Toán tuổi thơ 2

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

ISSN 1859-2740
SỐ 268
THÁNG 5 NĂM 2025

TRUNG HỌC CƠ SỞ

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM THAM GIA HỘI SÁCH CHÀO MỪNG NGÀY SÁCH VÀ VĂN HÓA ĐỌC VIỆT NAM LẦN THỨ TƯ NĂM 2025

Ngày 19/4/2025, tại Thư viện Quốc gia Việt Nam, số 31 Tràng Thi, Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã tham gia Hội sách chào mừng Ngày Sách và Văn hóa đọc Việt Nam lần thứ Tư năm 2025.

Hội sách được tổ chức là hoạt động thiết thực chào mừng Ngày Sách và Văn hóa đọc Việt Nam (21/4) và Ngày sách và bản quyền thế giới (23/4). Với mục tiêu khuyến khích và phát triển phong trào đọc sách; nâng cao nhận thức của cộng đồng về ý nghĩa và tầm quan trọng của việc đọc sách; xây dựng thói quen đọc sách trong gia đình, nhà trường, xã hội...; đồng thời phát hiện, tôn vinh các tổ chức, cá nhân có những đóng góp cho sự phát triển của sách và văn hóa đọc.



Gian hàng sách của NXBGDVN

Ngày Sách và Văn hóa đọc năm nay mang một chủ đề đặc biệt ý nghĩa: ***"Mỗi trang sách - Một niềm tự hào"*** nhằm khẳng định vai trò to lớn của sách trong việc bồi đắp tri thức, nuôi dưỡng tâm hồn, khơi gợi niềm tự hào về lịch sử dân tộc nhân Kỉ niệm 50 năm Ngày Giải phóng miền Nam, thống nhất đất nước.

Hội sách được tổ chức với nhiều hoạt động, nội dung phong phú nhằm giới thiệu quảng bá sách của các nhà xuất bản, các nhà sách, trong đó có NXBGDVN.

Với gần 500 đầu sách, gian hàng của NXBGDVN giới thiệu đến bạn đọc các sản phẩm đặc trưng của NXBGDVN như: sách giáo khoa, sách tham khảo, truyện thiếu nhi,...

Trong khuôn khổ Ngày hội Sách, ngoài các gian hàng sách còn có nhiều hoạt động khác: giới thiệu, quảng bá xuất bản phẩm; tổ chức hội thảo, sự kiện, giao lưu, tọa đàm; giới thiệu phong trào đọc sách, việ sách, quảng bá sách, lưu giữ sách i kể chuyện, vẽ tranh theo sách: sách chuyên đề,...

Tham dự Ngày Hội Sách, diện Lãnh đạo NXBGDVN - bà Phùng Ngọc Hồng, Phó Tổng Giám đốc khẳng định, đây là hoạt động văn hóa ý nghĩa nhằm tôn vinh giá trị của sách, của tri thức, khơi dậy tình yêu với sách và văn hóa đọc trong cộng đồng bởi sách là tri thức, sách bồi dưỡng tâm hồn chúng ta.

Để Ngày Sách và Văn hóa đọc đi vào đời sống xã hội, tôn vinh giá trị của sách và nhân rộng việc đọc sách, phát triển văn hóa đọc, Ban tổ chức đã kêu gọi các nhà xuất bản tài trợ về sách, tài liệu cho các thư viện. NXBGDVN đã tài trợ 624 bản sách tham khảo tương đương giá trị 43 triệu đồng cho Thư viện Quốc gia Việt Nam để ủng hộ triển khai hoạt động ý nghĩa này.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Toán tuổi thơ 2

TRUNG HỌC CƠ SỞ

TẠP CHÍ CỦA VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập:
TRẦN HỮU NAM

Phó Tổng biên tập:
TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

Thư kí tòa soạn:
VÕ THỊ HỒNG THU

ỦY VIÊN
NGND. Vũ Hữu Bình
TS. Nguyễn Minh Đức
ThS. Đặng Hiệp Giang
TS. Nguyễn Minh Hà
ThS. Nguyễn Ngọc Hân
PGS. TS. Vũ Đình Hòa
ThS. Trần Quang Hùng
TS. Lê Thống Nhất
PGS. TS. Tạ Duy Phượng
TS. Phạm Đức Tài
NGND. PGS. TS. Tôn Thân
GS. TS. Lê Anh Vinh
TS. Trần Quang Vinh

TÒA SOẠN

Số 187B Giảng Võ, P. Cát Linh, Q. Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại - Email:
Biên tập: 024.35682702; Email: bbttoantuoitho@gmail.com
Phát hành: 024.35682701; 024.35142649;
Email: tapchitoantuoitho@gmail.com
Hành chính: 024.35121606

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Biên tập - Chế bản: **Nguyễn Quang Tuấn, Vũ Thị Mai, Đỗ Trung Kiên**
Mĩ thuật: **Trần Ngọc Trường**
Phát hành: **Trần Thị Minh Hiền (Trưởng phòng)**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch HĐTV kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục:
LÊ HỒNG SƠN

TRONG SỐ NÀY

Nhìn ra thế giới 2
Một số bài toán đẹp trong kì thi Olympic hình học Iran năm 2024
Nguyễn Duy Khương, Trần Quốc Dũng

Rừng cười 5
Dấu gì?
Lê Thị Đông

Vào thăm Vườn Anh 6
A flashback to 50 years ago
Lê Thị Thanh Ngọc

Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc 8
Kẻ tình nghi
Nguyễn Như Mai

Compa vui tính 15
Thay các chữ cái bởi các chữ số
Nguyễn Ngọc Hùng

Thách đấu 21
Trận đấu thứ hai trăm mười bảy
Lưu Công Đông

Ôn thi vào lớp 10 24
Đề thi thử môn Toán chuyên
Trần Quốc Luật

Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ 29
Kì 80
Nguyễn Đức Tấn

Giải toán học Anh 30
Problem 59
Đỗ Đức Thành

Minh họa bìa 1: Lê Mạnh Cường
(Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông)

Các bạn có thể đặt mua các ấn phẩm của tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: Toán học và Tuổi trẻ (**C168**); Toán Tuổi thơ 1 (**C169**); Toán Tuổi thơ 2 (**C169.1**); Văn học và Tuổi trẻ (**C668**); Văn Tuổi thơ (**C668.1**).

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẸP TRONG KÌ THI OLYMPIC HÌNH HỌC IRAN NĂM 2024

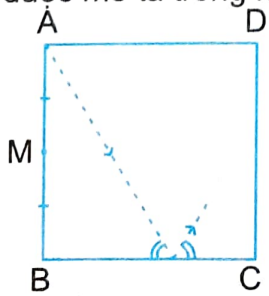
NGUYỄN DUY KHƯƠNG, TRẦN QUỐC DŨNG (*CLB Toán Lim, Hà Nội*)

Olympic Hình học Iran (Iranian Geometry Olympiad - IGO) là một kì thi Toán học do Iran tổ chức từ năm 2014 (Việt Nam đã tham gia từ năm 2017), nhằm phổ biến tư duy hình học và tìm kiếm những tài năng xuất sắc trong lĩnh vực này. Qua nhiều năm, IGO đã mở rộng quy mô, vượt ra ngoài biên giới Iran và trở thành một cuộc thi quốc tế, thu hút đông đảo thí sinh từ hơn 57 quốc gia trên thế giới. Đây là sân chơi dành cho học sinh yêu thích Hình học, mang đến cơ hội giao lưu và tranh tài trong một kì thi có tầm cỡ Olympic. Kì thi này thường được chia thành bốn bảng: Elementary, Intermediate, Advanced và Free. Tuy nhiên, trong kì thi năm 2024, bảng Free không được tổ chức tại Việt Nam. Kết quả các thí sinh gửi đi Iran của Việt Nam năm nay vẫn rất tốt với: 3 giải Vàng (Khối Intermediate và Advanced) và 4 giải Đồng (Khối Elementary). Trong bài viết này chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán trong kì thi IGO 2024 tới bạn đọc.

Một số bài toán cấp độ Elementary *(Cho học sinh lớp 7-8 hoặc nhỏ hơn)*

Đề năm nay của khối Elementary khá khó khi mà các dạng toán quen thuộc không xuất hiện lại nhiều như mọi năm. Những kiến thức mà học sinh lớp 7, lớp 8 ở Việt Nam chưa được học cũng đã xuất hiện như tứ giác nội tiếp, góc với đường tròn,...

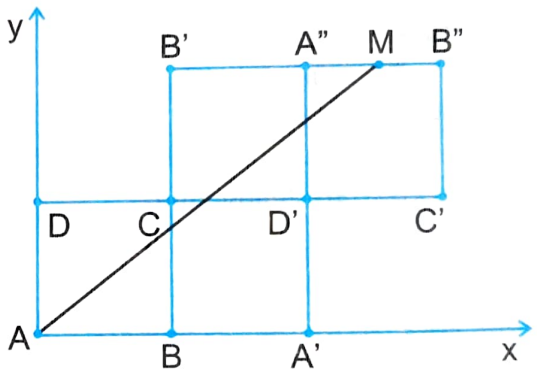
Bài 1. (P2–Elementary) Cho ABCD là một hình vuông có độ dài cạnh bằng 20 cm . Một tia sáng xuất phát từ đỉnh A, lần lượt gặp các cạnh BC, CD, DA rồi đi tới trung điểm M của AB. Biết rằng, cứ mỗi khi gặp một cạnh, tia sáng phản xạ lại theo quy tắc góc tới bằng góc phản xạ, được mô tả trong hình dưới.



Hãy tính tổng độ dài quãng đường mà tia sáng đã đi qua tính tới thời điểm nó gặp điểm M.

Lời giải. Gắn hệ trục tọa độ Oxy với O trùng đỉnh A, AB trùng với Ox và AD trùng với Oy, tức A(0; 0), B(20; 0), C(20; 20), D(0; 20).

Khi chùm tia chiếu vào một cạnh của hình vuông này, ta có thể nghĩ tới việc lấy đối xứng hình vuông qua cạnh đó bằng cách cho phép chùm tia tiếp tục đi theo đường thẳng qua hình vuông được phản chiếu. Lặp lại quá trình phản chiếu này ba lần, chùm tia đạt đến điểm M(50; 40) sau khi lấy đối xứng các hình vuông như hình vẽ.



Vì đường đi của chùm tia là một đường thẳng từ điểm khởi đầu đến M nên ta có thể tính tổng khoảng cách mà tia đi chính bằng khoảng cách giữa các điểm (0; 0) và (50; 40) và con số đó bằng

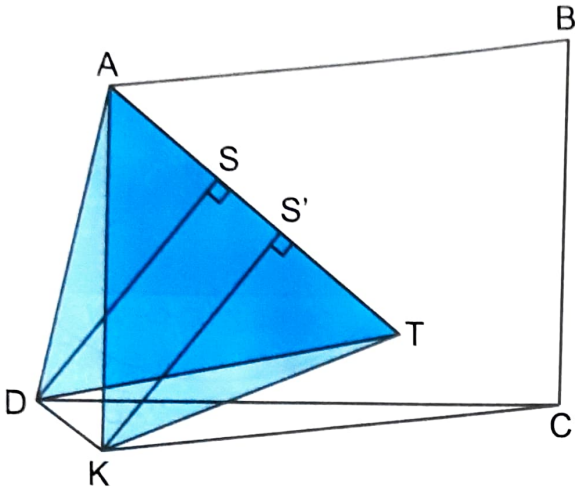
$$\sqrt{(50-0)^2+(40-0)^2}=10\sqrt{41}.$$

Nhận xét. Lời giải trên là của bạn Nguyễn Gia Tuấn, 6G, THCS Newton, Hà Nội, đây là một trong bốn thí sinh đạt giải Đồng của Việt Nam. Lời giải khác với đáp án của ban tổ chức, ý tưởng trải hình rất mới lạ và thú vị.

Bài 2. (P3–Elementary) Cho điểm T nằm bên trong một tứ giác lồi ABCD có BC > AD,

$DT = BC$. Điểm S nằm trên đoạn thẳng AT sao cho $\widehat{TSD} = 90^\circ$. Chứng minh rằng nếu $\widehat{DTA} + \widehat{TAB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ thì
$AB + ST \geq CD + AS$.

Lời giải. Gọi K là điểm sao cho tứ giác ABCK là một hình bình hành.

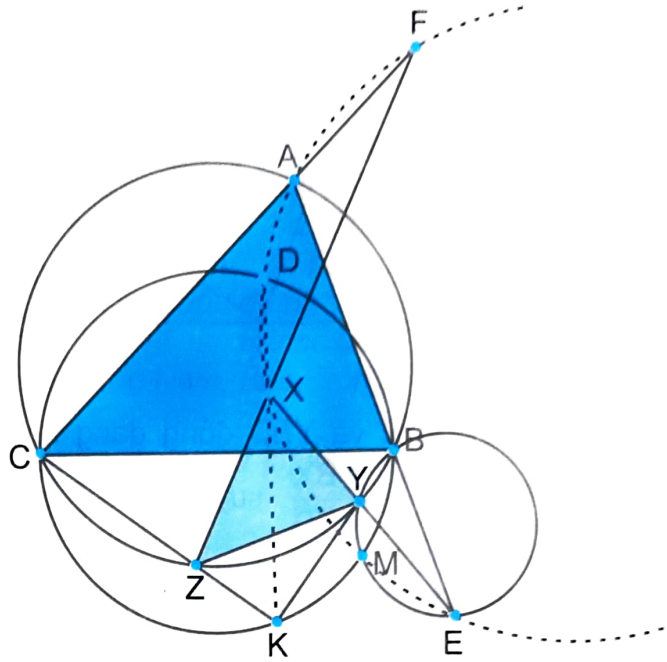


Ta có
$\widehat{KAT} = \widehat{KAB} - \widehat{TAB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{TAB} = \widehat{DTA}$.
Kết hợp với $DT = BC = KA$ ta được $\Delta KAT = \Delta DTA$ (c.g.c), dẫn đến tứ giác ADKT là hình thang cân.
Lưu ý rằng $ST > AS$ vì $DT = BC > AD$.
Gọi S' là hình chiếu vuông góc của K trên AT.
Vì tứ giác ADKT là hình thang cân nên ta có
$DK = SS' = ST - S'T = ST - AS$.
Theo bất đẳng thức tam giác, ta có
$DK \geq CD - CK$ hay $ST - AS \geq CD - AB$, dẫn đến $AB + ST \geq CD + AS$.

Nhận xét. Chỉ sử dụng công cụ đơn giản là bất đẳng thức tam giác nhưng bài toán đã gây ra không ít thử thách cho các thí sinh.

Bài 3. (P5–Elementary) Các điểm Y, Z nằm trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC (với Y nằm trên cung nhỏ BZ). Điểm X nằm cùng phía A so với đường thẳng YZ sao cho các tam giác ABC và XYZ đồng dạng. Các đường thẳng XY, XZ cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm E, F. Gọi K là giao điểm của BY, CZ. Chứng minh rằng một trong hai giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC nằm trên đường thẳng KX.

Lời giải. Do các tam giác ABC và XYZ đồng dạng nên $\widehat{BAC} = \widehat{YXZ}$, suy ra $\widehat{EAF} = \widehat{EXF}$. Do đó các điểm A, E, F, X cùng thuộc một đường tròn, kí hiệu là ω.



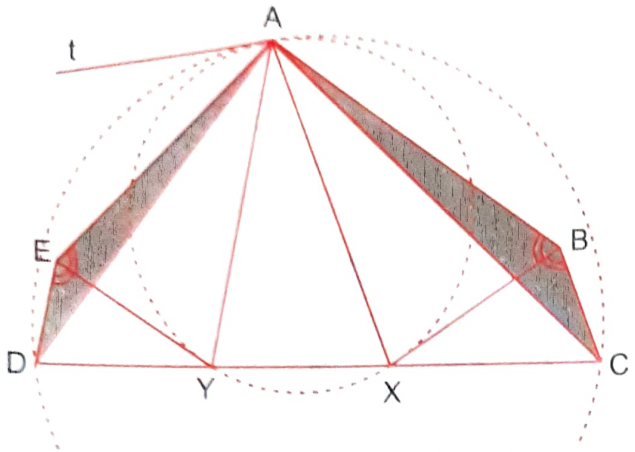
Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BKC và YKZ.
Với chú ý rằng $\widehat{ABC} = \widehat{XYZ}$, ta có
$\widehat{BEY} = \widehat{ABY} - \widehat{BYE} = \widehat{ABC} + \widehat{CBY} - \widehat{XYK}$
$= \widehat{ABC} + \widehat{CBY} - \widehat{XYZ} - \widehat{KYZ} = \widehat{CBY} - \widehat{KYZ}$
$= \widehat{KZY} - \widehat{KCB} = (180^\circ - \widehat{KCB}) - (180^\circ - \widehat{KZY})$
$= \widehat{KMB} - \widehat{KMY} = \widehat{BMY}$, dẫn đến tứ giác BEMY nội tiếp.
Tương tự, tứ giác CZMF nội tiếp.
Do đó ta có $\widehat{MEX} = \widehat{MBY} = \widehat{MCZ} = \widehat{MFX}$, suy ra M nằm trên đường tròn ω.
Gọi D là giao điểm khác M của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF và KBC.
Ta có $\widehat{MDX} = \widehat{MEY} = \widehat{MBK} = \widehat{MDK}$, suy ra ba điểm D, X, K thẳng hàng và ta hoàn thành chứng minh.

