NĂM THỨ
HAI MƯƠI MỐT
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

1/9
209 + 210
NĂM HỌC 2020 - 2021

TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO



HONG HA®

QUỸ HỌC BỔNG

CHẮP CÁNH ƯỚC MƠ

Cuộc thi "Cùng Hồng Hà chinh phục ước mơ" với Quỹ học bổng Chắp cánh ước mơ là cuộc thi dành cho các bạn học sinh tuổi teen do Công ty Cổ phần Văn phòng phẩm Hồng Hà tổ chức. Thông qua chương trình này, các bạn sẽ có cơ hội để bày tỏ ước mơ, chia sẻ những hình ảnh của tuổi thanh xuân cùng với vở Hồng Hà và nhận được những học bổng giá trị ươm mầm cho hoài bão và đam mê của mình sớm trở thành hiện thực.



ĐỐI TƯỢNG THAM GIA

Các bạn học sinh THCS và THPT trên toàn quốc

THỜI GIAN

Từ nay đến 10/10/2020

TỔNG GIÁ TRỊ GIẢI THƯỞNG

230 triệu đồng



SĂN HỌC BỔNG SỐNG TRỌN ƯỚC MƠ



160 GIẢI TUẦN

Mỗi giải là 1 voucher trị giá 500.000đ mua hàng trên website vpphonghaonline.com.vn

10 GIẢI ĐẶC BIỆT

Mỗi giải gồm 5.000.000đ tiền mặt và 01 học bổng khóa học tiếng Anh online trị giá đến 10.000.000đ

CÁCH THỨC THAM GIA

Vòng loại:

Diễn ra làm 2 đợt:

Đợt 1: *Từ 17/7 - 31/8/2020 -* ***Đợt 2:*** *Từ 01/9 - 10/10/2020*

Cách thức nộp bài như sau:

Bước 01: *Chụp ảnh selfie với vở kẻ ngang ép keo gáy vuông Hồng Hà theo chất riêng của mình*

Bước 02: *Viết về ước mơ của bản thân đang ấp ủ trên trang vở Hồng Hà*

Bước 03: *Đăng tải ảnh vào địa chỉ* ***https://hocvienuocmoteen.com.vn/hoc-bong***

Bước 04: *Kêu gọi bạn bè vào fanpage Văn Phòng Phẩm Hồng Hà like và share bài thi của mình.*

Vòng chung kết

Kết thúc mỗi đợt của vòng loại, BTC sẽ lựa chọn ra 20 thí sinh xuất sắc nhất vào vòng chung kết. Các thí sinh sẽ được trình bày về ước mơ của mình và có cơ hội nhận được những giải thưởng có giá trị, ý nghĩa, chắp cánh cho những ước mơ đó sớm thành sự thực.

cùng HỒNG HÀ CHINH PHỤC ƯỚC MƠ

Tham khảo thêm tại: hocvienuocmoteen.com.vn

vpphongha.tieuhoc **024 3652 4250**

Toán tuổi thơ 2 TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
TS. TRẦN QUANG VINH
Phó Tổng biên tập phụ trách tạp chí:
TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

ỦY VIÊN

NGND. VŨ HỮU BÌNH
TS. NGUYỄN MINH ĐỨC
ThS. ĐẶNG HIỆP GIANG
TS. NGUYỄN MINH HÀ
ThS. NGUYỄN NGỌC HÂN
PGS. TS. VŨ ĐÌNH HÒA
ThS. TRẦN QUANG HÙNG
TS. LÊ THỐNG NHẤT
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG
ThS. PHẠM ĐỨC TÀI
NGND. PGS. TS. TÔN THÂN
PGS. TS. LÊ ANH VINH

TÒA SOẠN

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702
Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com
Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com
Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Trị sự - Phát hành:
TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG,
NGUYỄN THỊ HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH
Biên tập - Chế bản:
NGUYỄN QUANG TUẤN, VŨ THỊ MAI, ĐỖ TRUNG KIÊN
Mĩ thuật: **TRẦN NGỌC TRƯỜNG**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY

Trang thơ 3
Tâm sự tuổi hai mươi
Toán Tuổi thơ

Giải toán học Anh 7
Problem 15(209+210)
Đỗ Đức Thành

Rừng cười 8
Đường gì?
Vua Tếu

Toán quanh ta 9
Một số bài toán về tờ tiền Việt Nam đồng
Thái Nhật Phượng

Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc 11
Tin mật báo tại sao lại đúng?
Trần Phương Nam

Compa vui... tính 13
Bạn có đồng ý với Hà không?
Nguyễn Hạ Hà Uyên

Học ra sao? 14
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM để giải hệ phương trình
Hoàng Lê Nhật Tùng

Dành cho học sinh lớp 6 và 7 18
Tập hợp Q các số hữu tỉ
Tạ Thập

Thách đấu 21
Trận đấu thứ một trăm bảy mươi ba
Nguyễn Minh Hà

Chữ & chữ số 22
Kì 52
TTT

Nhìn ra thế giới 23
Đề thi SMO vòng 2 năm 2010 và 2011
Võ Quốc Bá Cẩn
Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 quận Ba Đình, TP. Hà Nội 25
Đề kiểm tra chọn đội tuyển Toán 9 trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam 26
Hướng dẫn giải đề thi thử vào 10 trường THPT chuyên Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội 27
Dành cho các nhà toán học nhỏ 29
Về một tính chất của số chính phương
Nguyễn Tiến Lâm
Kết quả Thi giải toán qua thư 32
Đo trí thông minh 37
Tìm số thích hợp
Mai Văn Năm
Giải toán thế nào?
Một số phương pháp tính giá trị biểu thức có điều kiện 38
Trần Thị Thái Hòa
Sử dụng định lí Bê-zu vào bài toán liên quan đến nghiệm của đa thức 40
Ngô Thượng Thủy



Sai ở đâu? Sửa cho đúng 43
Cực trị đã đúng chưa?
Cao Ngọc Toản
Dạy - Học chương trình giáo dục phổ thông mới - Chương trình 2018
Những yêu cầu cần đạt ở lớp 9 44
Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ 48
Kì 36
Nguyễn Đức Trường
Vào thăm Vườn Anh 49
Find the key to solve the riddle
Lại Hằng Phượng
Vượt vũ môn 50
Sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải một số bài toán hình học tổ hợp
Bùi Minh Trung



Lịch sử Toán học 54
Phương pháp vị trí sai kép giải một lớp hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn trong sách toán Hán Nôm
Tạ Duy Phượng, Phạm Vũ Lộc, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết
Đề thi các nước 58
Australian Mathematics Competition 2019
Intermediate Division
Đỗ Trung Kiên
Thì thầm... Thì thầm thôi... 62
Thi giải toán qua thư 63
Minh họa bìa 1: Nguyễn Thị Ngọc Thủy
(Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông)

Thơ

TÂM SỰ TUỔI HAI MƯƠI

Chào các bạn!

Năm nay tớ vừa tròn 20 tuổi, lứa tuổi ngập tràn sức thanh xuân. Tớ rất vui vì đã kết bạn được rất nhiều bạn đọc trong cả nước. Mới 20 mùa xuân nhưng tớ đã trưởng thành và chững chạc bởi có sự chăm chút của các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh và các bạn học sinh. Tớ muốn cảm ơn mọi người nhiều lắm! Nhân dịp sinh nhật, tớ xin tặng các bạn một bài thơ về tớ. Các bạn cùng vui với tớ nhé!



Tớ tròn hai mươi tuổi
Bao phấn khởi vui mừng
Lời chúc tớ tưng bừng
Cảm ơn từng bạn một

Muốn lan tỏa cả nước
Thỏa mơ ước giúp trò
Câu đố cả một kho
IQ đo trí tuệ

Ô chữ sao vui thế!
Com Pa sẽ hết lòng
Toán vui cứ theo dòng
Sang nhà Văn liên tiếp

Vua Tếu không biết mệt
Nhiều câu thiệt là hay
Tí Tồ vẫn hăng say
Chờ sửa ngay mọi lỗi

Vườn Tiếng Anh sôi nổi
Bao nhiêu lối vào thăm
Cách giải toán càng tăng
Cứ học chăm là tiến

Giấc mơ luôn xuất hiện
Những câu chuyện tuyệt vời
Hãy bên tớ không rời
Suốt một thời tiểu học

Xin gửi các bạn đọc
Lời chào rất là thân
Chúc các bạn xa gần
Một trăm phần may mắn!

