BAx} = 15^\circ$ đồng thời cắt đoạn BC và CD kéo dài lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{4}{3AB^2}$.

Lời giải



Từ A dựng đường thẳng vuông góc với AN, cắt CD tại P. Kẻ AH vuông góc với CD tại H.

Dễ thấy $\Delta ABM = \Delta ADP$ (g.c.g) nên $AM = AP$.

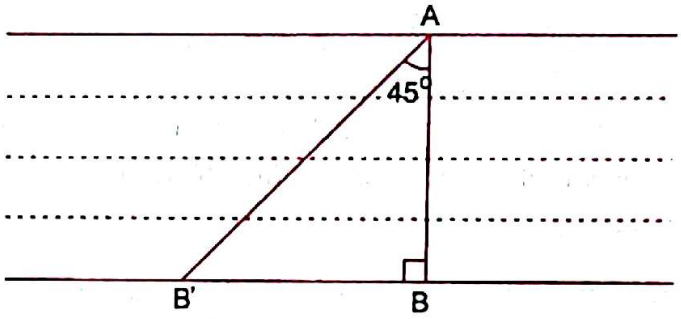
Tam giác APN vuông tại A, đường cao AH có $\dfrac{1}{AP^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{AH^2}$ hay $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{AH^2}$.

Lại có $AH = AD \sin D = AB \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} AB$.

Do đó $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} AB\right)^2} = \dfrac{4}{3AB^2}$.

3. Một số bài toán thực tiễn

Bài toán 1. Một người muốn chèo thuyền từ bờ sông này (tại điểm A) sang bờ sông kia (tại điểm B) theo đoạn thẳng AB dài 50 m. Do dòng nước chảy mạnh nên người đó đã phải chèo thuyền lệch một góc 45° so với phương ban đầu. Hỏi khi sang bờ sông bên kia thì thuyền cách vị trí dự định ban đầu B bao xa?



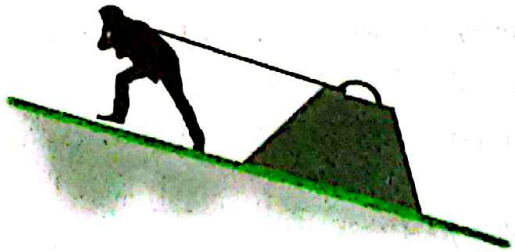
Lời giải. Gọi B' là điểm đến (bờ bên kia) của thuyền. Dễ thấy tam giác ABB' vuông cân tại B nên $BB' = AB = 50$ (m).

Vậy khi sang sông, thuyền cách vị trí dự định 50 m.



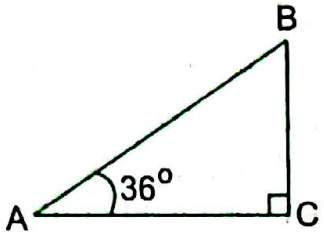
Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner



Bài toán 2. Người ta kéo một vật lên cao 5 m bằng một mặt phẳng nghiêng tạo với phương nằm ngang một góc 36°. Hỏi chiều dài của mặt phẳng nghiêng là bao nhiêu?

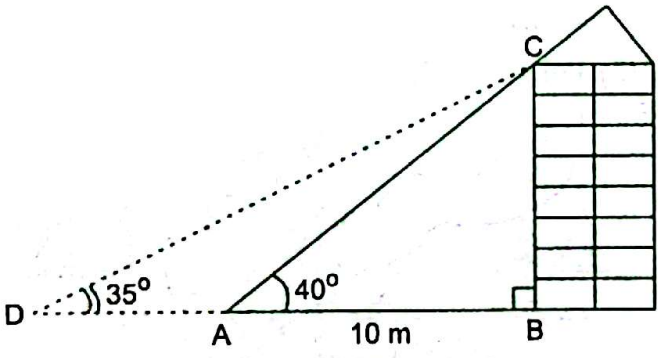
Lời giải. Giả sử chiều dài mặt phẳng nghiêng là đoạn thẳng AB, chiều cao cần đưa vật lên là đoạn BC và góc tạo bởi mặt phẳng nghiêng và phương nằm ngang là $\widehat{BAC} = 36^\circ$.



Chiều dài của mặt phẳng nghiêng là

$$AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{5}{\sin 36^\circ} \approx 8{,}507 \text{ (m)}.$$

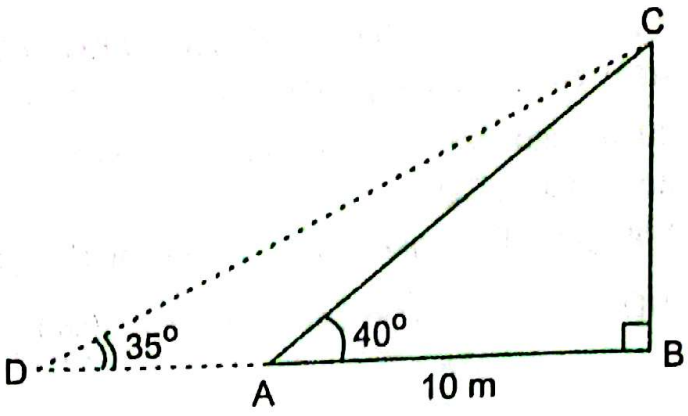
Bài toán 3. Bạn An đứng cách một tòa nhà một khoảng 10 m. Góc nâng từ chỗ bạn An đứng đến đỉnh tòa nhà là 40°. Hỏi nếu An di chuyển sao cho góc nâng là 35° thì An cách tòa nhà bao xa? (làm tròn hai chữ số thập phân, biết rằng An chỉ tiến tới hoặc lùi lại).



Lời giải. Tam giác ABC vuông tại B có

$\tan\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$, suy ra

$BC = AB\tan\widehat{BAC} = 10\tan 40^\circ$.