Một số bài toán cấp độ Intermediate *(Cho học sinh lớp 9-10)*

Bài 4. (P2–Intermediate) Các điểm X, Y nằm trên cạnh CD của ngũ giác lồi ABCDE (với X nằm giữa Y và C). Giả sử rằng các tam giác XCB, ABX, AXY, AYE, YED đều đồng dạng (theo đúng thứ tự này). Chứng minh rằng các

đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD và AXY tiếp xúc nhau.

Lời giải.



Các tam giác ABX và YED đồng dạng nên $\widehat{ABX} = \widehat{YED}$ và $\frac{AB}{YE} = \frac{BX}{ED}$, suy ra

$AB \cdot ED = BX \cdot YE$.

Các tam giác XCB và AYE đồng dạng nên $\widehat{XBC} = \widehat{AEY}$ và $\frac{BX}{EA} = \frac{BC}{EY}$, suy ra

$BX \cdot EY = BC \cdot EA$.

Do đó $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$ và $AB \cdot ED = BC \cdot EA$ hay $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED}$, dẫn đến các tam giác ABC và AED đồng dạng. Khi đó ta có

$\widehat{CAX} = \widehat{BAX} - \widehat{BAC} = \widehat{YAE} - \widehat{EAD} = \widehat{YAD}$.

Gọi At là tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC, khi đó $\widehat{DAt} = \widehat{ACD}$.

Suy ra

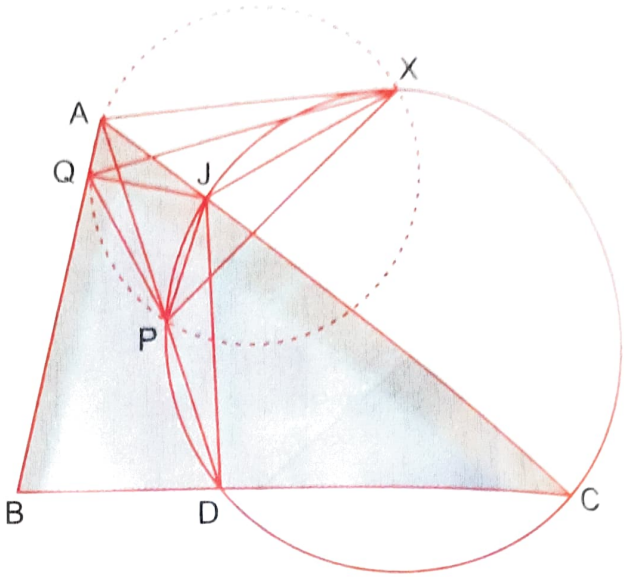
$\widehat{YAt} = \widehat{YAD} + \widehat{DAt} = \widehat{CAX} + \widehat{ACD} = \widehat{AXY}$ nên

At là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY.

Vậy các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD và AXY tiếp xúc nhau.

Bài 5. (P3–Intermediate) Cho tam giác nhọn ABC có điểm D nằm trên cạnh BC. Gọi J là điểm nằm trên cạnh AC sao cho $\widehat{BAD} = 2\widehat{ADJ}$. Gọi ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác CDJ. Đường thẳng AD cắt lại ω tại P. Q là chân đường vuông góc hạ từ J xuống AB. Chứng minh rằng nếu JP = JQ thì đường thẳng qua A và vuông góc với DJ là tiếp tuyến của đường tròn ω.

Lời giải. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AQP cắt đường tròn ω lần thứ hai tại X khác P. Ta sẽ chứng minh rằng AX vuông góc với DJ và AX là tiếp tuyến của đường tròn ω.



Trước hết ta có $\widehat{QXP} = \widehat{QAP} = 2\widehat{ADJ} = 2\widehat{PXJ}$, suy ra XJ là đường phân giác của góc QXP. Mà JP = JQ nên XJ là đường trung trực của PQ.

Vì các điểm A và X nằm cùng phía đối với đường thẳng PQ nên XP = XQ, suy ra $\widehat{XAP} = \widehat{XQP} = \widehat{XPQ}$, dẫn đến AX là đường phân giác ngoài của góc QAP.

Mặt khác, DJ song song với đường phân giác trong của góc QAP nên AX vuông góc với DJ.

Lại có $\widehat{AXP} = \widehat{BQP} = 90^\circ - \widehat{JQP} = 90^\circ - \widehat{JPQ}$ $= 180^\circ - \widehat{XJP} = \widehat{XDP}$, suy ra AX là tiếp tuyến của đường tròn ω.

Dưới đây là một số bài toán khác trong đề IGO 2024.

P2–Advanced. Điểm P nằm trên cạnh CD của tứ giác nội tiếp ABCD sao cho $\widehat{CBP} = 90^\circ$. Giả sử giao điểm K của AC và BP thỏa mãn AK = AP = AD, H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng AC. Chứng minh rằng $\widehat{APH} = 90^\circ$.

P3–Advanced. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), có AD là đường cao. Gọi (I_a) và (I_c) tương ứng là đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A và đỉnh C của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDI_c cắt lại các cạnh BI và DI_a tương ứng tại P và Q. Chứng minh rằng AP = AQ.



● *Kì này*

Đấu gì?

Đấu gì một nét nằm ngang
Hơi xiên bên trái nhẹ nhàng thướt tha?
Đấu gì thậm thịch người qua
Chạy đi vội vã cùng ta với người?
Đấu gì một chấm ai ơi
Đặt dưới các chữ nhỏ xinh lạ thường?
Đấu gì xiên phải yêu thương
Đặt trên âm chính cũng tương đối ngầu?
Đấu gì nhận biết từ đâu
Cho ta suy đoán từng câu, từng từ?
Đấu gì ngăn cách cụm, từ
Người nghe dễ hiểu, đọc thì ngắt hơi?
Các bạn nhớ lấy mà xơi
Điểm khá, điểm giỏi tuyệt vời từ đây!

LÊ THỊ ĐÔNG

(Trường Tiểu học Thạch Châu, Lộc Hà, Hà Tĩnh)



Kết quả (TTT2 số 266)

Con gì?

Con cua mà có hai càng
Đầu, tai không có bò ngang cả đời
Con cá mà có cái đuôi
Hai vây ve vẩy nó bơi rất tài
Con rùa mà có cái mai
Cái cổ thụt ngắn, thụt dài vào ra
Con voi mà có hai ngà
Cái vòi nó cuốn đổ nhà, đổ cây
Con chim mà có cánh bay
Bay cùng Nam, Bắc, Đông, Tây tỏ tường.
Con mèo nằm bếp co ro
Ít ăn nhiều ngủ ít lo, lười làm
Con ngựa đi Bắc về Nam
Nhiều ăn ít ngủ nhiều làm nhiều lo.

HONG HA®

Nhận xét. Các bạn sau được thưởng: *Nguyễn Cẩm Tú*, 7A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**; *Ngô Thanh Thủy*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Nguyễn Hoàng Ngân*, 7A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Phan Phương Ly*, 8B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Trần Quốc Dũng*, 6A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Các bạn sau được khen: *Nguyễn Trúc Chi*, 8B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; *Nguyễn Duy Hưng*, 6A4, THCS Tam Dương, Tam Dương, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 7A3, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; *Nguyễn Ngọc Nhi*, *Nguyễn Văn Cư*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Hoàng Yến*, 6B, *Nguyễn Thị Phương Anh*, 8D, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Ngô Phương Lan*, 6A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Hoàng Thanh Nhàn*, 6A, *Nguyễn Hương Chi*, 8A, *Phan Thị Xuân Mai*, 8B, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

VUA TẾU



Kì này A FLASHBACK TO 50 YEARS AGO

LÊ THỊ THANH NGỌC
(Trường THCS Bình Thịnh – Đức Thọ - Hà Tĩnh)

At 11 a.m. on April 30, 1975, two tanks of our military crashed through the gates of the Independence Palace (Dinh Độc Lập)....**(1)** That marked the glorious end of the resistance war against America, so the reunification of Vietnam.

...**(2)**. A temporary peace agreement was then signed, but ironically, the U.S., which had previously been a powerful ally of France, jumped at the chance to interfere in Vietnam's reunification. ...**(3)**. The system witnessed several uprisings from its own people, who sought to overthrow Diệm's rule due to intense disagreements over itsmassacreof Communists. Before long, the National Liberation Front of South Vietnam (Mặt trận Dân tộc Giải phóng miền Nam Việt Nam) was established to liberate the South and reunify the country. ...**(4)**, the U.S. reluctantly signed the Paris Peace Agreement, pledging to withdraw all its troops and allies from Vietnam.

...**(5)**. After successfully liberating the Central Highlands, Huế, and Đà Nẵng, our military aunched an attack on the headquarters of the Republic of Vietnam in Sài Gòn. And hus, victory belonged to our liberation army. After 50 years of continuous development, he Vietnamese people continue to honor and express deep gratitude for the sacrifices of our soldiers. Patriotism is passed down through generations, and true Vietnamese citizens–especially the youth–remain steadfast in their loyalty to the nation, ...**(6)**.

Sau đây là các gợi ý, các bạn hãy chọn để điền vào chỗ chấm cho đúng nhé!

A. The general offensive and uprising for national reunification in 1975 lasted for about two months through three major campaigns

B. Company Commander Bùi Quang Thận then made a dash for the building and planted the National Liberation Front of South Vietnam flag on its roof

C. despite disparaging and distorted information spread by internal and external hostile forces

D. After a series of failed U.S. military strategies, including the Tet Offensive, and culminating in the disastrous 12-day-and-night strategic air raid

E. That image remains deeply ingrained in the hearts of Vietnamese people, tracing back to the 1950s when France accepted defeat in the Battle of Điện Biên Phủ

F. In 1955, the U.S. established a "puppet state" known as the Republic of Vietnam, deposing Bảo Đại–the last emperor of the Nguyễn dynasty–and replacing him with Ngô Đình Diệm "

Kết quả THE ULTIMATE GIFT GIVING CHALLENGE! (TTT2 số 266)

Christina: A tailored suit
Bently: A high-end camera
Susan: A rare plant
Alex: A vintage wristwatch
Wink: A luxury perfume
Pinky: A handcrafted journal
Ginger: A gourmet chocolate box

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau được thưởng: *Võ Diệp Anh*, 6B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Bá Minh Quân*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Cẩm Tú*, 7A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**; *Văn Thị Ngọc Ánh*, 8C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Hồ Khánh Ngân*, 7A1, THCS Quỳnh Thiện, Hoàng Mai, **Nghệ An**.

Chủ Vườn



PHẢI CHĂNG BIỂU THỨC CÓ HAI GIÁ TRỊ?

TRẦN THANH HƯNG *(Trường THCS Võ Trứ, Tuy An, Phú Yên)*

Bài toán. Giả sử a, b là hai số thực thỏa mãn $ab+\sqrt{ab+1}+\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a}=0$. Tìm giá trị của biểu thức $S=a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $ab\ge -1$, $a^2\ge -b$, $b^2\ge -a$.

Ta có $ab+\sqrt{ab+1}+\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{ab+1}+\sqrt{(a^2+b)(b^2+a)}=-ab\Rightarrow ab<0$.

Hơn nữa ta cũng có

$\sqrt{(a^2+b)(b^2+a)}=-\sqrt{ab+1}-ab$

$\Rightarrow a^3+b^3+a^2b^2+ab=ab+1+2ab\sqrt{ab+1}+a^2b^2$

$\Leftrightarrow a^3+b^3=2ab\sqrt{ab+1}+1$.

Do đó $S^2=\left(a\sqrt{b^2+a}+b\sqrt{a^2+b}\right)^2$

$=a^3+b^3+2ab\sqrt{(a^2+b)(b^2+a)}+2a^2b^2$

$=2ab\sqrt{ab+1}+1+2ab\left(-\sqrt{ab+1}-ab\right)+2a^2b^2=1$.

Suy ra $S=1$ hoặc $S=-1$.

Phải chăng biểu thức S có hai giá trị?

Kết quả **(TTT2 số 266)**

LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

Phân tích. Phép biến đổi trong lời giải đã làm mất nghiệm $x=1$, $x=2$.

Lời giải đúng. $(x-3)\sqrt{x^2-3x+2}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-3)\sqrt{x^2-3x+2}=0\\(x-3)\sqrt{x^2-3x+2}>0.\end{array}\right.$$

- Với $(x-3)\sqrt{x^2-3x+2}=0$ ta được nghiệm $x=1$, $x=2$, $x=3$.
- Với $(x-3)\sqrt{x^2-3x+2}>0$ ta có

$$\left\{\begin{array}{l}x-3>0\\x^2-3x+2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>3\\x<1,\ x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow x>3.$$

Vậy các số thực x thỏa mãn là $x=1$, $x=2$ và $x\ge 3$.

Nhận xét. Các bạn sau đưa ra lời giải đúng, được thưởng kì này: *Nguyễn Hữu An Bình, Nguyễn Thị Huệ Phương*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Hoàng Hiệp*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Trần Anh Đức*, 8A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Vương Thị Hải Châu*, 8C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.

VI MẠNH TƯỜNG





KẺ TÌNH NGHI



NGUYỄN NHƯ MAI *(Hà Nội)*

Ngày nay nhờ có ngành hàng không phát triển, việc đi lại giữa các nước trở nên dễ dàng và thuận lợi.

Hành khách đủ mọi thành phần, từ những thương gia, nhà ngoại giao, người du lịch cho đến những người dân thường có nhu cầu đi du học hoặc thăm gia đình.

Nhưng cũng có những kẻ buôn lậu, thậm chí cả bọn khủng bố đã từng trà trộn vào trong đám hành khách đông đảo đủ mọi quốc tịch đó. Chính vì thế công tác bảo đảm an ninh tại các cảng hàng không rất nghiêm ngặt.

Hành khách lên máy bay phải qua kiểm tra giấy tờ, hộ chiếu và qua máy rà soát người và hành lý.

Tuy nhiên nhiều khi kẻ gian vẫn có nhiều mánh khóe che đậy lọt qua được.

Trong một chuyến bay, cơ quan an ninh nhận được một thông tin có kẻ giả danh xâm nhập vào nước ta.

Các nhân viên an ninh đã chuẩn bị đón lõng. Qua kiểm tra, thấy có ba người có vẻ khả nghi.

Đó là ba người nước ngoài đều có râu ria như người Trung Đông.

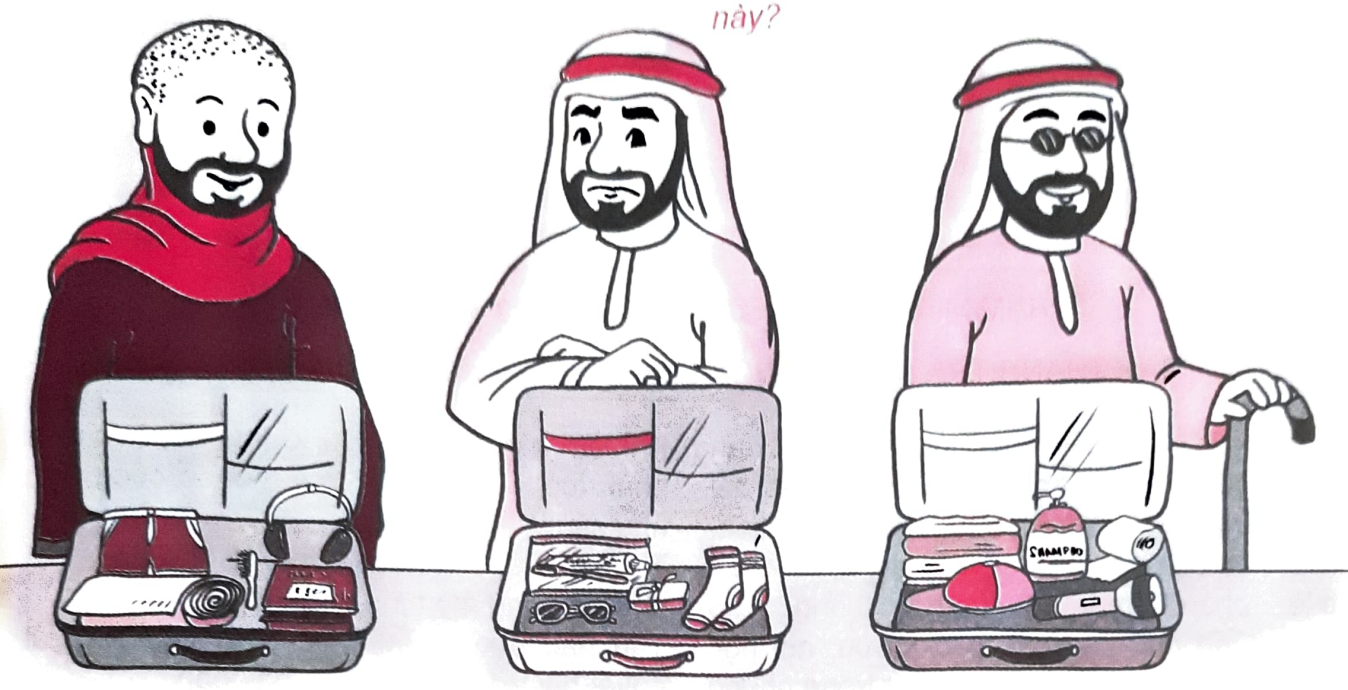
Một ông có vẻ là nhà tu hành.

Một ông rất bặm trợn, trông như đại ca giang hồ.