TOÁN TUỔI THƠ















TƯƠI MỚI TUỔI HAI MƯƠI

Cách đây vừa tròn 20 năm, vào ngày 25 tháng 10, Toán Tuổi thơ được làm lễ ra mắt tại trường tiểu học Kim Liên, quận Đống Đa, Hà Nội. Từ ngày ra đời đến nay, Toán Tuổi thơ luôn là người bạn gắn bó thân thiết với các thầy cô giáo, các em học sinh và bạn đọc trong cả nước. Có biết bao lớp học trò đón đọc Toán Tuổi thơ từ những số tạp chí đầu tiên nay đã trưởng thành, có biết bao thầy cô giáo say mê Toán Tuổi thơ đã trở thành những nhà giáo tích lũy được nhiều kinh nghiệm để dìu dắt bao thế hệ học trò đến với những điều lí thú của môn Toán. Khá nhiều phụ huynh đã coi Toán Tuổi thơ như một tư liệu quý vừa trở về với kí ức của mình, vừa hiểu thêm về một môn học quan trọng của con cháu.

Có được tình cảm yêu thương, gắn bó ấy của mọi người bởi tạp chí Toán Tuổi thơ là một sân chơi trí tuệ, một kho tàng những bài toán hay luôn bổ sung và đổi mới. Nội dung của tạp chí được các thầy cô và những chuyên gia giáo dục khai thác từ những tư liệu trong ngoài nước hoặc chính bằng kinh nghiệm giảng dạy của mình cùng xây dựng nên. Chính vì thế mà Toán Tuổi thơ luôn gần gũi, thiết thực và rất thú vị.

Kiến thức Toán học không chỉ thể hiện ở các đề toán mà còn được khéo léo đưa vào trong những câu đố vui, những câu chuyện hấp dẫn, những vần thơ, những giấc mơ rất phù hợp với lứa tuổi. Mỗi số tạp chí có riêng các chuyên mục đăng các bài viết về phương pháp giải từng dạng toán, những chuyên đề phù hợp với chương trình giảng dạy trong nhà trường với mong muốn những bài viết đó là tài liệu quý trong sinh hoạt chuyên môn cũng như trong dạy và học. Đặc biệt, các chuyên mục "Nhìn ra thế giới", "Giải Toán học Anh", "Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ" đã có những đề toán hay bằng tiếng Anh giúp các thầy cô giáo và các em học sinh tiếp cận, làm quen để có hành trang tham dự các kì thi Toán quốc tế cho cấp học của mình.

Ngoài những kiến thức toán, tạp chí còn có nhiều chuyên mục với tên gọi thân thương hóm hỉnh: "Sang chơi nhà Văn", "Không chỉ là Văn", "Thăm vườn Tiếng Anh", "Rừng Cười", "Compa vui tính", "Truyện tranh dài kì: Tại sao lại thế?", "Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc",... Nội dung các chuyên mục này giúp các em học sinh có thêm kiến thức hiểu biết về cuộc sống và học tốt các môn học khác. Để phục vụ nhiều đối tượng bạn đọc, ngoài các chuyên mục mà các bạn học sinh lớp 4-5 (Toán Tuổi thơ 1)

và lớp 8-9 (Toán Tuổi thơ 2) giải được, Toán Tuổi thơ 1 đã dành riêng 2 trang cho lớp 1 và 2 với những câu đố hấp dẫn khi thì của Đô-Rê-Mon, Nhất Mập, Vinh Kều, khi thì của Harry Potter, Dấu Cộng béo, Dấu Chia gầy và gần đây là câu đố của bác Compa, anh Thước kẻ, chị Bút chì; 2 trang bài viết về phương pháp giải toán và 1 bài Thi giải toán qua thư dành cho lớp 3. Toán Tuổi thơ 2 đăng xen kẽ các chuyên đề dành cho lớp 6-7 và mỗi kì có 3 bài "Thi giải toán qua thư" dành cho lớp 6 và 7. Vua Tếu của "Rừng Cười" cũng mang đến cho bạn đọc biết bao câu đố bằng thơ thật là hấp dẫn. Vì thế nội dung của Toán Tuổi thơ đã trải khắp cho mọi đối tượng ở mỗi bậc học.

Sự kì vọng của xã hội càng cao, trách nhiệm của những người làm Toán Tuổi thơ càng nặng nề. Để duy trì sức hấp dẫn của tạp chí đối với bạn đọc, việc đổi mới là một yêu cầu thường xuyên không ngừng nghỉ đối với cán bộ nhân viên tạp chí và các thầy cô trong Hội đồng biên tập.

Trong thời gian hơn 20 năm đó, Tạp chí đã liên tục thay đổi, bổ sung các chuyên mục mới, làm mới các chuyên mục cũ để đáp ứng các nhu cầu đổi mới trong nhà trường, của xã hội cũng như cập nhật các thông tin về dạy học môn Toán của các nước có nền giáo dục phát triển trong khu vực và trên thế giới.

Cùng với việc hàng tháng xuất bản 2 số tạp chí Toán Tuổi thơ dành riêng cho từng bậc học và các cuốn sách tham khảo về môn Toán, Tạp chí còn tổ chức rất nhiều hoạt động xã hội để tạo môi trường gần gũi và hiểu hơn độc giả của mình như Giao lưu Toán Tuổi thơ hàng năm, Câu lạc bộ "Các nhà Toán học nhỏ", thi "Tú tài Toán Tuổi thơ" và nhiều hội thảo, hội nghị khác.

Những kì "Olympic Toán Tuổi thơ toàn quốc", "Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc" được tổ chức với sự tham gia của hàng ngàn bạn học sinh ở cấp Tiểu học và THCS đến từ 54 tỉnh, thành trên cả nước. Cuộc thi "Giải toán qua thư" theo năm học, Cuộc thi "Vui hè", Cuộc thi "Dành cho nữ sinh", ... đã thu hút biết bao bạn đọc nhỏ tuổi. Các hoạt động đó đã gây hiệu ứng xã hội tốt và trở thành thương hiệu của Tạp chí Toán Tuổi thơ. Bên cạnh đó, tạp chí Toán Tuổi thơ cũng phối hợp với Phòng Thiếu nhi, Phòng Nhà trường, Ban Khoa giáo, Đài Truyền hình Việt Nam, Đài Truyền hình Kĩ thuật số, Hội Toán học Hà Nội tổ chức nhiều chương trình và các cuộc thi lí thú, bổ ích như: "Câu lạc bộ Toán", "Tuổi thơ khám phá" trên VTV, "Thần đồng đất Việt" trên VTC, Phát hiện Trí tuệ Việt, Cuộc thi Toán Singapore mở rộng, thi "Học sinh giỏi Hà Nội mở rộng", ...

Đặc biệt, để đáp ứng nhu cầu của nhà trường với chương trình giáo dục phổ thông mới, tạp chí đã thường xuyên có những bài viết phân tích, giới thiệu về chương trình môn Toán và sách giáo khoa mới.

Sự năng động, nhiệt huyết của những người làm Toán Tuổi thơ đã được bạn đọc

và lãnh đạo của các cấp, ngành ghi nhận. Tạp chí đón nhận Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo các năm 2003, 2006, 2009, 2010, 2012, 2014, 2015, 2019. Năm 2006, Tạp chí vinh dự đón nhận Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ. Năm 2007, Phó Chủ tịch nước đã gửi thư Chúc mừng đến Hội đồng Biên tập và Tòa soạn Toán Tuổi thơ. Năm 2008, Tổng Bí thư Trung ương Đảng đã gặp gỡ cán bộ, nhân viên Tạp chí. Năm 2011, Toán Tuổi thơ đã vinh dự được nhà nước trao thưởng Huân chương Lao động Hạng Ba. Từ năm 2005 đến nay, Tạp chí liên tục đạt danh hiệu tập thể lao động xuất sắc.