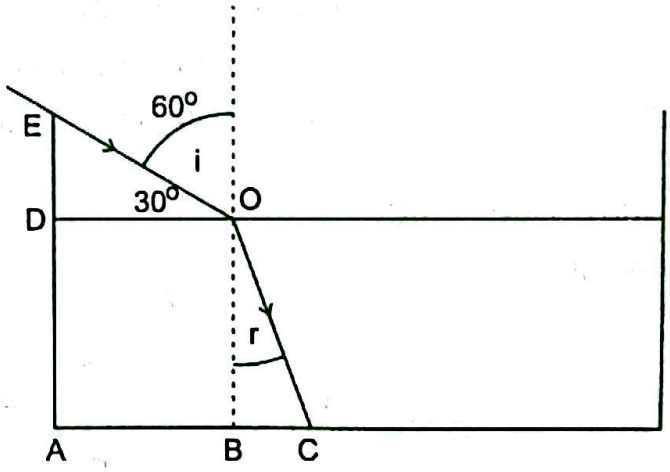


Tam giác BCD vuông tại B có

$\tan\widehat{BDC} = \dfrac{BC}{DB}$, suy ra

$$DB = \frac{BC}{\tan\widehat{BDC}} = \frac{10\tan 40^\circ}{\tan 35^\circ} \approx 11{,}98 \text{ (m)}.$$

Bài toán 4. Một bể nước có thành cao 80 cm, mực nước đo được trong bể cao 60 cm, ánh sáng mặt trời chiếu lệch một góc 30° so với mặt nước. Biết khi chiếu tia sáng với góc tới I thì qua mặt nước sẽ có góc khúc xạ r tính theo công thức $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{4}{3}$ (tia sáng như hình vẽ). Tính độ dài bóng của thành bể in dưới đáy bể.



Lời giải. Ta có

$$AB = DO = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = \frac{20}{\tan 30^\circ} = 20\sqrt{3}.$$

Từ $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{4}{3}$ ta có

$$\sin r = \frac{3}{4}\sin i = \frac{3}{4}\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Suy ra $\cot^2 r = \frac{1}{\sin^2 r} - 1 = \frac{64}{27} - 1 = \frac{37}{27}$

$\Rightarrow \tan r = \sqrt{\frac{27}{37}}$.

Do đó $BC = BO \tan r = 60\sqrt{\frac{27}{37}} = \frac{180\sqrt{111}}{37}$.

Vậy chiều dài bóng của thành bể in dưới đáy bể là $AB + BC = 20\sqrt{3} + \frac{180\sqrt{111}}{37}$ (cm).

Bài tập tự luyện

1. Biết $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính

$\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$.

2. Rút gọn biểu thức

$B = \frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

3. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

$P = \frac{1}{1+\tan^2 x} + \sin^2(180^\circ - x) + \cos(90^\circ - x)$

$-\sin x + \tan^2(90^\circ - x) + 1 - \frac{1}{\sin^2 x}$.

$Q = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 - 2$.

$R = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x)$

$+6\sin^4 x$.

$S = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2$

$-(\sin^8 x + \cos^8 x)$.

4. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần:

$\sin 49^\circ$, $\cot 15^\circ$, $\tan 65^\circ$, $\cos 50^\circ$, $\cot 41^\circ$.

6. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 9$, $\hat{A} = 68^\circ$. Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC.

7. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, biết $HB = 6$, $HC = 16$. Tính số đo góc B và góc C.

8. Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác trong AD, phân giác ngoài AE. Cho biết $AB < AC$. Chứng minh các hệ thức sau:

$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$ và $\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AE}$.

9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM. Chứng minh các hệ thức sau: $\frac{MH}{BH} = 2\left(\frac{BM}{AB}\right)^2 - 1$ và

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$.

10. Cho hình bình hành ABCD có $AD = 4{,}3$ cm, $DC = 7{,}5$ cm và $\hat{D} = 64^\circ$. Tính diện tích hình bình hành ABCD.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao $AH = h$. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của HB, HC. Gọi F là trực tâm của tam giác ADE. Tính theo h độ dài đoạn thẳng HF.

12. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác BD, đường trung tuyến CE, đường cao AH đồng quy.

a) Chứng minh rằng $AB = HC$.

b) Tính AD biết $BD = x$, $DC = y$.



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ TỰ LUYỆN OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ

ĐỀ THI CÁ NHÂN TRUNG HỌC CƠ SỞ

Thời gian làm bài: *60 phút*

Từ câu 1 đến câu 12 chỉ ghi đáp số; câu 13, 14 và 15 viết lời giải đầy đủ.

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

ĐỀ BÀI	ĐÁP SỐ
Câu 1. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $n^4 - 23n^2 + 169$ là số nguyên tố.	
Câu 2. Có bao nhiêu cặp số tự nhiên (a, b) thỏa mãn: $7a + 3b = 2037$?	
Câu 3. Tìm các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn $x^2(y^2 + 1) = 2y^2 + 6x - 9$.	
Câu 4. Mỗi tháng lương của anh Hồng nhiều hơn lương của chị Hà là 400 000 đồng. Sau khi chị Hà tiêu hết 25% lương và anh Hồng tiêu hết $\frac{2}{7}$ lương thì số tiền còn lại của hai người bằng nhau. Hỏi tiền lương hàng tháng của mỗi người là bao nhiêu?	
Câu 5. Cho các số a, b, c, d thỏa mãn: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 2021$ và $ab + cd = 0$. Tính giá trị của biểu thức $a^5c^5 + b^5d^5$.	
Câu 6. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^4 + 32x$.	
Câu 7. Cho a, b, c khác –2 thỏa mãn $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = a + b + c + 5$. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2}$.	
Câu 8. Cô Quyên có số hộp bút màu ít hơn 11 gồm hai loại: loại 1 mỗi hộp có 12 bút, loại 2 mỗi hộp có 10 bút. Số bút có tất cả là	

