Toán tuổi thơ 2

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

ISSN 1859-2740
SỐ 267
THÁNG 4 NĂM 2025

TRUNG HỌC CƠ SỞ

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

CHÀO MỪNG NGÀY HỘI SÁCH VIỆT NAM



LỄ KÝ KẾT HỢP TÁC CHIẾN LƯỢC GIỮA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM VÀ VIETTEL SOLUTIONS

CHUYỂN ĐỔI SỐ TRONG LĨNH VỰC GIÁO DỤC

Chiều ngày 13/3/2025, tại Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) và Tổng Công ty Giải pháp Doanh nghiệp Viettel - Chi nhánh Tập đoàn Công nghiệp Viễn thông Quân đội (Viettel Solutions) đã chính thức ký kết thỏa thuận hợp tác chiến lược về chuyển đổi số và phát triển các giải pháp công nghệ giáo dục. Sự kiện đánh dấu bước tiến quan trọng trong việc ứng dụng công nghệ hiện đại vào lĩnh vực giáo dục, hướng tới mục tiêu nâng cao chất lượng dạy và học tại Việt Nam.

Buổi lễ diễn ra với sự tham dự của đại diện lãnh đạo hai bên cùng các chuyên gia công nghệ. Về phía NXBGDVN, đại diện có ông Nguyễn Tiến Thanh - Chủ tịch Hội đồng thành viên, Tổng Giám đốc. Về phía Viettel Solutions đại diện có ông Nguyễn Chí Thanh - Phó Tổng Giám đốc và đại diện các phòng, ban chuyên môn.

Theo thỏa thuận, NXBGDVN và Viettel Solutions sẽ cùng nhau phối hợp nghiên cứu khả năng xây dựng hệ sinh thái giáo dục số phục vụ công tác giảng dạy và học tập của học sinh, nhà giáo và nhà trường, phát triển các giải pháp công nghệ giáo dục tiên tiến hỗ trợ giảng dạy, học tập.

Ông Nguyễn Tiến Thanh - Chủ tịch Hội đồng thành viên, Tổng Giám đốc NXBGDVN, chia sẻ: "NXBGDVN với gần 70 năm trưởng thành và phát triển, là một doanh nghiệp có thương hiệu, uy tín trong lĩnh vực xuất bản đặc biệt là trong xuất bản sách giáo khoa. Đây là một lĩnh vực giáo dục có một ý nghĩa khác, vừa mang tính chất an sinh xã hội, liên quan đến từng gia đình, từng phụ huynh học sinh, từng ngôi trường, từng giáo viên... Chính vì vậy, khát vọng và tâm huyết của chúng tôi là làm thế nào để có những sản phẩm tốt nhất cho ngành giáo dục. Chúng tôi rất trăn trở trong câu chuyện chuyển đổi số bởi chuyển đổi số không những giúp quản trị vận hành hệ thống doanh nghiệp tốt hơn, tiếp cận và đưa ra những sản phẩm mới phục vụ thiết thực cho sự nghiệp giáo dục, vừa phục vụ tốt cho thầy cô giáo, phụ huynh và học sinh nhưng đồng thời cũng mang lại doanh thu cho doanh nghiệp".

Ông Nguyễn Chí Thanh - Phó Tổng Giám đốc Tổng Công ty Giải pháp Doanh nghiệp Viettel nhấn mạnh: "Hiện nay, nền giáo dục nước nhà đang có những bước chuyển mình mạnh mẽ, đòi hỏi ứng dụng công nghệ [illegible] tin vào mọi mặt của lĩnh vực giáo dục. Đứng trước vận hội lớn, Viettel Solutions mong muốn được đồng hành cùng NXBGDVN xây dựng hệ sinh thái giáo dục toàn diện; đồng thời số hoá hệ thống sách giáo khoa, học liệu đồ sộ, góp phần xoá nhoà khoảng cách giáo dục giữa mọi vùng miền trên Tổ quốc".



Ông Nguyễn Tiến Thanh và ông Nguyễn Chí Thanh trao đổi văn bản thoả thuận hợp tác giữa hai đơn vị. Ảnh: Công Duy

Với sự hợp tác này, NXBGDVN tin rằng hệ thống quản lý giáo dục thông minh sẽ được triển khai, giúp các nhà trường quản lý hiệu quả hơn các hoạt động dạy và học, đồng thời cung cấp dữ liệu phân tích để nâng cao chất lượng giáo dục. Việc kết hợp giữa công nghệ hiện đại của Viettel Solutions và những giá trị truyền thống tốt đẹp trong giáo dục của NXBGDVN sẽ hoàn thiện một hệ sinh thái giáo dục thông minh, linh hoạt, hiệu quả.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Toán tuổi thơ 2

TRUNG HỌC CƠ SỞ

TẠP CHÍ CỦA VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập:
TRẦN HỮU NAM

Phó Tổng biên tập:
TRẦN THỊ KIM CƯƠNG
LÊ HỒNG MAI

Thư kí tòa soạn:
HỒ QUANG VINH

ỦY VIÊN
NGND. Vũ Hữu Bình
TS. Nguyễn Minh Đức
ThS. Đặng Hiệp Giang
TS. Nguyễn Minh Hà
ThS. Nguyễn Ngọc Hân
PGS. TS. Vũ Đình Hòa
ThS. Trần Quang Hùng
TS. Lê Thống Nhất
PGS. TS. Tạ Duy Phượng
TS. Phạm Đức Tài
NGND. PGS. TS. Tôn Thân
GS. TS. Lê Anh Vinh
TS. Trần Quang Vinh

TÒA SOẠN

Số 187B Giảng Võ, P. Cát Linh, Q. Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại - Email:
Biên tập: 024.35682702; Email: bbttoantuoitho@gmail.com
Phát hành: 024.35682701; 024.35142649;
Email: tapchitoantuoitho@gmail.com
Hành chính: 024.35121606

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Biên tập - Chế bản: **Nguyễn Quang Tuấn, Vũ Thị Mai, Đỗ Trung Kiên**
Mĩ thuật: **Trần Ngọc Trường**
Phát hành: **Trần Thị Minh Hiền (Trưởng phòng)**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch HĐTV kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục:
LÊ HỒNG SƠN

TRONG SỐ NÀY

Giải toán thế nào? 2
Về một mô hình quen thuộc
Trịnh Bá Hiếu

Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc 8
Truy tìm cổ vật
Hoàng Hà

Thách đấu 21
Trận đấu thứ hai trăm mười sáu
Hoàng Ngọc Minh

Rừng cười 23
Con gì?
Nguyễn Như Mai

Vào thăm Vườn Anh 24
The jungle quest
Nguyễn Minh Khang

Ôn thi vào lớp 10 25
Đề thi thử môn Toán chuyên
Nguyễn Tiến Lâm

Compa vui tính 28
Có giá trị lớn nhất không?
Nguyễn Tấn Ngọc

Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ 29
Kì 79
Nguyễn Đức Tấn

Giải toán học Anh 30
Problem 58
Võ Quốc Bá Cẩn

Minh họa bìa 1: Lê Mạnh Cường
(Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông)

Các bạn có thể đặt mua các ấn phẩm của tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: Toán học và Tuổi trẻ (**C168**); Toán Tuổi thơ 1 (**C169**); Toán Tuổi thơ 2 (**C169.1**); Văn học và Tuổi trẻ (**C668**); Văn Tuổi thơ (**C668.1**).



GIẢI TOÁN THẾ NÀO?

VỀ MỘT MÔ HÌNH QUEN THUỘC

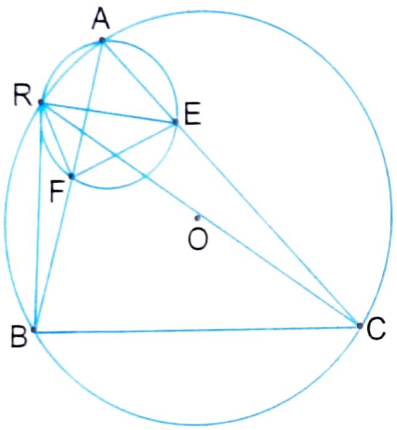
TRỊNH BÁ HIẾU

(Trường THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, Nghệ An)

Trong quá trình học hình học phẳng, chắc hẳn ta đã bắt gặp một mô hình quen thuộc như sau: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên các đường thẳng AB, AC lần lượt lấy các điểm F, E. Gọi R là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn (O). Khi đó ta có một số tính chất quen thuộc.

1. Các tam giác RFB và REC đồng dạng.
2. Các tam giác RFE và RBC đồng dạng.

Chứng minh.



1. Tứ giác AEFR nội tiếp nên $\widehat{AFR} = \widehat{AER}$, suy ra $\widehat{RFB} = \widehat{REC}$.

Tứ giác ARBC nội tiếp nên $\widehat{RBF} = \widehat{RCE}$.

Suy ra các tam giác RFB và REC đồng dạng.

2. Ta có

$\widehat{REF} = \widehat{RAF} = \widehat{RCB}$, $\widehat{FRE} = \widehat{FAE} = \widehat{BRC}$, suy ra các tam giác RFE và RBC đồng dạng.

Trong bài viết này, ta sẽ nghiên cứu các trường hợp đặc biệt của hai điểm E, F qua một số bài toán.

1. Mô hình trực tâm: Khi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh B, C trong tam giác ABC.

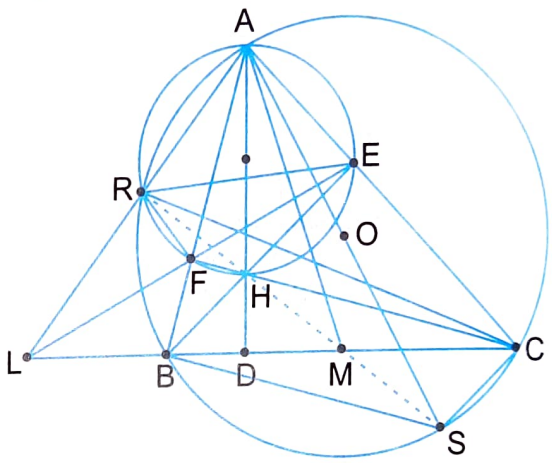
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi R là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn (O), M là trung điểm của BC. Đường thẳng EF cắt BC tại L. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm R, H, M thẳng hàng.

b) Các tứ giác RLBF và RLCE nội tiếp.

c) H là trực tâm của tam giác ALM.

Lời giải.



a) Vẽ đường kính AS của đường tròn (O). Khi đó tứ giác BHCS là hình bình hành nên SH đi qua trung điểm M của BC.

Lại do R thuộc đường tròn đường kính AH và đường tròn đường kính AS nên $\widehat{ARH} = \widehat{ARS}$, suy ra ba điểm R, H, S thẳng hàng.

Từ đó suy ra ba điểm R, H, M thẳng hàng.

b) Các tứ giác ARFE và ARBC nội tiếp nên ta có $\widehat{CRE} = \widehat{ARC} - \widehat{ARE} = \widehat{ABC} - \widehat{AFE}$

$= \widehat{BFL} + \widehat{BLF} - \widehat{BFL} = \widehat{BLF}$, suy ra tứ giác RLCE nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác RLBF nội tiếp.

c) Các tứ giác ARFE, BCEF, RLCE nội tiếp nên ta có

$\widehat{LRE} + \widehat{ARE} = \widehat{LRE} + \widehat{AFE} = \widehat{LRE} + \widehat{ACB} = 180^o$, suy ra ba điểm L, R, A thẳng hàng.

Tam giác ALM có các đường cao AD và MR cắt nhau tại H nên H là trực tâm của tam giác ALM.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn (AB < BC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và O' là điểm đối xứng với O qua BC. Đường thẳng đi qua điểm H vuông góc với HO' cắt AB tại M, cắt AC tại N. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

a) Chứng minh O' là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.

b) Chứng minh ba điểm A, H, I thẳng hàng.

c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH và đường tròn (O). Đường thẳng OP cắt đường thẳng BC tại điểm Q. Gọi R là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn (O). Chứng minh đường thẳng QR song song với đường thẳng OI.

(Trích đề thi chọn học sinh giỏi TP. Hà Nội, năm học 2023-2024)

Lời giải bài toán này đã được đăng trên TTT2 số 254. Dưới đây là một cách giải khác cho ý c.

Vẽ đường kính AK của đường tròn (I) và đường kính AS của đường tròn (O).

Ta có $\widehat{ARK} = \widehat{ARS} = 90^o$ nên ba điểm R, K, S thẳng hàng.

Dễ thấy OI là đường trung bình của tam giác AKS nên KS // OI.

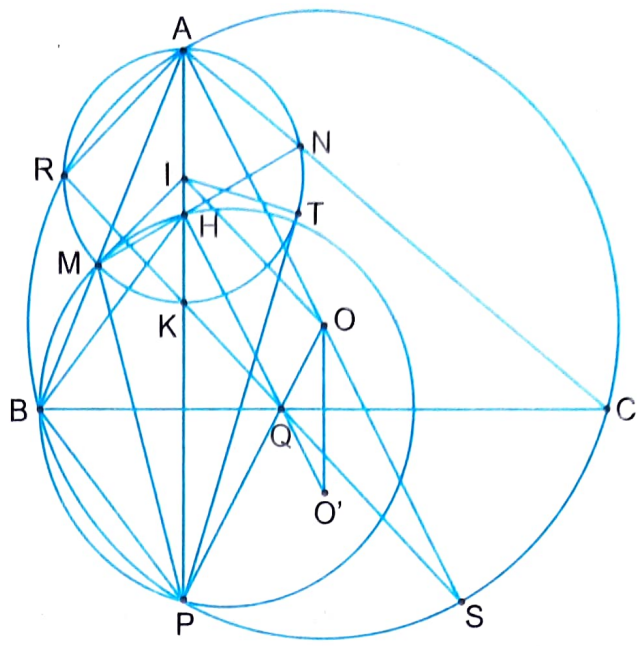
Ta cần chứng minh KQ // OI.

Theo ý a, b thì tứ giác BMNC nội tiếp nên $\widehat{AMN} = \widehat{ACB} = \widehat{APB}$, suy ra tứ giác BMHP nội tiếp nên $\widehat{ABH} = \widehat{APM}$.

Khi đó

$$\widehat{IMN} = \frac{180^o - \widehat{MIN}}{2} = 90^o - \widehat{BAC} = \widehat{ABH} = \widehat{APM}.$$

Suy ra các tam giác IMH và IPM đồng dạng nên ta có $IP \cdot IH = IM^2$.



Từ P vẽ tiếp tuyến PT đến đường tròn (I).

Ta có $IP \cdot IH = IM^2 = IT^2$ nên $TH \perp AP$.

Từ đó $PH \cdot PI = PT^2 = PK \cdot PA \Rightarrow \frac{PK}{PI} = \frac{PH}{PA}$.

Do P đối xứng với H qua BC và $OA = OP$ nên $\widehat{QHP} = \widehat{QPH} = \widehat{OAP}$, suy ra HQ // AO nên $\frac{PH}{PA} = \frac{PQ}{PO}$.

Do đó $\frac{PK}{PI} = \frac{PQ}{PO}$, theo định lí Thales đảo ta được KQ // OI.

2. Mô hình tâm nội tiếp: Khi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC xuống AC, AB.

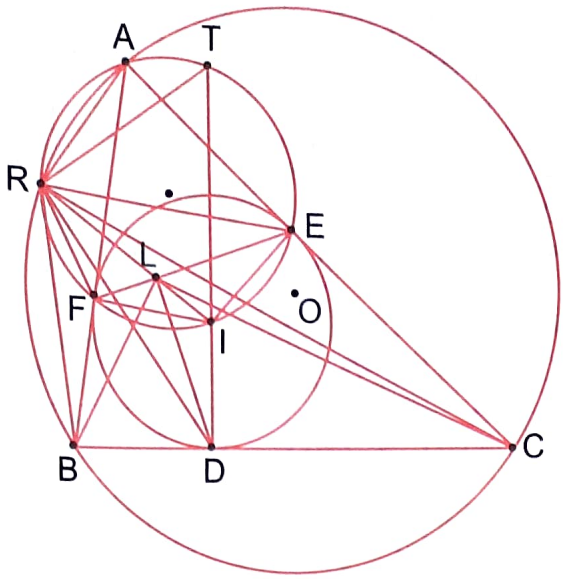
Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi R là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng RD là phân giác của góc BRC.

b) Gọi L là giao điểm của IR và EF. Chứng minh rằng LD là phân giác của góc BLC và DL vuông góc với EF.

c) Gọi T là giao điểm của DI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF (T khác I). Chứng minh rằng RT đi qua điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn (O).