Và một ông là người mù, tay phải chống gậy dò đường. Cả ba người được mời vào phòng kiểm tra và được yêu cầu mở va ly ra.

Quan sát hành lý, không thấy có vũ khí hay chất cấm.

Theo quan sát của mình, các thám tử nhí hãy bóc phốt, ai là kẻ khả nghi trong số ba người này?





Kết quả **(TTT2 số 266)**

VỤ TRỘM TRONG NHÀ HỌ PHAN

Anh Hoan là thủ phạm. Bởi vì buổi tối hôm xảy ra sự việc là tối Chủ Nhật, mà anh Hoan khai rằng đang xem chương trình truyền hình trực tiếp "Hội ngộ đầu tuần của người nổi tiếng" điều này rất vô lí.

HONG HA®

Nhận xét. Các bạn sau có lập luận tốt, được thưởng kì này: *Lê Hồng Ngọc*, 7A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Phạm Hữu Giang*, 7A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lưu Minh Quang*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Hồ Nguyễn Bảo Trang*, 6A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Ngô Thanh Bình*, 8B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Nguyễn Khánh Ngân*, 8B, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Thám Tử Sê-Lốc-Cốc

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU

PHẠM MINH ĐỨC *(Trường THCS Hoàng Mai, Hà Nội)*

TRẦN THANH TRA *(Trường THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, Hải Phòng)*

Những năm gần đây, chương trình môn Toán cấp THCS đã chú trọng tăng cường các bài toán có yếu tố thực tiễn như: toán về chi tiêu, hình học gắn với đo đạc – xây dựng, bài toán tỉ lệ – phần trăm trong mua bán, thống kê số liệu, cũng như các bài toán tối ưu, nơi học sinh phải tìm phương án tốt nhất trong những điều kiện ràng buộc cụ thể. Chính vì vậy, việc rèn luyện tư duy qua các bài toán tối ưu không chỉ giúp học sinh hiểu sâu bản chất toán học, tăng khả năng lập luận mà còn phát triển năng lực giải quyết vấn đề – một trong những năng lực cốt lõi của chương trình giáo dục hiện nay. Điều này đòi hỏi giáo viên cần thiết kế bài giảng theo hướng phát triển năng lực, lựa chọn bài toán gần gũi với đời sống, giúp học sinh thấy được tính ứng dụng của toán học. Trong bài viết này, chúng ta sẽ tìm hiểu thế nào là bài toán tối ưu và tìm lời giải một số bài toán tối ưu.

Bài toán tối ưu

Bài toán tối ưu là những bài toán vận dụng kiến thức toán học để giải quyết một tình huống thực tế với điều kiện tối ưu. Bài toán tối ưu có vai trò rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực của cuộc sống, khoa học, kỹ thuật và kinh tế. Cụ thể:

- Giải quyết các vấn đề thực tiễn hiệu quả: Giúp tìm ra phương án tốt nhất trong nhiều lựa chọn: tối ưu hóa chi phí sản xuất, tối ưu hóa thời gian vận chuyển, phân bổ nguồn lực hợp lí.
- Nâng cao hiệu quả hoạt động: Tối ưu hóa lợi nhuận, giảm chi phí; phân phối công việc, lịch trình, nhân sự hiệu quả; thiết kế hệ thống hoạt động với hiệu suất cao nhất.

Khi làm bài toán có yếu tố thực tế, học sinh phải đọc kĩ đề bài và làm một số công việc như sau:

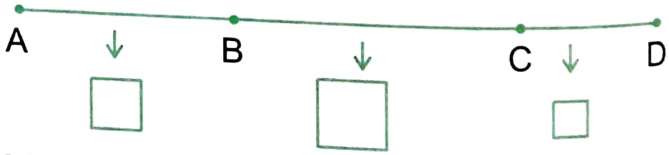
Thứ nhất, từ tình huống thực tế học sinh phải chuyển sang mô hình toán học.

Thứ hai, dùng kiến thức toán học để giải quyết bài toán và kết luận bài toán.

Chính vì vậy kĩ năng đọc hiểu của học sinh rất quan trọng. Học sinh phải hiểu được biểu thức cần xây dựng là gì, khi xây dựng biểu thức thì biến số của biểu thức là biến nào, biểu thức và biến là giá trị thực tế nào trong bài toán.

Bài toán tối ưu trong hình học và xây dựng

Bài toán 1. Bạn Quân dự định trang trí bảng tin của lớp bằng các họa tiết hình vuông. Để tạo ra các hình vuông, bạn Quân cắt đoạn dây dài 90 cm thành ba đoạn nhỏ. Sau đó mỗi đoạn nhỏ được uốn lại thành một hình vuông (hình bên dưới). Hỏi phải chia đoạn dây thành ba phần có độ dài như thế nào để tổng diện tích các hình vuông có giá trị nhỏ nhất?



Lời giải. Gọi chiều dài các đoạn dây sau khi cắt lần lượt là a, b, c (cm) $(0 < a, b, c < 90)$

Khi uốn các sợi dây thành các hình vuông thì chiều dài cạnh hình vuông là $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}$ (cm).

Gọi S là tổng diện tích các hình vuông thì $S = \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2)$ (cm^2).

Do $a+b+c=90$ nên ta có

$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+(90-a-b)^2$

$=a^2+b^2+90^2+a^2+b^2-180a-180b+2ab$

$=(a^2-60a+900)+(b^2-60b+900)$

$+(a^2+2ab+b^2-120a-120b+3600)+2700$

$=(a-30)^2+(b-30)^2+(a+b-60)^2+2700\geq 2700.$

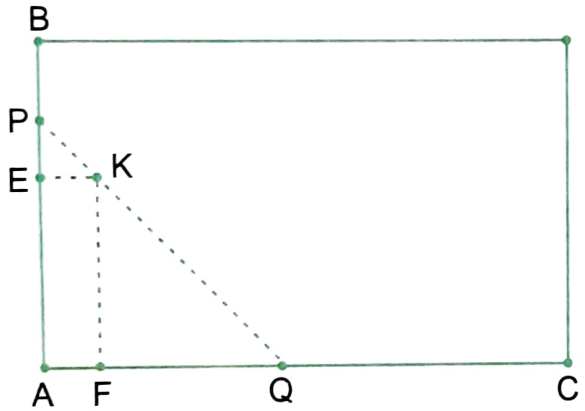
Do đó $S\geq\frac{1}{16}\cdot 2700=168,75.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=30$.

Vậy cần chia đoạn dây thành ba phần, mỗi phần bằng 30 cm thì tổng diện tích các hình vuông thu được có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 2. Tại một góc nhỏ của hồ nước hình chữ nhật, người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 mét và cách bờ AC là 8 mét, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo. Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào hai bờ AB, AC và cây cọc K (coi đường kính của cây sào là không đáng kể).

Lời giải. Giả sử cây sào chạm vào bờ AB, AC lần lượt tại vị trí P, Q như hình vẽ.



Đặt $AP=x$ (m), $AQ=y$ (m) $(x>0, y>0)$.

Gọi E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ K xuống AB, AC thì $KE=1$ (m), $KF=8$ (m).

Dễ thấy các tam giác PEK và PAQ đồng dạng nên ta có $\frac{EK}{AQ}=\frac{PE}{PA}$, suy ra $\frac{1}{y}=\frac{x-8}{x}$

hay $\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1.$

Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác PAQ vuông tại Q, ta có $PQ^2=AP^2+AQ^2$

$=x^2+y^2=(x-10)^2+(y-5)^2+20x+10y-125$

$\geq 20x+10y-125=(20x+10y)\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\right)-125$

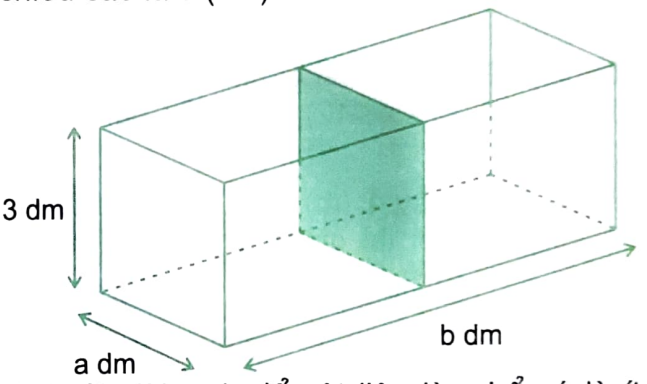
$=\frac{20x}{y}+\frac{80y}{x}+45\geq 2\sqrt{\frac{20x}{y}\cdot\frac{80y}{x}}+45=125.$

Suy ra $PQ\geq 5\sqrt{5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=10, y=5$.

Vậy chiều dài ngắn nhất của cây sào là $5\sqrt{5}$ (m).

Bài toán 3. Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp và có một vách ngăn cùng bằng kính ở giữa để chia bể cá thành hai ngăn. Biết thể tích bể là 72 dm^3 và chiều rộng là a (dm), chiều dài là b (dm), chiều cao là 3 (dm) như hình vẽ.



Tính độ dài a, b để vật liệu làm bể cá là ít nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.

Lời giải. Vì bể cá có thể tích bằng 72 dm^3 nên $3ab=72$ hay $ab=24$.

Để vật liệu làm bể cá là ít nhất thì tổng diện tích của bốn mặt bên, mặt đáy và tấm kính ở giữa phải nhỏ nhất. Gọi diện tích đó là S thì $S=2(a+b)\cdot 3+ab+3a$ (dm^2).

Ta có $S=9a+6b+24\geq 2\sqrt{9a\cdot 6b}+24$

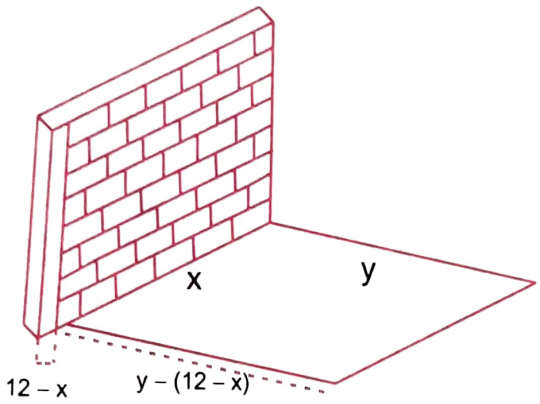
$=2\sqrt{54ab}+24=2\sqrt{54\cdot 24}+24=96.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $9a=6b$, $ab=24$, suy ra $a=4, b=6$.

Vậy để vật liệu làm bể cá là ít nhất thì $a=4$ (dm), $b=6$ (dm).

Bài toán 4. Tại vị trí một khu đất có sẵn một bức tường cũ dài 12 m, người ta dự định xây một cái bể nền hình chữ nhật với diện tích

$112\ m^2$. Biết rằng giá để sửa 1 m chiều dài của bức tường cũ bằng 25% giá xây 1 m chiều dài bức tường mới; giá công phá dỡ 1 m chiều dài bức tường cũ và tận dụng vật liệu đã gỡ ra để xây 1 m chiều dài mới bằng 50% của giá xây dựng 1 m chiều dài với vật liệu mới. Hỏi trong điều kiện như vậy, nên tận dụng giữ lại bao nhiêu mét tường cũ để kinh phí xây dựng là ít nhất?



Lời giải. Gọi chiều dài giữ lại của bức tường cũ là x (m) $(0 \le x \le 12)$ thì chiều dài phá đi $12 - x$ (m).

Nếu a là giá xây 1 (m) chiều dài bức tường với vật liệu mới thì giá sửa chữa x (m) dài tường cũ là $\frac{ax}{4}$; giá xây $12 - x$ (m) bằng tận dụng vật liệu cũ là $\frac{a(12-x)}{2}$.

Để hoàn thành việc xây cạnh y phải xây $y - (12 - x)$ (m) dài nữa và tốn thêm $a(x + y - 12)$.

Giá xây hai bức tường còn lại là $a(x + y)$.

Gọi T là tổng số tiền xây tường thì

$$T = \frac{ax}{4} + \frac{a(12-x)}{2} + a(x + y - 12) + ax + ay$$

$$= \frac{a(7x + 8y)}{4} - 6a.$$

Biểu thức này nhỏ nhất khi $7x + 8y$ nhỏ nhất, với $xy = 112$.

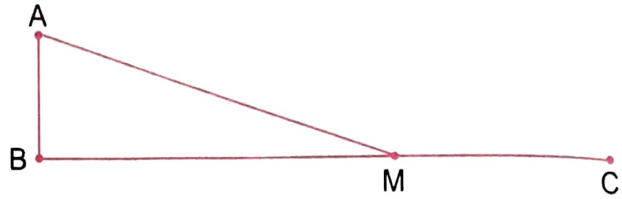
Ta có $7x + 8y \ge 2\sqrt{7x \cdot 8y} = 2\sqrt{56xy} = 112\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $7x = 8y$, $xy = 112$, suy ra $x = \sqrt{128} \approx 11{,}3$ (m).

Vậy nên tận dụng giữ lại 11,3 (m) chiều dài của bức tường.

Bài toán tối ưu quãng đường, thời gian, nhiên liệu

Bài toán 5. Trong hình bên dưới, quãng đường AB dài 5 km, quãng đường BC dài 26 km, góc ABC là góc vuông.



Một người có kế hoạch đi xe đạp từ vị trí A đến một vị trí M trên quãng đường BC với vận tốc 12 km/h, sau đó lại đi từ M đến C với vận tốc 13 km/h. Người đó cần chọn vị trí M cách B một khoảng bằng bao nhiêu km để tổng thời gian đi từ A đến M và từ M đến C là ít nhất?

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm 2025)

Lời giải. Gọi khoảng cách từ M đến B là x (km) $(0 < x < 26)$.

Khoảng cách từ M đến A là $\sqrt{x^2 + 25}$ (km).

Khoảng cách từ M đến C là $26 - x$ (km).

Gọi T là thời gian đi từ A đến C thì

$$T = \frac{\sqrt{x^2+25}}{12} + \frac{26-x}{13} = \frac{13\sqrt{x^2+25} + 12(26-x)}{156}$$

(giờ).

Ta có $13\sqrt{x^2 + 25} = \sqrt{169x^2 + 4225}$

$$= \sqrt{144x^2 + (25x^2 + 3600) + 625}$$

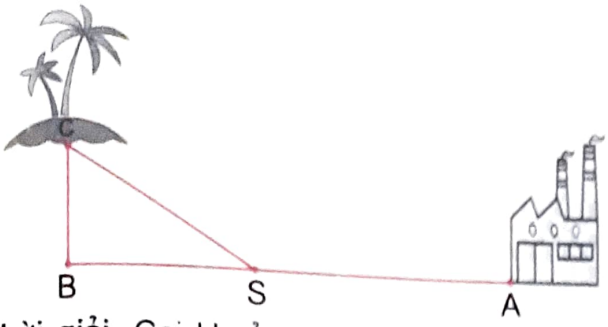
$$\ge \sqrt{144x^2 + 600x + 625} = \sqrt{(12x + 25)^2} = 12x + 25.$$

Do đó $T \ge \frac{12x + 25 + 12(26 - x)}{156} = \frac{337}{156}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $25x^2 = 3600$ hay $x = 12$.

Vậy ta cần chọn điểm M cách B một khoảng 12 km thì tổng thời gian đi là ít nhất.

Bài toán 6. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở vị trí A đến một hòn đảo ở vị trí C. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến đường bờ biển AB là 1 km, khoảng cách từ B đến A là 4 km. Chi phí lắp đặt mỗi km dây điện trên biển là 5000 USD, còn trên đất liền là 3000 USD. Hỏi điểm S nằm trên đường bờ biển AB cách vị trí A bao nhiêu km để khi mắc dây điện từ A qua S, rồi từ S đến C có chi phí thấp nhất? (coi đường dây nối giữa các điểm là một đoạn thẳng).



Lời giải. Gọi khoảng cách từ S đến C là x (km) ($x = SC > BC = 1$).

Khi đó $SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = \sqrt{x^2 - 1}$ (km).

Suy ra $SA = AB - SB = 4 - \sqrt{x^2 - 1}$ (km).

Gọi T là chi phí lắp đặt đường dây điện nối từ vị trí A qua S rồi từ S đến vị trí C thì

$T = 5000x + 3000(4 - \sqrt{x^2 - 1})$ (USD).

Ta có $T = 5000x - 3000\sqrt{(x-1)(x+1)} + 12000$

$= 500\left[10x - 6\sqrt{(x-1)(x+1)}\right] + 12000$

$= 500\left[9x - 9 - 2\sqrt{(9x-9)(x+1)} + x + 1\right] + 16000$

$= 500(\sqrt{9x-9} - \sqrt{x+1})^2 + 16000 \geq 16000.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{9x-9} = \sqrt{x+1}$ hay $x = \frac{5}{4}$.

Khi đó $SA = 4 - \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \frac{13}{4}$ (km).

Vậy chi phí lắp đặt thấp nhất là 16000 USD và điểm S trên đường bờ biển, cách A một khoảng bằng $\frac{13}{4}$ (km).