Được quét bằng CamScanner

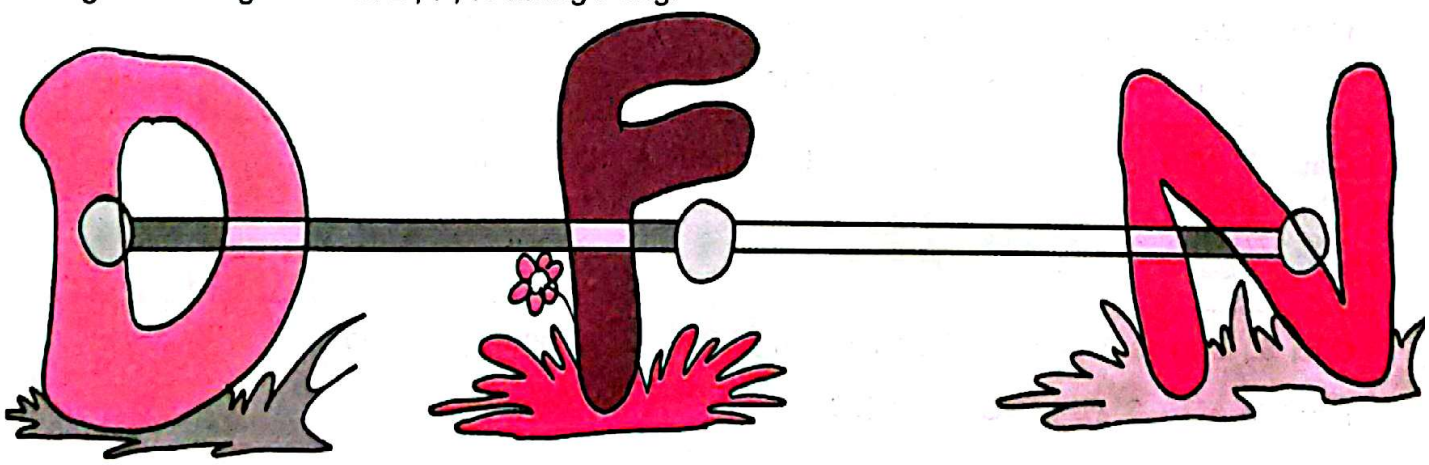
Được quét bằng CamScanner

114 chiếc. Hỏi mỗi loại có bao nhiêu hộp?	
Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 6 cm, AC = 8 cm. Các đường phân giác BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại I. Tính diện tích của tam giác IBC.	
Câu 10. Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến. N là điểm trên đoạn thẳng AM sao cho AM = 3AN. Đường thẳng d qua N cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Tính $\frac{AB}{AD}+\frac{AC}{AE}$.	
Câu 11. Cho tứ giác ABCD. Trên tia đối của tia AB lấy E sao cho AE = 2AB, trên tia đối của tia BC lấy F sao cho BF = 2BC, trên tia đối của tia CD lấy G sao cho CG = 2CD, trên tia đối của tia DA lấy H sao cho DH = 2DA. Tính tỉ số $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}}$.	
Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC=\frac{BC}{2}$. Trên cạnh BC lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{CAD}=15^o$, $\widehat{CAE}=75^o$. Tính tỉ số $\frac{AD}{BE}$.	

Câu 13. Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn 2x + y, x + 2y là các số chính phương. Tìm số dư của phép chia xy cho 9.

Câu 14. Giải phương trình: $(x-1)^5+2x(x^2-3x+3)=50$.

Câu 15. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng qua E song song với BC, cắt AD tại M. Đường thẳng qua A song song với BC cắt CM tại N. Chứng minh rằng ba điểm D, F, N thẳng hàng.



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ TỰ LUYỆN OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ

ĐỀ THI CÁ NHÂN TRUNG HỌC CƠ SỞ

Thời gian làm bài: ***60 phút***

Từ câu 1 đến câu 12 chỉ ghi đáp số; câu 13, 14 và 15 viết lời giải đầy đủ.

CAO VĂN DŨNG *(Trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)*

ĐỀ BÀI	ĐÁP SỐ
Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thoả mãn $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3$?	
Câu 2. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất $M=\overline{7a_1a_2...a_n}=5.\overline{a_1a_2...a_n}$.	
Câu 3. Cho tam giác ABC, M di động trên AC. Hai điểm P, Q lần lượt thuộc AB, AC sao cho: $\frac{AP}{AB}=\frac{4}{5};\frac{BQ}{BC}=\frac{1}{5}$. Tính tổng diện tích hai tam giác APM và BQM biết $S_{\Delta ABC}=10\ cm^2$.	
Câu 4. Cho các số không âm a, b thỏa mãn $a^4+b^4=162$ và $a^3+b^3=54$. Tính $P=a+2021b$.	
Câu 5. Cho tam giác ABC, trung tuyến AK, M thuộc AC sao cho $S_{\Delta MCK}$ bằng $\frac{1}{2}$ diện tích tứ giác AMKB. Tính $\frac{AM}{MC}$.	
Câu 6. Biết rằng (a – b + 2021), (b – c + 2021), (c – a + 2021) là ba số nguyên liên tiếp. Ba số nguyên đó là số nào?	
Câu 7. Có bao nhiêu bộ số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c}=1$?	
Câu 8. Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 12 và phân giác của $\widehat{BAC}$ là AD = 3, (D ∈ BC). Tính BC.	

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Câu 9. Biết a = 123456789, b = 987654321. Tìm số dư khi chia BCNN(a, b) cho 11.	
Câu 10. Biết rằng có 168 số nguyên tố nhỏ hơn 1000. Hỏi có bao nhiêu hợp số nhỏ hơn 1000 mà không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 2; 3; 5?	
Câu 11. Có bao nhiêu bộ số (x, y) với x, y nguyên thỏa mãn: $x^3 - y^3 - 4xy + 1 = 0$?	
Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, BC = 12, $AH = \sqrt{32}$. Tính $\frac{AB}{AC}$ biết AB < AC.	

Câu 13. Tìm số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.

Câu 14. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{n^3+5n+1}{n^4+6n^2+n+5} = \frac{85}{361}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trung tuyến AM, N là trung điểm của AM, BN cắt AC tại T. Biết AB = 4 cm, AC = 3 cm. Tính chu vi tam giác ANT.



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ TỰ LUYỆN OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ

ĐỀ THI CÁ NHÂN TRUNG HỌC CƠ SỞ

Thời gian làm bài: *60 phút*

Từ câu 1 đến câu 12 chỉ ghi đáp số; câu 13, 14 và 15 viết lời giải đầy đủ.

HOÀNG VIỆT DŨNG *(Trường THCS Đặng Thai Mai, Nghệ An)*

ĐỀ BÀI	ĐÁP SỐ
Câu 1. Cho số thực $x \neq 0$ thỏa mãn $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2$. Khi đó giá trị biểu thức $x + \frac{1}{x}$ là:	
Câu 2. Cho $(x+3)(x-a) = x^2 - bx - 15$ với mọi giá trị của x. Hiệu $a-b$ bằng:	
Câu 3. Cho $x, y \neq 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$. Tính giá trị của biểu thức $x^{2020} + y^{2020}$ được kết quả bằng:	
Câu 4. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của phân thức $B = \frac{2x+1}{x^2+2}$. Tổng $M+m$ bằng:	
Câu 5. Giả sử $a \oplus b = 3a + b$. Hỏi x bằng bao nhiêu biết $2 \oplus (x \oplus 1) = 1$.	
Câu 6. Cho A, B, C, D là các số tự nhiên thỏa mãn $A + \frac{1}{B + \frac{1}{C + \frac{1}{D}}} = \frac{43}{30}$. Tính $A+B+C+D$ ta được kết quả bằng:	
Câu 7. Nếu $a \oplus b = a + b - 1$ và $a * b = (a+b)^2$ thì giá trị của $(3 \oplus 5) + 3(5 * 7)$ là:	