Lời giải.



a) Các tam giác RFB và REC đồng dạng nên $\frac{RB}{RC}=\frac{BF}{CE}=\frac{DB}{DC}$. Theo tính chất đường phân giác đảo ta có RD là phân giác của góc BRC.

b) Xét đường tròn (AEF) ta thấy IE = IF nên RI là phân giác của góc ERF. Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{FL}{EL}=\frac{RF}{RE}=\frac{FB}{EC}$. Kết hợp với $\widehat{BFL}=\widehat{CEL}$, suy ra các tam giác BFL và CEL đồng dạng. Do đó $\widehat{FLB}=\widehat{ELC}$ và $\frac{LB}{LC}=\frac{BF}{CE}=\frac{DB}{DC}$. Theo tính chất đường phân giác đảo ta có LD là phân giác của góc BLC. Từ đó, do $\widehat{FLB}=\widehat{ELC}$ ta suy ra DL vuông góc với EF.

c) Vì RD là phân giác của góc BRC nên ta cần chứng minh $\widehat{DRT}=90^o$.

Ta có $\widehat{DRC}=\frac{\widehat{BRC}}{2}=\frac{\widehat{BAC}}{2}$.

$\widehat{CRE}=\widehat{ARC}-\widehat{ARE}=\widehat{ABC}-\widehat{AFE}$

$=\widehat{ABC}-90^o+\frac{\widehat{BAC}}{2}$.

Tứ giác CDIE nội tiếp nên $\widehat{TRE}=\widehat{TIE}=\widehat{ACB}$. Từ đó ta có

$\widehat{DRT}=\widehat{DRC}+\widehat{CRE}+\widehat{TRE}$

$=\frac{\widehat{BAC}}{2}+\widehat{ABC}-90^o+\frac{\widehat{BAC}}{2}+\widehat{ACB}=90^o$.

Một số bài toán tương tự

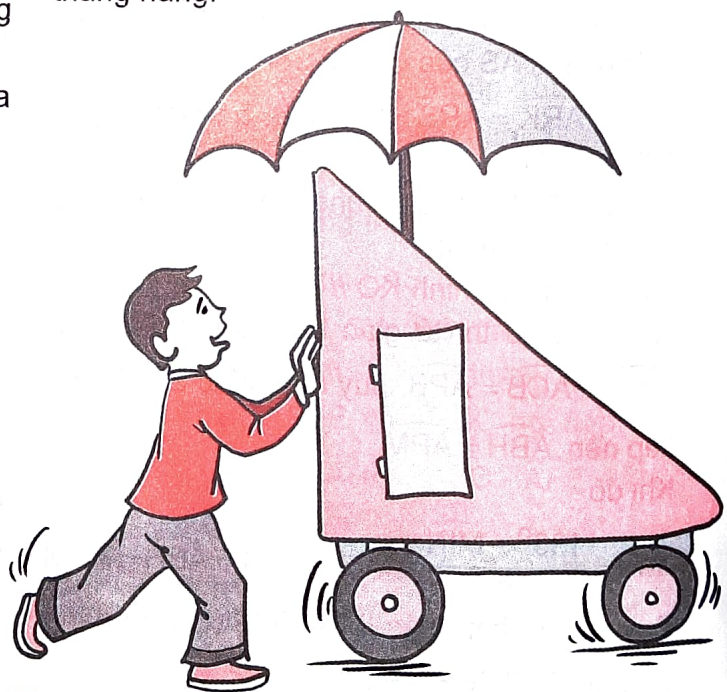
Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là một điểm nằm trên đường cao hạ từ A của tam giác ABC. Đường tròn đường kính AD cắt AC, AB, (O) theo thứ tự tại E, F, G. Gọi T là giao điểm của AO và EF. Giả sử đường tròn (O) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GTO tại X khác G. Chứng minh rằng AX, DG, EF đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABC nhọn, trên đoạn thẳng BC lấy hai điểm D, E khác B, C sao cho $DE=\frac{BC}{2}$. Các đường thẳng qua D và E vuông góc với BC cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Với D, E di chuyển trên BC sao cho $DE=k\cdot BC$ $(0<k<1)$, chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), AD là đường cao. Đường phân giác trong của góc BAC cắt BC tại K. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của K trên AB, AC và H là trực tâm của tam giác DEF. Chứng minh rằng ba điểm O, K, H thẳng hàng.





GIẢI TOÁN THẾ NÀO?

BẤT ĐẲNG THỨC TRÊN CÁC HỆ SỐ CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

NGUYỄN THANH GIANG *(Trường THPT chuyên Hưng Yên)*

Bài viết này giới thiệu với các bạn một số bài toán chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị các biểu thức chứa hệ số của phương trình bậc hai.

Ví dụ 1. Biết a, b là các số thực thay đổi sao cho phương trình $x^2-2ax+2a^2+b^2-5=0$ có nghiệm. Chứng minh rằng $P=(a+1)(b+1)\geq -2$.

Lời giải. Ta viết phương trình đã cho dưới dạng $(x-a)^2=5-a^2-b^2$. Phương trình này có nghiệm khi $5-a^2-b^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\leq 5$.

Ta có

$$2P+a^2+b^2=a^2+b^2+2ab+2a+2b+2$$
$$=(a+b+1)^2+1\geq 1.$$

Do đó $2P\geq 1-(a^2+b^2)\geq 1-5=-4\Rightarrow P\geq -2$.

Ví dụ 2. Biết phương trình $ax^2+bx+c=0$ với $b>a>0$ có nhiều nhất một nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+b+c}{b-a}$.

Lời giải. Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nhiều nhất một nghiệm nên $b^2-4ac\leq 0$.

Kết hợp với $b>a>0$ ta có $c\geq \dfrac{b^2}{4a}$. Khi đó

$$P=\frac{a+b+c}{b-a}\geq \frac{a+b+\dfrac{b^2}{4a}}{b-a}=\frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$$

$$=\frac{(16a^2-8ab+b^2)+12a(b-a)}{4a(b-a)}=\frac{(4a-b)^2}{4a(b-a)}+3\geq 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $b=c=4a$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3.

Ví dụ 3. Biết phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ vô nghiệm. Chứng minh rằng $\dfrac{5a-3b+3c}{a-b+c}>1$.

Lời giải. Theo giả thiết ta có $b^2-4ac<0$, suy ra $ac>\dfrac{b^2}{4}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\dfrac{5a-3b+3c}{a-b+c}-1>0$ hay $\dfrac{2a-b+c}{a-b+c}>0$.

Ta có $(2a-b+c)(a-b+c)$

$$=a(a-b+c)+(a-b+c)^2$$
$$=a^2-ab+ac+(a-b+c)^2$$
$$>a^2-ab+\frac{b^2}{4}+(a-b+c)^2$$
$$=(a-\frac{b}{2})^2+(a-b+c)^2\geq 0.$$

Suy ra $\dfrac{2a-b+c}{a-b+c}>0$.

Ví dụ 4. Biết phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm m, n thoả mãn $0\leq m\leq n\leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\dfrac{5a^2-6ab+b^2}{2a^2-2ab+ac}$.

Lời giải. Theo định lí Viète ta có

$$m+n=-\frac{b}{a},\ mn=\frac{c}{a}.$$

Do đó $Q=\dfrac{5a^2-6ab+b^2}{2a^2-2ab+ac}=\dfrac{5-\dfrac{6b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}}{2-\dfrac{2b}{a}+\dfrac{c}{a}}$

$= \dfrac{5+6(m+n)+(m+n)^2}{2+2(m+n)+mn}$.

Từ giả thiết $0 \le m \le n \le 1$ ta có

$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 \le 3mn + 1$.

Do đó $Q \le \dfrac{5+6(m+n)+3mn+1}{2+2(m+n)+mn} = 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $m^2 = mn, n^2 = 1$ hay $m = n = 1$ hoặc $m = 0, n = 1$. Suy ra $2a = -b = 2c \ne 0$ hoặc $b = -a \ne 0, c = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 3.

Ví dụ 5. Biết phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1x_2 \ge 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{3b^2 - 4c + b + 2}{b^2 + 1}$.

Lời giải. Từ giả thiết và theo định lí Viète ta có $x_1 + x_2 = -b > 0$, suy ra $b < 0$.

Do $x_1x_2 \ge 1$ nên $b^2 = (x_1 + x_2)^2 \ge 4x_1x_2 \ge 4$, suy ra $b \le -2$.

Mặt khác, phương trình có hai nghiệm nên $\Delta = b^2 - 4c \ge 0$, suy ra $b^2 \ge 4c$.

Khi đó $P = \dfrac{3b^2 - 4c + b + 2}{b^2 + 1} \ge \dfrac{2b^2 + b + 2}{b^2 + 1}$.

Với dự đoán giá trị nhỏ nhất của P đạt được khi $b = -2$ lúc đó $P = \dfrac{8}{5}$ nên ta xét

$\dfrac{2b^2 + b + 2}{b^2 + 1} - \dfrac{8}{5} = \dfrac{2b^2 + 5b + 2}{5(b^2 + 1)} = \dfrac{(b+2)(2b+1)}{5(b^2+1)} \ge 0$

với $b \le -2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $b = -2, c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{8}{5}$.

Ví dụ 6. Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \ne 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 \le x_1 \le x_2 \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \dfrac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}$.

Lời giải. Ta có

$P = \dfrac{2a^2 - 2ab - ac + bc}{a^2 - ab + ac} = \dfrac{2 - \dfrac{2b}{a} - \dfrac{c}{a} + \dfrac{bc}{a^2}}{1 - \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}}$

$= \dfrac{2 + 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 - x_1x_2(x_1 + x_2)}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2}$

$= 2 - \dfrac{x_1x_2(3 + x_1 + x_2)}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2} \le 2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = 0, x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Khi đó $0 \le \dfrac{-b}{a} \le 1, c = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2.

Do $0 \le x_1 \le x_2 \le 1$ nên

$x_1 + x_2 \ge x_1^2 + x_2^2 \ge 2x_1x_2$ và

$0 \le x_1 + x_2 \le 2 \Rightarrow -x_1x_2(x_1 + x_2) \ge -2x_1x_2$.

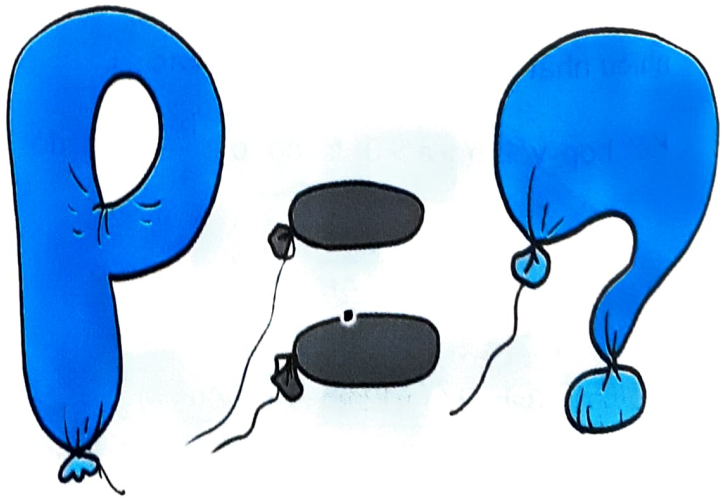
Do đó $P = \dfrac{2 + 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 - x_1x_2(x_1 + x_2)}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2}$

$\ge \dfrac{2 + 4x_1x_2 - x_1x_2 - 2x_1x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2} = \dfrac{4(2 + x_1x_2)}{4(1 + x_1 + x_2 + x_1x_2)}$

$= \dfrac{(3 - x_1)(3 - x_2) - 1 + 3(x_1 + x_2 + x_1x_2)}{4(1 + x_1 + x_2 + x_1x_2)}$

$\ge \dfrac{2 \cdot 2 - 1 + 3(x_1 + x_2 + x_1x_2)}{4(1 + x_1 + x_2 + x_1x_2)} = \dfrac{3}{4}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = 1$. Khi đó $a = c = -\dfrac{b}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{4}$.



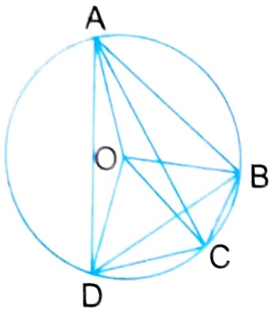


CÒN PHÂN VÂN GÌ HAY KHÔNG?

NGUYỄN VĂN TUẤN *(Trường THCS Văn Khê, Mê Linh, Hà Nội)*

Bài toán. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng $\overset{\frown}{AOB} = 110^\circ$, $\overset{\frown}{BOC} = 40^\circ$, $\overset{\frown}{COD} = 60^\circ$. Tính số đo các góc của tứ giác ABCD.

Lời giải.



Xét đường tròn (O), ta có:

$\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{CAD} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BOC} + \overset{\frown}{COD}) = 50^\circ$,

$\overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{ADB} + \overset{\frown}{BDC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AOB} + \overset{\frown}{BOC}) = 75^\circ$.

Từ đó suy ra $\overset{\frown}{ABC} = 180^\circ - \overset{\frown}{ADC} = 105^\circ$, $\overset{\frown}{BCD} = 180^\circ - \overset{\frown}{BAD} = 130^\circ$.

Vậy số đo các góc của tứ giác ABCD lần lượt là $50^\circ, 105^\circ, 130^\circ, 75^\circ$.

Bạn còn phân vân gì về lời giải trên hay không?

Kết quả **(TTT2 số 264+265)**

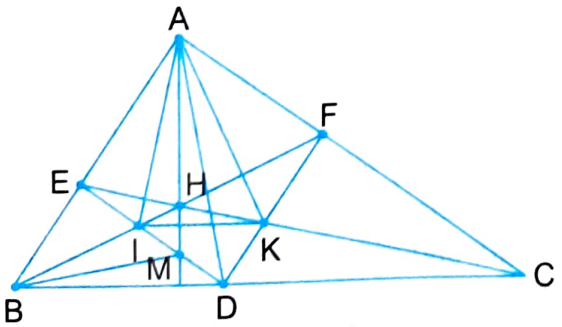
BẠN MUỐN NÓI THÊM ĐIỀU GÌ KHÔNG?

Phân tích. Lời giải chỉ đúng khi tam giác ABC có $AB < AC$. Đối với đề bài như vậy ta phải xét hết các trường hợp.

Lời giải hoàn chỉnh.

TH 1. Nếu $AB < AC$. Gọi I là giao điểm của BF và DE, K là giao điểm của CE và DF. Vì tứ giác AEDF là hình vuông, theo định lí Thales ta có

$\frac{FK}{FA} = \frac{FK}{AE} = \frac{CK}{CE} = \frac{CD}{CB} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AB}$, suy ra các tam giác FAK và ABF đồng dạng nên $\widehat{FAK} = \widehat{FBA}$, dẫn đến $AK \perp BF$.



Tương tự ta cũng có $AI \perp CE$.

Từ đó suy ra H là trực tâm của tam giác AIK nên $AH \perp IK$. (1)

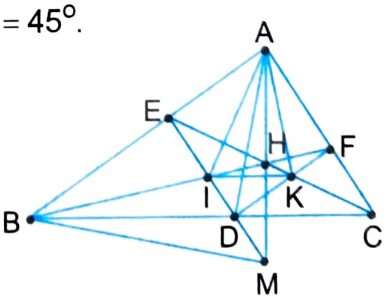
Vì BE // DF nên theo định lí Thales ta có $\frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA} = \frac{DB}{DC} = \frac{KE}{KC}$, suy ra IK // DC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp BC$.

Từ đó, M là trực tâm của tam giác ABD, suy ra $BM \perp AD$, dẫn đến $\widehat{ABM} = \widehat{ADE}$ (cùng phụ với góc BAD).

Do đó các tam giác BEM và DEA đồng dạng, suy ra $\widehat{EMB} = \widehat{EAD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BMD} = 135^\circ$.

TH 2. Nếu $AB > AC$, lúc này D nằm giữa E và M. Thực hiện lời giải như trường hợp 1 ta có $\widehat{BMD} = 45^\circ$.



TH 3. $AB = AC$, lúc này điểm M trùng với D, góc BMD không xác định được.

Nhận xét. Kì này không có bạn nào chỉ ra lỗi sai và đưa ra lời giải đúng, phần thưởng đành gác lại cho kì sau.

VI MẠNH TƯỜNG



TRUY TÌM CỔ VẬT



HOÀNG HÀ *(Hà Nội)*

Đêm qua, Sở Công an thành phố đã triệt phá một đường dây buôn lậu cổ vật quý hiếm. Qua điều tra, công an xác định được tang vật đang được cất giấu tại một ngôi làng ven sông hẻo lánh. Vì bọn tội phạm cực kì xảo quyệt và có thể phi tang chứng cứ bất cứ lúc nào, nên cơ quan công an đã nhờ thám tử Lâm Phong cùng hai chiến sĩ trinh sát Hoàng Minh và Lê Trúc đến đó tiếp tục điều tra.