Bài toán tối ưu chi phí hoặc lợi nhuận

Bài toán 7. *"Sắc Xuân Hoàng Mai"* là chương trình do trường THCS Hoàng Mai tổ chức hàng năm vào dịp Tết, nhằm tạo sân chơi bổ ích giúp học sinh hiểu hơn về truyền thống Tết của dân tộc Việt Nam. "Hội chợ Xuân" là một trong những hoạt động hấp dẫn thuộc chương trình này. Trong hội chợ, một lớp dự định bán lạp xưởng nướng để gây quỹ từ thiện. Lớp nhập mỗi chiếc lạp xưởng với giá 10 nghìn đồng và bán ra với giá 15 nghìn đồng. Với mức giá này, lớp dự đoán sẽ bán được 150 chiếc trong ngày hội chợ. Nhằm thu hút thêm khách hàng, lớp dự định giảm giá bán. Theo ước tính, nếu cứ giảm giá mỗi chiếc 1 nghìn đồng thì số lượng bán ra sẽ tăng thêm 50 chiếc. Hỏi lớp nên bán với giá mới là bao nhiêu để sau khi giảm giá lợi nhuận thu được sẽ cao nhất?

Lời giải. Gọi số tiền mà lớp đó dự định giảm giá là x (nghìn đồng) ($0 \leq x < 5$).

Lợi nhuận khi bán được một chiếc lạp xưởng là $5 - x$ (nghìn đồng).

Số lạp xưởng mà lớp sẽ bán được trong ngày hội chợ là $150 + 50x$ (chiếc).

Gọi T là lợi nhuận mà lớp đó thu được thì $T = (5 - x)(150 + 50x)$ (nghìn đồng).

Để có doanh thu lớn nhất thì T đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $T = 50(5 - x)(3 + x)$

$\leq 50 \cdot \left(\frac{5 - x + 3 + x}{2}\right)^2 = 800.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $5 - x = 3 + x$ hay $x = 1$.

Vậy lợi nhuận thu được lớn nhất là 800 nghìn đồng và lớp đó nên bán mỗi chiếc lạp xưởng với giá 14 nghìn đồng.

Bài toán 8. Một rạp chiếu phim có 120 ghế, giá vé hiện tại là 100 nghìn đồng mỗi vé. Với giá này thì rạp sẽ bán hết 120 vé cho mỗi lần chiếu. Ban quản lý rạp chiếu phim đang xem xét việc tăng giá vé để tối ưu hóa doanh thu. Sau khi thử nghiệm, người ta nhận thấy cứ mỗi lần tăng giá thêm 5 nghìn đồng mỗi vé thì số ghế bị bỏ trống sẽ tăng thêm 4 ghế. Hỏi mức giá vé mới là bao nhiêu để rạp phim đạt doanh thu lớn nhất?

Lời giải. Gọi số lần tăng giá là x (lần) (x nguyên dương).

Giá mỗi vé sau x lần tăng là $100 + 5x$ (nghìn đồng).

Số vé bán được sau x lần tăng giá là $120 - 4x$.

Gọi T là tổng số tiền thu được thì $T = (100 + 5x)(120 - 4x)$ (nghìn đồng).

Để có doanh thu lớn nhất thì T đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $T = -20x^2 + 200x + 12000$

$= -20(x^2 - 10x + 25) + 12500$

$= -20(x - 5)^2 + 12500 \leq 12500.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 5$.

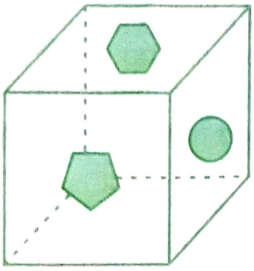
Vậy rạp chiếu phim cần bán với mức giá mới cho mỗi vé là 125000 đồng thì doanh thu cho mỗi lần chiếu phim là lớn nhất, giá trị lớn nhất đó là 12500000 đồng.



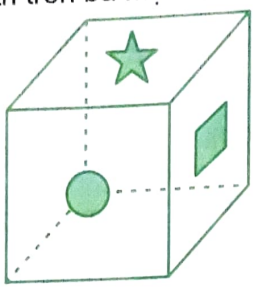
BỒ TRÍ THÔNG MINH

Kì này HÌNH NÀO THẾ NHỈ?

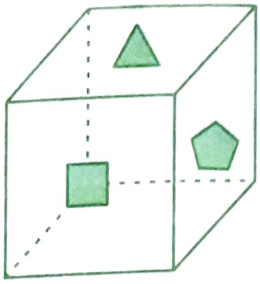
Các hình bên dưới gồm: hình 1, hình 2, hình 3 mô tả một chiếc hộp hình lập phương, mà mỗi mặt của hộp được trang trí bởi một hình. Mỗi hình đều nhìn thấy hình ảnh trang trí trên ba mặt của hộp.



Hình 1

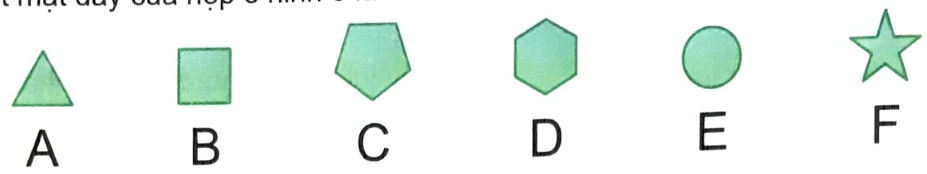


Hình 2



Hình 3

Hãy cho biết mặt đáy của hộp ở hình 3 là hình nào trong các hình sau:



MINH HẢI *(TP. Hưng Yên, Hưng Yên)*

Kết quả THAY BỞI HÌNH NÀO? (TTT2 số 266)

Xét hình 1, diện tích phần không tô màu gấp hai lần diện tích phần tô màu; hình 2 diện tích phần không tô màu gấp ba lần diện tích phần tô màu; hình 4 diện tích phần không tô màu gấp năm lần diện tích phần tô màu. Theo thứ tự như vậy, ở hình 3 diện tích phần không tô màu sẽ gấp bốn lần diện tích phần tô màu. Trong các hình: hình A, hình B, hình C, hình D chỉ có hình B có diện tích phần không tô màu gấp bốn lần diện tích phần tô màu. Như vậy dấu ? thay bởi hình B.

HONG HA

Nhận xét. Kì này có rất nhiều bạn tham gia giải bài, các bạn đều chỉ ra đúng quy luật và tìm ra hình phù hợp để điền vào chỗ còn thiếu. Xin trao thưởng cho các bạn sau có phần trình bày sạch đẹp: *Nguyễn Trí Hiếu*, 6A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Huy Long*, 7A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Lê Quang Huy*, 8A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Đức Quân*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Thị Bảo Ngân*, 8A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.

TRẦN THỊ THẢO





Kì này THAY CÁC CHỮ CÁI BỞI CÁC CHỮ SỐ

Bài toán. Hãy thay các chữ khác nhau trong đẳng thức sau bởi các chữ số khác nhau và khác 0 để được một đẳng thức đúng:

$(\overline{COM}+\overline{PA}+\overline{TINH})^{\overline{VUI}}=123456789101112....29982999$. Trong đó ở vế phải là số tự nhiên được viết bởi các số tự nhiên từ 1 đến 2999 theo thứ tự liền nhau.

NGUYỄN NGỌC HÙNG *(Trường THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)*



Kết quả (TTT2 số 266)

NĂM SỐ NÀO TRÊN BẢNG?

Lời giải. Gọi năm số bạn Tỵ viết lên bảng là a, b, c, d, e.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\le b\le c\le d\le e$ thì ta có $a+b=1975$ và $d+e=2025$.

Nếu $a=b$ thì $2a=1975$ vô lí nên $a\ne b$.

Nếu $d=e$ thì $2d=2025$ vô lí nên $d\ne e$.

Do đó $a<b\le c\le d<e$. Khi đó ta có

$1975=a+b<b+c<d+e=2025$.

$1975=a+b<b+d<d+e=2025$.

$1975=a+b<c+d<d+e=2025$.

Suy ra $b+c=b+d=c+d=2000$, dẫn đến $b=c=d=1000$.

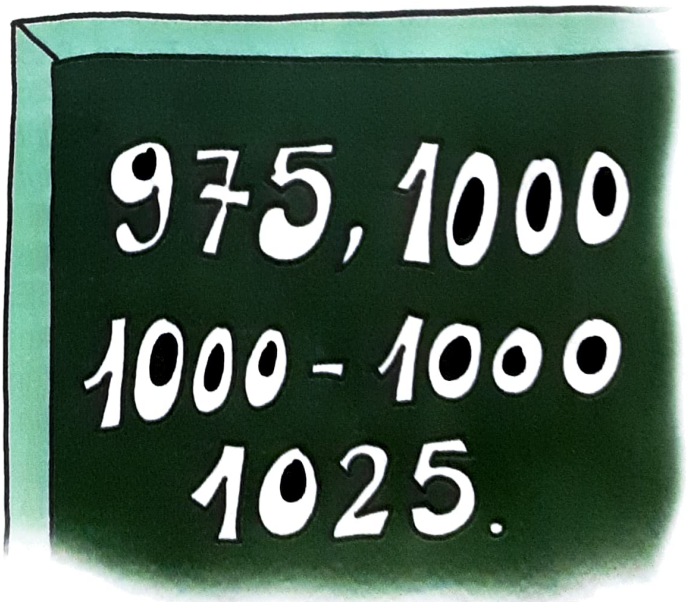
Từ đó, $a=1975-b=975$, $e=2025-d=1025$.

Vậy bạn Tỵ đã viết lên bảng các số: 975, 1000, 1000, 1000, 1025.

HONG HA

Nhận xét. Một số bạn sử dụng nguyên lí Dirichlet để chỉ ra tồn tại ba tổng bằng nhau. Các bạn sau có lời giải đúng, được thưởng kì này: *Nguyễn Anh Thư*, 8E, *Nguyễn Hoàng Hiệp*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Tuấn Đản*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Trần Quốc Dũng*, 6A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Tạ Duy Viết Việt*, 8B, *Vương Thị Hải Châu*, 8C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

QUANG ANH



Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(266). Viết lên bảng 2025 số gồm 1, 2, 3, ..., 2025. Mỗi lần xóa ba số a, b, c bất kì và thay vào số a – b – c đến khi trên bảng còn ba số nguyên. Hỏi ba số còn lại đó có thể là các số chẵn được không?

Lời giải. Trong 2025 số tự nhiên liên tiếp 1, 2, 3,..., 2025 có 1012 số chẵn và 1013 số lẻ nên tổng của 2025 số này là số lẻ.

Mỗi lần xóa ba số a, b, c bất kì và thay vào số $a-b-c$ thì tổng giảm đi $(a+b+c)-(a-b-c)=2(b+c)$, tức là giảm đi một số chẵn, như thế sau 1011 lần sẽ còn ba số có tổng là một số lẻ. Vậy ba số còn lại trên bảng không thể là ba số chẵn, vì nếu không tổng của chúng là số chẵn, mâu thuẫn với lập luận trên.

Nhận xét. 1) Với đề bài đã đưa ra yêu cầu tìm ba số còn lại là ba số tự nhiên liên tiếp, trong đó có số nguyên tố chẵn, tuy nhiên với a, b, c bất kì thì ba số còn lại trên bảng có thể không phải là ba số tự nhiên liên tiếp. Bởi vậy tòa soạn đưa ra yêu cầu như trong đề trên.

2) Mặc dù đề bài đã có thay đổi nhưng các bạn sau vẫn có lời giải theo hướng trên: *Nguyễn Hữu Gia Bảo*, *Vũ Nhật Thành*, 6A6, *Phạm Trần Mạnh Quang*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Phan Viết Minh Bảo*, *Phan Khôi Nguyên*, 7D, *Nguyễn Khánh Ngọc*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Lê Kim Ngân*, 7A1, THCS Quỳnh Thiện, Hoàng Mai; *Trương Đình Quốc Anh*, 6E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Nguyễn Thị Ngọc Hân*, 6C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài 2(266). Cho x, y, z là các số nguyên dương sao cho $(x-2z)(y+z)=z^2$, ngoài ra x và y là hai số nguyên tố cùng nhau. Hỏi tổng $x+y+z$ có là số chính phương không?

Lời giải. Trước hết, ta nhắc lại bổ đề quen thuộc về số chính phương sau: Nếu a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn $ab=c^2$ và $(a,b)=1$ thì a và b đều là các số chính phương (bạn đọc tự chứng minh).

Trở lại với bài toán

Gọi $d=(x-2z, y+z)$ với d nguyên dương thì từ giả thiết cho ta $z^2 \vdots d^2$, suy ra $z \vdots d$.

Kết hợp với $y+z \vdots d$, suy ra $y \vdots d$.

Từ $z \vdots d$, $x-2z \vdots d$, suy ra $x \vdots d$.

Từ $x \vdots d$, $y \vdots d$, $(x,y)=1$, suy ra $d=1$.

Theo bổ đề ta suy ra tồn tại hai số nguyên dương m, n sao cho $x-2z=m^2$, $y+z=n^2$, suy ra $z=mn$.

Khi đó ta có $x+y+z=(x-2z)+(y+z)+2z$ $=m^2+n^2+2mn=(m+n)^2$ là số chính phương.

Nhận xét. Đây là bài toán số học hay nhưng không khó. Ý tưởng chính của các lời giải gửi đến tòa soạn đều sử dụng bổ đề trên. Một số lời giải còn trình bày vắn tắt, biến đổi nhầm. Các bạn sau có lời giải đúng, ngắn gọn: *Nguyễn Huy Đạt*, 7A3, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; *Nguyễn Hữu An Bình*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; *Nguyễn Hoàng Minh*, *Nguyễn Quang Minh*, *Vũ Cường Thịnh*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh, **Bắc Ninh**; *Võ Hoàng Phúc*, 7A, *Hồ Khánh Linh*, *Đặng Ngọc Minh*, *Thái Hải Nam*, *Lê Bùi Minh Nhật*, *Võ Lê Linh Nhi*, *Trần Nguyên Phong*, *Bùi Minh Thành*, *Trần Hoàng Vũ*, 7C, *Phan Viết Minh Bảo*, *Phan Khôi Nguyên*, 7D, *Nguyễn Khánh Ngọc*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Thái Dũng*, *Cao Phúc*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Lê Kim Ngân*, 7A1, THCS Quỳnh

Thiện, Hoàng Mai, **Nghệ An**; *Nguyễn Gia Bảo, Trần Gia Bảo, Hồ Anh Dũng, Lê Việt Hoàng, Nguyễn Minh Khánh, Nguyễn Phạm Thăng Long, Phan Anh Tuấn*, 7D, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; *Lê Hoàng Anh, Đậu Hà Nhật Khánh, Nguyễn Danh Kiên, Lê Văn Nhật Minh, Lê Huyền Bảo Ngọc*, 6B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; *Nguyễn Hữu Minh Quân, Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

Bài 3(266). Tìm số nguyên tố p biết $7^p - 4^p$ chia hết cho p.

Lời giải. Trước hết, ta nhắc lại định lí Fermat nhỏ: Nếu p là một số nguyên tố và a là số nguyên thì $a^p - a$ chia hết cho p.

Phát biểu dạng khác như sau: Nếu p là một số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p thì $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p.

Chứng minh. Do p là số nguyên tố và a không chia hết cho p nên $(a, p) = 1$.

Xét các số $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$, ta thấy không có số nào trong $p-1$ số trên chia hết cho p và không có số nào cùng số dư khi chia cho p. Do đó số dư của các số trên khi chia cho p là $1, 2, 3, \ldots, p-1$, suy ra

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \pmod p$$

hay

$$a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \pmod p.$$

Vì $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1), p) = 1$ nên $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Áp dụng định lí trên vào bài toán ta có $7^p - 4^p \equiv 7 - 4 \pmod p \equiv 3 \pmod p$, suy ra $7^p - 4^p = ap + 3$ với a là số tự nhiên.

Mặt khác, theo giả thiết thì $7^p - 4^p : p$ nên $ap + 3 : p$, dẫn đến $3 : p$, suy ra $p = 3$ (do p là số nguyên tố).