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Câu 8. Bà Bình thường xuyên nhận được cuộc gọi từ ba người cháu. Người cháu thứ nhất cứ 3 ngày thì gọi một lần. Người cháu thứ hai cứ 4 ngày thì gọi một lần. Người cháu thứ ba cứ 5 ngày thì gọi một lần. Vào ngày 31 tháng 12 năm 2020, bà Bình nhận được cuộc gọi từ cả ba người cháu. Hỏi trong năm tiếp theo, có bao nhiêu ngày mà bà Bình không nhận được cuộc gọi từ bất kì người cháu nào?	
Câu 9. Cho tứ giác ABCD có $AB = AC$, $CB = CD$ và $\hat{A} = 100^o$, $\hat{C} = 60^o$. Số đo của góc B là:	
Câu 10. Một sàn nhà hình vuông được lát vừa đủ bởi những viên gạch hình vuông có cùng kích thước $40\,cm \times 40\,cm$. Nếu tổng số viên gạch nằm trên hai đường chéo là 37 thì diện tích sàn nhà đó là bao nhiêu mét vuông?	
Câu 11. Đường cao của một tam giác vuông xuất phát từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 9cm và 16cm. Chu vi của tam giác vuông này là:	
Câu 12. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12\ cm, AC = 16\ cm$. Đường phân giác của góc A cắt BC tại D. Độ dài đoạn thẳng AD bằng:	

Câu 13. Cho các số thực a, b thỏa mãn

$$\begin{cases} a^3 - 6a^2 + 15a = 9 \\ b^3 - 3b^2 + 6b = -1. \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $(a-b)^{2025}$.

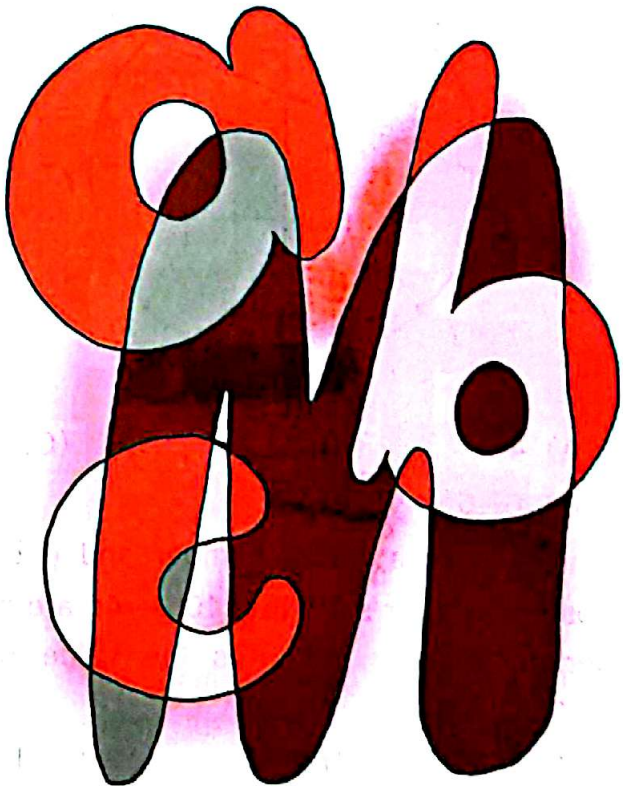
Câu 14. Cho các số nguyên dương a, b, c. Tìm số tự nhiên d thỏa mãn

$|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2024^d + 2025.$

Câu 15. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì. Qua M kẻ MD // AC (D thuộc AB), ME // AB (E thuộc AC). Biết diện tích tam giác BMD là a^2, diện tích tam giác MEC là b^2.

a) Tính diện tích tam giác ABC theo a và b.

b) Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC để diện tích tứ giác ADME lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo a và b.



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

INTERNATIONAL MATHEMATICS ASSESSMENTS FOR SCHOOLS

2024 / 2025 JUNIOR DIVISION FIRST ROUND PAPER

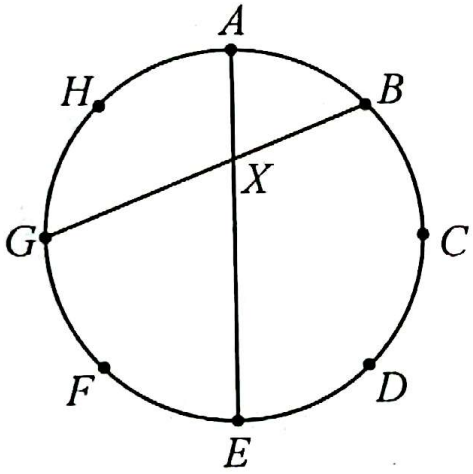
Time allowed: 75 minutes

1. There is a 48-story building which has 24 windows per floor. A cleaner starts his work on the 48th floor and needs to clean all the windows on each floor before moving down to the floor below. On which floor will the cleaner be after he has cleaned exactly 177 windows?

(A) 39 (B) 40 (C) 41

(D) 42 (E) 43

2. In the diagram below, points A, B, C, D, E, F, G and H divide the circumference into 8 equal parts. If X is the intersection of AE and BG, what is the measure, in degrees, of ∠GXE?



(A) 45° (B) 52.5° (C) 60°

(D) 67.5° (E) 75°

3. Let p be a prime number and q be a positive integer such that 10p + 4q are both perfect squares. What is the value of p + q?

(A) 9 (B) 10 (C) 11

(D) 12 (E) 13

4. A convex polygon has n interior angles. If its interior angles are consecutive odd integers, in degrees, and the smallest angle among them is 139°, what is the value of n?

(A) 8 (B) 10 (C) 12

(D) 16 (E) 18

5. What are the last three digits of 11^{2025} ?

(A) 121 (B) 251 (C) 331

(D) 561 (E) 641

6. A mountain cable car company charges each passenger $10 for each station that they visit (excluding the station where they boarded the cable car) during the cable car ride. For example, if a passenger gets on a cable car at the 2nd station and then gets off at the 5th station, his total fare would be $30. All cable cars are empty when they reach the 1st station which is located at the bottom of the mountain and all passengers must get off at the final station which is located on the top of the mountain. The company has to record how many passengers get on and off these stations throughout the day. At each station, the notation (a, b) means that a one-way passengers get on the cable cars at this station and b one-way passengers get out of this station. For example, if the company records (35, 20) for the second station and (45, 15) for the third station, this means that 35 passengers get on and 20 passengers get off at the second station, and then, at the third station, 45 more passengers get on and 15 passengers get off.