Tránh trường hợp tên trộm tẩu thoát, ngay lúc bình minh, thám tử Lâm Phong cùng hai chiến sĩ đã có mặt tại bến đò làng. Vừa bước xuống, họ lập tức phát hiện hai kẻ khả nghi đứng cạnh bờ sông, quan sát xung quanh với thái độ căng thẳng. Hoàng Minh nói nhỏ:

- Rất có thể chúng đang tìm cơ hội phi tang tang vật xuống sông. Theo báo cáo, đêm qua chúng ở trong một căn nhà nhỏ gần bến đò và rời đi lúc gần 4 giờ rưỡi sáng nay.

- Nghĩa là tính cả thời gian di chuyển, chúng chỉ đến đây được khoảng gần nửa tiếng đồng hồ.

Thám tử Lâm Phong nhận định sau khi nhìn vào đồng hồ.

Không để mất thời gian, Lê Trúc tiến thẳng đến hai kẻ tình nghi:

- Các anh có gì cần giấu không? Hãy mau giao nộp cổ vật! Hai tên lập tức tỏ ra bối rối, nhưng vẫn chối cãi:

- Cô nói gì vậy? Chúng tôi chỉ là dân làng đi câu cá sáng sớm thôi!

- Đúng thế! Nếu không có bằng chứng, các người đừng vu oan!

Hoàng Minh siết chặt nắm tay. Anh tin chắc rằng cổ vật đang bị giấu đâu đó gần đây, nhưng làng ven sông có hàng chục chiếc thuyền neo đậu, biết làm sao tìm ra tang vật? Không thể lục soát từng con thuyền được! Anh quay sang nhìn thám tử Lâm Phong, nhưng lúc này ông lại đang đi dạo một cách bình thản dọc bờ sông.

Bất ngờ, ông dừng lại trước một chiếc thuyền nhỏ cũ không sử dụng được buộc lâu ngày bởi dây xích rỉ hoen ố, cúi xuống kiểm tra rồi

thản nhiên kéo mạnh sợi dây thừng buộc ở mũi thuyền đang hướng xuống lòng sông. Ngay lập tức, một chiếc chum gốm từ từ nổi lên mặt nước, bên trong là những viên ngọc cổ lấp lánh. Sắc mặt hai kẻ buôn lậu trắng bệch, run sợ không nói nên lời.

- Các ngươi đòi chứng cứ ư? Đây chính là chứng cứ! - Thám tử bình tĩnh nói

- Sáng sớm nay các ngươi đã giấu chum gốm này dưới nước, nhưng các ngươi đã không lường trước được sự việc lại bị bại lộ nhanh như vậy.

Hai kẻ buôn lậu cúi đầu nhận tội, bị bắt giữ ngay tại chỗ. Hoàng Minh và Thanh Trúc kinh ngạc hỏi:

- Làm thế nào ông phát hiện ra chiếc chum gốm được giấu dưới nước?

Lâm Phong mỉm cười:

- Dễ thôi! Khi tôi nghe báo cáo rằng chúng rời căn nhà gần bến đò lúc gần 4 giờ rưỡi sáng, tôi đã đặt nghi vấn. Khoảng thời gian đó trời vẫn còn tối, nếu chúng muốn tẩu thoát, lẽ ra phải đi sớm hơn hoặc muộn hơn khi trời sáng hẳn. Nhưng chúng lại có mặt ở bến đò vào lúc mờ sáng, đây là thời điểm thuận lợi để giấu vật gì đó xuống sông.

Hoàng Minh hỏi tiếp:

- Vậy tại sao ông lại phát hiện ra chứng cứ ở dưới chiếc thuyền cũ đó mà không phải là những chiếc thuyền khác?

- Trong khi nói chuyện, tôi đã để ý hai bàn tay của chúng có những dấu vết liên quan một vật gì đó cũ kĩ. Khi ra quan sát tất cả các thuyền ở đó, tôi thấy những vết trên tay đó rất phù hợp với chiếc thuyền cũ, quan sát thêm tôi lại phát hiện thêm bằng chứng khác khiến tôi chắc chắn biết được cổ vật đang được giấu dưới chiếc thuyền này.

Theo các bạn, thám tử đã thấy điều gì trong bàn tay của tên trộm và bằng chứng gì khi thám tử quan sát con thuyền cũ được để lâu ngày ở đó? Hãy tưởng tượng chúng mình cũng đang có mặt tại hiện trường lúc đó cùng với thám tử để trả lời câu hỏi nhé!



Kết quả **(TTT2 số 264+265)**

BỨC TRANH BIẾN MẤT

Câu trả lời của ông Dũng về nội dung của cuốn truyện chuột Típ "Bộ truyện nói về những câu chuyện xoay quanh hai nhân vật chính là con mèo và chú chuột con" là không đúng. Vì thực chất nội dung của cuốn truyện là giúp các bạn hoàn thiện dần các kĩ năng cũng như khắc phục các thói quen chưa tốt. Nhờ chuột Típ, các bạn nhỏ biết đi ngủ đúng giờ, không biếng ăn, vâng lời cha mẹ, thích đi nhà trẻ, không nói dối, vui mừng đón nhận em ra đời, đánh răng hằng ngày, không đi học trễ. Do đó ông Dũng đã nói dối để giải thích cho sự vắng mặt của mình. Vậy ông Dũng chính là nghi phạm trộm bức tranh.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau có lập luận tốt được thưởng kì này: *Nguyễn Trúc Chi*, 8B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thị Tuệ Quyên*, 6D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Đậu Phương Linh*, 8C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; Đinh Trần Bảo Khánh, 6A2, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Thám Tử Sê-Lốc-Cốc

ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHẠM VĂN TƯỞNG *(TP. Hồ Chí Minh)*

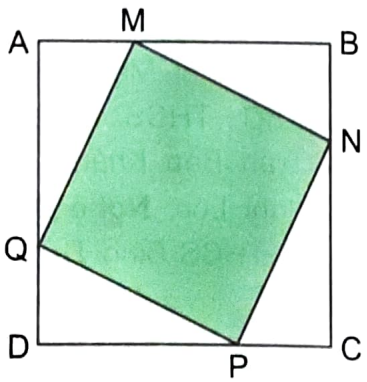
Chương trình GDPT 2018 đã đưa Toán học gắn với thực tiễn đời sống qua những bài toán có nội dung thực tế. Trong quá trình giảng dạy, chúng tôi thấy rằng học sinh rất hứng thú với những bài toán này. Tuy nhiên, khi tiếp cận lớp bài toán có vận dụng bất đẳng thức để giải quyết, học sinh còn gặp nhiều khó khăn. Do đó, chúng tôi viết bài này mong giúp các bạn học sinh có hướng tiếp cận tốt hơn khi gặp những bài toán như vậy. Dưới đây là một số bài toán được chúng tôi sưu tầm trong một số đề minh họa của các trường trên cả nước để bạn đọc tham khảo.

Trước tiên, ta dễ dàng chứng minh được các bất đẳng thức sau:

Với a, b, c là các số thực không âm, ta có: $a+b\geq 2\sqrt{ab}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài toán 1. Sân nhà bác Hai có dạng hình vuông ABCD cạnh là 8 m. Bác muốn lát gạch màu khác để trang trí phần sân hình vuông MNPQ nội tiếp trong sân hình vuông ABCD như hình sau.



Tìm vị trí của M, N, P, Q tương ứng trên các cạnh AB, BC, CD, DA để phần sân hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn. Ta dễ chứng minh được $\Delta AMQ=\Delta BNM=\Delta CPN=\Delta DQP$ nên $AM=DQ$.

Do đó $AM+AQ=8$.

Hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất khi tổng diện tích bốn tam giác vuông AMQ, BNM, CPN, DQP là lớn nhất.

Gọi S là tổng diện tích bốn tam giác đó, ta có

$$S=2AM\cdot AQ\leq \frac{(AM+AQ)^2}{2}=\frac{8^2}{2}=32.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $AM=AQ=MB$ hay M là trung điểm AB.

Vậy khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA thì hình vuông MNPQ có diện tích nhỏ nhất bằng $S_{ABCD}-S=64-32=32\ (m^2)$.

Bài toán 2. Bạn An muốn làm một chiếc hộp không có nắp dạng hình hộp chữ nhật, mặt đáy chiếc hộp là hình vuông. Hãy tìm độ dài cạnh đáy và chiều cao của chiếc hộp để tổng diện tích các mặt của chiếc hộp là nhỏ nhất, biết rằng thể tích chiếc hộp là 4 dm^3.

Hướng dẫn. Gọi độ dài cạnh đáy và chiều cao của chiếc hộp lần lượt là x (dm) và y (dm).

Do thể tích của chiếc hộp là 4 dm^3 nên

$$x^2y=4 \text{ hay } y=\frac{4}{x^2}.$$

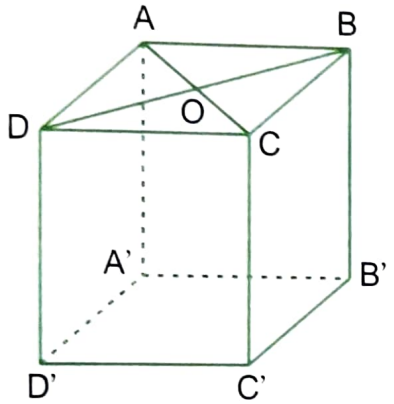
Tổng diện tích các mặt của chiếc hộp là $S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{16}{x}$. Ta có

$$S = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 12.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 2, y = 1$.

Vậy khi độ dài cạnh đáy và chiều cao của chiếc hộp lần lượt là 2 dm và 1 dm thì tổng diện tích các mặt của chiếc hộp là nhỏ nhất và bằng 12 dm^2.

Bài toán 3. Bạn Nam làm một chiếc hộp dạng hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D', đáy là hình thoi.



Biết thể tích của chiếc hộp là 1280 cm^3 và chiều cao là 20 cm. Hỏi diện tích xung quanh nhỏ nhất của chiếc hộp mà bạn Nam làm là bao nhiêu?

Hướng dẫn. Đặt $AC = 2x$ (cm), $BD = 2y$ (cm).

Diện tích đáy ABCD là $S = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y = 2xy$.

Mặt khác $S = \frac{V}{h} = \frac{1280}{20} = 64$ (cm^2) nên $2xy = 64$.

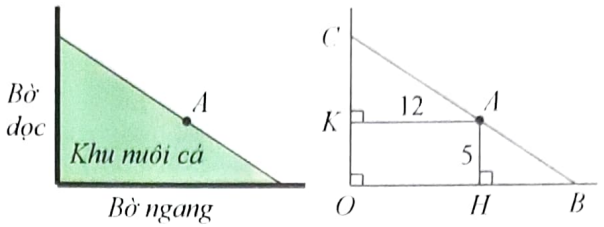
Diện tích xung quanh của chiếc hộp là $S_{xq} = 4AB \cdot 20 = 80AB$. Do đó S_{xq} nhỏ nhất khi AB nhỏ nhất.

Gọi O là giao điểm của AC và BD thì AC vuông góc với BD tại O. Khi đó ta có $AB^2 = OA^2 + OB^2 = x^2 + y^2 \geq 2xy = 64$, suy ra $AB \geq 8$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$ tức là khi ABCD là hình vuông.

Vậy diện tích xung quanh nhỏ nhất của chiếc hộp là $S_{xq} = 80 \cdot 8 = 640$ (cm^2).

Bài toán 4. Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A như hình sau.



Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là bao nhiêu? Biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.

Hướng dẫn. Đặt $CK = x$ (m).

Dễ thấy các tam giác AKC và BHA đồng dạng nên ta có $\frac{CK}{AH} = \frac{AK}{BH}$ hay $\frac{x}{5} = \frac{12}{BH}$, suy ra $BH = \frac{60}{x}$.

Diện tích của khu nuôi cá là

$$S = \frac{1}{2}(x+5)\left(\frac{60}{x} + 12\right) = 6x + \frac{150}{x} + 60.$$

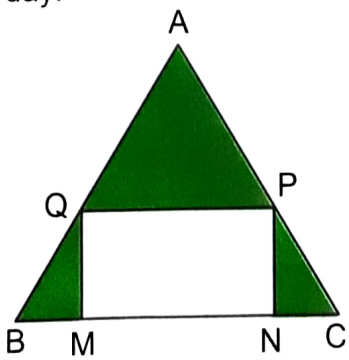
Ta có

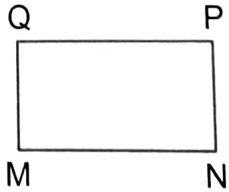
$$S = 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} + 60 = 120.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $6x = \frac{150}{x} \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới nuôi cá là 120 m^2.

Bài toán 5. Từ một tấm nhôm dạng hình tam giác đều có cạnh bằng 20 cm. Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác để được hình chữ nhật MNPQ như hình vẽ dưới đây.





Tìm độ dài đoạn thẳng MB để hình chữ nhật MNPQ có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn. Gọi độ dài đoạn MB là x (cm) thì NC = x (cm), MN = 20 – 2x (cm).

Tam giác BMQ vuông tại M nên ta có

$QM = BM\tan B = x\tan 60^\circ = x\sqrt{3}$ (cm).

Diện tích hình chữ nhật MNPQ là

$S = QM \cdot MN = \sqrt{3}x(20 - 2x)$ (cm^2).

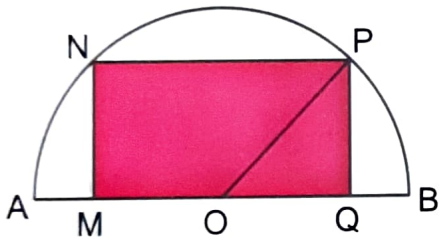
Ta có $S = \sqrt{3}x(20 - 2x) = 2\sqrt{3}x(10 - x)$

$\le 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{(x + 10 - x)^2}{4} = 50\sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 10 - x \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy để hình chữ nhật MNPQ có diện tích lớn nhất thì độ dài đoạn MB bằng 5 cm.

Bài toán 6. Từ một miếng bìa có dạng nửa hình tròn (O), An muốn cắt một hình chữ nhật MNPQ như hình vẽ bên dưới.



Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật MNPQ mà An cắt được, biết rằng nửa hình tròn (O) có bán kính là 10 cm.

Hướng dẫn. Đặt MN = x (cm), $0 < x < 10$.

Khi đó ta có $MQ = 2OQ = 2\sqrt{100 - x^2}$ (cm).

Diện tích hình chữ nhật MNPQ là

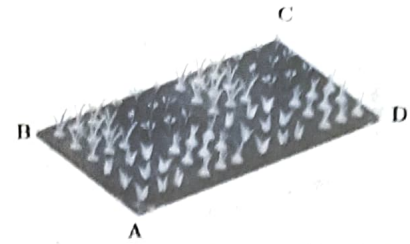
$S = 2x\sqrt{100 - x^2}$ (cm^2). Ta có

$S = 2\sqrt{x^2(100 - x^2)} \le x^2 + (100 - x^2) = 100$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x^2 = 100 - x^2$ hay $x = 5\sqrt{2}$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật MNPQ mà An cắt được là 100 cm^2.

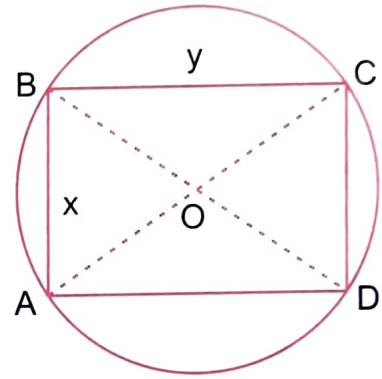
Bài toán 7. Người ta muốn làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật, diện tích là 640 m^2. Để tạo thêm cảnh quan xung quanh đẹp hơn, người ta mở rộng thêm bốn phần diện tích để trồng hoa, tạo thành một đường tròn như hình vẽ.



Biết tâm hình tròn trùng với giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật. Hỏi phải chọn kích thước của hình chữ nhật như thế nào để diện tích của bốn phần đất trồng hoa là nhỏ nhất?

Hướng dẫn.

Đặt AB = x (m), BC = y (m) $(x > 0, y > 0)$.



Gọi diện tích hình tròn là S_1, ta có

$S_1 = \pi.\dfrac{AC^2}{4} = \pi.\dfrac{x^2 + y^2}{4}$ (m^2).

Gọi diện tích của hình chữ nhật ABCD là S_2, ta có $S_2 = xy = 640$ (m^2).