Nhìn lại những chặng đường đã qua, có thể thấy Toán Tuổi thơ đã khẳng định được một vị trí có ý nghĩa không nhỏ trong hoạt động dạy và học toán của giáo viên, học sinh trên cả nước. 20 năm, 450 số tạp chí xuất bản với hàng triệu bản phát hành, Toán Tuổi thơ cũng có thể sánh vai những tờ báo dành cho lứa tuổi nhỏ trên cả nước.

Tuổi 20 - một dấu mốc có ý nghĩa đặc biệt để thấy rõ nét hơn sự trưởng thành của Toán Tuổi thơ. Chính các cộng tác viên, các thầy cô, các phụ huynh và các em học sinh của nhiều thế hệ là những người nuôi dưỡng tạp chí liên tục phát triển qua hai thập kỉ.

Chúng tôi, những cán bộ nhân viên tòa soạn tạp chí Toán Tuổi thơ, xin được bày tỏ lòng tri ân sâu sắc nhất tới các cấp lãnh đạo Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, các thế hệ lãnh đạo tạp chí, các thành viên trong Hội đồng biên tập, các tác giả, cộng tác viên, các nhà tài trợ, các bạn đọc đã nhiệt tình ủng hộ, thủy chung gắn bó, chia sẻ và đồng hành với Toán Tuổi thơ suốt 20 năm qua.

Tròn đôi mươi, lứa tuổi đẹp nhất, trẻ trung, tươi mới và ngập tràn sức thanh xuân. Tạp chí Toán Tuổi thơ sẽ luôn cố gắng phấn đấu hết mình để xứng đáng với niềm tin của các cấp lãnh đạo và bạn đọc trong cả nước.

TTT





Problem 15(209+210). x, y and z are distinct real numbers such that $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$. Find the value of $x^2y^2z^2$.

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH

(Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội)

Các bạn hãy giải bài toán trên bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé! Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

Kết quả Problem 13(207).

Let a = n + 1, b = n and c = n − 1 be the consecutive natural numbers.

Also given a > b > c.

If possible, we assume that $a^3 = b^3 + c^3$

Therefore, $(n + 1)^3 = n^3 + (n − 1)^3$

Hence, $2 = n^2(n − 6)$

The RHS is positive if and only if n > 6.

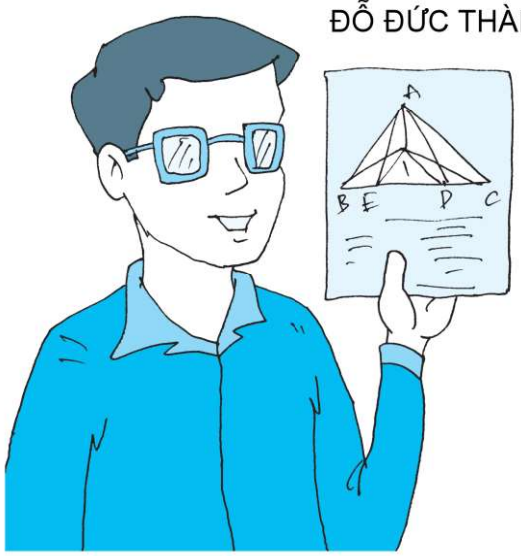
In that case $n^2(n − 6) > 36$

This cannot be so because $2 = n^2(n − 6)$

Thus, our assumption is wrong.

HONG HA® **Nhận xét.** Chúc mừng các bạn sau có lời giải đúng: *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Phạm Thùy Trâm*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

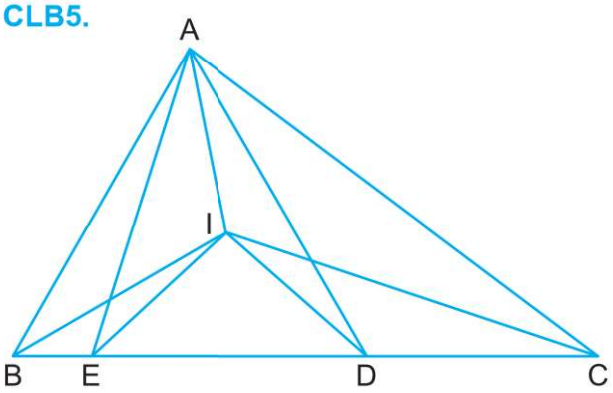
ĐỖ ĐỨC THÀNH



Kết quả Kì 34

(Tiếp theo trang 48)

CLB5.



Tam giác ABD cân tại B (vì BD = BA) nên BI là phân giác cũng là trung trực của tam giác ABD. Suy ra ID = IA.

Tương tự ta cũng có IE = IA.

Từ đó suy ra ID = IE hay tam giác IDE cân tại I.

HONG HA® **Nhận xét.** Các bạn có nhiều cách giải hay, trình bày sạch đẹp được thưởng kì này là: *Ngô Thị An Bình*, 8E, *Nguyễn Thanh Tuấn*, *Nguyễn Thị Chi Mai*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; *Trần Đức Huy*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Các bạn sau có lời giải tốt được khen: *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Võ Trọng Khải*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**, *Nguyễn Văn Khải*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

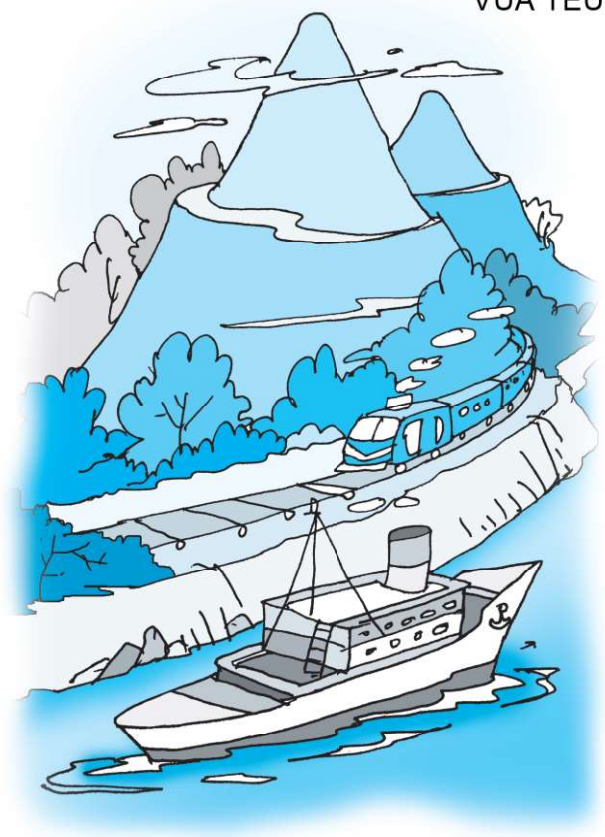
NGUYỄN QUANG TUẤN

Rùng cười

Kì này Đường gì?

Đường gì tàu vượt đại dương?
Đường gì tàu cứ hay thường vào ga?
Đường gì cất cánh bay xa?
Đường gì xuất hiện người ta giật mình?
Đường gì nhìn thấy trắng tinh?
Đường gì lời nói rập rình hiểm nguy?
Đường gì xe cộ vẫn đi?
Đường gì hạ xuống đôi khi làm bài?
Đường gì nhẹ lướt thuyền ai?
Đường gì ta ngắm tít ngoài biển khơi?
Đường gì ngăn bước chân người?
Đường gì rực rỡ hoa tươi suốt đường?
Mừng vui ngày mới khai trường
Vua Tếu cũng sẽ khai trương kho quà!

VUA TẾU





Kết quả **(TTT2 số 207)**

Báo gì?

Báo nói chỉ tiếng không hình
Báo công thành tích để trình cấp trên
Báo điện tử có tên miền
Báo đáp/ân trả nghĩa không quên trong đời
Báo bão một loại chim trời
Báo in sạp báo hay mời người mua
Báo tường các lớp thi đua
Báo điểm thi cử thắng thua rõ ràng
Báo cháy cứu hỏa sẵn sàng
Báo cáo những việc đã làm ra sao
Báo hỉ hạnh phúc ngọt ngào
Báo oán kẻ ác trốn sao tội tình
Thần dân giải đúng, thông minh
Hãy nhìn cho kĩ... tên mình có không?