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

One day, the records for each of the stations are as follows:

1st station	2nd station	3rd station	4th station
(50, 0)	(25, 10)	(33, 22)	(44, 25)
5th station	6th station	Final station	
(16, 23)	(10, 38)	(0,60)	

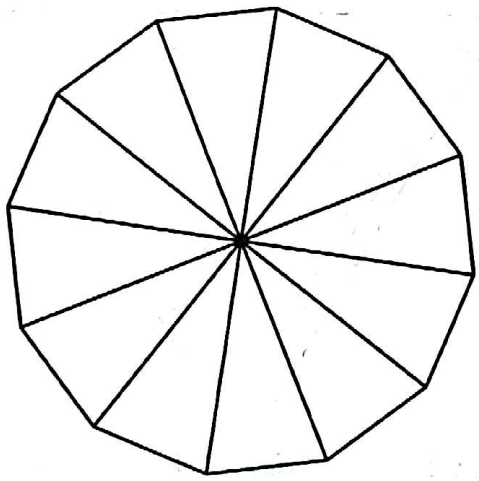
What is the total amount that all the passengers pay?

(A) $4340 (B) $4330 (C) $4320
(D) $4310 (E) $4300

7. Six adults and three children went camping. The camping program includes hiking up into the mountains. Any group interested in going hiking must have at least two adults. How many different hiking groups could be formed out of the nine people?

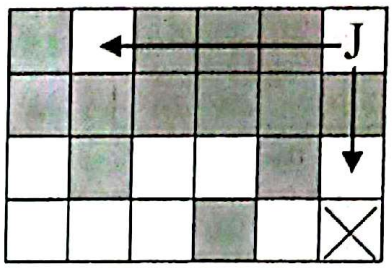
(A) 296 (B) 336 (C) 408
(D) 456 (E) 512

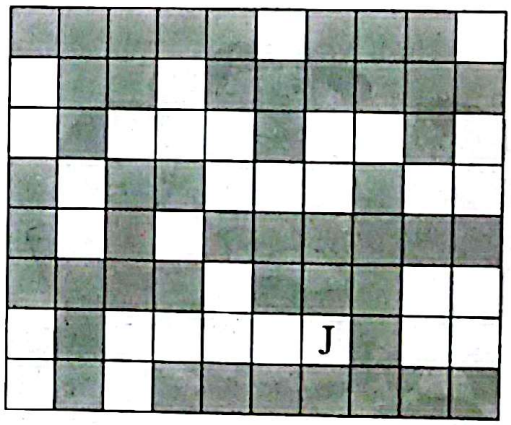
8. Amir has 12 pieces of isosceles triangles, where the length of the common side is 18 cm. He arranges them, without overlapping, to form a regular dodecagon (12 sides) as shown in the diagram below. What is the area, in cm^2, of this dodecagon?



(A) 81 (B) 162 (C) 324
(D) 486 (E) 972

9. In a computer game, a maze is illustrated as a grid, where some cells are painted in grey. The grey cells indicate where traps have been placed and the white cells indicate safe cells. A jumping man named Jay is standing on a white cell, which is indicated as "J". Jay may jump from one white cell to another white cell. However, he may only jump horizontally or vertically. He can jump over a sequence of grey cells, but he cannot jump over another white cell (and he cannot land on a grey cell). For example, as shown in the diagram on the right, if Jay stands on the white cell in the top right corner, he may jump four cells to the left or he may jump two cells down, but he cannot jump three cells down. Also, if he wants to get to any other white cell, he would need to make additional jumps. In the following maze, Jay begins on the white cell marked with "J". What is the minimum number of jumps he needs to do to be sure that any other white cell can be reached when jumping from this starting position?





(A) 6 (B) 7 (C) 8
(D) 9 (E) 10

10. In both diagrams below, neighbouring regions mean that they share a common segment. If two regions just share a common point without a common segment, then these

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

two regions are not neighbouring regions. For example, in diagram B, the regions 1 and 5 are not neighbouring regions. In both diagrams below, Alex wants to paint the regions that have the same number using same colour such that no neighbouring regions are painted in the same colour. What is the minimum number of colours that Alex needs?

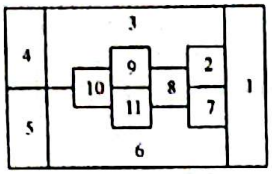


Diagram A

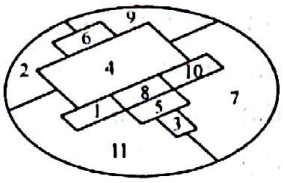


Diagram B

(A) 7 (B) 8 (C) 9
(D) 10 (E) 11

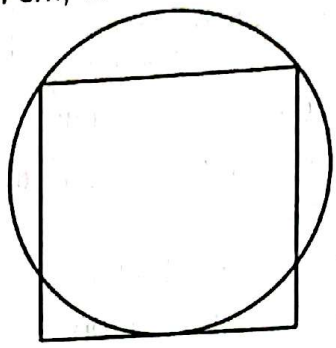
Questions 11-20, 4 marks each

11. A class of seven students is to be divided into two groups, where the first group consists of four students, while the second group contains three students. Each group must choose one or two students to join a competition. In how many ways can they form groups to join the competition?

(A) 2100 (B) 2160 (C) 1050
(D) 560 (E) 315

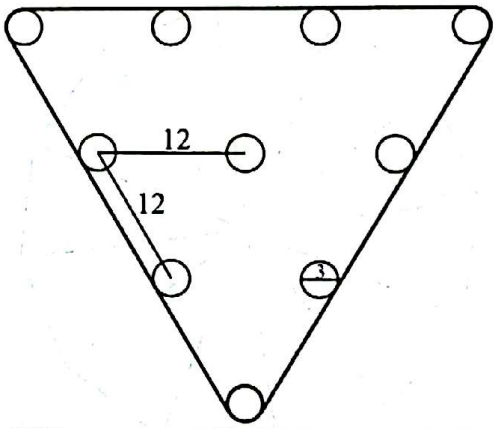


12. In the diagram below, a square and a circle are tangent at one point and they intersect at four other points. If the side length of the square is 4 cm, what is the diameter, in cm, of the circle?



(A) 2.5 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 6

13. In Candlepin Bowling, ten cylindrical pins, each having a diameter of 3 inches, are arranged in a triangular layout, with the distance between the centres of the adjacent pins being 12 inches, as shown in the diagram below. If we use a rope having the shortest possible length to enclose the ten pins without moving them, as shown by the thick curve, the enclosed area is $a + b\sqrt{3} + \frac{c}{4}\pi$ squared inches, where a, b and c are integers. What is the value of a + b + c?



(A) 252 (B) 324 (C) 333
(D) 495 (E) 504

14. How many positive integers n less than 2025 have the property that n = a + b + c, where a, b and c are three distinct factors of n?

Được quét bằng CamScanner

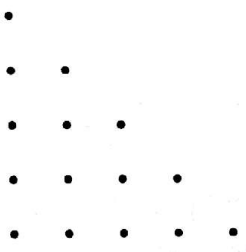
Được quét bằng CamScanner

(A) 225 (B) 333 (C) 337
(D) 450 (E) 900

15. Andy, Benny and Charlie will run on three straight parallel tracks a, b and c (track b is between tracks a and c). At the start of the race, all three runners are on a line perpendicular to the three tracks. The distance between tracks a and b is twice the distance between tracks b and c. During the whole race, the three runners will all run on a straight line. If the speeds of Andy and Charlie are 8 km/h and 20 km/h, respectively, what is the speed, in km/h, of Benny?