Gọi diện tích phần đất trồng hoa là S, ta có

$S = S_1 - S_2 = \pi.\dfrac{x^2 + y^2}{4} - xy$ (m^2).

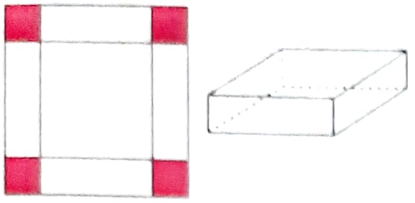
Ta có

$S = \pi.\dfrac{x^2 + y^2}{4} - xy \ge \pi.\dfrac{2xy}{4} - xy = 320\pi - 640$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 8\sqrt{10}$.

Vậy để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất thì kích thước của hình chữ nhật là $AB = BC = 8\sqrt{10}$ (m).

Bài toán 8. Từ một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm, người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp như hình vẽ dưới đây.



Tìm x để thể tích của hộp là lớn nhất.

Hướng dẫn. Chiếc hộp tạo thành là một hình hộp có đáy là hình vuông cạnh $12-2x$ (cm) và chiều cao là x (cm).

Thể tích của chiếc hộp là

$V = x(12-2x)^2$ (cm^3) với $(0 < x < 6)$.

Ta có $V = \frac{1}{4}\cdot 4x(12-2x)(12-2x)$

$\le \frac{1}{4}\left(\frac{12-2x+12-2x+4x}{3}\right)^3 = 128.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $4x = 12-2x$ hay $x = 2$.

Vậy khi $x = 2$ cm thì thể tích của chiếc hộp là lớn nhất và bằng 128 cm^3.

Bài toán 9. Một công ty muốn thiết kế bao bì đựng sữa với thể tích 100 ml. Bao bì được thiết kế dạng hình trụ hoặc hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông. Hỏi công ty nên thiết kế bao bì theo dạng nào thì tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

Hướng dẫn. Đổi 100 ml = 100 cm^3.

Trường hợp 1: Nếu thiết kế bao bì dạng hình trụ.

Gọi R là bán kính và h là chiều cao hình trụ.

Thể tích của hình trụ là

$V_t = \pi R^2 h = 100$ (cm^3).

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$S_t = 2\pi Rh + 2\pi R^2$ (cm^2).

Ta có $S_t = \pi Rh + \pi Rh + 2\pi R^2$

$\ge 3\sqrt[3]{\pi Rh\cdot \pi Rh\cdot 2\pi R^2} = 3\sqrt[3]{2\pi(\pi R^2 h)^2}$

$= 3\sqrt[3]{2\pi\cdot 100^2} \approx 119{,}27$ (cm^2).

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\pi Rh = 2\pi R^2$ hay $h = 2R$.

Trường hợp 2: Nếu thiết kế bao bì dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông.

Gọi x là độ dài cạnh đáy và a là chiều cao của hình hộp chữ nhật.

Thể tích của hình hộp chữ nhật là

$V_h = x^2 a = 100$ (cm^3).

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là $S_h = 2x^2 + 4xa$ (cm^2). Ta có

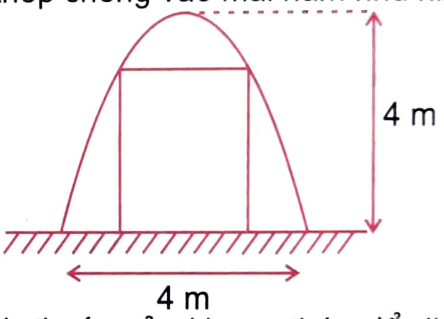
$S_h = 2x^2 + 2xa + 2xa \ge 3\sqrt[3]{2x^2\cdot 2xa\cdot 2xa}$

$= 6\sqrt[3]{(x^2 a)^2} = 6\sqrt[3]{100^2} \approx 129{,}27$ (cm^2).

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2x^2 = 2xa \Leftrightarrow x = a$.

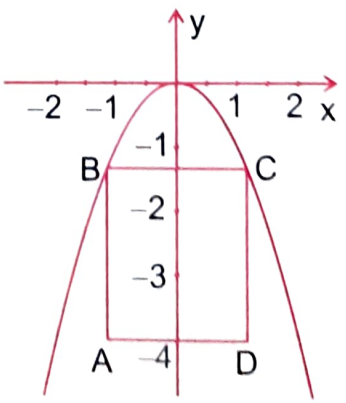
Từ hai trường hợp trên, ta thấy rằng công ty nên thiết kế hộp sữa dạng hình trụ có chiều cao gấp hai lần bán kính đáy thì tiết kiệm nguyên vật liệu hơn.

Bài toán 10. Cửa hầm lò khai thác than có dạng một phần parabol, khoảng cách từ điểm cao nhất của cửa đến mặt đất là 4 m, khoảng cách giữa hai chân cửa là 4 m. Người ta muốn gia cố cho cửa lò bằng một khung thép hình chữ nhật sao cho hai đỉnh dưới của khung thép chạm đất, hai đỉnh trên của khung thép chống vào mái hầm như hình vẽ.



Tìm kích thước của khung thép để diện tích của hình chữ nhật tạo bởi khung thép là lớn nhất.

Hướng dẫn. Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, xem khung sắt là hình chữ nhật ABCD.



Parabol (P) có phương trình $y = -x^2$ và đi qua các điểm $(0; 0)$, $(-2; -4)$, $(2; -4)$.

Do C thuộc (P) nên $C(t; -t^2)$ (với $0 < t < 2$).

Khi đó $BC = 2t$, $CD = 4 - t^2$ (độ dài CD được tính theo độ dài hình học là một số dương).

Do đó $S_{ABCD} = 2t(4 - t^2)$. Ta có

$$S_{ABCD}^2 = 4t^2(4-t^2)^2 = 16t^2 \cdot \frac{4-t^2}{2} \cdot \frac{4-t^2}{2}$$

$$\le \frac{16}{27}\left(t^2 + \frac{4-t^2}{2} + \frac{4-t^2}{2}\right)^3 = \frac{1024}{27} \Rightarrow S_{ABCD} \le \frac{32\sqrt{3}}{9}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy kích thước của khung thép có chiều rộng là $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (m) và chiều dài là $\frac{8}{3}$ (m).

Bài toán 11. Một cửa hàng xăng dầu cần làm một bồn chứa dầu dạng hình trụ bằng thép có thể tích là $V = 54\pi$ (m^3). Giá làm mỗi mét vuông bồn là 500 000 đồng. Hỏi số tiền ít nhất mà cửa hàng phải trả để làm chiếc bồn là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn. Gọi R (m) là bán kính đáy và h (m) là chiều cao bồn chứa.

Ta có $h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{54\pi}{\pi R^2} = \frac{54}{R^2}$ (m).

Diện tích toàn phần của bồn chứa là

$$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \frac{108\pi}{R} \ (m^2).$$

Chi phí làm bồn thấp nhất khi diện tích toàn phần của bồn là nhỏ nhất.

Ta có $S_{tp} = 2\pi R^2 + \frac{54\pi}{R} + \frac{54\pi}{R}$

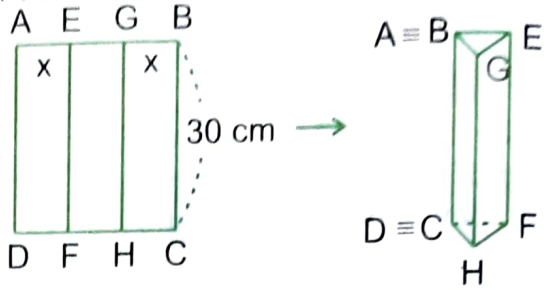
$$\ge 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{54\pi}{R} \cdot \frac{54\pi}{R}} = 54\pi.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2\pi R^2 = \frac{54\pi}{R}$ hay $R = 3$.

Vậy S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất bằng 54π (m^2) khi $R = 3$ (m) và $h = 6$ (m).

Khi đó số tiền làm bồn ít nhất mà cửa hàng phải trả là $54\pi \cdot 500000 \approx 84823002$ (đồng).

Bài toán 12. Cho hình vuông ABCD có cạnh 30 cm. Trên cạnh AB lấy hai điểm E, G sao cho $AE = GB = x$ (cm) và điểm E nằm giữa điểm A và điểm G. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại F. Qua G kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại H. Người ta gấp hình vuông theo hai cạnh EF và GH sao cho cạnh AD trùng cạnh BC để tạo thành hình lăng trụ đứng khuyết đáy như hình vẽ.

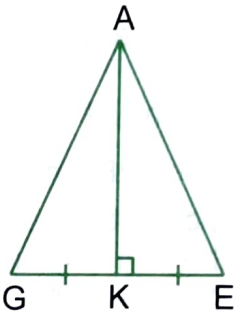


Tìm x để thể tích hình lăng trụ lớn nhất.

Hướng dẫn. Kẻ đường cao AK của tam giác AGE. Ta có

$EG = 30 - 2x$ (cm), $KE = \frac{EG}{2} = 15 - x$ (cm),

$AK = \sqrt{x^2 - (15-x)^2} = \sqrt{30x - 225}$ (cm).



Diện tích đáy tam giác AGE là

$$S_{AGE} = \frac{1}{2} GE \cdot AK = (15-x)\sqrt{30x-225} \ (cm^2).$$

Thể tích lăng trụ là

$$V = 30(15-x)\sqrt{30x-225} \ (cm^3).$$

Ta có $\sqrt[3]{(2x-15)(15-x)(15-x)}$

$$\le \frac{(2x-15)+(15-x)+(15-x)}{3} = 5, \text{ suy ra}$$

$$(2x-15)(15-x)(15-x) \le 125.$$

Do đó $\sqrt{(2x-15)(15-x)(15-x)} \le 5\sqrt{5}$.

Vậy $V = 30\sqrt{15}\sqrt{(2x-15)(15-x)(15-x)}$

$$\le 30\sqrt{15} \cdot 5\sqrt{5} = 750\sqrt{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2x - 15 = 15 - x$ hay $x = 10$.

Vậy với $x = 10$ (cm) thì thể tích hình lăng trụ lớn nhất và bằng $750\sqrt{3}$ (cm^3).

Bài toán 13. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi

được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ (người này sẽ giám sát tất cả các máy hoạt động). Hỏi số máy công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất?

Hướng dẫn. Gọi số máy công ty nên sử dụng là x (máy) với x nguyên dương.

Trong một giờ, số quả bóng tennis sản xuất được là 30x (quả).

Như vậy, số giờ để sản xuất 8000 quả bóng là $\frac{8000}{30x}$ (giờ).

Mỗi giờ phải trả 192 nghìn đồng cho người giám sát và chi phí thiết lập cho mỗi máy là 200 nghìn đồng nên tổng chi phí sản xuất là

$200000x + \frac{8000}{30x} \cdot 192000$ (đồng).

Ta có $200000x + \frac{8000}{30x} \cdot 192000$

$\geq 2\sqrt{200000x \cdot \frac{51200000}{x}} = 6400000.$

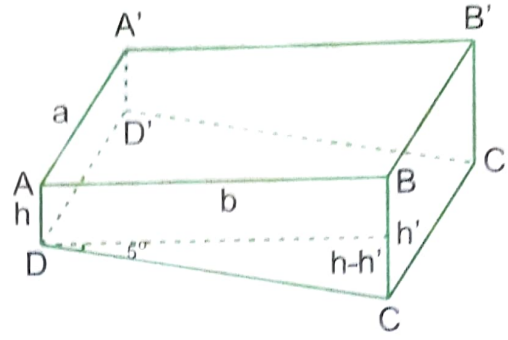
Dấu đẳng thức xảy ra khi $200000x = \frac{51200000}{x}$

hay $x = 16$.

Vậy để chi phí sản xuất là thấp nhất thì công ty nên sử dụng 16 máy.

Bài toán 14. Để thiết kế bể bơi phù hợp với cả người lớn và trẻ em, người ta thường thiết kế phần đáy của bể có độ dốc khoảng 5 độ so với phương nằm ngang. Biết rằng mặt trên của bể là một hình chữ nhật có diện tích là 400 m^2, chỗ nông nhất của bể bằng $\frac{1}{16}$ chiều rộng của bể. Khi xây dựng, người ta thường tính tiền công dựa vào thể tích của bể. Hỏi kích thước của bể là bao nhiêu để thể tích của bể là nhỏ nhất? Nếu người ta bơm nước cách thành của bể là 50 cm thì mực nước sâu nhất của bể là bao nhiêu? Để cảnh báo về độ sâu của bể cho người dùng mà không làm ảnh hưởng đến hoạt động bơi lội thì ta nên làm gì ? Cho biết $\tan 5^o = 0,09$.

Hướng dẫn. Gọi chiều rộng của bể là a, chiều dài của bể là b, chỗ nông nhất của bể là h, chỗ sâu nhất của bể là h', V là thể tích của bể (các kí hiệu trên bể như hình vẽ).



Bể có dạng lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' đặt nằm ngang, đáy của lăng trụ là hình thang vuông ABCD, chiều cao của lăng trụ là chiều rộng của bể.

Theo bài ra ta có $ab = 400$, $h = \frac{a}{16}$.

$h' - h = b \cdot \tan 5^o = \frac{400}{a} \cdot 0,09 = \frac{36}{a} \Rightarrow h' = \frac{a}{16} + \frac{36}{a}.$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(h + h')b = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{16} + \frac{36}{a}\right) \cdot \frac{400}{a}$

$= \left(\frac{2a}{16} + \frac{36}{a}\right) \cdot \frac{200}{a}$ (m^2).

$V = S_{ABCD} \cdot a = \left(\frac{2a}{16} + \frac{36}{a}\right) \cdot \frac{200}{a} \cdot a$

$= 200\left(\frac{2a}{16} + \frac{36}{a}\right) \geq 200 \cdot 2\sqrt{\frac{2a}{16} \cdot \frac{36}{a}} = 600\sqrt{2}.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{2a}{16} = \frac{36}{a}$

$\Leftrightarrow a = 12\sqrt{2} \approx 17$ (m), $b = \frac{400}{a} = \frac{50\sqrt{2}}{3} \approx 23,6$ (m),

$h = \frac{a}{16} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1,06$ (m), $h' = \frac{a}{16} + \frac{36}{a} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \approx 3,18$ (m).

Vậy thể tích của bể nhỏ nhất là $600\sqrt{2}$ (m^3) khi chiều rộng của bể là 17 (m), chiều dài của bể là 23,6 (m), chỗ nông nhất của bể là 1,06 (m), chỗ sâu nhất của bể là 3,18 (m).

Khi mực nước cách thành bể là 50 cm thì mực nước sâu nhất của bể là $3,18 - 0,5 = 2,68$ (m).

Để cảnh báo về độ sâu của bể cho người dùng mà không làm ảnh hưởng đến hoạt động bơi lội thì ta có thể viết độ sâu của bể lên phía trong của hai thành bể dọc theo chiều dài theo thứ tự tăng dần. Ngoài ra người ta có thể cảnh báo độ sâu của bể bằng hệ thống cảm biến laser tự động kết hợp với âm thanh nhắc nhở khi người bơi đến các vùng nước sâu,...

Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(264+265). Cho x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $3xz - 2y = 2yz - 3x$ và $7x = 2z$. Chứng minh rằng $\dfrac{2023y - 2024x}{2023z - 2024y} < \dfrac{1}{4}$.

Lời giải. Với các số nguyên dương x, y, z, từ $7x = 2z$ và do 2, 7 đều là các số nguyên tố nên $x = 2t$, $z = 7t$ với t là số nguyên dương.