HONG HA

Nhận xét. Vua Tếu rất vui mừng khi nhận được rất nhiều câu trả lời của các thần dân trên khắp nơi trên cả nước gửi về. Kì này Vua Tếu sẽ ban thưởng cho các thần dân có tên sau: *Hoàng Minh Vũ*, 7D, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Trần Phương Linh*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Nguyễn Xuân Tài*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Hữu Nhân*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

VUA TẾU



MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TỜ TIỀN VIỆT NAM ĐỒNG

THÁI NHẬT PHƯỢNG
Trường THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa

Hiện nay tờ tiền Việt Nam đồng (đ) đang lưu hành gồm các loại tờ tiền mệnh giá: 500đ, 1000đ, 2000đ, 5000đ, 10000đ, 20000đ, 50000đ, 100000đ, 200000đ, 500000đ. Sau đây là một số bài toán về các loại tờ tiền trên.

Bài toán 1. Có 16 tờ giấy bạc loại 2000đ, 5000đ và 10000đ. Trị giá mỗi loại tiền trên đều bằng nhau. Hỏi mỗi loại có mấy tờ?

Lời giải. Gọi số tờ tiền loại 2000đ, 5000đ 10000đ lần lượt là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Theo đề bài ta có $2000x = 5000y = 10000z$ và $x + y + z = 16$.

Suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{x+y+z}{5+2+1} = \frac{16}{8} = 2$.

Do đó $x = 10, y = 4, z = 2$.

Vậy có 10 tờ 2000đ, 4 tờ 5000đ, 2 tờ 10000đ.

Bài toán 2. An đến cửa hàng văn phòng phẩm mua 3 bút chì, 6 bút bi và 9 quyển vở. An đưa 3 tờ tiền loại 20000đ và chị bán hàng đã trả lại một tờ tiền nào đó. An nói với chị bán hàng là chị đã tính nhầm. Chị bán hàng kiểm tra lại thì đúng là mình đã tính nhầm. Hỏi tại sao An biết chị bán hàng tính nhầm? (giá tiền mỗi loại là số nguyên đồng hoặc số thập phân hữu hạn đồng).

Lời giải. Gọi giá tiền mỗi bút chì, bút bi, quyển vở lần lượt là x, y, z (x, y, z là số nguyên hoặc số thập phân hữu hạn).

Gọi a là một tờ tiền trong số các loại 500đ, 1000đ, 2000đ, 5000đ, 10000đ, 20000đ hoặc 50000đ ($a \in \mathbb{N}^*$).

Ta có $3x + 6y + 9z = 20000.3 - a$

$\Leftrightarrow x + 2y + 3z = 20000 - \frac{a}{3}$ điều này vô lí vì vế trái là số nguyên hoặc số thập phân hữu hạn, còn vế phải là số thập phân vô hạn tuần hoàn vì a không chia hết cho 3.

Do đó mà An biết chị bán hàng tính nhầm.

Bài toán 3. Một số tiền là 50000đ gồm hai loại tờ tiền 2000đ và 5000đ. Hỏi tổng số tờ hai loại đó ít nhất, nhiều nhất là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi số tờ tiền loại 2000đ, 5000đ lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Ta có $2000x + 5000y = 50000$

$\Leftrightarrow 2x + 5y = 50 \Leftrightarrow x + y = 10 + \frac{3x}{5} \Rightarrow x \vdots 5$.

Vì $1 \le x < 25$ nên $x + y$ nhỏ nhất là $10 + \frac{3.5}{5} = 13$, $x + y$ lớn nhất là $10 + \frac{3.20}{5} = 22$.

Vậy tổng số tờ ít nhất là 13 tờ (5 tờ 2000đ, 8 tờ 5000đ), tổng số tờ nhiều nhất là 22 tờ (20 tờ 2000đ và 2 tờ 5000đ).

Bài toán 4. Có 8 tờ tiền gồm 3 loại 5000đ, 10000đ và 20000đ. Hỏi với số tiền đó có thể trả khi mua một món hàng giá 100000đ mà người bán không phải trả lại tiền thừa hay không? Nếu có thể thì gồm những loại tờ tiền nào?

Lời giải. Gọi số tờ tiền loại 5000đ, 10000đ 20000đ lần lượt là x, y, z (x, y, z $\in \mathbb{N}^*$).

Ta có $5000x + 10000y + 20000z = 100000$

$\Leftrightarrow x + 2y + 4z = 20$

$\Rightarrow z < 5$ và x chẵn. Vì $x + y + z \leq 8$ nên $x < 8$.

- Nếu $z = 1$ thì $x + 2y = 16 \Rightarrow x = 2, y = 7$ (loại) hoặc $x = 4, y = 6$ (loại) hoặc $x = 6, y = 5$ (loại).
- Nếu $z = 2$ thì $x + 2y = 12 \Rightarrow x = 2, y = 5$ (loại) hoặc $x = 4, y = 4$ (loại) hoặc $x = 6, y = 3$ (loại).
- Nếu $z = 3$ thì $x + 2y = 8$ suy ra $x = 2, y = 3$ (thỏa mãn) hoặc $x = 4, y = 2$ (loại) hoặc $x = 6, y = 1$ (loại).
- Nếu $z = 4$ thì $x + 2y = 4$ suy ra $x = 2, y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy có thể có 100000đ để trả khi mua hàng mà người bán không phải trả lại tiền thừa nếu có 2 tờ 5000đ, 3 tờ 10000đ và 3 tờ 20000đ hoặc 2 tờ 5000đ, 1 tờ 10000đ và 4 tờ 20000đ (thừa một tờ nào đó).

Bài toán 5. Một rạp chiếu phim bán hai loại vé 40000đ và 45000đ. Một bạn trai lấy ra tờ 50000đ đưa cho cô bán vé, cô bán vé hỏi mua loại vé nào? Một bạn gái đứng ngay đằng sau cũng lấy ra 50000đ nhưng cô bán vé ngay lập tức đưa cho bạn gái đó loại vé 45000đ và trả lại 5000đ. Đố các bạn biết tại sao người bán vé lại biết bạn gái mua loại vé 45000đ?

Lời giải. Vì bạn trai đưa cô bán vé 1 tờ 50000đ nên nếu mua loại vé 40000đ thì cô bán vé phải trả lại 10000đ, nếu mua loại vé 45000đ thì cô bán vé phải trả lại 5000đ.

Bạn gái cũng đưa cô bán vé 50000đ nhưng không phải 1 tờ 50000đ mà có thể gồm 5 tờ 10000đ hoặc 3 tờ 10000đ và 1 tờ 20000đ hoặc 1 tờ 10000đ và 2 tờ 20000đ.

Như vậy bạn gái đó có đủ 40000đ nhưng lại đưa cho cô bán vé vượt quá 40000đ, điều đó có nghĩa là bạn gái này muốn mua loại vé 45000đ nên cô bán vé đã hiểu ý và lập tức đưa cho bạn gái loại vé 45000đ và trả lại 5000đ.

Bài toán 6. Bạn Thắng nói với bạn Long: "Tớ có 40 tờ tiền trong túi, tớ lấy ngẫu nhiên 35 tờ tiền từ túi tiền thì có ít nhất 5 tờ 1000đ, 10 tờ 2000đ, 3 tờ 5000đ, 2 tờ 10000đ. Đố Long tổng số tiền trong túi là bao nhiêu?".

Gần 1 giờ suy nghĩ, Long nói chính xác số tiền trong túi. Thắng khen Long giỏi quá.

Các bạn có biết trong túi có bao nhiêu tiền không?

Lời giải. Gọi số tờ tiền loại 1000đ, 2000đ 5000đ, 10000đ lần lượt là a, b, c, d (a, b, c, d $\in \mathbb{N}^*$) và $a + b + c + d = 40$.

Theo giả thiết ta có $b + c + d \leq 35 - 5 = 30$,

$a + c + d \leq 35 - 10 = 25$,

$a + b + d \leq 35 - 3 = 32$,

$a + b + c \leq 35 - 2 = 33$.

Cộng vế với vế bốn bất đẳng thức trên ta có

$a + b + c + d \leq 40$.

Do đẳng thức xảy ra nên $b + c + d = 30$,

$a + c + d = 25$, $a + b + d = 32$, $a + b + c = 33$.