(A) 4 (B) 8 (C) 12
(D) 16 (E) 20

16. We randomly select three points from the following grid of 15 points as shown in the diagram below, where each of the points have the same chance of being chosen. If $\frac{p}{q}$ (written as an irreducible fraction) is the probability that with these three points one can form a non-degenerate triangle, what is the value of $p + q$? (Note: A non-degenerate triangle is a triangle with a non-zero area.)



(A) 865 (B) 862 (C) 172
(D) 123 (E) 25

17. Tom is now x years old and the ages of his five cousins are 28, 33, 37, 47 and 52. What is the sum of all possible values of x such that the average age of all six people (Tom and his five cousins) is equal to their median age?

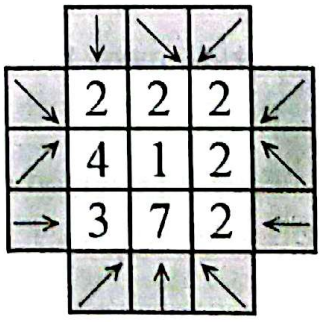
(A) 222 (B) 111 (C) 98
(D) 68 (E) 56



18. A bowling alley has x ten-pound bowling balls, y twelve-pound bowling balls and z fourteen-pound bowling balls, where there is at least one bowling ball of each weight. It is known that the total weight of all the bowling balls is 200 pounds, y is a multiple of 3 and $x > z$. What is the sum of all possible values of x?

(A) 15 (B) 18 (C) 20
(D) 33 (E) 38

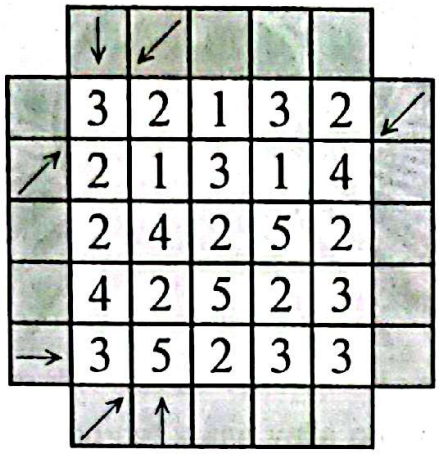
19. Some shaded squares are located around a square grid must be filled with one arrow each, drawn in a way that the arrow points vertically (↑ and ↓), horizontally (→ and ←) or diagonally (↘, ↙, ↖ and ↗) along the grid. Each arrow must point to at least one unshaded square. The number of arrows pointing to each unshaded square in the grid equals the number shown in that square. The following diagram shows one example:



CS Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Ben has to completely fill in the arrows in the grid below, where some arrows were already pre-filled. After completing the task, what is the total number of arrows ↖ and ↘ arrows that Ben used?



(A) 6 (B) 7 (C) 8
(D) 9 (E) 10

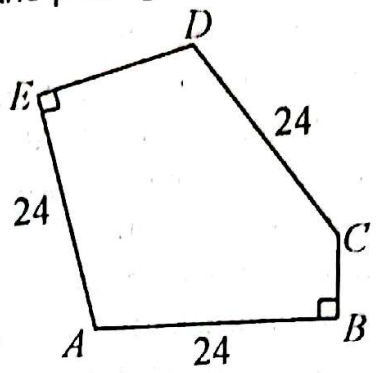
20. Annie wrote eleven consecutive two-digit numbers in a row: a, a + 1, a + 2, ..., a + 10. When she erased three numbers, the average of the original numbers is the same as the average of the remaining numbers. If the three numbers erased by Annie are the x-th, y-th and z-th numbers from left to right, what is the number of all possible ordered triples (x, y, z)?

(A) 14 (B) 13 (C) 12
(D) 11 (E) 10

Questions 21-25, 6 marks each

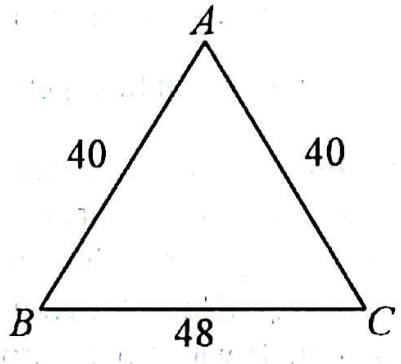
21. A bag only contains some number of black and white balls. The ratio of black to white balls is 1:2. If two balls are randomly drawn from the bag at the same time, the probability that the two balls have different colours is $\frac{64}{143}$. How many balls are there in the bag in total?

22. Let ABCDE be a pentagon such that AB = AE = CD = 24 cm, BC + DE = 24 cm and $\angle ABC = \angle DEA = 90°$. What is the area, in cm^2, of the pentagon?



23. What is the least possible integer n such that n! = 1 × 2 ×3 × ... × n × n least 200 trailing zeros?

24. Let ABC be an isosceles triangle with AB = AC = 40 cm and BC = 48 cm. Let the radii of the circumscribed and inscribed circles of triangle ABC be R and r, respectively. What is value, in cm, of R – r?

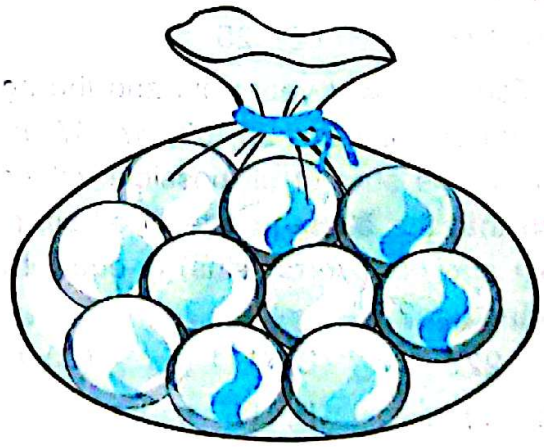


25. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be distinct positive integers such that

$$\frac{a_1+4}{a_1} \times \frac{a_2+4}{a_2} \times \ldots \times \frac{a_n+4}{a_n} = 2025.$$

What is the least possible value of n?

ĐỖ TRUNG KIÊN *(Sưu tầm và giới thiệu)*



Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Thì thầm... Thì thầm thôi...