Từ $3xz - 2y = 2yz - 3x$ ta có

$3xz + 3x = 2yz + 2y$ hay $3x(z+1) = 2y(z+1)$, suy ra $2y = 3x = 6t$ (do $z+1$ là số nguyên dương), suy ra $y = 3t$. Khi đó ta có

$$\frac{2023y - 2024x}{2023z - 2024y} = \frac{2023 \cdot 3t - 2024 \cdot 2t}{2023 \cdot 7t - 2024 \cdot 3t}$$

$$= \frac{2021t}{8089t} = \frac{2021}{8089} < \frac{2021}{8084} = \frac{1}{4}.$$

Nhận xét. Một số bạn không lập luận chặt chẽ khi bỏ qua nhận xét $z+1$ là số nguyên dương. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Phạm Việt Hùng*, *Tạ Hương Giang*, *Nguyễn Cẩm Tú*, *Nguyễn Minh Tuấn*, 7A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thu Ngân*, *Triệu Vân Nhi*, 7E, THCS Cao Mại, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Quách Kim Bảo*, *Nguyễn Ngọc Đăng Khoa*, *Ngô Khải Anh*, 6A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; *Nguyễn Hữu An Bình*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Phạm Hà Mi*, 7A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Lê Phi Long*, 7A3, THCS Nguyễn Hồng Lễ, TP. Sầm Sơn, **Thanh Hóa**; *Trần Đại Nam*, 7A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Lê Thị Hà An*, *Nguyễn Việt Anh*, *Nguyễn Hà Vy*, *Đặng Văn Hoàng*, *Nguyễn Xuân Đức*, *Đỗ Đức Thiện*, 6A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Lê Kim Ngân*, 7A1, THCS Quỳnh Thiện, TX. Hoàng Mai; *Võ Hoàng Phúc*, 7A, *Lê Ngọc Bảo Khanh*, *Hoàng Đức Minh*, *Nguyễn Đức Nhân*, *Thái Hải Nam*, 7C, *Phan Viết Minh Bảo*, *Nguyễn Ngọc Hà*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Thái Bùi Hà Anh*, 6E, *Nguyễn Thái Dũng*, *Nguyễn Sỹ Bảo Long*, *Trần Ngọc Quân*, *Cao Phúc*, 7B, THCS Lý Nhật Quang; *Nguyễn Kim Nhật Băng*, 7A, THCS Nguyễn Quốc Trị, Đô Lương; *Trần Ngọc Thiết*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 6A, THCS Bình Thịnh; *Nguyễn Bảo Ngọc*, *Phan Anh Tuấn*, *Nguyễn Minh Khánh*, 7D, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; *Nguyễn Thục Quyên*, 6A1, *Lê Thị Thanh Bình*, *Nguyễn Hữu Minh Quân*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, *Nguyễn Trần Hoài An*, 6B, *Nguyễn Bảo Hân*, *Nguyễn Chí Quân*, *Hoàng Khánh Chi*, *Phan Thanh Huyền*, 6C, *Trần Nhật Quân*, 6D, *Nguyễn Minh Quân*, *Nguyễn Quỳnh Anh*, *Nguyễn Thị Hà Bảo Chi*, *Dương Gia Bảo*, *Ngô Đức Huy*, *Nguyễn Duy Việt Đức*, *Trương Nguyễn Tú Anh*, 7D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài 2(264+265). Có bao nhiêu số nguyên dương $n \le 2025$ thỏa mãn $n-4$ là số nguyên tố, n là tích của hai số nguyên tố, $n+4$ là số chính phương?

Lời giải. Vì $n+4$ là số chính phương nên $n+4 = x^2$ $(x \in \mathbb{Z})$.

Khi đó $n = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Do n là tích của hai số nguyên tố nên $x-2$ và $x+2$ là hai số nguyên tố. Mặt khác ta có $(x+2) - (x-2) = 4$ và do $n \le 2025 < 44 \cdot 48$

nên $(x-2, x+2)$ có thể là một trong các cặp sau: (3, 7); (7, 11); (13, 17); (19, 23); (37, 41); (43, 47).

Mỗi cặp số trên, ta tìm được giá trị tương ứng của n là $n \in \{21; 77; 221; 437; 1517; 2021\}$.

Khi đó giá trị tương ứng của $n-4$ là $n-4 \in \{17; 73; 217; 433; 1513; 2017\}$.

Kết hợp $n-4$ là số nguyên tố ta được $n-4 \in \{17; 73; 433; 2017\}$.

Vậy có bốn số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n \in \{21; 77; 437; 2021\}$.

Nhận xét. Đây là bài toán số học hay nhưng không khó. Tuy nhiên đa số các bạn không thử điều kiện $n-4$ là số nguyên tố dẫn đến có 6 số thỏa mãn. Một số bạn mới chỉ ra được các cặp số nguyên tố hơn kém nhau 4 đơn vị và có tích không vượt quá 2025. Các bạn sau có lời giải trọn vẹn: *Đặng Văn Hoàng*, 6A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Nguyễn Thục Quyên*, 6A1, *Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Phan Thanh Huyền*, 6C, *Nguyễn Khánh Duy*, *Nguyễn Linh Đan*, 6D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN PHÚC BÌNH

Bài 3(264+265). Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho hai số $a = p+5$ và $b = p+7$ đều có đúng 6 ước số nguyên dương.

Lời giải. Ta có tính chất sau: Số nguyên $n > 2$ phân tích ra thừa số nguyên tố thành $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là các số nguyên tố phân biệt, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các số nguyên dương thì n có đúng $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ ước số nguyên dương. Nếu n có không ít hơn 3 ước nguyên tố phân biệt thì n có không ít hơn 8 ước số nguyên dương.

Trở lại với bài toán.

Dễ thấy $p=2$ và $p=3$ không thỏa mãn yêu cầu của đề bài nên p là số nguyên tố lớn hơn 3. Khi đó $p+6$ là số lẻ và không chia hết cho 3, dẫn đến $p+5, p+7$ đều là số chẵn và một trong hai số này chia hết cho 3. Từ đó ta có các trường hợp sau:

- $p+5 = 2 \cdot 3^2$ hay $p=13$ và $p+7=20$ cũng có đúng 6 ước số nguyên dương (thỏa mãn).
- $p+7 = 2 \cdot 3^2$ hay $p=11$ và $p+5=16$ chỉ có 5 ước số nguyên dương (không thỏa mãn).
- $p+5 = 2^2 \cdot 3$ hay $p=7$ và $p+7=14$ chỉ có 4 ước số nguyên dương (không thỏa mãn).
- $p+7 = 2^2 \cdot 3$ hay $p=5$ và $p+5=10$ chỉ có 4 ước số nguyên dương (không thỏa mãn).

Vậy $p=13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: *Vũ Bảo Linh*, AE7.1, THCS Nam Từ Liêm, Nam Từ Liêm, **Hà Nội**; *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Tuấn Kiệt*, *Nguyễn Thanh Tường*, 6A, THCS Thanh Khương, Thuận Thành, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Việt Anh*, *Nguyễn Phúc Hưng*, *Nguyễn Đình Lộc*, *Hoàng Phương Linh*, 6A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Võ Hoàng Phúc*, 7A, *Hoàng Đức Minh*, *Thái Hải Nam*, 7C, *Phan Viết Minh Bảo*, *Đặng Quang Bảo Khánh*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Thái Dũng*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Thục Quyên*, 6A1, *Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Hoàng Thị Phương Chi*, *Nguyễn Thị Hà Bảo Chi*, 7D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN NGỌC HÂN

Bài 4(264+265). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = 40^\circ$. Trên đoạn BD lấy các điểm E, F sao cho $\widehat{ACE} = \widehat{BCF} = 20^\circ$. Chứng minh rằng AE là tia phân giác của góc DAF.

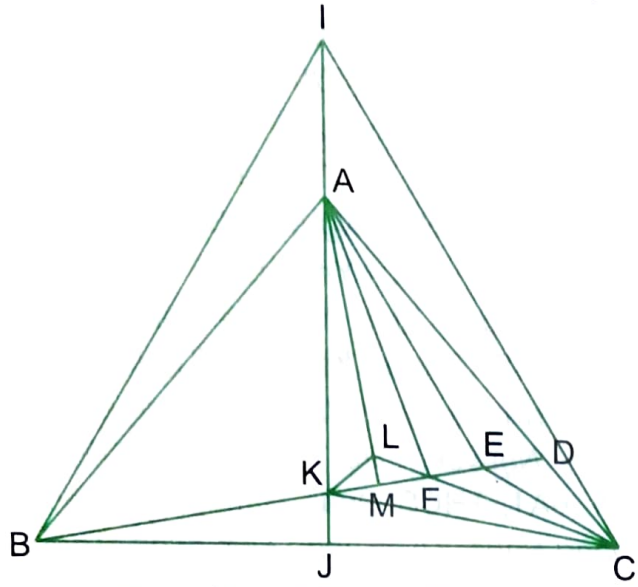
Lời giải. Dựng tam giác đều BIC (I cùng phía A với bờ là đường thẳng BC). Khi đó $\Delta IAB = \Delta IAC$ (c.c.c) nên $\widehat{AIB} = \widehat{AIC} = 30^\circ$, $\widehat{ABI} = \widehat{ACI} = 10^\circ$. Kết hợp với $\widehat{ECB} = 30^\circ$,

$\widehat{EBC} = 10^\circ$, suy ra $\Delta ABI = \Delta EBC$ (g.c.g) nên $AB = EB$, dẫn đến $\widehat{BAE} = \widehat{BEA} = 70^\circ$. (1)

Kẻ AJ vuông góc với BC tại J, AJ cắt BD tại K. Kẻ AM vuông góc với BD tại M, AM cắt CF tại L.

Ta có $\widehat{LAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAL} = 30^\circ = \widehat{LCA}$, suy ra $LA = LC$. Kết hợp với $KA = KB = KC$ ta có $\Delta AKL = \Delta CKL$ (c.c.c) nên $\widehat{AKL} = \widehat{CKL} = 50^\circ$ (do $\widehat{BKJ} = 80^\circ$), kéo theo

$\widehat{LKF} = \widehat{CKL} - \widehat{CKF} = 30^\circ$ (do $\widehat{BKC} = 160^\circ$).



Lại có $\widehat{LFK} = \widehat{EFC} = \widehat{FBC} + \widehat{FCB} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{LKF} = \widehat{LFK}$, dẫn đến $LK = LF$. Kết hợp với LM vuông góc với KF ta có AM là trung trực của KF, suy ra $\widehat{AFK} = \widehat{AKF} = \widehat{BKJ} = 80^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EAF} = 10^\circ = \widehat{EAC}$.
Vậy AE là phân giác của góc DAF.

Nhận xét. Bài toán này khó nên có ít bạn tham gia giải. Một số bạn sử dụng cả tính chất của hình thang cân và định lí Thales. Các bạn sau có lời giải đúng: *Lê Trần Thanh Ngọc*, 7A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Hữu An Bình*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Võ Hoàng Phúc*, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Đăng Quang Đông*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Hữu Minh Quân*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

QUANG ANH

Bài 5(264+265). Cho bảng ô vuông cỡ $m \times n$ với $m > 2, n > 2$. Tô màu mỗi ô vuông của bảng bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ sao cho mỗi màu được tô cho ít nhất hai ô vuông của bảng. Chứng minh rằng tồn tại bốn ô vuông của bảng gồm có hai ô xanh và hai ô đỏ, sao cho bốn ô vuông này nằm ở bốn góc của một hình chữ nhật có các cạnh tương ứng song song (hoặc trùng) với các cạnh của bảng.

Lời giải. Ta phát biểu bài toán dưới dạng bài toán tương đương sau: Cho bảng ô vuông cỡ $m \times n$ với $m \geq 2, n \geq 2$. Điền vào mỗi ô vuông của bảng một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho mỗi số xuất hiện ít nhất hai lần. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra hai hàng và hai cột sao cho tổng bốn số được điền trên giao của hai hàng và hai cột này bằng 0.

Thực tế chỉ cần chọn hai hàng sao cho hợp của hai hàng này chứa ít nhất hai số 1 và hai số -1.

Thật vậy, giả sử ta chọn được hai hàng như thế thì lấy hai hàng này và n cột lập thành bảng cỡ $2 \times n$. Sau đó áp dụng tương tự cho bảng này ta lại chọn được hai cột mà hợp của hai cột này chứa ít nhất hai số 1 và hai số -1. Để chứng minh điều này, ta xét hai khả năng sau:

- Nếu có ít nhất hai hàng chứa cả hai số 1 và -1 thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.
- Nếu có một hàng chỉ chứa số 1 và một hàng chỉ chứa số -1 thì ta cũng có điều phải chứng minh.

Nếu không xảy ra hai trường hợp trên thì tồn tại hàng i chứa cả hai số $-1, 1$ và tất cả các hàng còn lại chỉ chứa đúng một loại số. Không mất tính tổng quát, tất cả các hàng còn lại chỉ chứa số 1 thì theo giả thiết hàng i chứa ít nhất hai số -1. Trong trường hợp này, ta cũng có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Chỉ có bạn sau đưa ra lời giải đúng: *Nguyễn Mạnh Đạt*, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**. Tuy nhiên, đề bài là tô bằng 2 màu xanh đỏ, trong lời giải của bạn lại là 2 màu xanh và trắng. Bạn cần chú ý cẩn thận khi trình bày lời giải.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài 6(264+265). Tìm tất cả các số thực không âm x, y thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y)(x+1)(y+1)=8\\ xy(x^3+y^3-3xy+17)=16.\end{cases}$$

Lời giải. Nếu x, y đồng thời lớn hơn 1 hoặc nhỏ hơn 1 thì không thỏa mãn phương trình đầu của hệ.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge 1 \ge y$.

Ta chứng minh $xy(x^3+y^3-3xy+17) \le 16$

hay $xy(x^3+y^3-3xy+17)(x+y+2)^2$

$$\le \frac{1}{4}(x+y)^2(x+1)^2(y+1)^2(x+y+2)^2.$$

Lại có $xy(x^3+y^3-3xy+17)(x+y+2)^2$

$$\le \frac{1}{4}\left[(x^3+y^3-3xy+17)+xy(x+y+2)^2\right]^2.$$

Do đó ta chứng minh

$(x^3+y^3-3xy+17)+xy(x+y+2)^2$

$\le (x+y)(x+1)(y+1)(x+y+2).$

$\Leftrightarrow x^3+y^3-3xy+1+xy(x+y+2)^2$

$\le (x+y)^2(x+1)(y+1)$

(do $2(x+y)(x+1)(y+1)=16$)

$\Leftrightarrow (x+y)^2(x+1)(y+1)-xy(x+y+2)^2$

$-(x^3+y^3+1-3xy) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y+1)$

$-(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(x+y-1-xy) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(x-1)(1-y) \ge 0$ luôn đúng với $x \ge 1 \ge y$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$.

Vậy các số thực không âm thỏa mãn hệ phương trình là $x=y=1$.

Nhận xét. Đây là bài toán hay nhưng không khó. Ý tưởng chính của bài toán là sử dụng đánh giá bất đẳng thức ở cả hai phương trình. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Mạnh Đạt*, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**; *Trần Trung Nghĩa*, 8E, *Cao Ngọc Khánh*, *Phan Duy Ngọc*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thảo Linh*, 9A3, THCS Kỳ Sơn, TP. Hòa Bình, **Hòa Bình**; *Nguyễn Quang Hưng*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

Bài 7(264+265). Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=3$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3+b}+\frac{1}{b^3+a} \le 1$.

Lời giải. Đặt $a+b=x, ab=y$ thì $x+y=3$ và $x, y>0$.

Từ $3-x=y=ab \le \frac{(a+b)^2}{4}=\frac{x^2}{4}$, suy ra $(x-2)(x+6) \ge 0 \Rightarrow x \ge 2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $a^3+b^3+a+b \le (a^3+b)(b^3+a)$

$=a^3b^3+a^4+b^4+ab.$

Mà $a^3+b^3+a+b=(a+b)^3-3ab(a+b)+a+b$

$=x^3-3x(3-x)+x=x^3+3x^2-8x$ và

$a^3b^3+a^4+b^4+ab=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+a^3b^3+ab$

$=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2+a^3b^3+ab$

$=(x^2-2y)^2-2y^2+y^3+y$

$=x^4-4x^2y+2y^2+y^3+y$

$=x^4-4x^2(3-x)+2(3-x)^2+(3-x)^3+3-x$

$=x^4+3x^3-x^2-40x+48.$

Do đó ta cần chứng minh

$x^3+3x^2-8x \le x^4+3x^3-x^2-40x+48$ hay

$x^4+2x^3-4x^2-32x+48 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^3+4x^2+4x-24) \ge 0$. Bất đẳng thức này luôn đúng do $x-2 \ge 0$ và

$x^3+4x^2+4x-24=x(x+2)^2-24$

$\ge 2 \cdot 4^2-24=8>0.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=2$ hay $a=b=1$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Một số bạn mắc sai lầm khi cho rằng $a^3+b \ge a+b$. Một số bạn lại ngộ nhận a, b là các số nguyên, từ đó thử từng trường hợp nên lời giải chưa đúng. Xin tuyên dương

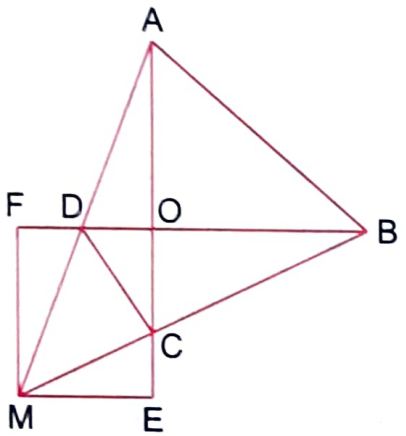
các bạn sau có lời giải đúng: *Cao Ngọc Khánh, Phan Duy Ngọc*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thảo Linh*, 9A3, THCS Kỳ Sơn, TP. Hòa Bình, **Hòa Bình**; *Nguyễn Mạnh Đạt*, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**; *Nguyễn Triệu Minh Thư*, 8A2, THCS Sao Việt, Pleiku, **Gia Lai**.