Thử lại ta thấy $p = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: *Vũ Bảo Linh*, AE7.1, THCS Nam Từ Liêm, Nam Từ Liêm; *Nguyễn Bảo An, Lê Tuấn Đức, Hồng Minh, Nguyễn Phương Linh, Nguyễn Duy Tùng*, 6A, THCS Nguyễn Gia Thiều, Long Biên, **Hà Nội**; *Ngô Hoàng Bách, Nguyễn Huy Long, Phạm Nhật Minh, Nguyễn Bình Minh, Lê Hồng Ngọc*, 7A, *Trần Văn Phú*, 7C, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; *Bùi Hoàng Khánh*, 7A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; *Nguyễn Hữu Gia Bảo, Vũ Nhật Thành*, 6A6, *Nguyễn Bảo Châu, Phạm Trần Mạnh Quang*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Trí Hiếu*, 6A1, *Vũ Cường Thịnh*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; *Nguyễn Thái Sơn*, 6A3, *Nguyễn Hữu An Bình, Đặng Đình Huy, Nguyễn Sỹ Quang Minh, Nguyễn Thị Huệ Phương, Ngô Thanh Thủy*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Phi Long*, 7A3, THCS Nguyễn Hồng Lễ, Sầm Sơn, **Thanh Hóa**; *Võ Hoàng Phúc*, 7A, *Trần Nguyên Gia Bảo*, 7B, *Đặng Ngọc Minh, Thái Hải Nam, Nguyễn Đức Nhân, Bùi Lê Minh Nhật, Võ Lê Linh Nhi, Trần Hải Phong, Trần Nguyên Phong, Bùi Minh Thành, Trần Đức Thắng, Trần Hoàng Vũ*, 7C, *Phan Viết Minh Bảo, Phan Khôi Nguyên*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Thái Bùi Hà Anh*, 6E, *Nguyễn Thái Dũng, Nguyễn Sỹ Bảo Long, Cao Phúc, Trần Bá Sang*, 7B, *Ngô Trần Ngọc Bảo*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Lê Kim Ngân*, 7A1, THCS Quỳnh Thiện, Hoàng Mai; *Đặng Văn Hoàng*, 6A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Lê Thị Thành Bình, Nguyễn Hữu Minh Quân*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Đồng Văn Phúc*, 6B, *Nguyễn Bảo Hân, Phan Thanh Huyền*, 6C, *Nguyễn Linh Đan, Nguyễn Diệu Huyền*, 6D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; *Nguyễn Gia Bảo, Trần Gia Bảo, Hồ Anh Dũng, Nguyễn Minh Khánh*, 7D, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

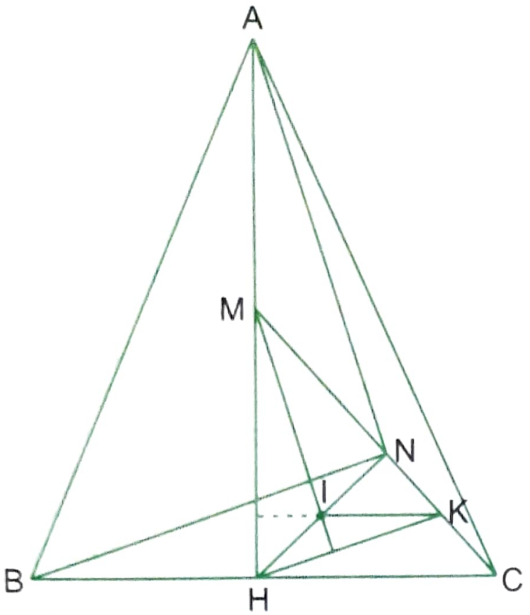
NGUYỄN NGỌC HÂN

Bài 4(266). Cho tam giác ABC cân tại A có đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AH. Từ H, kẻ HN vuông góc với đoạn thẳng CM tại N. Tính số đo của góc ANB.

Lời giải. Trước hết, ta có bổ đề quen thuộc sau: Đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh của một tam giác thì song song với cạnh thứ ba.

** Trở lại với bài toán đã cho.*

Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của NH và NC.



Theo bổ đề trên ta có IK // HC. Mà HC ⊥ MH nên IK ⊥ MH. Kết hợp với HI ⊥ MK, suy ra I là trực tâm của tam giác MHK nên MI ⊥ HK. (1)

Tam giác AHN có M, I lần lượt là trung điểm của AH và NH nên MI // AN. (2)

Tam giác BCN có H, K lần lượt là trung điểm của BC và NC nên HK // BN. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra AN ⊥ BN hay $\widehat{ANB} = 90^\circ$.

Nhận xét. Ngoài cách trên, một số bạn dựng hình chữ nhật AHBE có tâm I rồi chỉ ra IN = IH = IE = IA = IB để suy ra tam giác ANB vuông tại N. Một số bạn lại chứng minh các tam giác ANM và BNH đồng dạng nên $\widehat{ANM} = \widehat{BNH}$, từ đây cũng suy ra được $\widehat{ANB} = 90^\circ$. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Quang Minh*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Bảo Châu, Tạ Minh Hằng, Phạm Trần Mạnh Quang*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Phạm Quang Thanh*, 7A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Võ Hoàng Phúc*, 7A, *Thái Hải Nam*, 7C, *Phan Viết Minh Bảo, Phan Khôi Nguyên*, 7D, *Nguyễn Khánh Ngọc*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Đình Lộc*, 6A1, *Đinh Trần Bảo Khánh*, 6A2, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Nguyễn Gia Bảo, Trần Gia Bảo, Hồ Anh Dũng, Lê Việt Hoàng, Nguyễn Minh Khánh, Phan Anh Tuấn*, 7D, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

QUANG ANH

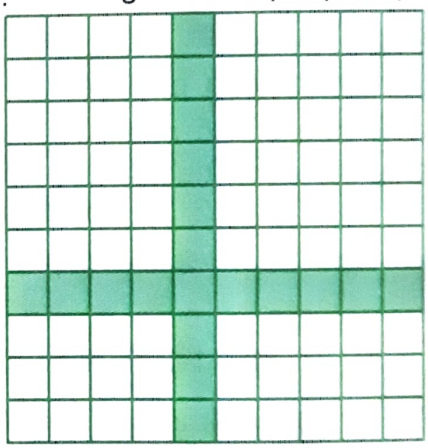
Bài 5(266). Cho bảng ô vuông kích thước 10×10. Tô đen k ($k \in \mathbb{N}^*$) ô vuông bất kì của bảng. Nếu có một ô vuông chưa được tô đen mà kề với ít nhất với hai ô vuông được tô đen thì ô này sẽ được tô đen (hai ô vuông được gọi là kề nhau nếu chúng có chung cạnh). Tìm giá trị nhỏ nhất của k để với mọi cách tô k ô vuông ban đầu thì tới một lúc nào đó, toàn bảng sẽ được tô đen.

Lời giải. Dễ thấy, nếu ta tô đen 9 hàng đầu tiên của bảng (tức là tô 90 ô đen) thì hàng cuối cùng sẽ không bao giờ được tô đen, vì mỗi ô vuông ở hàng cuối cùng chỉ kề với đúng một ô đen.

Như vậy, nếu số ô đen không vượt quá 90 thì bảng sẽ không được tô đen, suy ra $k \geq 91$.

Giờ ta chỉ ra rằng, nếu tô đen 91 ô vuông bất kì của bảng thì tới một lúc nào đó toàn bảng sẽ được tô đen.

Thật vậy, vì có 91 ô được tô đen nên còn lại 9 ô không được tô đen. Vì 9 ô này thuộc tối đa 9 hàng nên sẽ có một hàng được tô đen. Tương tự thì cũng sẽ có một cột được tô đen.



Thế thì dễ thấy rằng sau một thời gian tất cả các ô của bảng sẽ được tô đen.

Nhận xét. Đây là bài toán cực trị tổ hợp. Về nguyên tắc để tìm giá trị nhỏ nhất của k, ta phải thực hiện hai bước.

Bước 1. Chỉ ra một chặn dưới cho k, tức là chỉ ra một số nguyên dương m để $k \geq m$. Trong bài toán này, chỉ cần chỉ ra một mô hình không thỏa mãn là có thể ước lượng được giá trị của m. Lưu ý là giá trị của m càng lớn càng tốt.

Bước 2. Chỉ ra dấu bằng có thể xảy ra, tức là với mọi cách tô, khi k = m luôn đạt được trạng thái yêu cầu của đề bài.

Một số bạn đã chỉ ra chặn dưới cho k nhưng chưa chỉ ra dấu bằng xảy ra. Các bạn sau có lời giải đúng: *Võ Hoàng Phúc*, 7A, *Phan Khôi*

Nguyên, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài 6(266). Với các số thực dương x, y thỏa mãn $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{2y}+2)+9x \geq 17$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \sqrt{\dfrac{y^3}{x+1}} + \dfrac{4x^3}{y}$.

Lời giải. Từ giả thiết, áp dụng bất đẳng thức AM–GM ta được $17 \leq (\sqrt{x}+1)(\sqrt{2y}+2)+9x$

$$= \sqrt{2xy} + 2\sqrt{x} + \sqrt{2y} + 2 + 9x$$

$$\leq \frac{2x+y}{2} + x + 1 + \frac{2+y}{2} + 2 + 9x = 11x + y + 4.$$

Do đó $11x + y \geq 13$.

Cũng theo bất đẳng thức AM–GM cho các số thực dương thì

$$\sqrt{\frac{y^3}{x+1}} + \sqrt{\frac{y^3}{x+1}} + x + 1 \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{y^3}{x+1}} \cdot \sqrt{\frac{y^3}{x+1}} (x+1)} = 3y$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{y^3}{x+1}} \geq \frac{3y - x - 1}{2}.$$

$$\frac{4x^3}{y} + y + 2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{4x^3}{y} \cdot y \cdot 2} = 6x$$

$$\Rightarrow \frac{4x^3}{y} \geq 6x - y - 2.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$Q = \sqrt{\frac{y^3}{x+1}} + \frac{4x^3}{y} \geq \frac{11x + y - 5}{2} \geq \frac{13 - 5}{2} = 4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1, y = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q là 4.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Học Minh Hiếu*, 8T, THCS&THPT Lương Thế Vinh, Thanh Trì, **Hà Nội**; *Trần Trung Nghĩa*, 8E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thảo Linh*, 9A3, THCS Kỳ Sơn, TP. Hòa Bình, **Hòa Bình**; *Nguyễn Tuấn Đản*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

ĐÀO VĂN NAM

Bài 7(266). Tại bốn đỉnh của một hình vuông có viết bốn số nguyên dương, sao cho với bất kì hai số nào nằm trên cùng một cạnh của hình vuông, luôn có một số chia hết cho số còn lại, đồng thời với bất kì hai số nào nằm trên cùng một đường chéo của hình vuông, không có số nào chia hết cho số còn lại. Hỏi tổng của bốn số được viết có thể nhận giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải. Xét cách viết số sao cho tổng của bốn số được viết là nhỏ nhất có thể. Gọi a, b, c, d lần lượt là các số viết ở bốn đỉnh của hình vuông (đọc theo chiều kim đồng hồ). Không mất tính tổng quát, giả sử a là số nhỏ nhất trong bốn số a, b, c, d. Ta thấy:

- Theo giả thiết, cả hai số b, d đều là bội của a.
- Nếu $a = 1$ thì c chia hết cho a, mâu thuẫn. Do đó $a > 1$.
- Nếu $c = a$ thì c chia hết cho a, mâu thuẫn. Do đó $c > a$.
- Nếu c chia hết cho b thì do b là bội của a nên c chia hết cho a, mâu thuẫn. Do đó b chia hết cho c. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có d chia hết cho c.

Nếu c, a có ước nguyên tố chung p, ta có thể xét cách viết số $\left(\dfrac{a}{p}, \dfrac{b}{p}, \dfrac{c}{p}, \dfrac{d}{p}\right)$, cách viết này cũng thỏa mãn đầy đủ tính chất của đề bài, tuy nhiên ta lại có $\dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p} + \dfrac{c}{p} + \dfrac{d}{p} < a + b + c + d$, mâu thuẫn với cách chọn các số a, b, c, d. Do đó $(a, c) = 1$.

Vì b, d chia hết cho a, c và $(a, c) = 1$ nên b, d chia hết cho ac. Đặt $b = mac, d = nac$ với m, n nguyên dương. Chú ý rằng:

- Nếu $m = n$ thì b chia hết cho d, mâu thuẫn. Do đó $m \neq n$.
- Nếu $m = 1$ thì d chia hết cho b, mâu thuẫn. Do đó $m > 1$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $n > 1$.

Như vậy m, n là hai số nguyên phân biệt lớn hơn 1.

Từ đây, ta có $a + b + c + d = (a + c) + ac(m + n)$

$$\geq (2 + 3) + 2 \cdot 3 \cdot (2 + 3) = 35.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = 2, b = 18, c = 3, d = 12$. Thử lại, ta thấy cách điền số 2, 18, 3, 12 thỏa mãn yêu cầu. Vậy tổng nhỏ nhất có thể thu được là 35.

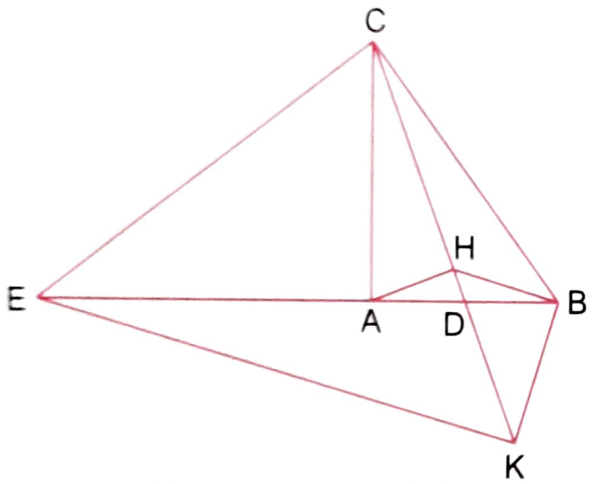
Nhận xét. Đây là một bài toán số học hay, thú vị nhưng khá mới lạ. Bài này rất dễ mắc lỗi trình bày, chẳng hạn nhiều bạn ngộ nhận

rằng để tổng nhỏ nhất chỉ cần xét $a = 2$ và $c = 3$. Một số bạn khác lại thừa nhận rằng $(a, c) = 1$ mà không có lập luận gì. Các bạn sau có lời giải tốt: *Phạm Minh Hải*, 8B, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**; *Võ Hoàng Phúc*, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

VÕ QUỐC BÁ CẨN

Bài 8(266). Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên CD. Đường thẳng qua B và vuông góc với BH cắt đường thẳng CD tại K. Đường thẳng qua C và vuông góc với CB cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh rằng KE vuông góc với KB.

Lời giải.



Tam giác ACD vuông tại A, đường cao AH nên ta có $DA^2 = DH \cdot DC$. Kết hợp với $DA = DB$ ta được $DB^2 = DH \cdot DC$ hay $\frac{DB}{DH} = \frac{DC}{DB}$, suy ra các tam giác DBH và DCB đồng dạng nên $\widehat{DHB} = \widehat{DBC}$.

Các tam giác KBH và ECB lần lượt vuông tại B và C, đồng thời có $\widehat{KHB} = \widehat{EBC}$ nên $\widehat{BKH} = \widehat{CEB}$. Từ đây ta suy ra tứ giác BCEK nội tiếp. Mà $\widehat{BCE} = 90^\circ$ nên $\widehat{BKE} = 90^\circ$ hay KE vuông góc với KB.

Nhận xét. Bài toán này không khó nên các bạn tham gia đều đưa ra lời giải đúng. Xin nêu tên các bạn có lời giải tốt: *Nguyễn Thanh Mai*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ**; *Cao Ngọc Khánh*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thảo Linh*, 9A3, THCS Kỳ Sơn, TP. Hòa Bình, **Hòa Bình**; *Đỗ Bá Bách*, *Nguyễn Đình Duy*, *Nguyễn Tuấn Đản*, *Trương Minh Tiến*, *Nguyễn Thị Kiều Trang*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Bá Vân Trường*, *Nguyễn Thúc Gia Vũ*, 9G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Hoàng Văn Duy*, *Võ Nhật Hoàng*, 8D, *Nguyễn Công Lĩnh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Hoàng Lê Anh Tuấn*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

LƯU CÔNG ĐÔNG

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Võ Hoàng Phúc, 7A, *Thái Hải Nam*, 7C, *Hồ Anh Dũng*, *Phan Viết Minh Bảo*, *Phan Khôi Nguyên*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Trần Mạnh Quang*, 7A6, *Vũ Nhật Thành*, *Nguyễn Hữu Gia Bảo*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Hoàng Minh*, *Vũ Cường Thịnh*, 7A1,THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; *Nguyễn Thị Kiều Trang*, *Trương Minh Tiến*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thảo Linh*, 9A3, THCS Kỳ Sơn, TP. Hòa Bình, **Hòa Bình**; *Vũ Bảo Linh*, AE7.1, THCS Nam Từ Liêm, Nam Từ Liêm, **Hà Nội**; *Phạm Minh Hải*, 8B, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**.



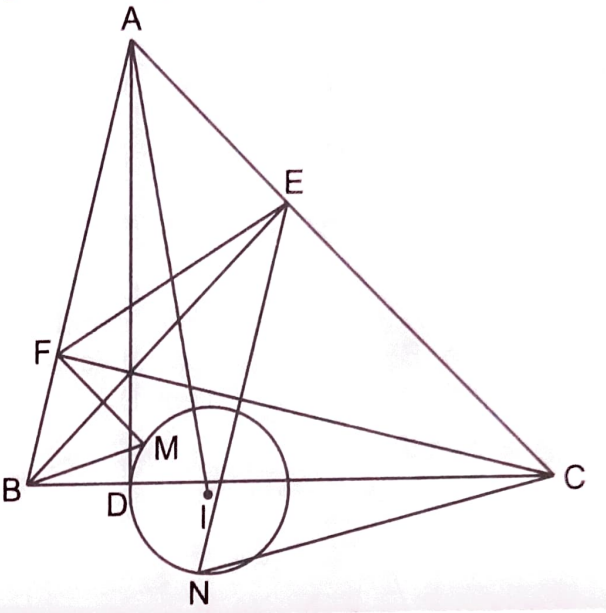
THÁCH ĐẤU

TRẬN ĐẤU THỨ HAI TRĂM MƯỜI BẢY

Người thách đấu: Lưu Công Đông *(Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội).*

Bài toán thách đấu: Cho tam giác không vuông ABC có các đường cao AD, BE, CF. Lấy các điểm M, N thuộc miền trong góc BAC sao cho $MF = MB$, $NE = NC$ và $\widehat{MFB} = \widehat{NEC} = \widehat{BAC}$. Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN. Chứng minh rằng AI đi qua trung điểm của EF.