Tuổi hồng... xin cứ tuổi hồng
Chuyện gì quá sớm... xin không trả lời



Hỏi: Cứ đến dịp ngày Nhà giáo Việt Nam (20/11), người ta thường nhắc đến câu: *Muốn sang thì Bắc cầu kiều/ Muốn con hay chữ thì yêu lấy thầy*. Trong câu này, em không hiểu tiếng "kiều" và "cầu kiều" là gì? Anh Phó có thể gợi ý cách hiểu nghĩa của chúng được không ạ?

NGUYỄN K.L
(THCS Nguyễn Thượng Hiền, Nam Ninh, Ninh Bình)

Đáp:

Sang - *"qua"*, ***sang*** - *"trọng"* nghĩa đôi
Kiều - *"cầu"*, ***kiều*** - *"đẹp"* là chơi chữ rồi.
Sang, kiều *tương hợp với nhau*
Cầu kiều *suy nghĩa dễ thôi em mình.*



Hỏi: Dạo này, khi nói chuyện với bạn, em hay cãi và nổi nóng, làm bạn buồn và em cũng thấy ân hận. Em mong anh phó gợi ý cho em "thoát khỏi" tình trạng này được không ạ?

ĐÀO L. L
(THCS Yên Phong, Yên Phong, Bắc Ninh)

Đáp:

Lắng nghe, suy nghĩ kĩ càng
Những điều bạn nói "là vàng" đó em.
Vội vàng, nóng nảy ai khen?
Đã không hiểu bạn lại thêm buồn phiền.





Hỏi: Khi viết, em không phân biệt được "chót nhở" hay "trót nhở". Anh Phó có thể giúp em cách phân biệt để viết đúng cụm từ này được không ạ?

ĐỖ H. G
(THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Đáp:

Chót *là "đội sổ" đó em*
Và trong "chót vót", nhớ ghim trong đầu.
Trót *là: "nhỡ"; "trọn trước sau"*
Em cần thấu hiểu, khắc sâu để dùng.



Hỏi: Trong lớp em, có bạn nói: thầy giáo môn Toán có "ưu tiên" khi cho điểm với một vài bạn. Em rất băn khoăn về điều này và muốn anh Phó cho ý kiến, liệu có chuyện thiên vị trong đánh giá của các thầy cô không ạ?

HÀ H. D
(THCS Nguyễn Du, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh)

Đáp:

Chấm bài có thể động viên
Nhưng không thiên vị, ưu tiên bao giờ.
Đó là phẩm chất thầy cô
Yêu thương, chăm chút học trò như nhau.

ANH PHÓ GỠ

Được quét bằng CamScanner
Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(272+273). Tìm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số dạng $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd} = (a+b+c+d)^3$.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(Trường THCS Phường Bình Định, Gia Lai)

Bài 2(272+273). Cho tập hợp T gồm các số tự nhiên viết được dưới dạng tổng $4a+9b+14c$, trong đó a, b, c là các số tự nhiên. Gọi K là tập hợp các số tự nhiên không nằm trong tập hợp T.

a) Số 101 thuộc tập hợp T hay tập hợp K? Vì sao?

b) Tập hợp K có bao nhiêu phần tử? Vì sao?

NGUYỄN VĂN TUẤN

(Trường THCS Văn Khê, Mê Linh, Hà Nội)

Bài 3(272+273). Một lớp có 40 học sinh, mỗi em tham gia đúng một câu lạc bộ. Biết rằng nếu chọn ra 12 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 4 học sinh thuộc cùng một câu lạc bộ. Chứng minh rằng tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 11 học sinh.

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

(Trường THCS Đa Tốn, xã Bát Trang, Hà Nội)

Bài 4(272+273). Cho tam giác ABC bất kì. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = AB$. Chứng minh rằng $S_{ABE} + S_{ACD} \geq 4S_{ABC}$.

HUỲNH THANH TÂM

(Phường Bình Định, Gia Lai)

CÁC LỚP THCS

Bài 5(272+273). Giả sử số N là tích của 10 số nguyên dương đôi một phân biệt lớn hơn 1. Hỏi số N có ít nhất bao nhiêu ước nguyên dương?

NGUYỄN TIẾN LÂM

(CLB Toán A1, Hà Nội)

Bài 6(272+273). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) và số nguyên tố p thỏa mãn $x^p + y^p = (p+2)! + p^2 - p$.

HOÀNG NGỌC MINH

(Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

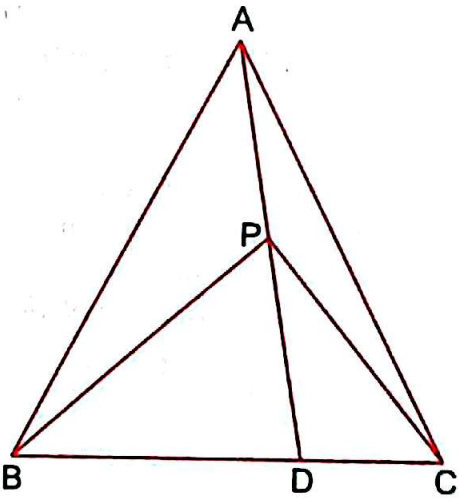
Bài 7(272+273). Chứng minh rằng số $(p^4+3)(p^4+4)$ có ít nhất bốn ước nguyên tố phân biệt với mọi số nguyên tố p lẻ.

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(Trường THCS Trần Duy Hưng, Yên Hòa, Hà Nội)

Bài 8(272+273). Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD:DC = 2:1$. Trên đoạn AD lấy điểm P sao cho $\widehat{BPD} = \widehat{BAC}$.

Chứng minh rằng $\widehat{DPC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.



HÀ VĂN NHÂN

(Trường THCS Hoằng Xuân, Thanh Hóa)