ĐÀO VĂN NAM

Bài 8(264+265). Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại O và độ dài của chúng bằng nhau. Gọi M là giao điểm của các đường thẳng AD và BC. Chứng minh rằng $MA^2 + MD^2 = MB^2 + MC^2$.

Lời giải. *(Theo lời giải của bạn Nguyễn Mạnh Đạt, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương).*

Kẻ ME vuông góc AC, MF vuông góc với BD (E thuộc AC, F thuộc BD).



Dễ thấy tứ giác MEOF là hình chữ nhật. Từ đó áp dụng định lí Thales và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{FD}{FM} = \frac{DO}{AO} = \frac{FD+DO}{FM+AO} = \frac{FO}{OE+AO} = \frac{FO}{AE}$ và

$\frac{CE}{OE} = \frac{ME}{ME+OB} = \frac{FO}{FO+OB} = \frac{FO}{FB}$.

Suy ra $\frac{FD}{CE} = \frac{FB}{AE} = \frac{FB-FD}{AE-CE} = \frac{DB}{AC} = 1$, suy ra $CE = DF$.

Ta có $MA^2 - MC^2 = (AE^2 + ME^2) - (ME^2 + CE^2)$

$= AE^2 - CE^2 = AC(AC + 2CE)$

Tương tự, $MB^2 - MD^2 = BD(BD + 2DF)$.

Vì $AC = BD$, $CE = DF$ nên ta có

$MA^2 - MC^2 = MB^2 - MD^2$

hay $MA^2 + MD^2 = MB^2 + MC^2$.

Nhận xét. Bài toán không khó nhưng có ít bạn tham gia giải bài. Ngoài bạn *Nguyễn Mạnh Đạt*, các bạn sau cũng có lời giải đúng: *Nguyễn Thảo Linh*, 9A3, THCS Kỳ Sơn, TP. Hòa Bình, **Hòa Bình**; *Nguyễn Quang Hưng*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Tất Han*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Minh Triết, Hoàng Lê Anh Tuấn*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

LƯU CÔNG ĐÔNG

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Nguyễn Mạnh Đạt, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**; *Nguyễn Thảo Linh*, 9A3, THCS Kỳ Sơn, TP. Hòa Bình, **Hòa Bình**; *Võ Hoàng Phúc*, 7A, *Thái Hải Nam, Hoàng Đức Minh*, 7C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Thái Dũng*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Cao Ngọc Khánh, Phan Duy Ngọc*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Phan Thanh Huyền*, 6C, *Nguyễn Thị Hà Bảo Chi*, 7D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; *Nguyễn Thục Quyên*, 6A1, *Lê Thị Thanh Bình, Nguyễn Hữu Minh Quân*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Hữu An Bình*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Triệu Minh Thư*, 8A2, THCS Sao Việt, Pleiku, **Gia Lai**.



THÁCH ĐẤU

TRẬN ĐẤU THỨ HAI TRĂM MƯỜI SÁU

Người thách đấu: Hoàng Ngọc Minh *(Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội).*

Bài toán thách đấu: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a+b)}{b+c}+\frac{b(b+c)}{c+a}+\frac{c(c+a)}{a+b}\ge a+b+c.$$

Kết quả

TRẬN ĐẤU THỨ HAI TRĂM MƯỜI BỐN (TTT2 số 264+265)

Đề bài. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn

$(x^3-xy-1)(y^2-x-y)+(y^3-xy-1)(x^2-x-y)=0.$

Lời giải. Xét các cặp số (x, y) thỏa mãn yêu cầu. Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $(x^2-x-y)(y^2-x-y)=0.$ Không mất tính tổng quát, giả sử $y^2-x-y=0.$ Khi đó, ta có $x=y^2-y.$ Thay vào phương trình đã cho, ta được

$\left[y^3-y(y^2-y)-1\right]\left[(y^2-y)^2-y^2\right]=0$ hay

$y^3(y-1)(y+1)(y-2)=0,$ suy ra

$y\in\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}.$ Từ đó, kết hợp với $x=y^2-y,$ ta tìm được các cặp số (x, y) thỏa mãn trong trường hợp này là (2, −1), (0, 0), (0, 1), (2, 2).

Trường hợp 2: $(x^2-x-y)(y^2-x-y)\ne 0.$ Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$\frac{x^3-xy-1}{x^2-x-y}+\frac{y^3-xy-1}{y^2-x-y}=0, \text{ hay}$$

$$x+y+2=\left(x+1-\frac{x^3-xy-1}{x^2-x-y}\right)+\left(y+1-\frac{y^3-xy-1}{y^2-x-y}\right)$$

Một cách tương đương, ta được

$$x+y+2=(1-x-y)\left(\frac{1}{x^2-x-y}+\frac{1}{y^2-x-y}\right). \quad (1)$$

Nếu $x+y\le -2$ thì vế trái của phương trình trên có giá trị không dương, còn vế phải có giá trị dương, mâu thuẫn. Do đó $x+y>-2.$

Nếu $\left|x^2-x-y\right|\ge 2$ và $\left|y^2-x-y\right|\ge 2,$ ta có

$$|x+y+2|=|1-x-y|\left|\frac{1}{x^2-x-y}+\frac{1}{y^2-x-y}\right|$$

$$\le|1-x-y|\left(\frac{1}{\left|x^2-x-y\right|}+\frac{1}{\left|y^2-x-y\right|}\right)$$

$$\le|1-x-y|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=|x+y-1|.$$

Suy ra $(x+y+2)^2\le(x+y-1)^2$ hay

$x+y\le-\frac{1}{2}.$ Mà $x+y>-2$ nên $x+y=-1.$

Thay $y=-x-1$ vào phương trình (1), ta được

$$1=2\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+2x+2}\right) \text{ hay}$$

$x(x-1)(x+1)(x+2)=4$ (không tồn tại số nguyên x thỏa mãn vì vế trái chia hết cho 3, còn vế phải không chia hết cho 3).

Như vậy, trong hai số $\left|x^2-x-y\right|, \left|y^2-x-y\right|$ có một số nhỏ hơn 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $\left|y^2-x-y\right|<2.$ Thế thì $y^2-x-y=-1$ hoặc $y^2-x-y=1$ tương ứng với $x=y^2-y+1$ hoặc $x=y^2-y-1.$

Trường hợp 2.1: $x=y^2-y+1.$ Thay vào phương trình (1), ta được

$$y^2+3=-y^2\left(\frac{1}{x^2-y^2-1}-1\right), \text{ suy ra}$$

$3(x^2-y^2-1)=-y^2$ hay $3(x-1)(x+1)=2y^2.$

Suy ra $3(y^2-y)(y^2-y+2)=2y^2.$

Nếu $y\ne 0$ thì ta có $3(y-1)(y^2-y+2)=2y.$ Do đó 2y chia hết cho $y-1$ hay 2 chia hết cho $y-1.$

(Xem tiếp trang 22)



Kì này TÌM NĂM SỐ CÒN THIẾU

Tìm năm số còn thiếu của các dãy số sau:

a) 7; 13; 19; 31; ...

b) 19; 28; 44; 60; ...

TẠ THẬP *(TP. Hồ Chí Minh)*

Kết quả DẤU ? THAY BỞI SỐ NÀO? (TTT2 số 264+265)

Xét hình 1, lấy số ở hình tam giác cộng với số ở hình tròn được số ở hình vuông. Bình phương số ở hình vuông được số ở hình chữ nhật.

Hình 2 cũng có quy luật như trên.

Do đó dấu ? ở hình thứ ba điền số 2025.

Con số 2025 khá đặc biệt: $(20+25)^2 = 2025$

Nhận xét. Kì này có rất nhiều bạn tham gia giải bài, các bạn đều chỉ ra đúng quy luật và tìm ra số còn thiếu. Xin trao thưởng cho các bạn sau có phần trình bày sạch đẹp: *Đàm Anh Quân*, 7A1, THCS Nam Từ Liêm, Nam Từ Liêm, **Hà Nội**; *Nguyễn Kim Quang*, 8A2, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Duy Hưng*, 6A4, THCS Tam Dương, Tam Dương, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Ngọc Mai*, 8A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phúc Thọ**; *Nguyễn Ngọc Nhi*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Quỳnh Như*, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

TRẦN THỊ THẢO





Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ...

(Tiếp theo trang 21)

Kết hợp với $y \neq 0$, ta tìm được $y \in \{-1; 2; 3\}$. Tuy nhiên, khi thử lại vào phương trình, ta đều thấy không thỏa mãn. Như vậy $y = 0$, dẫn đến $x = 1$ và $x^2 - x - y = 0$, mâu thuẫn.

Trường hợp 2.2: $x = y^2 - y - 1$. Thay vào phương trình (1), ta được

$$y^2 + 1 = (2 - y^2)\left(\frac{1}{x^2 - y^2 + 1} + 1\right),$$ từ đó

$(2y^2 - 1)(x^2 - y^2 + 1) = 2 - y^2$. Suy ra $2 - y^2$ chia hết cho $2y^2 - 1$, dẫn đến

$2(2 - y^2) + 2y^2 - 1 = 3$ chia hết cho $2y^2 - 1$. Từ đây ta tìm được $y \in \{-1; 0; 1\}$. Một cách tương ứng, ta tìm được (x, y) là một trong các cặp số $(1, -1)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$. Thử lại, ta thấy chỉ có cặp số $(1, -1)$ và $(-1, 1)$ thỏa mãn.

Vậy các cặp số (x, y) cần tìm là $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(2, -1)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 2)$.

Nhận xét. Đây là bài toán khó. Điểm thú vị của bài toán là ở bước dùng bất đẳng thức dấu giá trị tuyệt đối để chặn giá trị của các số. Rất tiếc không có võ sĩ nào giải được bài toán này.

VÕ QUỐC BÁ CẨN

RÙNG GIÀ

● *Kì này*

Con gì?

Con gì bay trong ca dao?
Con gì gọi sáng xôn xao xóm làng?
Con gì báo hiệu xuân sang?
Con gì ăn lá nhả vàng ông tơ?
Con gì đem dọa trẻ thơ?
Con gì hút nước phun mưa, vô hình?
Con gì có trí thông minh
Được làm chúa tể hành tinh muôn đời?
Con gì đêm thắp đèn chơi?
Con gì chở người vượt biển năm châu?
Con gì đuôi giống như đầu?
Con gì ta phải bắc cầu vượt qua?
Con gì chắp cánh thư xa?
Con gì thoăn thoắt giúp bà bổ cau?
Con gì chọc nước nông sâu?
Con gì bay tới vì sao xa vời?
Con gì lấp lánh ánh ngời
Cho em giàu cả đất trời bao la?

NGUYỄN NHƯ MAI *(Hà Nội)*



Kết quả (TTT2 số 264+265)

Đàn gì?

Đàn kanhi bản sắc người Chăm
Nắng miền gió cát rộn ràng hòa thanh
Đàn đá vang vọng rừng xanh,
Phiến đá xếp lại, âm thanh nhịp nhàng.
Đàn môi nhỏ bé ngân vang,
Người Mông, người Thái gửi ngàn yêu thương
Đàn tính nhạc điệu vấn vương,
Người Tày nhắc nhở tình thương đạt đào
Đàn bầu nốt nhạc xuyến xao,
Một dây độc nhất gửi trao tâm tình
Đàn đáy tính được ba dây
Ca trù xưa hát, ngày nay lưu truyền
Đàn nhị cong vút dáng nghiêng,
Hai dây réo rắt, ngân nga tiếng đàn
Đàn nguyệt tựa ánh trăng rằm
Hồn quê tỏa sáng trong từng lời ca
Đàn tranh mười sáu dây vàng,
Gảy tay nhẹ khúc hồn quê dịu dàng
Tiếng đàn hòa nhịp mênh mang,
Ngàn năm giữ trọn tiếng vàng Việt Nam.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau được thưởng: *Nguyễn Thị Ngọc Nhi*, 6B, *Trần Sơn Hà*, 6D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Bá Minh Quân*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Trúc Chi*, 8B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**.

Các bạn sau được khen: *Nguyễn Hữu Minh Quân*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Lê Nguyễn Hoàng Ngân*, *Nguyễn Bảo Hân*, 7A, THCS Bình Thịnh; *Lê Thị Cảnh*, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; *Nguyễn Trần Hoài An*, 6B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**; *Phan Thị Minh Anh*, 8B, *Nguyễn Thị Phương Anh*, 8D, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Thế Phương Anh*, *Nguyễn Khánh Ngọc*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

VUA TẾU



Kì này THE JUNGLE QUEST

NGUYỄN MINH KHANG *(Hà Nội)*

Chào các bạn nhỏ, Vườn Anh tháng 4 lại tới rồi! Các bạn nhỏ sắp bắt đầu một cuộc hành trình thú vị qua vương quốc động vật! Trên đường đi, bạn nhỏ sẽ phải đối mặt với nhiều thử thách bởi những câu đố rất thú vị về những con vật hoang dã và đoán xem con vật đó là gì bằng cách viết đáp án xuống phía dưới nhé!

1. In deserts vast, I roam with pride,
My hump is a treasure, where water's stored inside.
Who am I?

2. With wings outstretched, I glide through the night, Silent and wise, with keen, piercing sight.
Who am I?

3. In oceans deep, I'm an expert of disguise,
With arms like tentacles, I can change shape before your eyes.
Who am I?

4. I slither through grass, silent and sleek,
My venomous bite makes the strongest creatures weak.
Who am I?

5. I live in the tundra, with fur white as snow,
A fearsome predator, where icy winds blow.
Who am I?

6. I flutter on wings of vibrant hues,
From humble beginnings, I change and renew.
Who am I?

Kết quả IDIOMS (TTT2 số 264+265)

1. dogs
2. cow
3. dog
4. horses
5. ants
6. birds
7. bee
8. pigs



Nhận xét. Kì này Chủ Vườn nhận được rất nhiều đáp án gửi đến, hầu như bạn nào cũng làm đúng hết. 5 bạn sau may mắn nhận được quà của Chủ Vườn: *Nguyễn Thị Kiều Trang*, 7A, *Trần Thị Ngọc Trâm*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Phan Thị Minh Anh*, 8B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Nguyễn Hữu Nam*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Việt Hùng*, 7A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.

Xin gửi lời khen ngợi tới các bạn sau: *Trần Quỳnh Chi, Nguyễn Thị Tú Uyên, Lê Nguyễn Hoàng Ngân, Nguyễn Thị Thanh Sang*, 7A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; *Nguyễn Trần Hoài Thu*, 6B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**; *Trần Hải Phong*, 7C, Hồ Văn Khoa, 7G, *Nguyễn Ngọc Hà*, 7D, *Trần Võ Lâm*, 6E, *Nguyễn Mai Phương*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Chủ Vườn



ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút

NGUYỄN TIẾN LÂM *(CLB Toán A1, Hà Nội)*

Bài 1. *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình $x+\sqrt{7+\sqrt{x-2}}=9$.

2) Xét x, y là các số thực thỏa mãn x^3+y, x^2+y^2, $x+y^3$ đều là số nguyên. Chứng minh rằng x, y cũng là các số nguyên.

Bài 2. *(2,0 điểm)*

1) Với mỗi số thực x, gọi [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Kí hiệu $\{x\}=x-[x]$ là phần lẻ của x. Xét số nguyên dương n thỏa mãn $\{n\sqrt{7}\}<\dfrac{5\sqrt{7}}{14n}$, chứng minh rằng $7n^2-3$ là số chính phương.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n(n+2)(n+4)$ có nhiều nhất 15 ước dương.

Bài 3. *(2,0 điểm)*

1) Tìm các số thực k sao cho bất đẳng thức sau $a^3+b^3+c^3+d^3+1\geq k(a+b+c+d)$ thỏa mãn với mọi $a, b, c, d\geq -1$.

2) Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=abc$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=(ab-1)(bc+1)(ca-1)$.



Bài 4. *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn với $AB<AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Kẻ đường kính DG của (I). Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng GF tại N.

a) Chứng minh rằng ba điểm N, E, D thẳng hàng.

b) Đường thẳng AI cắt đường thẳng EF tại H. Kẻ AL vuông góc với IN (L thuộc đoạn thẳng IN). Chứng minh rằng $\widehat{DHN}+\widehat{DAL}=180^\circ$.

c) Đường thẳng DG cắt đường thẳng AN tại K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng FN, cắt đường thẳng EF tại P. Gọi Q là trung điểm của AB. Chứng minh rằng IQ vuông góc với DP.