Suy ra $a = (a + b + c + d) - (b + c + d)$

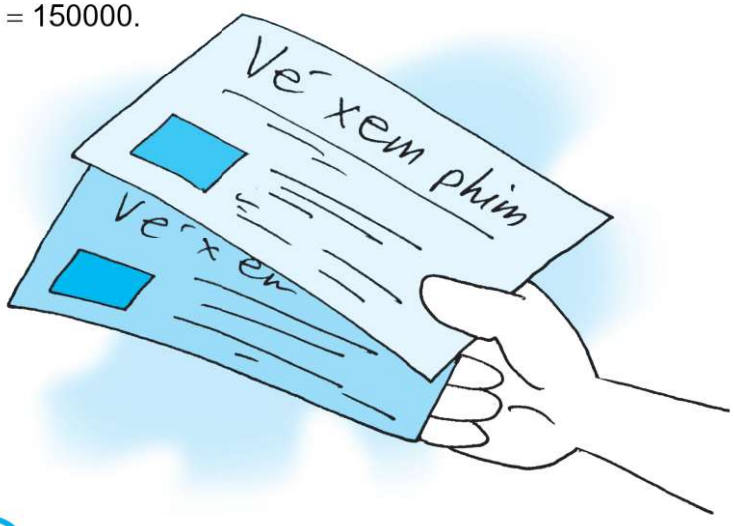
$= 40 - 30 = 10$.

Tương tự ta tính được $b = 15, c = 8, d = 7$.

Vậy số tiền trong túi là:

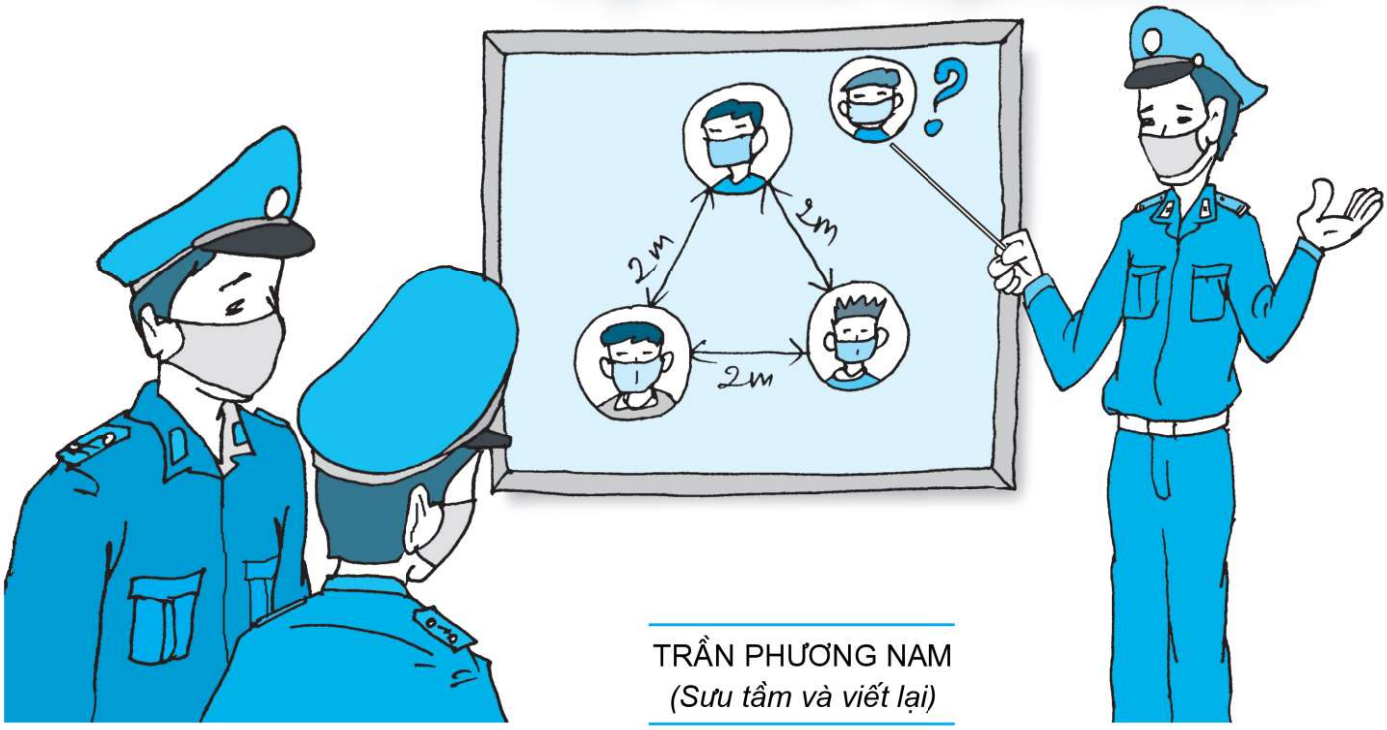
$1000.10 + 2000.15 + 5000.8 + 10000.7$

$= 150000$.





TIN MẬT BÁO TẠI SAO LẠI ĐÚNG?



TRẦN PHƯƠNG NAM
(Sưu tầm và viết lại)

Đang những ngày chống dịch SARS-CoV-2 nên thám tử Sê Lốc Cốc chủ yếu là loanh quanh ở nhà với khu vườn nhỏ của mình. Bỗng chuông điện thoại reo vang. Theo thói quen khi ở nhà một mình, thám tử bật loa điện thoại để nghe.

- A lô...

- Chào thám tử tài ba!

- Ôi! Lâu ngày không gặp nhau nhưng tớ vẫn nhận ra tiếng nói của cậu. Thế nào? Dạo này xem truyền hình đưa tin chúng ta bắt được nhiều vụ buôn bán ma tuý lớn quá! Địa phương mình thế nào?

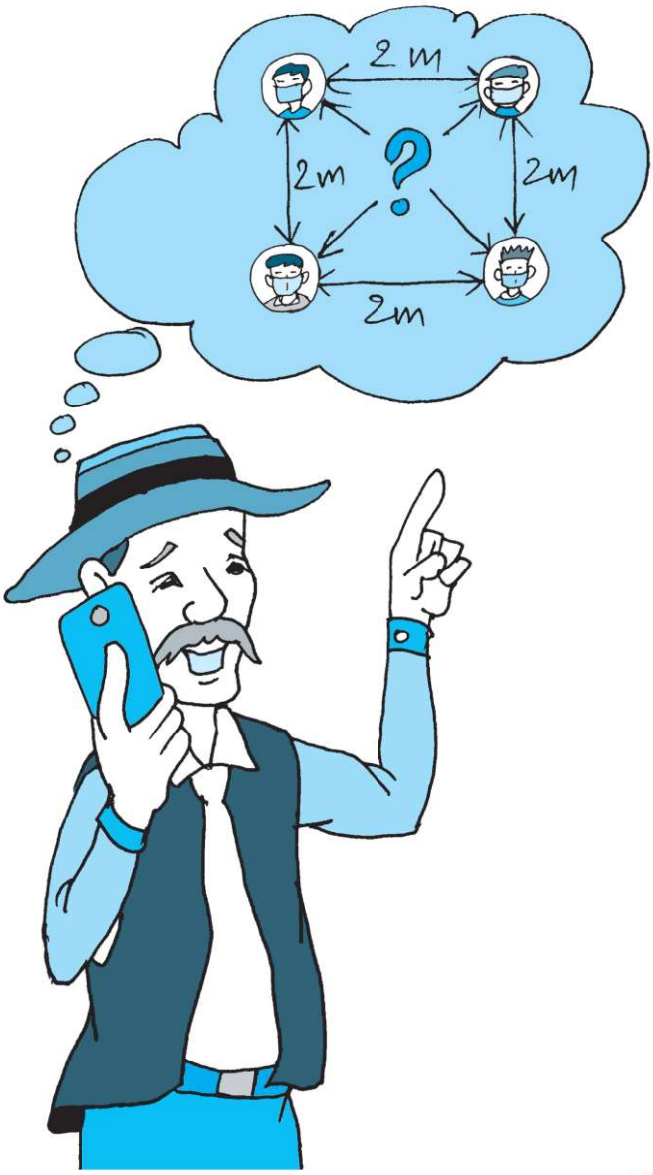
- Vừa xong một vụ cũng tương đối. Có câu chuyện khá hay muốn kể cho cậu thôi. Chả là mình nhận được một tin mật báo: "Có một nhóm 4 tên đang gặp nhau bàn chuyện liên quan tới vận chuyển ma tuý ở địa điểm X và 4 tên này ngồi họp đều đeo khẩu trang. Đặc biệt khoảng cách giữa 2 tên nào cũng là 2m." Bọn mình phân tích để triển khai gấp hành động nhưng một chiến sĩ của mình tuyên bố: "Đây là tin giả!". Cậu ta cho rằng chi tiết "Đặc biệt khoảng cách giữa 2 tên nào cũng là 2m" là không thể có! Từ việc sai sự thật này, cậu ta cho rằng không nên phí công ập tới địa điểm này. Chúng tớ đã phải lấy giấy ra để kiểm tra lại điều này. Cuối cùng tớ đã phát hiện ra: Chi tiết mà chiến sĩ kia phân tích không thể xảy ra thì vẫn có thể xảy ra nên tớ quyết định anh em khẩn cấp tới địa điểm X. Quả nhiên khi tới nơi đã chứng minh: Tin mật báo là hoàn toàn chính xác! Cậu thấy có tuyệt không?