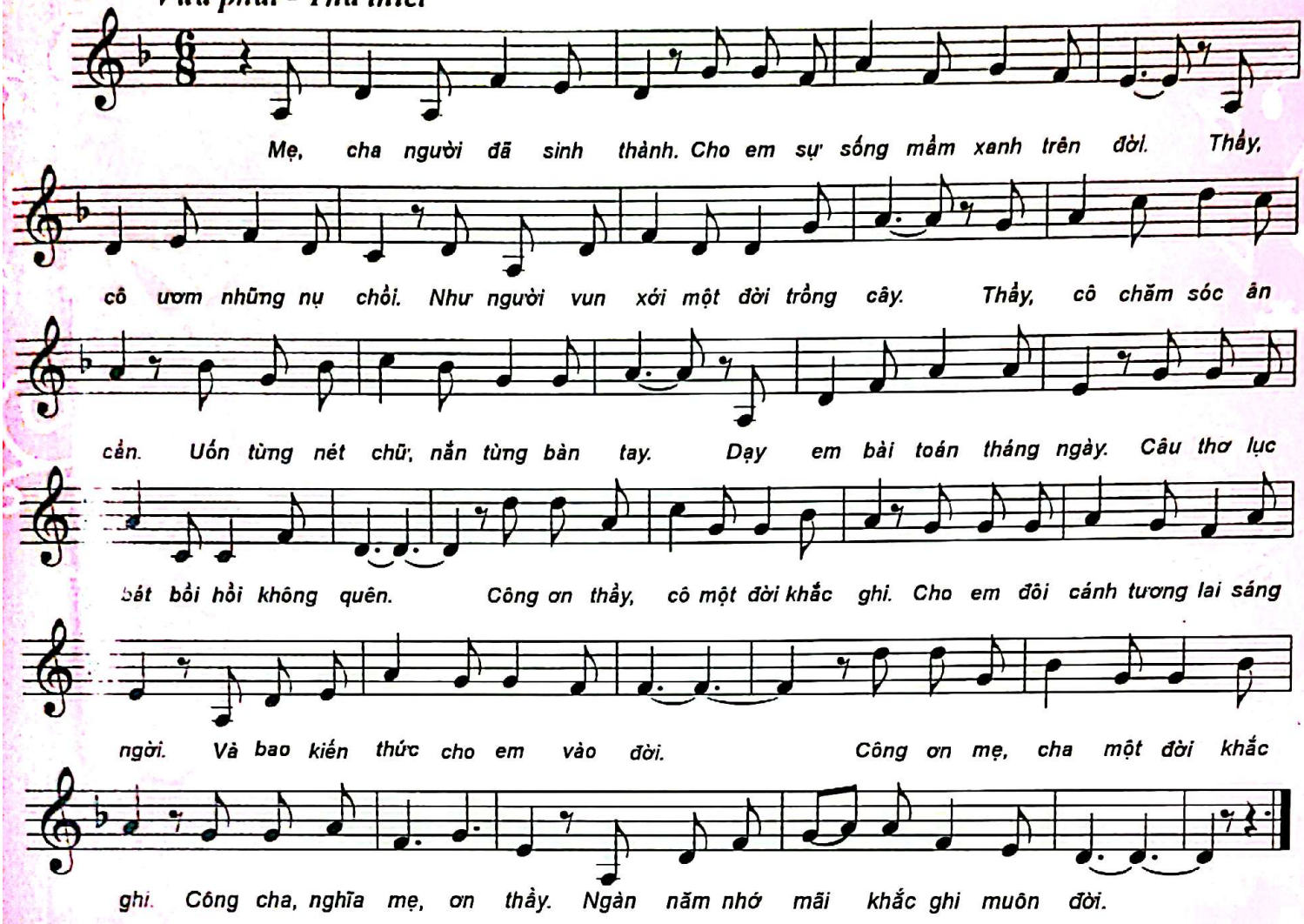
Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

Mãi nhớ công ơn cha mẹ, thầy cô

Vừa phải - Tha thiết

Nhạc và lời: Huyền Trang





Nhạc sĩ Huyền Trang, hội viên Hội Âm nhạc Hà Nội, hội viên Câu lạc bộ Sáng tác Ca khúc Thủ đô, hội viên Câu lạc bộ Đơn ca TP. Hà Nội. Chị công tác trong các lĩnh vực khác nhau nhưng luôn dành nhiều thời gian để sáng tác bài hát. Các sáng tác của chị thuộc nhiều thể loại khác nhau, trong đó có những bài hát dành cho thiếu nhi, mái trường và tuổi thơ như: *Khúc ca măng non, Em yêu mái trường của em, Đất nước trong bài giảng của thầy,...* Một số tác phẩm của nhạc sĩ Huyền Trang đã được trao giải thưởng trong các cuộc thi như: *Bắc Từ Liêm mùa xuân về, Âm vang khúc hát thiếu nhi Thủ đô,...*

Mãi nhớ công ơn cha mẹ, thầy cô là một ca khúc của nhạc sĩ Huyền Trang viết dành tặng cho các em thiếu nhi nhân dịp kỉ niệm Ngày Nhà giáo Việt Nam 20/11.

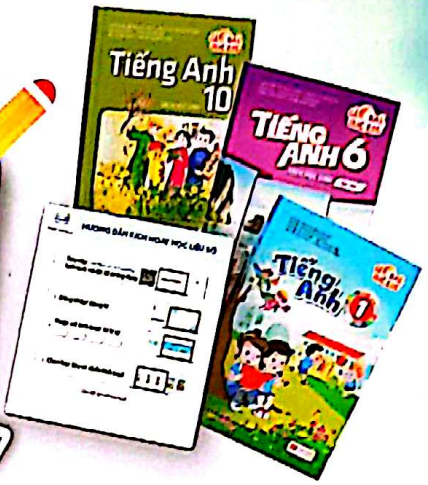
Xin trân trọng gửi tới các em.

CS Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI

TỰ HỌC TIẾNG ANH KHÔNG KHÓ!



KHI BẠN BIẾT

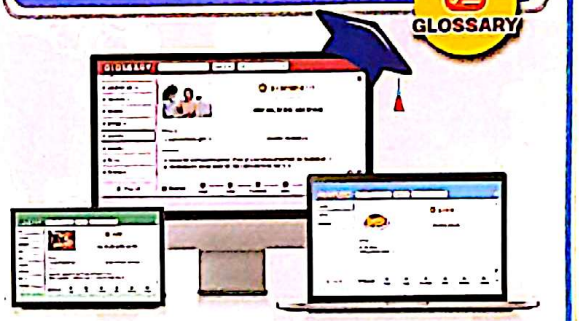
Cào mã thẻ tại bìa 2 SGK Tiếng Anh Global Success để sử dụng hệ sinh thái học liệu SGK tiếng Anh trong quá trình tự học, ôn tập, bổ trợ, tăng cường!



Luyện phát âm qua hệ thống video hướng dẫn phát âm



Luyện học từ mới qua Glossary



Ôn tập ngữ pháp và kiến thức ngôn ngữ qua các mục structure, games... trên SÁCH MỀM 2.0



ỨNG DỤNG HỌC TIẾNG ANH GLOBALSPEAK

ĐẶC BIỆT

- Lộ trình học logic
- Gia sư AI đỉnh cao
- Kho Game vô tận với kho từ vựng tương đương IELTS 6.5





QUÉT MÃ

ĐỂ ĐƯỢC HỖ TRỢ NHANH NHẤT

HỖ TRỢ - GIẢI ĐÁP - TƯ VẤN

gs.hoclieu.vn

Tiếng Anh Global Success

1900 636 011

hotro@hoclieu.vn

Giá: 36 000 đồng

Được quét bằng CamScanner

Được quét bằng CamScanner