Bài 5. *(1,0 điểm)* Cho bảng ô vuông 15×15. Mỗi ô vuông được tô đen hoặc trắng. Biết rằng một ô trắng bất kì luôn cùng hàng và cùng cột với ít nhất 15 ô đen. Hỏi có tối đa bao nhiêu ô trắng?

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN CHUYÊN

(Đề đăng trên TTT2 số 266)

TRẦN THANH TRA *(Trường THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, Hải Phòng)*

Bài 1. 1) Gọi 4 lá thư lần lượt là A, B, C, D và 4 phong bì thư có địa chỉ đúng với các lá thư trên lần lượt là 1, 2, 3, 4.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 4! = 24$.

Gọi X là biến cố "có ít nhất một lá thư bỏ đúng địa chỉ".

- Có 1 khả năng cả 4 lá thư đều bỏ đúng địa chỉ, đó là: A1 – B2 – C3 – D4.
- Có 6 khả năng chỉ 2 lá thư bỏ đúng địa chỉ, đó là: A1 – B2 – C4 – D3; A1 – B4 – C3 – D2; A1 – B3 – C2 – D4; A2 – B1 – C3 – D4; A3 – B2 – C1 – D4; A4 – B2 – C3 – D1.
- Có 8 khả năng chỉ 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ, đó là: A1 – B3 – C4 – D2; A1 – B4 – C2 – D3; A3 – B2 – C4 – D1; A4 – B2 – C1 – D3; A2 – B4 – C3 – D1; A4 – B1 – C3 – D2; A2 – B3 – C1 – D4; A3 – B1 – C2 – D4.

Vậy số phần tử của biến cố X là $n(X) = 1 + 6 + 8 = 15$.

Xác suất cần tìm là $P(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{15}{24} \approx 0,63$.

2) Do $BH = 1,5$ (m) nên điểm $B(1,5; y_B)$ thuộc Parabol $y = -\dfrac{3}{2}x^2$, suy ra

$$y_B = -\frac{3}{2} \cdot 1,5^2 = -3,375.$$

Chiều cao từ O đến mặt đất là $|y_B| = |-3,375| \approx 3,38$.

Bài 2. 1) Điều kiện xác định: $\dfrac{1}{2} \le xy \le \sqrt{2}$.

Từ $x(y+1) + y = 3$ ta có $x + y = 3 - xy$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\sqrt{2xy-1} + \sqrt{2 - x^2y^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{2xy-1} - 2\sqrt{2-x^2y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xy - 1 - 2\sqrt{2xy-1} + 1 + 2 - x^2y^2$$

$$-2\sqrt{2-x^2y^2} + 1 + x^2y^2 - 2xy + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2xy-1} - 1)^2 + (\sqrt{2-x^2y^2} - 1)^2 + (xy-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2xy-1} = \sqrt{2-x^2y^2} = xy = 1.$$

Từ đó ta có $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 1)$.

2) Điều kiện xác định: $x \ge 1$.

Phương trình đã cho được viết lại thành

$$x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

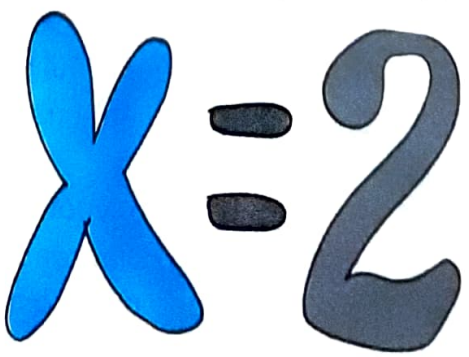
$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1} + 1)(x + \sqrt{x-1} - 3) = 0$$

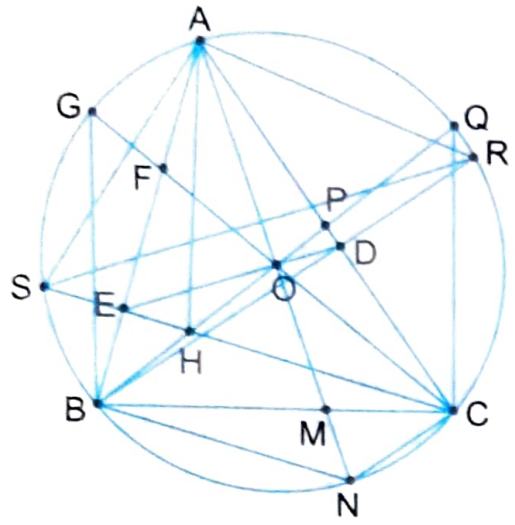
$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ x - 1 = 9 - 6x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.



Bài 3. a) Tứ giác BCDE nội tiếp nên $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, suy ra các tam giác ADE và ABC đồng dạng.



b) Tứ giác BCDE nội tiếp $\widehat{CED} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD).

Các điểm B, C, R, S cùng thuộc đường tròn (O) nên $\widehat{CBD} = \widehat{CSR}$ (cùng chắn cung CR).

Do đó $\widehat{CED} = \widehat{CSR}$, suy ra DE song song với SR.

Cũng do tứ giác BCDE nội tiếp nên $\widehat{DBE} = \widehat{DCE}$ hay $\widehat{ABR} = \widehat{ACS}$, suy ra AR = AS. Kết hợp với OR = OS, suy ra AO là trung trực của SR. Từ đó AN là tia phân giác của góc SAR.

c) Gọi Q, G theo thứ tự là giao điểm của BO, CO với đường tròn (O).

Các tam giác MCN và MAB đồng dạng nên ta có $\frac{MN}{MB} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow \frac{MN}{MA} = \frac{MB \cdot MC}{MA^2}$.

Các tam giác PQC và PAB đồng dạng nên ta có $\frac{PQ}{PA} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow \frac{PQ}{PB} = \frac{PC \cdot PA}{PB^2}$.

Các tam giác FGB và FAC đồng dạng nên ta có $\frac{FG}{FA} = \frac{FB}{FC} \Rightarrow \frac{FG}{FC} = \frac{FA \cdot FB}{FC^2}$. Do đó

$$\frac{MB \cdot MC}{MA^2} + \frac{PC \cdot PA}{PB^2} + \frac{FA \cdot FB}{FC^2} = \frac{MN}{MA} + \frac{PQ}{PB} + \frac{FG}{FC}. \quad (1)$$

Gọi H trực tâm của tam giác ABC thì tứ giác BHCN là hình bình hành nên $\Delta BNC = \Delta BHC$.

Từ đó ta có $\frac{MN}{MA} = \frac{S_{BNC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$.

Với các kết quả tương tự, ta có

$$\frac{MN}{MA} + \frac{PQ}{PB} + \frac{FG}{FC} = \frac{S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB}}{S_{ABC}} = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 4. Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\frac{(a+b-1)^2}{(a+b)^2+1} + \frac{\left(\frac{a+1}{b}-1\right)^2}{\left(\frac{a+1}{b}\right)^2+1} + \frac{\left(\frac{b+1}{a}-1\right)^2}{\left(\frac{b+1}{a}\right)^2+1} \geq \frac{3}{5}.$$

Đặt $x = \frac{a}{a+b+1}$, $y = \frac{b}{a+b+1}$, $z = \frac{1}{a+b+1}$

thì $\frac{b+1}{a} = \frac{1}{x} - 1$, $\frac{a+1}{b} = \frac{1}{y} - 1$, $a + b = \frac{1}{z} - 1$,

$x + y + z = 1$, $0 < x, y, z < 1$.

Ta cần chứng minh

$$\frac{(1-2z)^2}{z^2+(1-z)^2} + \frac{(1-2y)^2}{y^2+(1-y)^2} + \frac{(1-2x)^2}{x^2+(1-x)^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4z^2-4z+1}{2z^2-2z+1} + \frac{4y^2-4y+1}{2y^2-2y+1} + \frac{4x^2-4x+1}{2x^2-2x+1} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2z^2-2z+1} + \frac{1}{2y^2-2y+1} + \frac{1}{2x^2-2x+1} \leq \frac{27}{5}.$$

Ta có $\frac{1}{2x^2-2x+1} \leq \frac{9}{5} + \frac{54}{25}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ với mọi $0 < x < 1$. Thật vậy bất đẳng thức này tương đương với $\frac{18(3x-1)}{25} + \frac{9}{5} - \frac{1}{2x^2-2x+1} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{18(3x-1)}{25} + \frac{18x^2-18x+4}{5(2x^2-2x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(3x-1)}{5} + \frac{(3x-1)(3x-2)}{2x^2-2x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left[\frac{9}{5} + \frac{3x-2}{2x^2-2x+1}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-1)^2(6x+1)}{5(2x^2-2x+1)} \geq 0 \text{ luôn đúng với } 0 < x < 1.$$

Cộng theo vế bất đẳng thức trên với các bất đẳng thức tương tự ta được

$$\frac{1}{2z^2-2z+1} + \frac{1}{2y^2-2y+1} + \frac{1}{2x^2-2x+1} \leq \frac{27}{5}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$, tức $a = b = 1$.

(Xem tiếp trang 28)



COMPA VUI... TÍNH

Kì này CÓ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT KHÔNG?

Bài toán. Biết tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $3\hat{B} + 2\hat{C} = 180^\circ$ (độ dài các cạnh thay đổi). Hỏi biểu thức $\dfrac{b+c}{a}$ có giá trị lớn nhất không?

NGUYỄN TẤN NGỌC *(Trường THCS Bình Định, An Nhơn, Bình Định)*

Kết quả (TTT2 số 264+265)

CÓ TỒN TẠI KHÔNG?

Lời giải. Vì k là số nguyên lớn hơn 1 nên tồn tại số nguyên tố p sao cho k chia hết cho p.

Giả sử tồn tại các số nguyên x và y sao cho A chia hết cho k, suy ra A chia hết cho p.

Theo giả thiết thì $x^{2024} \vdots k$ nên $x^{2024} \vdots p$.

Lại vì p là số nguyên tố nên từ $x^{2024} \vdots p$, suy ra $x \vdots p$.

Tương tự, ta cũng có $y \vdots p$. Do đó $x + y \vdots p$.

Từ đó suy ra $x + y + 1$ không chia hết cho p (do $p \geq 2$ nên 1 không chia hết cho p).

Vậy điều giả sử là sai, tức không tồn tại các số nguyên x và y sao cho A chia hết cho k.

Nhận xét. Một số bạn mắc sai lầm khi cho rằng x^{2024} và y^{2025} đều chia hết cho k thì x và y chia hết cho k. Các bạn sau có lời giải đúng được thưởng kì này: *Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Đặng Thị Phương Thảo*, 8C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.

QUANG ANH

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI...

(Tiếp theo trang 27)

Bài 5. 1) Vì $m > 0$ và p là số nguyên tố nên $2^m p^2 + 1$ là số lẻ, dẫn đến q là số lẻ.

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$2^m p^2 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$.

Vì q là số lẻ nên $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ là số lẻ lớn hơn 1, dẫn đến $2^m p^2$ có ước lẻ lớn hơn 1 nên p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta có $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p$ hoặc $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p^2$.

+ Với $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p$ ta có

$q - 1 = 2^m p > p = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ (vô lí).

+ Với $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p^2$ ta có

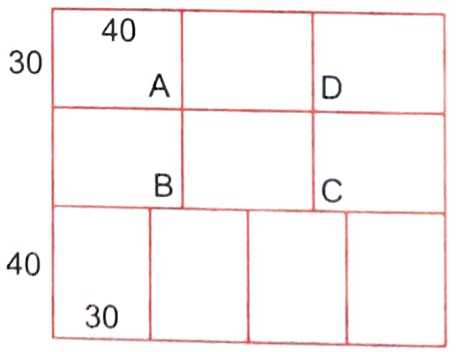
$4q^4 + 4q^3 + q^2 < 4p^2 = 4q^4 + 4q^3 + 4q^2 + 4q + 4$

$< 4q^4 + 4q^3 + 9q^2 + 4q + 4$

hay $(2q^2 + q)^2 < 4p^2 < (2q^2 + q + 2)^2$.

Suy ra $4(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = (2q^2 + q + 1)^2$ hay $q^2 - 2q - 3 = 0$, suy ra $q = 3$ (do q là số nguyên tố). Từ đó tìm được $p = 11$, $m = 1$.

2) Chia mảnh đất hình chữ nhật kích thước $100m \times 120m$ thành 10 hình chữ nhật có kích thước $30m \times 40m$ như hình vẽ sau:



Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất một hình chữ nhật không chứa tâm hình tròn nào trong 9 hình tròn có đường kính 5 m, giả sử đó là hình chữ nhật ABCD. Rõ ràng hoàn toàn có thể xây sân bóng với kích thước $25m \times 35m$ bên trong hình chữ nhật ABCD ở trên.

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Kì 79

CLB1. Given two numbers a and b such that $a^2+b^2=1$ and $a^4+b^4=\frac{1}{2}$. Calculate the value of the following expression $M=a^{10}+b^{10}$.

CLB2. Given non-negative numbers a, b, c and d that can change in values such that $a+b+c+d\le 4$, find the maximum value of the expression $P=2a+3b^2+4c^3+5d^4$.

CLB3. Given positive number x such that $x+\frac{1}{x}$ in an integer, $x^3+\frac{1}{x^3}$ is a prime number. Show that $x^{2025}+\frac{1}{x^{2025}}$ is also a prime number.

CLB4. Given positive integers x and y such that $\frac{x^2+y^2-x}{xy}$ is an integer. Show that x is a square number.

CLB5. Given trapezoid ABCD (AB // CD). Point M is inside ABCD. Draw parallelograms AMDE, BMCF. Show that the length of segment EF does not depend on the location of point M.

ĐỖ ĐỨC THÀNH *(dịch)*

Kết quả Kì 77 (TTT2 số 264+265)

CLB1. Ta có $M=\frac{(a^2-c^2)+(c^2-b^2)}{(c+a)(c+b)}$

$+\frac{(b^2-a^2)+(a^2-c^2)}{(a+b)(a+c)}+\frac{(c^2-b^2)+(b^2-a^2)}{(b+c)(b+a)}$

$=\frac{a-c}{c+b}+\frac{c-b}{c+a}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{a-c}{a+b}+\frac{c-b}{b+a}+\frac{b-a}{b+c}$

$=2\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)-3=2\cdot 2025-3=4047.$

CLB 2. Từ $2^x-2^y=1984$ ta có $x>y$ nên $x-y\in\mathbb{N}^*$. Khi đó $2^y(2^{x-y}-1)=2^6\cdot 31$.

Do $2^{x-y}-1$ là số lẻ nên $2^y=2^6$, $2^{x-y}-1=31$, suy ra $x=11$, $y=6$.

CLB 3. Ta có $P=\frac{1}{(a^2+b^2)+(b^2+1)+2}$

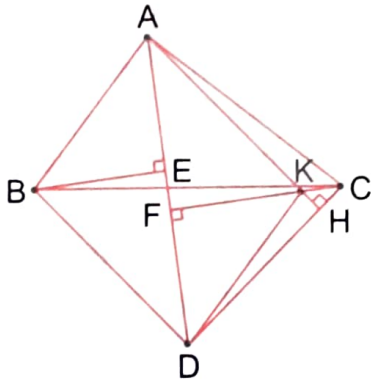
$+\frac{1}{(b^2+c^2)+(c^2+1)+2}+\frac{1}{(c^2+a^2)+(a^2+1)+2}$

$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}\right)=\frac{1}{2}.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$, đạt được tại $a=b=c=1$.

CLB 4. Giả sử $x\ge y\ge z\ge t$, khi đó $|x-y|+|y-z|+|z-t|+|t-x|=2(x-t)$ là số chẵn. Do đó không tồn tại các số nguyên x, y, z, t để $|x-y|+|y-z|+|z-t|+|t-x|=2025$.

CLB 5.



Vẽ AH vuông góc với CD tại H. Gọi K là giao điểm của AH và CF thì K là trực tâm của tam giác ACD nên DK ⊥ AC, dẫn đến DK // AB. Kết hợp với AK // BD thì tứ giác ABDK là hình bình hành, suy ra AB = DK.

Từ đó ΔAEB = ΔDFK (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra AE = DF, dẫn đến AF = DE.

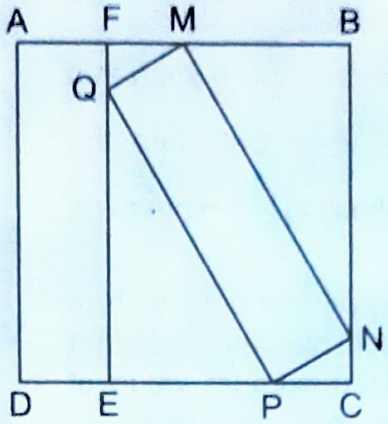
Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt, được thưởng kì này: *Nguyễn Thế Minh*, *Vũ Cường Thịnh*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; *Lê Nguyễn Ngọc Diệp*, 8A1, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**.