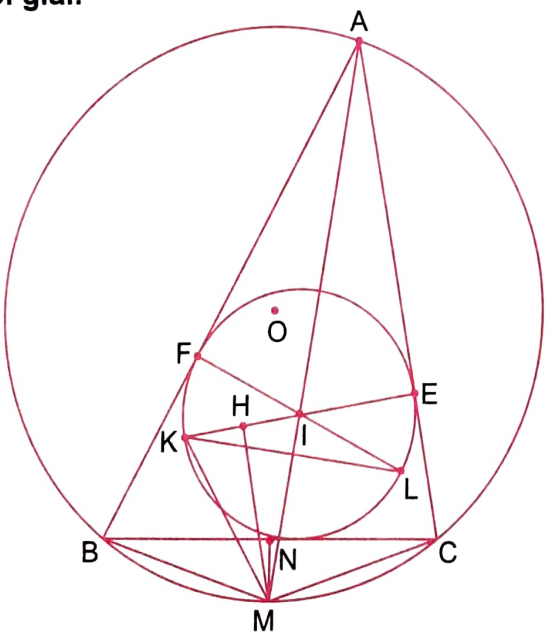


Kết quả

TRẬN ĐẤU THỨ HAI TRĂM MƯỜI LĂM (TTT2 số 266)

Đề bài. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC ($AB \neq AC$) theo thứ tự tiếp xúc với AC, AB tại E, F. K, L theo thứ tự là điểm đối xứng của E, F qua I. Chứng minh rằng tứ giác BCLK nội tiếp khi và chỉ khi $AB + AC = 3BC$.

Lời giải.



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; M là giao điểm thứ hai của AI và đường tròn (O); H, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên IK, BC.

Vì $AB \neq AC$ nên M chính là giao điểm của các đường trung trực của BC và KL.

Vậy các điều kiện sau tương đương.

1) BCLK nội tiếp.
2) $MB = MK$.
3) $MI = MK$.
4) $HI = HK$.
5) $KI = 2HI$.
6) $EI = 2HI$.
7) $AI = 2MI$.
8) $AI = 2MB$.
9) $AE = 2NB$.
10) $\dfrac{AB + AC - BC}{2} = BC$.
11) $AB + AC = 3BC$.

Nhận xét. Bài toán này không khó. Một số lời giải quên chứng minh hai chiều. Không có võ sĩ nào đăng quang trong trận đấu này. Phần thưởng đành hẹn cho lần sau.

LƯU CÔNG ĐÔNG



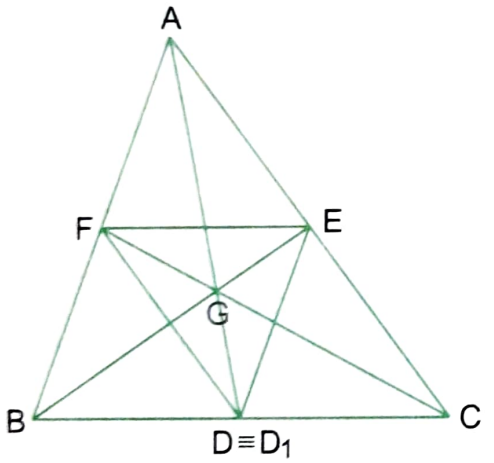
HỌC RA SAO?

TÌM HIỂU THÊM VỀ TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA MỘT TAM GIÁC

NGUYỄN VIẾT CHƯƠNG *(TP. Hà Tĩnh, Hà Tĩnh)*

Tính chất ba đường trung tuyến của một tam giác phát biểu như sau: "Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy".

Chứng minh. Gọi G là giao điểm các đường trung tuyến BE, CF của tam giác ABC. Đường thẳng AG cắt BC ở điểm D_1. Kí hiệu S_{ABC} là diện tích của tam giác ABC.



Vì E là trung điểm của AC nên $S_{ABE} = S_{CBE}$ và $S_{AGE} = S_{CGE}$, suy ra $S_{AGB} = S_{CGB}$.

Tương tự, $S_{AGC} = S_{CGB}$.

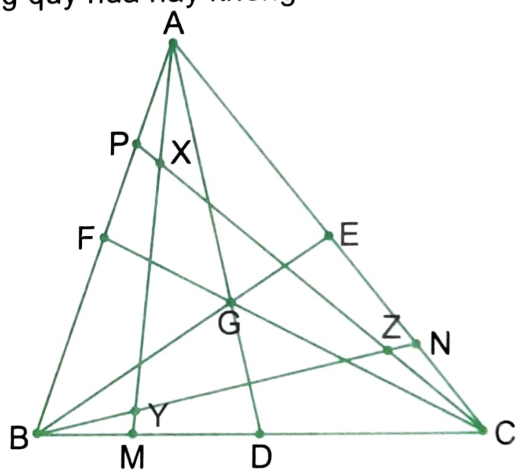
Suy ra $S_{AGB} = S_{AGC}$ nên hai đường cao kẻ từ B và C xuống đường thẳng AG bằng nhau, dẫn đến $S_{BGD_1} = S_{CGD_1}$, mà hai tam giác này có chung đường cao hạ từ G xuống BC nên D_1 là trung điểm của BC, suy ra D_1 trùng với D. Chứng tỏ AD, BE, CF đồng quy.

Lại do $S_{ABD} = S_{CBF}$ nên $S_{AGF} = S_{CGD}$, mà $S_{AGF} = S_{BGF}$ nên $S_{BGF} = S_{CGD} = \frac{1}{2}S_{BGC}$, dẫn đến $FG = \frac{1}{2}CG$, suy ra $\frac{CG}{CF} = \frac{2}{3}$.

Tương tự, cũng có $\frac{AG}{AD} = \frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$.

Giờ ta nối các điểm D, E, F lại với nhau tạo thành tam giác DEF. Dễ dàng chứng minh được $S_{DGE} = S_{EGF} = S_{FGD} = \frac{1}{12}S_{ABC}$. Chứng tỏ G cũng là trọng tâm của tam giác DEF.

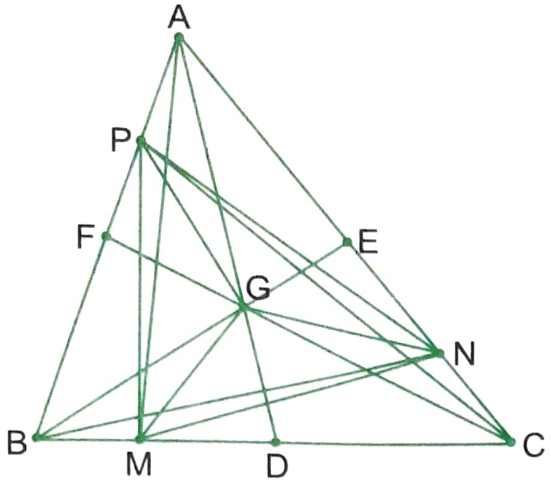
Ta tiếp tục lấy các điểm M, N, P theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\frac{MB}{BC} = \frac{NC}{CA} = \frac{PA}{AB} = k$ (với k là số thực dương bất kì nhỏ hơn 1) thì liệu AM, BN, CP có còn đồng quy nữa hay không?



Xét $0 < k < \frac{1}{2}$ và gọi X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm của các cặp đoạn thẳng (CP, AM), (AM, BN), (BN, CP). Khi đó các điểm X, Y, Z lần lượt nằm trong các tam giác AGF, BGD, CGE nên không thể trùng nhau. Điều đó có nghĩa là AM, BN, CP không đồng quy. Tương tự với $\frac{1}{2} < k < 1$ thì AM, BN, CP không đồng quy. Còn khi $k = \frac{1}{2}$ thì rõ ràng X, Y, Z trùng nhau tại điểm G.

Với cách chọn điểm M, N, P ở trên, liệu G có là trọng tâm của tam giác MNP hay không? Điều này sẽ đúng nếu ta chứng minh được

$S_{PGN} = S_{NGM} = S_{MGP}$.



Ta có $S_{AGP} = \frac{AP}{AB} S_{AGB} = \frac{k}{3} S_{ABC}$.

$S_{AGN} = \frac{AN}{AC} S_{AGC} = \frac{1-k}{3} S_{ABC}$.

$S_{APN} = \frac{AN}{AC} S_{APC} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AB} S_{ABC} = (1-k)k S_{ABC}$.

Do đó $S_{PGN} = S_{AGP} + S_{AGN} - S_{APN}$

$= (k^2 - k + \frac{1}{3}) S_{ABC}$.

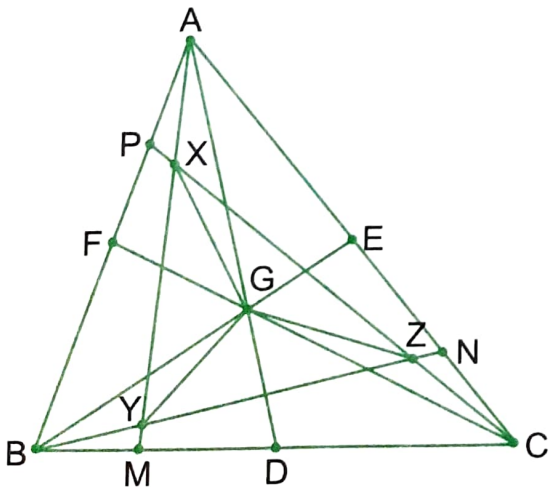
Chứng minh tương tự ta cũng có

$S_{NGM} = S_{MGP} = (k^2 - k + \frac{1}{3}) S_{ABC}$.

Điều đó có nghĩa rằng điểm G là trọng tâm của tam giác MNP.

Ta tiếp tục suy đoán xem điểm G có là trọng tâm của tam giác XYZ không? Điều này sẽ đúng nếu như ta chứng minh được $S_{XGY} = S_{YGZ} = S_{ZGX}$.

Xét trường hợp $0 < k < \frac{1}{2}$ (trường hợp $\frac{1}{2} < k < 1$ làm tương tự).



Ta có $S_{XGY} = \frac{XY}{AY} S_{AGY} = \left(1 - \frac{AX}{AY}\right) \frac{AY}{AM} S_{AGM}$

$= \left(1 - \frac{AX}{AY}\right) \frac{AY}{AM} \cdot \frac{AG}{AD} S_{AMD}$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AMB với cát tuyến PXC, ta có $\frac{XA}{XM} \cdot \frac{CM}{CB} \cdot \frac{PB}{PA} = 1$,

suy ra $\frac{XA}{XM} = \frac{CB}{CM} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{k}{1-k} = \frac{k}{(1-k)^2}$,

suy ra $\frac{AX}{AM} = \frac{k}{k^2 - k + 1}$. (1)

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AMC với cát tuyến NYB, ta có $\frac{YA}{YM} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$,

suy ra $\frac{YA}{YM} = \frac{BC}{BM} \cdot \frac{NA}{NC} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1-k}{k} = \frac{1-k}{k^2}$, suy ra $\frac{AY}{AM} = \frac{1-k}{k^2 - k + 1}$. (2)

Từ (1), (2) ta có $\frac{AX}{AY} = \frac{k}{1-k}$.

Lại có $S_{AMD} = \frac{MD}{BC} S_{ABC} = \frac{BD - BM}{BC} S_{ABC}$

$= \left(\frac{1}{2} - k\right) S_{ABC} = \frac{1-2k}{2} S_{ABC}$. Do đó

$S_{XGY} = \left(1 - \frac{k}{1-k}\right) \frac{1-k}{k^2 - k + 1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1-2k}{2} S_{ABC}$

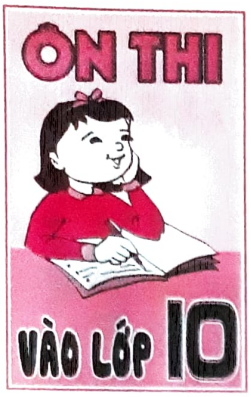
$= \frac{(1-2k)^2}{3(k^2 - k + 1)} S_{ABC}$.

Tương tự ta cũng có

$S_{YGZ} = S_{ZGX} = \frac{(1-2k)^2}{3(k^2 - k + 1)} S_{ABC}$.

Điều đó chứng tỏ điểm G là trọng tâm của tam giác XYZ.

Tới đây, đã dừng lại được chưa, còn vấn đề gì cần bàn nữa không? Rõ ràng ta mới chỉ xét M, N, P nằm trên các cạnh, nếu như chúng nằm trên các đường thẳng chứa cạnh mà vẫn thỏa mãn $\frac{MB}{BC} = \frac{NC}{CA} = \frac{PA}{AB}$ thì sao, các bạn hãy đặt bút tiếp sức cho tôi nhé, biết đâu các bạn lại tìm ra nhiều điều thú vị hơn.



ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút

TRẦN QUỐC LUẬT
Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh

Bài 1. *(2,0 điểm)*

1) Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện $ab = -1$. Tính giá trị của biểu thức $A = (a-b)^5 - 5(a-b)^3 + 5(a-b) - a^5 + b^5$.

2) Giải phương trình $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}+1}$.

Bài 2. *(1,5 điểm)*

1) Trong một giải đấu, đội bóng A thắng đúng 2 trong 10 trận đầu tiên và sau đó chiến thắng tất cả các trận còn lại. Kết thúc giải đấu, đội bóng A đã thắng đúng một nửa số trận đã thi đấu (không có trận nào hòa). Hỏi trong giải đấu đó, đội A đã thi đấu tất cả bao nhiêu trận?

2) Một trang trại mỗi ngày thu hoạch được 1200 kg rau. Mỗi ngày, nếu trang trại bán rau với giá 28 nghìn đồng/kg thì hết sạch rau còn nếu giá bán cứ tăng thêm 1 nghìn đồng/kg thì số rau thừa lại sẽ tương ứng tăng thêm 10 kg. Số rau thừa này được bán làm thức ăn chăn nuôi với giá 4 nghìn đồng/kg. Tính số tiền bán rau nhiều nhất mà trang trại thu về trong mỗi ngày.

3) Ba bạn A, B, C lần lượt viết lên bảng một số tự nhiên trong phạm vi từ 1 đến 20 sao cho số của người viết sau không trùng với số của những người viết trước. Tính xác suất để tổng bình phương các số được viết trên bảng chia hết cho 5.

Bài 3. *(1,5 điểm)* Xét các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + xyz + xy = 3$.

a) Chứng minh $xyz < 1$ và $8xy + 5z \le 9$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Bài 4. *(2,5 điểm)*

1) Cho hình thang ABCD có M là trung điểm của đáy lớn CD. Đường thẳng qua A song song với BD cắt các đường thẳng BC và BM lần lượt tại các điểm X, Y. Chứng minh $XA = XY$.

2) Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A, B. Gọi MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với $M \in (O_1)$ và $N \in (O_2)$. Qua A vẽ đường thẳng d song song MN, d cắt (O_1), (O_2), BM, BN lần lượt tại C, D, F, G (C, D khác A). Giả sử CM cắt DN tại E. Chứng minh EF = EG.

Bài 5. *(1,5 điểm)*

1) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh nếu n^2 là hiệu lập phương của hai số tự nhiên liên tiếp thì n là tổng bình phương của hai số tự nhiên liên tiếp.

2)Trong một tờ giấy hình vuông có cạnh bằng 12 cm có 31 lỗ kim châm. Chứng minh ta có thể cắt từ tờ giấy này ra một hình tròn có bán kính 1 cm mà hình tròn đó không chứa một lỗ kim châm nào.

Bài 6. *(1,0 điểm)* Tìm điều kiện cần và đủ đối với các số m, n, p để nếu $f(x) = ax^2 + bx + c \ge 0$ với mọi x và $a \ne 0$ thì luôn có $g(x) = f(x) + m(ax + b) + n(bx + c) + p(cx + a) \ge 0$ với mọi x.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN CHUYÊN

(Đề đăng trên TTT2 số 267)

NGUYỄN TIẾN LÂM *(CLB Toán A1, Hà Nội)*

Bài 1. 1) Điều kiện xác định $x \geq 2$.

Đặt $t = \sqrt{x-2}$ $(t \geq 0)$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 + \sqrt{7+t} = 7$.

Đặt $u = \sqrt{7+t}$ $(u \geq \sqrt{7})$, ta suy ra $u^2 - t = 7$.

Do đó ta có $u^2 - t = t^2 + u$, dẫn đến $(u+t)(u-t-1) = 0$, suy ra $u = t+1$ (do $u + t \geq \sqrt{7}$).

Khi đó $7 = t^2 + u = t^2 + t + 1$, dẫn đến $t = 2$ (do $t \geq 0$). Từ đó suy ra $x = 6$ (thỏa mãn điều kiện xác định). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 6$.

2) Nếu trong hai số x, y có một số bằng 0 thì theo giả thiết, số còn lại cũng là số nguyên. Như vậy ta chỉ cần xét cả hai số x, y khác 0.

Ta có $(x^3 + y)^2 + (x + y^3)^2 - (x^2 + y^2)$

$= x^6 + y^6 + 2xy(x^2 + y^2)$

$= (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) + 2xy(x^2 + y^2)$.

Mà $x^3 + y$, $x^2 + y^2$, $x + y^3$ đều là số nguyên nên $3x^2y^2 - 2xy \in \mathbb{Q}$. (1)

Cũng từ giả thiết trên ta có

$(x^3 + y)(x + y^3) = x^3y^3 - 2x^2y^2 + xy + (x^2 + y^2)^2$

nên $x^3y^3 - 2x^2y^2 + xy \in \mathbb{Z}$. (2)

Ta viết $x^3y^3 - 2x^2y^2 + xy$

$= \left(\frac{xy}{3} - \frac{4}{9}\right)(3x^2y^2 - 2xy) + \frac{xy}{9}$.

Thế thì từ (1), (2) cho ta $xy \in \mathbb{Q}$.