Đúng là rất tuyệt! Bây giờ mới biết cậu vẫn còn có trong người chút kiến thức hình học thật bổ ích. Tớ sẽ gửi câu chuyện này tới Toán Tuổi thơ để các bạn nhỏ có nghĩ ra

được như cậu không nhé! Nhưng cậu kia lập luận thế nào nhỉ?

- À! Cậu ấy bảo nếu có 3 tên thì chỉ cần ngồi ở 3 vị trí là đỉnh của tam giác đều có độ dài cạnh 2m là được. Nhưng 4 tên thì làm sao ngồi được đảm bảo khoảng cách 2 tên bất kì là 2m? Nếu ngồi ở 4 đỉnh hình vuông với cạnh 2m thì 2 tên ở 2 đỉnh đối diện sẽ cách nhau không phải là 2m.
- Thế là cậu ấy nghĩ hơi "hẹp" rồi... còn cậu chắc nghĩ "mở" hơn nên mới phản biện được cậu ta. Khi nào hết dịch ta lại gặp nhau nhé!
- OK. Thank you!

Nào! Bây giờ thì các bạn nhỏ hãy giải thích nhờ kiến thức hình học của mình nhé!



Kết quả **(TTT2 số 207)**

Cô Nguyệt phải làm gì?

Theo như tình tiết của câu chuyện, chúng ta có thể khẳng định như sau: Cô gái dương tính với Covid-19 là F0. Người bạn tiếp xúc với cô gái nhiễm bệnh là F1. Lụa tiếp xúc với người bạn này nên Lụa là F2. Trung là F3 vì tiếp xúc với Lụa. Nguyệt lại tiếp xúc với Trung nên Nguyệt là F4. Đối với Nguyệt thì cần phải làm những việc sau:

- Luôn đeo khẩu trang khi đi ra ngoài hay tiếp xúc với người khác, luôn giữ khoảng cách 2 m với người khác. Rửa tay thường xuyên bằng xà phòng hoặc nước sát khuẩn. Chỉ sử dụng khẩu trang y tế 1 lần rồi bỏ vào thùng rác.
- Tự cách li 14 ngày tại nhà, theo dõi sức khỏe thường xuyên. Nếu có những dấu hiệu bất thường như sốt, ho, khó thở thì lập tức đến các cơ sở y tế để được tư vấn, khám và điều trị kịp thời.
- Báo cho cơ sở y tế quận huyện nơi mình sinh sống.
- Cập nhật tình trạng của các F0, F1, F2, F3 khác để thay đổi hướng xử lí kịp thời.

HONG HA

Nhận xét. Những bạn đọc của TTT rất chịu khó cập nhật tình hình dịch bệnh Covid-19 nên đã "tư vấn" cho cô Nguyệt rất đầy đủ và chu đáo. Phần quà sẽ được gửi tới các bạn sau: *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Nguyễn Tiến Dũng*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Hà Việt Anh*, 6A5, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thị Hà Giang*, 6D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Võ Thị Minh Huyền*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Các "thám tử nhí" sau cũng rất đáng khen: *Đoàn Nguyên Vũ*, 6B, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Ngô Bích Loan, Phan Thùy Trâm*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.

Thám tử Sê Lốc Cốc



Kì này BẠN CÓ ĐỒNG Ý VỚI HÀ KHÔNG?

Bài toán. Bạn Hồng có một tấm bìa hình vuông cạnh 8 cm. Bạn Hà thấy vậy nói rằng: Chúng ta cắt được từ tấm bìa này thành 5 mảnh bìa gồm một mảnh bìa hình tròn có diện tích là 16π cm^2 và bốn mảnh bìa hình vuông, mỗi mảnh có diện tích không nhỏ hơn 1 cm^2. Hồng đồng ý với Hà điều này. Còn các bạn thế nào? Các bạn có đồng ý với Hà không?

NGUYỄN HẠ HÀ UYÊN
(TP. Hồ Chí Minh)

Kết quả **(TTT2 số 207)**

ĐỘ DÀI CẠNH HÌNH VUÔNG BÊN NGOÀI?

Lời giải. Dễ thấy trung điểm các cạnh của một hình vuông tạo thành một hình vuông có diện tích bằng nửa diện tích hình vuông ban đầu.

Giả sử diện tích hình vuông nhỏ nhất là a (cm^2) thì diện tích của 9 hình vuông đã cho lần lượt là a, 2a, 4a, 8a, 16a, 32a, 64a, 128a, 256a.

Tổng diện tích của chúng là:

a + 2a + 4a + 8a + 16a + 32a + 64a + 128a + 256a = 511a.

Theo bài ra ta có 511a = 511 (cm^2),

suy ra a = 1.

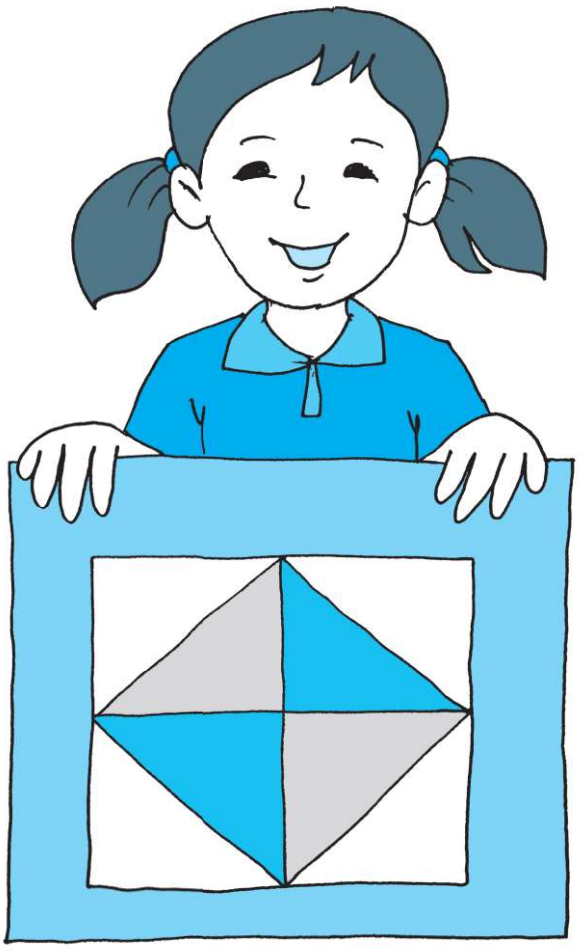
Do đó diện tích hình vuông lớn nhất là 256 cm^2. Cạnh của hình vuông đó là 16 cm.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng được thưởng kì này: *Hán Duy Anh*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Ngô Quang Tùng*, 8A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phạm Quang Triết*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Các bạn sau tính được diện tích hình vuông ngoài cùng nhưng quên không tính độ dài cạnh của nó nên chỉ được khen kì này: *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Nguyễn Đức Dũng*, 6E, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**.

VŨ ĐÌNH HÒA





HỌC RA SAO?