NGUYỄN QUANG TUẤN



Các bạn hãy giải bài toán sau bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé! Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

Problem 58(267). In the diagram, ABCD is a square with side length of 1. M and F are points on AB; P and E are points on CD; Q and N are points on EF and BC respectively. ADEF and MNPQ are rectangles where AF = MQ and AD = MN. Find the length AF.



VÕ QUỐC BÁ CẨN *(Trường Archimedes Academy, Cầu Giấy, Hà Nội)*

Kết quả **Problem 56(264+265).**

We have $p + q^2 = 4r^2$

$\Leftrightarrow p = (2r - q)(2r + q)$.

Because p, q, r are prime numbers and $2r - q < 2r + q \Rightarrow 2r - q = 1, 2r + q = p$

$\Rightarrow q = 2r - 1, p = 4r - 1$.

Case 1: $r = 3 \Rightarrow q = 5, p = 11$ (satisfy).

Case 2: $r \neq 3$.

If $r \equiv 1 \pmod 3$ then $p = 4r - 1 \equiv 0 \pmod 3$ and $p = 4r - 1 \geq 4 \cdot 2 - 1 = 7 > 3$ lead to p is composite number.

If $r \equiv 2 \pmod 3$ then $q = 2r - 1 \equiv 0 \pmod 3$ and q is prime numbers, lead to $q = 3$

$\Rightarrow r = 2, p = 7$.

Answer: (p, q, r) = (11, 5, 3), (7, 3, 2).

Nhận xét. Chúc mừng bạn sau có lời giải đúng, được thưởng kì này: *Trần Anh Đức*, *Triệu Anh Trí*, 8A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phúc Thọ**; *Lê Thị Hà An*, *Nguyễn Hà Vy*, 6A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Nguyễn Đức Nhân*, 7C, *Nguyễn Khánh Ngọc*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

ĐỖ ĐỨC THÀNH

THÔNG BÁO

Theo kế hoạch, Olympic Văn - Toán Tuổi thơ toàn quốc sẽ được NXBGD Việt Nam tổ chức thường niên. Năm 2025 dự kiến tổ chức tại thành phố Vinh, tỉnh Nghệ An vào các ngày 13 - 15 tháng 6.

Tuy nhiên trong thời gian tới, do các địa phương đang tập trung thực hiện Kết luận số 127 - KL/TW ngày 28/02/2024 của Bộ Chính trị, Ban Bí thư về triển khai sắp xếp lại tổ chức của hệ thống chính trị và các đơn vị hành chính nên không có điều kiện thành lập đội tuyển tham gia Olympic Văn - Toán Tuổi thơ toàn quốc năm 2025.

Vì vậy, Sở GD&ĐT Nghệ An (đơn vị đăng cai) và NXBGD Việt Nam quyết định tạm dừng tổ chức Olympic Văn - Toán Tuổi thơ toàn quốc năm 2025.

Thời hạn và địa điểm tổ chức Olympic Văn - Toán Tuổi thơ toàn quốc năm 2026 sẽ được thông báo sau.

Trân trọng!

Thì thầm... Thì thầm thôi...

Tuổi hồng... xin cứ tuổi hồng
Chuyện gì quá sớm... xin không trả lời

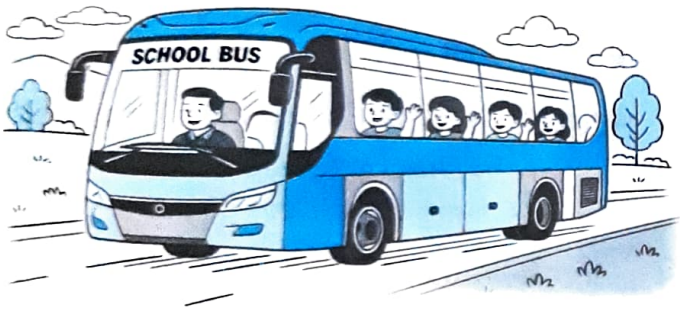


Hỏi: Dịp này, trường em tổ chức các đợt ngoại khóa ngoài trường. Các bạn động viên nhau tham gia, nhưng một số bạn e ngại mất thời gian cho việc ôn thi cuối cấp. Anh Phó có ý kiến về việc này như thế nào ạ?

PHAN B. N
(THCS Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột, Đắk Lắk)

Đáp:

Phương châm "Học", "Đọc" và "Đi"
"Đi" là trải nghiệm, nhớ ghi vào lòng.
Ôn thi - ngoại khóa song song
Lịch trình hợp lí - thành công đón chờ.



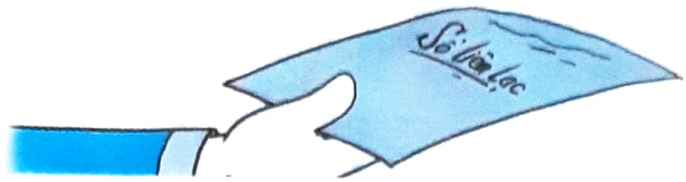
Hỏi: Bạn em thường được bố mẹ thưởng tiền sau khi làm việc nhà. Có tiền bạn ấy thường mua đồ ăn vặt, sắm đồ dùng một cách phung phí. Theo anh Phó, bố mẹ có nên cho tiền khi con cái làm việc nhà không ạ?

ĐẶNG L. M
(THCS Lý Tự Trọng, TP. Hạ Long, Quảng Ninh)

Đáp:

Hàng ngày phụ việc gia đình
Việc làm thiết thực, thường tình đó em.
Mẹ cha có thưởng tiền thêm
Góp gom, cân nhắc khi đem chi dùng.





Hỏi: Em có người bạn, một vài lần thầy giáo gửi Sổ liên lạc về nhà. Khi đó, bạn ý không đưa cho bố mẹ đọc và kí xác nhận mà tự kí giả chữ kí của bố. Điều đó là không đúng, vì thế, em định báo với thầy chủ nhiệm, theo anh có nên không ạ?

BÙI A. Q
(THCS Hàm Rồng, TP. Thanh Hóa, Thanh Hóa)

Đáp:

Giả danh chữ kí mẹ cha
Việc làm như thế ắt là chẳng hay.
Hãy khoan nói chuyện với thầy
Khuyên sao bạn tự giãi bày vẫn hơn.



Hỏi: Lớp em có bạn rất hay
Học hành xuất sắc, mỗi ngày khoe khoang
Mong anh tư vấn nhẹ nhàng
Để cho bạn bớt vênh vang với người.

ĐỖ G. A
(THCS Lê Thánh Tôn, Hải Châu, Đà Nẵng)

Đáp:

Học hành xuất sắc là hay
Tự khen thì phải tỏ bày khéo, khôn.
Đừng như ai đó "sồn sồn"
Khoe khoang thô vụng, đổ dồn dại ra.

ANH PHÓ GỠ



THI GIẢI TOÁN QUA THƯ

CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(267). Cho x là số thực thoả mãn $x^2 - x$ là một số nguyên khác 1 và $x^3 - 2x$ cũng là một số nguyên. Chứng minh rằng x là một số nguyên.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(Trường THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài 2(267). Cho các số nguyên dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a^2bc = x^2yz$. Hỏi $a^{2025}(b^{2025} + c^{2025}) + x^{2025}(y^{2025} + z^{2025})$ là số nguyên tố hay hợp số?

NGUYỄN NGỌC HÙNG
(Trường THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài 3(267). Hai người chơi một trò chơi như sau: Người chơi thứ nhất chọn một số bất kì trong bảy số sau: $-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$. Sau đó, người chơi thứ nhất thêm vào số đó một trong bảy số trên. Tiếp theo, người chơi thứ hai thêm vào tổng thu được một trong bảy số đã cho. Biết rằng ai lần đầu chọn số âm thì lần sau cũng phải chọn số âm, ai lần đầu chọn số dương thì lần sau cũng phải chọn số dương. Người nào tạo tổng là -30 hoặc 30 là người thắng cuộc. Hãy chứng tỏ rằng người chơi thứ hai luôn có cách thắng cuộc.

ĐINH KHÁNH *(Hà Nội)*

Bài 4(267). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 108^\circ$. Lấy điểm M nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBC} = 18^\circ$, $\widehat{MCB} = 12^\circ$. Tính số đo của góc MAB.

HUỲNH THANH TÂM *(An Nhơn, Bình Định)*

CÁC LỚP THCS

Bài 5(267). Điền vào mỗi ô vuông của bảng 3×3 một trong ba số $-1, 0, 1$. Tính xác suất để tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo của bảng đều bằng 0.

NGUYỄN TIẾN LÂM
(CLB Toán A1, Hà Nội)

Bài 6(267). Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2 = abc$, chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a^2 - a + 1}{3}} + \sqrt{\frac{b^2 - b + 1}{3}} + \sqrt{\frac{c^2 - c + 1}{3}} \le \frac{2}{3}(a + b + c) - 1$.

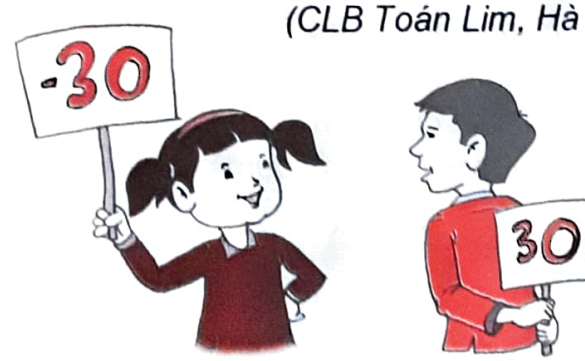
HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG *(Trường THCS Trần Duy Hưng, Cầu Giấy, Hà Nội)*

Bài 7(267). Chứng minh rằng số $50^{30}(a^2 + b^2)^4(c^2 + d^2)^{2025}$ là tổng của hai số chính phương với a, b, c, d là số tự nhiên.

NGUYỄN VIẾT CHƯƠNG *(Hà Tĩnh)*

Bài 8(267). Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Giả sử $BC(CA + AB) = AB^2 + AC^2$. Chứng minh rằng OI, EF, BC đồng quy.

NGUYỄN DUY KHƯƠNG
(CLB Toán Lim, Hà Nội)



BẬT MÍ "BẢO BỐI"

Giúp Viết Chữ Đẹp



Mã: 2282 - Sản phẩm thi chung kết VCĐ tại Văn miếu Quốc Tử Giám



Mã: 2261

Mã: 2289



Ngòi mài nét hoa 0.5mm công nghệ mới, dễ dàng tạo nét thanh nét đậm khi viết.



HONG HA
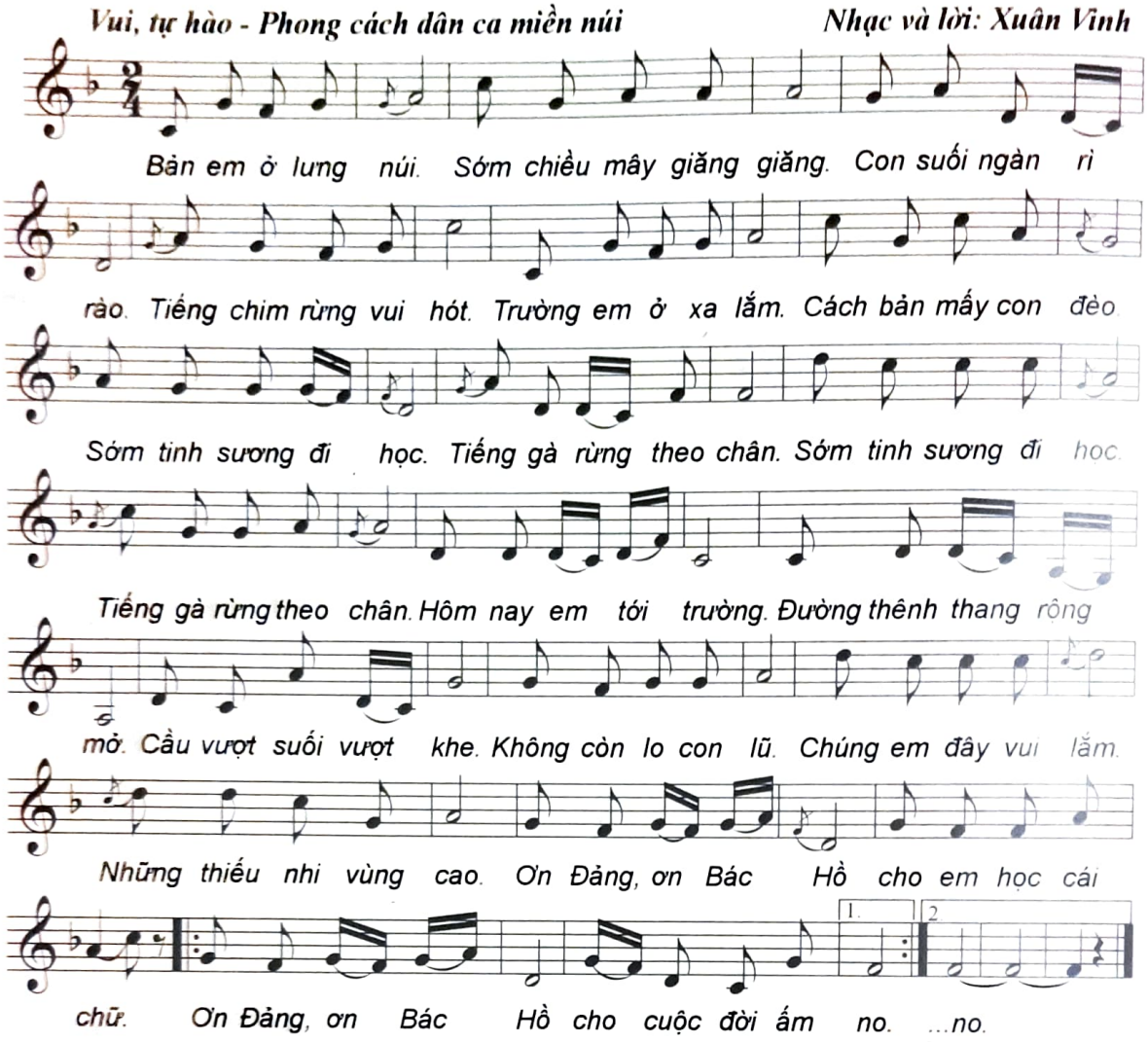
TRỤ SỞ CHÍNH
Cơ sở I: 25 Lý Thường Kiệt, Hoàn Kiếm, HN
Cơ sở II: 672 Ngô Gia Tự, Long Biên, HN
Tel: 024.36523330 * Fax: 024.36524157
Email: congty@vpphongha.com.vn
Website: www.vpphonghaonline.com.vn

CHI NHÁNH ĐÀ NẴNG
23-25 Đường Yên Thế,
P. Hòa An, Q. Cẩm Lệ.
Điện thoại: 0236 3649 046
Fax: 0236 3649 046

CHI NHÁNH TP.HCM
Lô 10, Đường số 4, KCN Tân Tạo
P. Tân Tạo A, Q. Bình Tân.
Điện thoại: 028 3756 2158
Fax: 028.3756 2157

Thiếu nhi vùng cao ơn Đảng, Bác Hồ

Vui, tự hào - Phong cách dân ca miền núi *Nhạc và lời: Xuân Vinh*





Nhạc sĩ Xuân Vinh (tên khai sinh là Nguyễn Thế Vinh), hội viên Hội Nhạc sĩ Việt Nam, hội viên Hội Âm nhạc Hà Nội, Chủ nhiệm Trung tâm Nghệ thuật truyền thống Mường - Vân hoà, Chủ nhiệm Câu lạc bộ Nghệ thuật văn hoá truyền thống dân tộc huyện Ba Vì. Nhạc sĩ hiện sống và làm việc ở Ba Vì, TP. Hà Nội. Ông tham gia các hoạt động âm nhạc của Trung ương và địa phương, sáng tác nhiều bài hát ở các thể loại, đề tài khác nhau,...

Thiếu nhi vùng cao ơn Đảng, Bác Hồ là một sáng tác mới của nhạc sĩ Xuân Vinh. Với giai điệu vui tươi, tự hào, bài hát đã thể hiện tình cảm, lòng biết ơn của các em thiếu nhi với Đảng, Bác Hồ kính yêu. Xin trân trọng giới thiệu cùng các em.

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi. **Mã số:** 8BTT267M25.
Giấy phép xuất bản: số 534/GP-BTTTT, cấp ngày 19/11/2020 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In tại: Xí nghiệp Bản đồ 1, công ty TNHH MTV Trắc địa Bản đồ, P. Phúc Đồng, Q. Long Biên, TP. Hà Nội.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2025.

Giá: 14 000 đồng