Đặt $xy = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0, (m, n) = 1$ thì từ $x^3y^3 - 2x^2y^2 + xy = \frac{m^3 - 2m^2n + mn^2}{n^3} \in \mathbb{Z}$ ta suy ra $n \mid m$, mà $(m, n) = 1$ nên $n = 1$. Do đó xy là số nguyên khác 0.

Mặt khác

$(x^3 + y) + (x + y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 1) \in \mathbb{Z}$. (3)

$(x^3 + y) - (x + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) \in \mathbb{Z}$. (4)

Nếu $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ thì vì $x^2 + xy + y^2$

$= (x^2 + y^2) + xy \geq 2\sqrt{x^2y^2} + xy = |xy| + |xy| + xy$

$\geq |xy| \geq 1$ nên $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ khi và chỉ khi $xy = -1$. Khi đó $x^2 + y^2 = 2$. Từ đó tìm được các cặp (x, y) là (1, −1) hoặc (−1, 1). Trong cả hai trường hợp thì x, y đều nguyên.

Nếu $x^2 + xy + y^2 - 1 \neq 0$ thì $x^2 - xy + y^2 + 1$ và $x^2 + xy + y^2 - 1$ đều là các số hữu tỉ khác 0 nên từ (3), (4) cho ta $x + y$ và $x - y$ là các số hữu tỉ, suy ra $x = \frac{(x+y)+(x-y)}{2}$ và $y = \frac{(x+y)-(x-y)}{2}$ cũng là các số hữu tỉ.

Từ đây viết $x = \frac{a}{d}$, $y = \frac{b}{d}$ với $a, b, d \in \mathbb{Z}, d > 0$, $(a, b, d) = 1$ thì $x^3 + y = \frac{a^3 + bd^2}{d^3} \in \mathbb{Z}$ cho ta $d \mid a^3$. Tương tự $d \mid b^3$.

Nếu $d > 1$ thì d có ước nguyên tố p, kéo theo a, b, d đều chia hết cho p, mâu thuẫn với $(a, b, d) = 1$ nên $d = 1$, dẫn đến x, y là các số nguyên.

Bài 2. 1) Đặt $a = [n\sqrt{7}]$ thì $a < n\sqrt{7}$ (do $n\sqrt{7}$ không là số nguyên). Khi đó $\{n\sqrt{7}\} = n\sqrt{7} - a$

$= \frac{7n^2 - a^2}{n\sqrt{7} + a} > \frac{7n^2 - a^2}{2n\sqrt{7}} = \frac{(7n^2 - a^2)\sqrt{7}}{14n}$.

Kết hợp với giả thiết $\{n\sqrt{7}\} < \frac{5\sqrt{7}}{14n}$, suy ra $7n^2 - a^2 < 5$.

Lại chú ý $a < n\sqrt{7}$ hay $a^2 < 7n^2$, kéo theo $7n^2 - a^2 \geq 1$.

Do đó $7n^2 - a^2 \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Nếu $7n^2 - a^2 = 1$ thì $a^2 + 1 = 7n^2$, kéo theo $a^2 \equiv 6 \pmod 7$. Điều này là không xảy ra do $a^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7$.

Tương tự với $7n^2 - a^2 = 2$ và $7n^2 - a^2 = 4$ cũng không xảy ra.

Do đó $7n^2 - a^2 = 3$ hay $7n^2 - 3 = a^2$ là số chính phương.

Nhận xét. Dễ thấy số tự nhiên n trong bài toán là tồn tại, chẳng hạn $n = 1$, thậm chí là tồn tại vô hạn.

2) Trước hết, ta chú ý công thức tính số ước của một số nguyên dương n.

Số tự nhiên n có phân tích tiêu chuẩn là $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_m$ là các số nguyên tố đôi một phân biệt và $k_1, k_2, \ldots, k_m$ là các số tự nhiên khác 0.

Khi đó số ước dương của n được cho bởi công thức $\sigma(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_m + 1)$.

Chứng minh. Ước dương của n có dạng $p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_m^{l_m}$ với $0 \leq l_i \leq k_i$ với mỗi $i = 1, 2, \ldots, m$.

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, m$ thì $l_i \in \{0; 1; 2; \ldots; k_i\}$ nên có đúng $k_i + 1$ cách chọn l_i. Theo quy tắc nhân, có đúng $(k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_m + 1)$ cách chọn bộ $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ và mỗi cách chọn sẽ sinh ra một ước dương. Do đó số ước dương của n là $\sigma(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_m + 1)$.

Xét $n \geq 11$.

- Nếu n là số lẻ và nếu $n(n + 2)(n + 4)$ có ít nhất 4 ước nguyên tố phân biệt thì số ước của nó không nhỏ hơn $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$ ước dương. Do đó $n(n + 2)(n + 4)$ có ít hơn 4 ước nguyên tố phân biệt.

Vì $(n, n + 2) = (n, n + 4) = (n + 2, n + 4) = 1$ nên $n(n + 2)(n + 4)$ có đúng 3 ước nguyên tố phân biệt. Trong ba số $n, n + 2, n + 4$ có ít nhất một số chia hết cho 3 nên số đó phải có dạng 3^t, $t \geq 3$. Suy ra $n(n + 2)(n + 4)$ có ít nhất $(1 + 1)(1 + 1)(3 + 1) = 16$ ước dương. Như vậy n lẻ không thỏa mãn.

- Nếu n là số chẵn, viết $n = 2k$, $(k \in \mathbb{N}^*)$ và ta có $n(n + 2)(n + 4) = 8k(k + 1)(k + 2)$. Có ít nhất một trong $k, k + 1, k + 2$ là số chẵn. Suy ra tích này chia hết cho 2^4. Nếu k lẻ thì $(k, k + 2) = 1$ nên $k(k + 2)$ có ít nhất hai ước nguyên tố lẻ phân biệt. Suy ra $n(n + 2)(n + 4)$ có ít nhất $(4 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 20$ ước dương. Nếu k chẵn thì $k = 2m$ và khi đó $n(n + 2)(n + 4) = 2^5 m(m + 1)(2m + 1)$. Chú ý $m(m + 1)$ chia hết cho 2 nên $n(n + 2)(n + 4)$ chia hết cho 2^6. Trong ba số $m, m + 1, 2m + 1$ có hai số lẻ đồng thời $(m, 2m + 1) = (m + 1, 2m + 1) = 1$ nên tích $m(m + 1)(2m + 1)$ có ít nhất hai ước nguyên tố lẻ. Do đó $n(n + 2)(n + 4)$ có ít nhất $(6 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 28$ ước dương.

Vậy ta không có nghiệm với $n \geq 11$. Sau khi tính toán ta thấy các giá trị của n thỏa mãn điều kiện là $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$.

Bài 3. 1) Vì bất đẳng thức đúng với mọi $a, b, c, d \geq -1$ nên ta có thể chọn $a = b = c = d = -1$ thì suy ra được $k \geq \frac{3}{4}$.

Còn nếu chọn $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ thì $k \leq \frac{3}{4}$.

Từ đó $k = \frac{3}{4}$.

Ta kiểm tra $k = \frac{3}{4}$ thì bất đẳng thức đúng.

Thật vậy, với mọi $a, b, c, d \geq -1$ ta luôn có $(a + 1)(2a - 1)^2 \geq 0$ hay $a^3 + \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}a$.

Cộng theo vế bất đẳng thức trên với ba bất đẳng thức tương tự ta thu được

$a^3+b^3+c^3+d^3+1\ge\frac{3}{4}(a+b+c+d)$.

Nhận xét. Suy đoán được $(a+1)(2a-1)^2\ge 0$ dựa vào dấu đẳng thức xảy ra tại $a=-1$ và $a=\frac{1}{2}$. Thế thì phải tạo ra các thừa số $a+1$ và $2a-1$. Thừa số $a+1\ge 0$ nên để đảm bảo dấu thì phải dùng thừa số $(2a-1)^2$.

2) Từ giả thiết ta có $b+c=a(bc-1)$.

Do đó $(ab-1)(ca-1)=a^2bc-a(b+c)+1$

$=a^2bc-a^2(bc-1)+1=a^2+1$.

Lại có $a=\frac{b+c}{bc-1}$ nên $a^2\ge\frac{4bc}{(bc-1)^2}$, suy ra

$a^2+1\ge\frac{(bc+1)^2}{(bc-1)^2}$.

Do đó $F=(a^2+1)(bc+1)\ge\frac{(bc+1)^3}{(bc-1)^2}$.

Đặt $t=bc-1>0$ thì $F\ge\frac{(t+2)^3}{t^2}$

$=\frac{\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}+2\right)^3}{t^2}\ge\frac{\left(3\sqrt[3]{\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{2}\cdot 2}\right)^3}{t^2}=\frac{27}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $b=c=\sqrt{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là $\frac{27}{2}$.

Bài 4. a) Vì DG là đường kính của đường tròn (I) nên $\widehat{DFG}=90^\circ$.

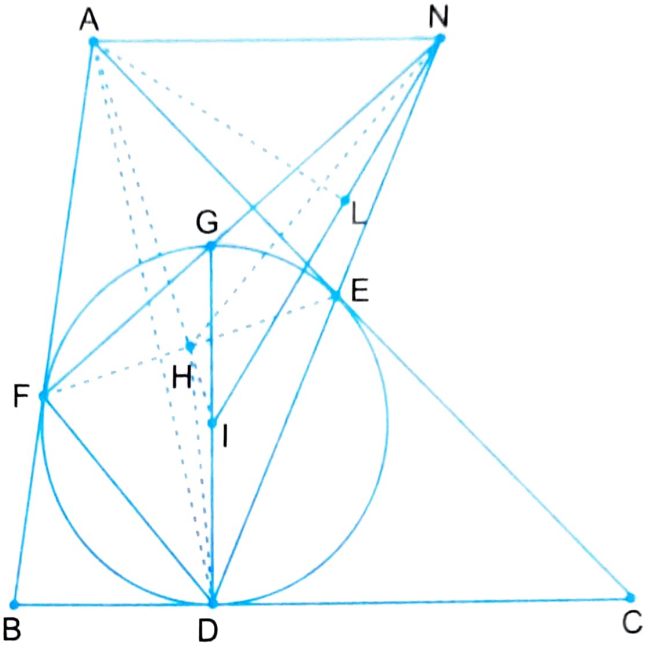
Kết hợp với tam giác FBD cân tại B và AN // BC, ta thu được biến đổi góc

$\widehat{AFN}=90^\circ-\widehat{BFD}=90^\circ-\frac{180^\circ-\widehat{ABC}}{2}$

$=\frac{\widehat{ABC}}{2}=\frac{1}{2}(180^\circ-\widehat{FAN})=\frac{1}{2}(\widehat{AFN}+\widehat{ANF})$.

Từ đó thu được $\widehat{AFN}=\widehat{ANF}$, dẫn đến $AN=AF=AE$.

Các tam giác ANE và CDE cân và có $\widehat{NAE}=\widehat{DCE}$ nên chúng đồng dạng, kéo theo $\widehat{AEN}=\widehat{CED}=180^\circ-\widehat{AED}$, suy ra ba điểm N, E, D thẳng hàng.



b) Do $\widehat{GFE}=\widehat{GDE}$ nên các tam giác NEF và NGD đồng dạng. Mà NH, NI là hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác này nên các tam giác NEH và NGI đồng dạng, dẫn đến $\widehat{NHE}=\widehat{NIG}$.

Lại có $ID^2=IE^2=IH\cdot IA$, dẫn đến $\frac{ID}{IH}=\frac{IA}{ID}$, kéo theo các tam giác IDH và IAD đồng dạng nên $\widehat{IHD}=\widehat{IDA}$.

Từ đó ta thu được biến đổi góc $\widehat{DHN}+\widehat{DAL}$

$=(\widehat{IHD}+90^\circ+\widehat{NHE})+(\widehat{IAD}+\widehat{IAL})$

$=(\widehat{IDA}+90^\circ+\widehat{NIG})+(\widehat{IAD}+\widehat{IAL})$

$=90^\circ+(\widehat{IDA}+\widehat{IAD}+\widehat{NIG})+\widehat{IAL}$

$=90^\circ+(\widehat{AIG}+\widehat{NIG})+\widehat{IAL}$

$=90^\circ+\widehat{AIL}+\widehat{IAL}=180^\circ$.

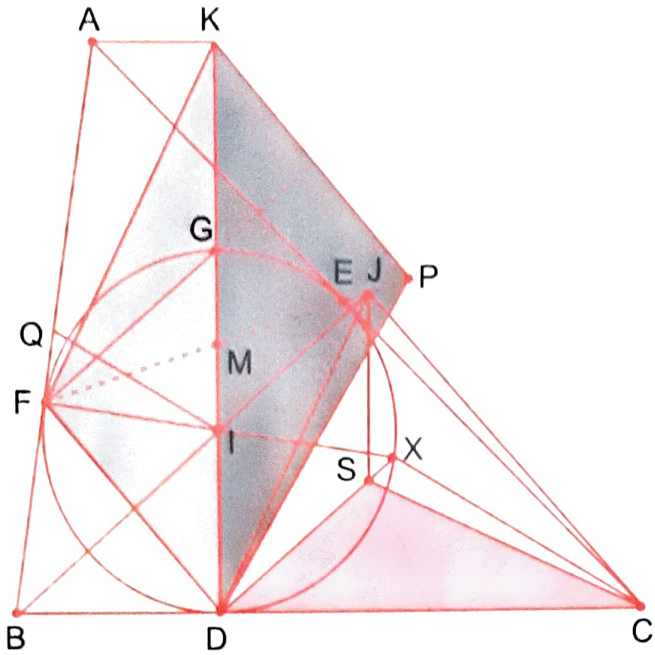
c) Dựng đường kính FX của đường tròn (I). Gọi J là giao điểm của BI và EF, M là giao điểm của DG và EF.

Khi đó ta có một số kết quả quen thuộc sau:

+) IQ // CX.

+) $\widehat{BJC}=90^\circ$.

Chú ý rằng các tứ giác DEGF và IEKF nội tiếp nên ta có $MD \cdot MG = ME \cdot MF = MI \cdot MK$, dẫn đến $\frac{MK}{MD} = \frac{MG}{MI}$.



Hơn nữa, áp dụng định lí Thales cho PK // DF và FG // IJ ta thu được

$\frac{PK}{DF} = \frac{MK}{MD} = \frac{MG}{MI} = \frac{MF}{MJ} = \frac{FG}{IJ}$, suy ra KF // DJ và $\frac{PK}{XD} = \frac{PK}{FG} = \frac{DF}{IJ}$.

Gọi S là trực tâm của tam giác JDC. Khi đó, để ý rằng $SD \perp FD$, $SC \perp FK$, $DC \perp DK$, suy ra các tam giác SDC và FDK đồng dạng. Từ đó, kết hợp với tứ giác DIJS là hình bình hành ta suy ra $\frac{PK}{XD} = \frac{DF}{IJ} = \frac{DF}{SD} = \frac{DK}{DC}$, suy ra các tam giác PKD và XDC đồng dạng (c.g.c). Vì thế ta được $\widehat{XCD} = \widehat{PDK} = 90^\circ - \widehat{PDC}$, kéo theo $CX \perp DP$. Kết hợp với IQ // CX ta thu được $IQ \perp DP$.

Bài 5. Ô trắng ta viết số 0, ô đen ta viết số 1. Gọi S là số ô đen. Ta giải bài toán với bảng $n \times n$ và chứng minh $S \geq \left[\frac{n^2}{2}\right]$.

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, gọi r_i là tổng các số được điền ở hàng i và c_i là tổng các số được điền ở cột i. Không mất tính tổng quát, giả sử $r_1 = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n, c_1, c_2, \ldots, c_n\}$.

Ta có $S = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$

$\geq (n - r_1) + (n - r_1) + \ldots + (n - r_1) + r_1 + r_1 + \ldots + r_1$.

Trong tổng trên có $n - r_1$ số hạng $n - r_1$ và r_1 số hạng r_1.

Như vậy $S \geq (n - r_1)^2 + r_1^2 = n^2 - 2nr_1 + 2r_1^2$.

Ta chứng minh $n^2 - 2nr_1 + 2r_1^2 \geq \frac{n^2}{2}$.

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với $(n - 2r_1)^2 \geq 0$ luôn đúng.

Trở lại bài toán với $n = 15$ ta có $S \geq \frac{15^2}{2}$, kéo theo $S \geq 113$. Suy ra số ô trắng không vượt quá $225 - 113 = 112$.

Sau đây là ví dụ để dấu đẳng thức xảy ra

1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Số ô trắng tối đa là 112 ô.



CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Kì 80

CLB1. Given different numbers a, b and c such that $a+b+c=0$. Find the value of the expression.

$$M=\frac{a^4}{a^4-(b^2-c^2)^2}+\frac{b^4}{b^4-(c^2-a^2)^2}+\frac{c^4}{c^4-(a^2-b^2)^2}.$$

CLB2. Solve the equation

$$\left(x-1+\frac{5}{x-1}\right)^2=12\left(x-4+\frac{5}{x-1}\right).$$

CLB3. Given different positive integers a, b and c such that $ab+bc+ca\geq 29999$. Find the minimum value of the expression $P=a^3+b^3+c^3-3abc$.

CLB4. Find all prime numbers p such that p^4+p^3+1 is a square number.

CLB5. Given a parallelogram ABCD. Point M and N are on side AB, BC respectively such that $AN=CM$. Point K is the intersection point of AN and CM. Show that KD is the angle bisector of angle $\angle AKC$.