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG
Trường THPT Khoa học Giáo dục, ĐHQG Hà Nội

Hệ phương trình là dạng toán hay và thường xuyên xuất hiện trong các đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS và kì thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT. Trong bài viết này tác giả xin đưa ra phương pháp sử dụng bất đẳng thức AM-GM để giải hệ phương trình.

Bất đẳng thức AM-GM (hay còn gọi là bất đẳng thức Cauchy) được phát biểu dưới dạng như sau:

Với các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = a_n$.

Việc chứng minh bất đẳng thức này đã có trong nhiều tài liệu, xin phép không chứng minh.

Với n = 2; 3 ta có các dạng quen thuộc

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \ ; \ \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

Sau đây là một số bài toán áp dụng.

Bài toán 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \ (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = xy + yz + zx. \ (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện x, y, z ≥ 0.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số thực không âm ta có

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} + x^2 \geq 3.\sqrt[3]{\sqrt{x}.\sqrt{x}.x^2} = 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} \geq 3x - x^2.$$

Tương tự $2\sqrt{y} \geq 3y - y^2$, $2\sqrt{z} \geq 3z - z^2$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 3(x + y + z) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx.$$

Kết hợp với phương trình (2) của hệ ta có đẳng thức xảy ra khi x = y = z = 1.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z) = (1; 1; 1).

Bài toán 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ 3\sqrt{xy} = 3y^3 - 3x^2 - 1. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x, y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, y < 0 \\ x > 0, y > 0. \end{cases}$

Nếu x < 0, y < 0 ta có

$$\sqrt{2(x^2 + y^2)} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} < 0 \ \text{(vô lí)}.$$

Do đó x > 0, y > 0 ta có

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số thực dương ta có

$$xy\sqrt{2(x^2 + y^2)} = \sqrt{xy}.\sqrt{2xy.(x^2 + y^2)}$$

$$\leq \frac{x + y}{2}.\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{2}$$

$$= \frac{(x + y)^3}{4}.$$

Từ đó suy ra $x^3 + y^3 \leq \frac{(x + y)^3}{4}$

$\Leftrightarrow 4(x^3+y^3) \le x^3+y^3+3xy(x+y)$

$\Leftrightarrow x^3+y^3 \le xy(x+y)$

$\Leftrightarrow x^3+y^3-xy(x+y) \le 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \le 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow x=y.$

Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$3x = 3x^3-3x^2-1$

$\Leftrightarrow 4x^3 = x^3+3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow (x.\sqrt[3]{4})^3 = (x+1)^3$

$\Leftrightarrow x(\sqrt[3]{4}-1)=1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1},\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}\right).$

Bài toán 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{3}{xyz} \ (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3 \ (2). \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x, y, z > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số thực dương ta có

$3^2 = (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$

$= x+y+z+(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$

$+(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$

$\ge 3.\sqrt[3]{(x+y+z)(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2}$

$\Leftrightarrow 27 \ge (x+y+z)(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2$

Mặt khác, ta có bất đẳng thức quen thuộc

$(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2 \ge 3\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$

Kết hợp với $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3$ ta có

$27 \ge 9\sqrt{xyz}(x+y+z)$

$\Leftrightarrow \sqrt{xyz}(x+y+z) \le 3. \ (3)$

Lại có

$3=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ge 3.\sqrt[3]{\sqrt{x}.\sqrt{y}.\sqrt{z}} = 3.\sqrt[6]{xyz}$

$\Leftrightarrow xyz \le 1 \Leftrightarrow xyz \le \sqrt{xyz}.$

Do đó

$xyz(x+y+z) \le \sqrt{xyz}(x+y+z) \le 3$

$\Leftrightarrow x+y+z \le \dfrac{3}{xyz}.$

Kết hợp với phương trình (1) của hệ, ta có đẳng thức xảy ra khi thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\begin{cases} x=y=z>0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=y=z=1.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (1; 1; 1)$.

Bài toán 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xyz(x+y+z)=3 \ (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}. \ (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x, y, z \ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số thực không âm ta có

$\sqrt{x}+\sqrt{x}+1 \ge 3.\sqrt[3]{\sqrt{x}.\sqrt{x}.1} = 3.\sqrt[3]{x}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x} \le \dfrac{2\sqrt{x}+1}{3}.$

Tương tự $\sqrt[3]{y} \le \dfrac{2\sqrt{y}+1}{3}$, $\sqrt[3]{z} \le \dfrac{2\sqrt{z}+1}{3}.$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z} \le \dfrac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})+3}{3}.$

Kết hợp với (2) ta có

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le \dfrac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})+3}{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le 3. \ (3)$

Lại có $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 = (x+y+z)$

$+(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})+(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$

$\ge 3.\sqrt[3]{(x+y+z)(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^6$

$\geq 27(x+y+z)(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2.$

Kết hợp với (3) ta có

$3^6 \geq 27(x+y+z)(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2$

$\Leftrightarrow 27 \geq (x+y+z)(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2$

$\geq (x+y+z)(3.\sqrt[3]{\sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx}})^2$

$= (x+y+z).9\sqrt[3]{(xyz)^2}.$

Mặt khác, ta lại có

$3 \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq 3.\sqrt[3]{\sqrt{x}.\sqrt{y}.\sqrt{z}} = 3.\sqrt[6]{xyz}$

$\Rightarrow xyz \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(xyz)^2} \geq xyz$

nên ta suy ra $27 \geq (x+y+z).9xyz$

$\Leftrightarrow xyz(x+y+z) \leq 3.$

Kết hợp với phương trình (1) của hệ, ta có đẳng thức xảy ra khi thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}=\sqrt{z}=1\\ xyz=1;\ x,y,z\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=z=1.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (1; 1; 1)$.

Bài toán 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}=2\ (1)\\ \dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^3}{z^2}+\dfrac{z^3}{x^2}=x+y+z.\ (2)\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x, y, z > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số thực dương ta có

$$\left(\frac{x^3}{y^2}+y+y\right)+\left(\frac{y^3}{z^2}+z+z\right)+\left(\frac{z^3}{x^2}+x+x\right)$$

$$\geq 3.\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^2}.y.y}+3.\sqrt[3]{\frac{y^3}{z^2}.z.z}+3.\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^2}.x.x}$$

$$=3(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{z^2}+\frac{z^3}{x^2}\geq x+y+z$$

Kết hợp với phương trình (2) của hệ, ta có đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{x^3}{y^2}=y, \dfrac{y^3}{z^2}=z, \dfrac{z^3}{x^2}=x$

hay $x = y = z$.

Thay vào phương trình (1) của hệ ta được $\dfrac{3}{\sqrt{x}}=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y, z)=\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{9}{4};\dfrac{9}{4}\right)$.

Bài toán 6. Tìm các số thực dương (x, y) thỏa mãn $\begin{cases}x^3+y^3=xy(x+y)\ (1)\\ x^4-xy^2+1=\sqrt{2xy-2x+1}.\ (2)\end{cases}$

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$x^3-x^2y-xy^2+y^3=0$

$\Leftrightarrow x^2(x-y)-y^2(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

(do $x, y > 0$).

Thay $x = y$ vào phương trình (2) của hệ ta được $x^4-x^3+1=\sqrt{2x^2-2x+1}.$ (3)

Do $2x^2-2x+1=2\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$

$=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0\ \forall x.$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số thực dương ta có

$$\sqrt{(2x^2-2x+1).1}\leq\frac{2x^2-2x+1+1}{2}=x^2-x+1.$$

Kết hợp với (3) suy ra $x^4-x^3+1\leq x^2-x+1$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)^2\leq 0.$

Vì $x > 0$ nên $x(x+1)(x-1)^2\geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}2x^2-2x+1=1\\ x-1=0\\ x=y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x(x-1)=0\\ x=1\\ x=y>0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy (x, y) = (1; 1) là cặp số duy nhất thỏa mãn bài toán.