ĐỖ ĐỨC THÀNH *(dịch)*

Kết quả Kì 78 (TTT2 số 266)

CLB1. Do n là số nguyên dương chẵn nên $n=2k, k\in\mathbb{Z}_+$. Khi đó

$$3^n+63=3^{2k}+63=9^k+63=9(9^{k-1}+7)\vdots 9.$$

Lại có

$$3^n+63=(3^{2k}-1)+64$$

$$=(9^k-1)+64\vdots 8 \text{ (do } 9^k-1\vdots 9-1=8).$$

Từ $3^n+63\vdots 9, 3^n+63\vdots 8, (8,9)=1$, suy ra $3^n+63\vdots 72$.

CLB2. Đưa phương trình đã cho về dạng

$$\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)+\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-c-a}{b}-1\right)=0$$

hay $(x-a-b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$, suy ra $x=a+b+c$ (do a, b, c là các hằng số dương).

CLB3. Giả sử

$$|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=\ldots=|x_{2025}-x_1|=k>0.$$

Nếu n số trong 2025 số $x_1-x_2, x_2-x_3, \ldots, x_{2025}-x_1$ bằng k và $2025-n$ số còn lại bằng –k, trong đó $0\leq n\leq 2025$ thì ta có

$$0=(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\ldots+(x_{2025}-x_1)$$

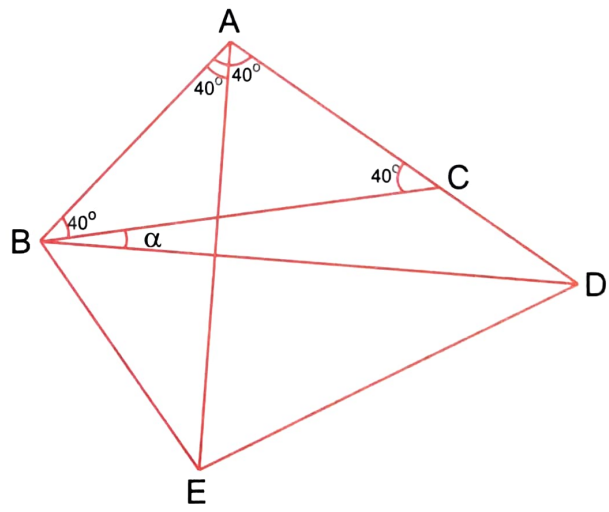
$$=nk+(2025-n)(-k)=k(2n-2025) \text{ (vô lí).}$$

Do đó

$$|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=\ldots=|x_{2025}-x_1|=0$$

Suy ra $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_{2025}=1$.

CLB4. Dựng tam giác đều ADE (B, E cùng phía so với đường thẳng AD).



Từ $\Delta ACB=\Delta BAE$ (c.g.c) ta có

$AB=BE$, $\widehat{BAE}=\widehat{BEA}=40^\circ$, $\widehat{ABE}=100^\circ$.

Ta thấy BD là đường trung trực của AE nên $\widehat{ABD}=\widehat{EBD}=50^\circ=40^\circ+\widehat{DBC}$, suy ra $\widehat{DBC}=10^\circ$.

(Xem tiếp trang 30)



Các bạn hãy giải bài toán sau bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé! Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

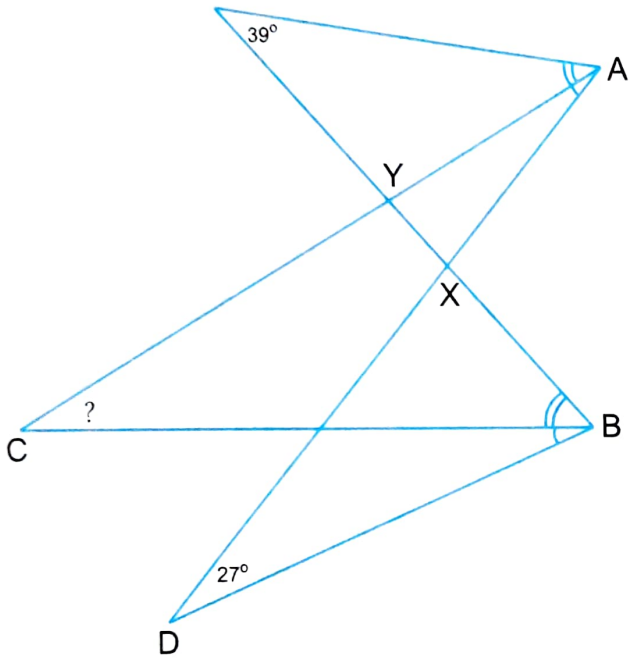
Problem 59(268). If 3 cows give 4 cans of milk in 5 days, how many days will it take 6 cows to give 8 cans of milk?

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH

Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội

Kết quả Problem 57(266).

Setting $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$.



We have $\begin{cases} 39^\circ + 3\alpha = 27^\circ + 3\beta \\ 39^\circ + 2\alpha = \angle ACB + 2\beta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 4^\circ \\ \angle ACB = 39^\circ + 2(\alpha - \beta) = 31^\circ. \end{cases}$

Answer: $\angle ACB = 31^\circ$.

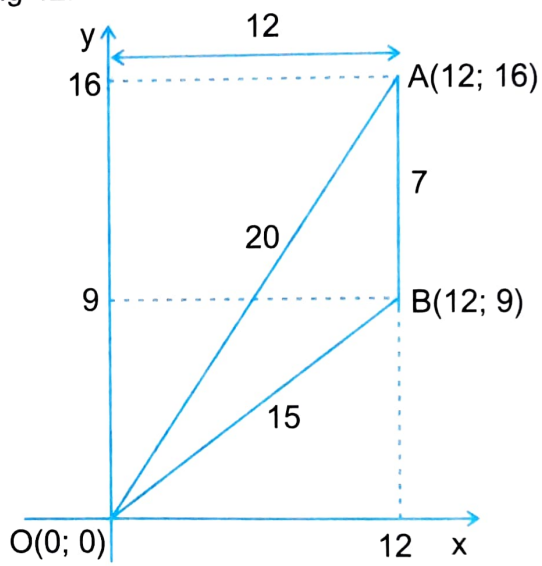
Nhận xét. Chúc mừng bạn sau có lời giải đúng, được thưởng kì này: *Lê Quang Huy*, 8A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Triệu Anh Trí*, 8A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

ĐỖ ĐỨC THÀNH

Kết quả Kì 78 (TTT2 số 266)

(Tiếp theo trang 29)

CLB5. Ta chỉ ra một tam giác có ba đỉnh với tọa độ như sau là tam giác nguyên: O(0; 0), A(12; 16), B(12; 9). Chu vi tam giác OAB này bằng 42.



Nhận xét. Các bạn sau đưa ra lời giải đúng, được thưởng kì này: *Nguyễn Thế Minh*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Tất Han*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN QUANG TUẤN



Thì thầm... Thì thầm thôi...

Tuổi hồng... xin cứ tuổi hồng
Chuyện gì quá sớm... xin không trả lời

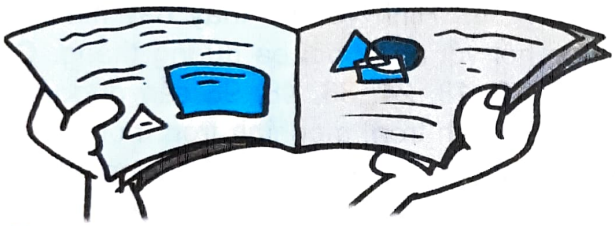


Hỏi: Năm nay em học lớp 9. Sắp tới em đã thi chuyển cấp rồi nên rất áp lực. Em muốn anh Phó có lời khuyên sao cho em và các bạn cùng trang lứa giải tỏa áp lực, có thêm ý chí, quyết tâm để đạt kết quả tốt trong kì thi quan trọng này. Em cảm ơn anh nhiều ạ!

LÊ T. H
(THCS Suối Hoa,TP. Bắc Ninh, Bắc Ninh)

Đáp:

Học hành ai cũng phải thi
Khó khăn, áp lực qua đi bình thường.
Học chăm ở lớp, ở trường
Chuyên cần tự học mở đường thành công.

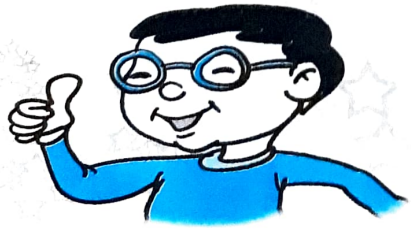


Hỏi: Khi bàn về cơ hội thành công trong cuộc sống, nhiều bạn lớp em quả quyết do may mắn là chủ yếu. Em thấy chưa đúng. Vậy ý kiến của anh Phó về điều này như thế nào ạ?

ĐÀO L. L
(THCS Ngô Sĩ Liên, TP. Bắc Giang, Bắc Giang)

Đáp:

Khả năng, phương pháp, siêng năng
Đủ ba yếu tố, chắc rằng thành công.
Vận may dù có hay không
Ham chơi, lười học trông mong làm gì.





Hỏi: Em được tuyển chọn vào học tập ở Học viện bóng đá, em rất phấn khởi nhưng bố lại không đồng ý, muốn em học nghề khác. Em muốn có lời khuyên từ anh Phó ạ.

KHỔNG T. S
(THCS Hùng Vương, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

Đáp:

Bố con cân nhắc kĩ càng
Ưu tiên sở thích, khả năng tay nghề.
Nghề nào con đã đam mê
Chắc là bố cũng nghiêng về ý con.



Hỏi: Khi đứng trước đám đông em thấy rất run và thường nói lắp bắp, vì thế em rất buồn lòng. Anh Phó có cách nào giúp em tự tin và cải thiện được tình trạng này không ạ?

TRƯƠNG G. B
(THCS Nguyễn Du, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh)

Đáp:

Mỗi khi đứng trước số đông
Em thường lắp bắp vẫn không sao mà.
Luyện thêm hội thoại ở nhà,
Ở trường, ở lớp chắc là ổn thôi.

ANH PHÓ GỠ



CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(268). Cho $T=\dfrac{5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\dfrac{6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\dfrac{7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\ldots+\dfrac{2024}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdots2025}$. Hãy so sánh T với 1%.

NGUYỄN VĂN TUẤN

(Trường THCS Văn Khê, Mê Linh, Hà Nội)

Bài 2(268). Cho tập hợp $A=\{1;2;\ldots;2024\}$. Gọi B là tập hợp con của tập hợp A và B có ba phần tử mà tổng của ba phần tử đó là số chẵn. Gọi n(B) là số tập hợp B như thế. Chứng minh rằng n(B) chia hết cho 2024.

CAO NGỌC TOẢN

(Trường THPT Tam Giang, Phong Điền, TP. Huế)

Bài 3(268). Cho 2025 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2025. Ta đặt trước mỗi số (trong 2025 số đã cho) bởi một dấu "cộng" hoặc một dấu "trừ" rồi tính tổng của 2025 số mới này. Hỏi giá trị nhỏ nhất của tổng là bao nhiêu? Biết tổng là một số tự nhiên.

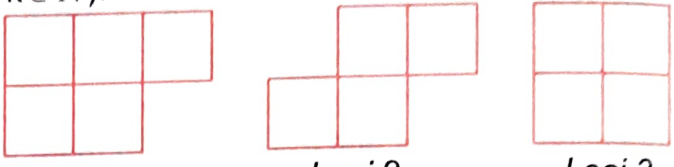
NGUYỄN TẤN NGỌC *(An Nhơn, Bình Định)*

Bài 4(268). Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao và $BH-CH=AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho H là trung điểm của CD. Chứng minh rằng AH và các đường phân giác của các góc ADC, ACD đồng quy.

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

CÁC LỚP THCS

Bài 5(268). Cho bảng ô vuông cỡ 10×9. Người ta phủ kín bảng ô vuông bởi một số hình dưới đây (có thể xoay các góc $k\cdot90^\circ$ với $k\in\mathbb{N}$).



Loại 1 *Loại 2* *Loại 3*

Gọi k là tổng số hình loại 2 và loại 3 cần dùng. Tìm giá trị lớn nhất của k.

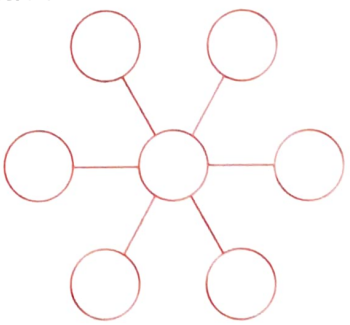
NGUYỄN TIẾN LÂM

(CLB Toán A1, Hà Nội)

Bài 6(268). Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+4abc=2(ab+bc+ca)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2(1-b)(1-c)$.

HOÀNG ĐAN *(Thanh Xuân, Hà Nội)*

Bài 7(268). Hình vẽ cho thấy bảy hình tròn được nối với nhau bởi ba đường thẳng. Các số 9, 12, 18, 24, 36, 48, 96 cần được điền vào các hình tròn, mỗi hình tròn một số, sao cho tích của ba số trên mỗi đường thẳng trong ba đường thẳng đó là như nhau. Hỏi số được điền ở hình tròn trung tâm có thể là những số nào?



VÕ QUỐC BÁ CẨN

(Trường Archimedes Academy, Cầu Giấy, Hà Nội)

Bài 8(268). Cho tứ giác lồi ABCD với $AB=CD$. Điểm P nằm trong tứ giác sao cho $\widehat{PBA}+\widehat{PCD}=180^\circ$. Chứng minh rằng $PB+PC<AD$.

ĐỖ THANH SƠN *(Hà Nội)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI

BỘ SÁCH ÔN THI VÀO LỚP 10

CHINH PHỤC KÌ THI NÂNG TẦM ĐIỂM SỐ





GÓI ĐỀ LUYỆN THI
Chỉ từ
50.000đ/môn

- 20 đề thi thử
- 10 video chấm chữa

Nắm trọn kiến thức
Học đúng, nhớ lâu!

Hệ thống lý thuyết tinh gọn, dễ hiểu, đầy đủ trọng tâm giúp học sinh nắm chắc kiến thức và vận dụng linh hoạt vào bài thi.

Tối ưu phương pháp
Làm bài nhanh, lấy điểm cao!

Hướng dẫn chi tiết cách giải từng dạng bài, tránh lỗi sai thường gặp, chiến lược và bí kíp tăng điểm, giúp 2K10 rút ngắn thời gian và tối đa điểm số.

Luyện đề bám sát
Tự tin trước mọi dạng đề!

Bộ đề thi được biên soạn theo ma trận của từng địa phương, giúp học sinh làm quen với cấu trúc đề thi thật.

onthi.hoclieu.vn/vao10

QUÉT MÃ
ĐỂ ĐƯỢC HỖ TRỢ NHANH NHẤT

HỖ TRỢ - GIẢI ĐÁP - TƯ VẤN

heid.vn - hoclieu.vn
HEID
1900 636 011
hotro@hoclieu.vn

DANH SÁCH CÁ NHÂN ĐOẠT GIẢI "THI GIẢI TOÁN QUA THƯ"

Năm học 2024 - 2025

✳ **GIẢI VÀNG:** *Võ Hoàng Phúc*, 7A, *Thái Hải Nam*, 7C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Mạnh Đạt*, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**.

✳ **GIẢI BẠC:** *Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Thảo Linh*, 9A3, THCS Kỳ Sơn, TP. Hòa Bình, **Hòa Bình**; *Nguyễn Thái Dũng*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Hoàng Đức Minh*, 7C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

✳ **GIẢI ĐỒNG:** *Nguyễn Hữu An Bình*, 7A1, *Nguyễn Tuấn Đản*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Bảo Linh*, AE7.1, THCS Nam Từ Liêm, Nam Từ Liêm, **Hà Nội**; *Phan Khôi Nguyên*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Tất Han*, 9C, *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, 7B, *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Hữu Minh Quân*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

✳ **GIẢI KHUYẾN KHÍCH:** *Phan Duy Ngọc, Cao Ngọc Khánh*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; *Tạ Minh Hằng*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Sỹ Bảo Long, Cao Phúc*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Trọng Nhân*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Thái Hữu Đạt*, 7A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Nguyễn Thục Quyên*, 6A1, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Học Minh Hiếu*, 8T, THCS Lương Thế Vinh, Thanh Trì, **Hà Nội**; *Nguyễn Hà Dũng*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

DANH SÁCH HỌC SINH ĐOẠT GIẢI CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TRÊN TẠP CHÍ

Năm học 2024 - 2025

✳ **GIẢI NHẤT:** *Nguyễn Tất Han*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Lê Nguyễn Ngọc Diệp*, 8A1, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**.

✳ **GIẢI NHÌ:** *Nguyễn Thế Minh*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh, **Bắc Ninh**; *Hoàng Văn Duy*, 8D, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

✳ **GIẢI BA:** *Trương Minh Tiến*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Văn Phúc, Nguyễn Trương Việt Anh*, 8D, *Hoàng Văn Nhân*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

✳ **GIẢI KHUYẾN KHÍCH:** *Nguyễn Duy Tùng*, 8A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Vũ Cường Thịnh*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; *Nguyễn Thanh Hà, Nguyễn Đức Anh Khoa, Nguyễn Thị Kiều Trang*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 06 tuổi đến dưới 11 tuổi.
Giấy phép xuất bản: số 534/GP-BTTTT, cấp ngày 19/11/2020 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
Mã số: 8BTTI296M25. **In tại:** Nhà máy in Bộ Quốc phòng.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2025.

Giá: 14 000 đồng