Bài toán 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 2x + 12 = 8y^3 - 12xy + 4y \ (1) \\ \sqrt{x^2 - 2y + 3} + \sqrt{x^2 - 4y + 6} = x^2 - 3y + \dfrac{11}{2}. \ (2) \end{cases}$$

Lời giải. Ta có hằng đẳng thức quen thuộc sau $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Phương trình (1) của hệ tương đương với

$x^3 - 8y^3 + 8 + 12xy + 2x - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + (-2y)^3 + 2^3 - 3x(-2y)2 + 2x - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y + 2)[x^2 + 4y^2 + 4 + 2xy + 4y - 2x]$

$+2(x - 2y + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y + 2)(x^2 + 4y^2 + 2xy - 2x + 4y + 6) = 0$

Do $x^2 + 4y^2 + 2xy - 2x + 4y + 6$

$= \dfrac{1}{2}\left[(x + 2y)^2 + (x - 2)^2 + (2y + 2)^2\right] + 2 > 0$

nên ta suy ra $x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y = x + 2$.

Thay vào phương trình (2) của hệ ta được

$\sqrt{x^2 - (x + 2) + 3} + \sqrt{x^2 - 2(x + 2) + 6}$

$= x^2 - \dfrac{3}{2}(x + 2) + \dfrac{11}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{2}$. (3)

Ta có $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$;

$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số thực dương ta có

$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$= \sqrt{(x^2 - x + 1).1} + \sqrt{(x^2 - 2x + 2).1}$

$\le \dfrac{x^2 - x + 1 + 1}{2} + \dfrac{x^2 - 2x + 2 + 1}{2}$

$= \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{2}$.

Kết hợp với (3) ta có đẳng thức xảy ra khi thỏa mãn đồng thời

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = 1 \\ x^2 - 2x + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Để kết thúc bài viết, tác giả xin đưa ra một số bài tập áp dụng.

Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} x^3 + 2x + 2 = 8y^3 - 6xy + 4y \\ \sqrt{x^2 - 2y + 2} + 2.\sqrt[4]{x^3(5 - 4y)} = 2y^2 - x + 2. \end{cases}$

(Toán Tuổi thơ 2 số 195)

2. $\begin{cases} x^3 + y^3 = (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - xy + y^2} \\ xy = \sqrt{4x - 3}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1 \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{y^2 + z^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{z^2 + x^2}{2}}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x} - y + 2 = 0 \\ x + 8y + 4\sqrt{x} - 8\sqrt{y} - 4\sqrt{xy} = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 5y + 6 = 2\sqrt{x(2 - y)} \\ \sqrt{x} + x\sqrt{2 - y} = 2. \end{cases}$





TẬP HỢP Q
CÁC SỐ HỮU TỈ

TẠ THẬP
TP. Hồ Chí Minh

1. Hiểu được ý nghĩa các kí hiệu $\in, \notin, \subset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

• Dựa vào ý nghĩa các kí hiệu để giải các bài toán đọc kí hiệu, xác định tính đúng sai, điền kí hiệu thích hợp vào ô trống.

Bài toán 1. Điền kí hiệu $\in, \notin, \subset$ thích hợp vào ô trống

$-2020 \square \mathbb{Q}$ $\quad \frac{-5}{21} \square \mathbb{Q}$

$\frac{3}{191} \square \mathbb{Z}$ $\quad 1963 \square \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \square \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Z} \square \mathbb{Q}.$

Lời giải.

$-2020 \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{-5}{21} \in \mathbb{Q}$

$\frac{3}{191} \notin \mathbb{Z}$ $\quad 1963 \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$

Bài toán 2. Cách viết nào sau đây là đúng?

a) $\frac{4}{137} \in \mathbb{N}$ $\quad$ b) $\frac{135}{-7777} \in \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{N} \notin \mathbb{Q}$ $\quad$ d) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

e) $-8,9 \in \mathbb{Q}$ $\quad$ f) $\frac{-31}{-999} \in \mathbb{Q}.$

Lời giải.

a) c) sai; $\quad$ b) d) e) f) đúng.

2. Biểu diễn số hữu tỉ

• Số hữu tỉ thường được viết dưới dạng phân số tối giản.

• Để biểu diễn số hữu tỉ trên trục số, ta viết số đó dưới dạng phân số tối giản có mẫu dương. Mẫu của phân số cho ta biết đoạn thẳng đơn vị cần phải chia thành bao nhiêu phần bằng nhau.

Bài toán 3. Trong các phân số sau: $\frac{-12}{21}, \frac{14}{-35}, \frac{44}{-77}, \frac{8}{-14}, \frac{-4}{-7}, \frac{4}{-7}$, những phân số nào có cùng điểm biểu diễn với phân số $\frac{-4}{7}$?

Lời giải. Ta có

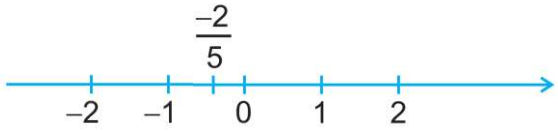
$\frac{-12}{21} = \frac{-4}{7}, \frac{14}{-35} = \frac{-2}{5}, \frac{44}{-77} = \frac{-4}{7},$

$\frac{8}{-14} = \frac{-4}{7}, \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}, \frac{4}{-7} = \frac{-4}{7}.$

Vậy các phân số có cùng điểm điểm biểu diễn với phân số $\frac{-4}{7}$ là $\frac{-12}{21}, \frac{44}{-77}, \frac{8}{-14}, \frac{4}{-7}$.

Bài toán 4. Biểu diễn số hữu tỉ $\frac{2}{-5}$ trên trục số.

Lời giải. Ta có $\frac{2}{-5} = \frac{-2}{5}$.



3. So sánh các số hữu tỉ

• Viết các số hữu tỉ dưới dạng phân số có cùng một mẫu dương rồi so sánh các phân số đó.

• Nếu $x, y, z \in \mathbb{Q}$ mà $x < y$ và $y < z$ thì $x < z$.

Bài toán 5. So sánh các số hữu tỉ x và y.

a) $x = \frac{-27}{63}$ và $y = \frac{4444}{-7777}$.

b) $x=\frac{53}{-17}$ và $y=\frac{535353}{-171717}$.

c) $x=\frac{-1459}{2377}$ và $y=\frac{-3}{-4}$.

d) $x=\frac{-23}{24}$ và $y=\frac{3467}{-3465}$.

Lời giải.

a) $x=\frac{-27}{63}=\frac{-3}{7}$, $y=\frac{4444}{-7777}=\frac{-4}{7}$.

Suy ra $x>y$.

b) $x=\frac{53}{-17}=\frac{-53}{17}$, $y=\frac{535353}{-171717}=\frac{-53}{17}$.

Suy ra $x=y$.

c) $x=\frac{-1459}{2377}<0$, $y=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}>0$.

Suy ra $x<y$.

d) $x=\frac{-23}{24}>-1$, $y=\frac{3467}{-3465}<-1$.

Suy ra $x>y$.

Bài toán 6. a) Cho $x, y \in \mathbb{Z}$; $m, n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $x.n \le y.m$. Chứng tỏ rằng $\frac{x}{m}\le\frac{y}{n}$.

b) Cho các số nguyên dương a, b, c, d, e, f thỏa mãn $a\le b\le c\le d\le e\le f$. Chứng tỏ rằng $\frac{a+c+e}{a+b+c+d+e+f}\le\frac{1}{2}$.

Lời giải. a) Vì $m, n \in \mathbb{N}^*$ nên $m.n \in \mathbb{N}^*$.

Từ $x.n \le y.m$ ta có $\frac{xn}{mn}\le\frac{ym}{nm}\Rightarrow\frac{x}{m}\le\frac{y}{n}$.

b) Từ $a\le b\le c\le d\le e\le f$

$\Rightarrow a+c+e+a+c+e\le b+d+f+a+c+e$

$\Rightarrow\frac{a+c+e}{a+b+c+d+e+f}\le\frac{1}{2}$.

4. Tìm điều kiện để số hữu tỉ $x=\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương, âm, số 0.

- $x>0$ khi và chỉ khi a và b cùng dấu.
- $x<0$ khi và chỉ khi a và b trái dấu.
- $x=0$ khi và chỉ khi $a=0$ và b khác 0.

Bài toán 7. Cho số hữu tỉ $x=\frac{t-2021}{-2020}$, $t\in\mathbb{Z}$.

Với giá trị nào của t thì

a) x là số dương;

b) x là số âm;

c) x không là số dương cũng không là số âm.

Lời giải. a) Vì $-2020<0$ nên x là số dương $\Leftrightarrow t-2021<0\Leftrightarrow t<2021$.

Vậy $t\in\mathbb{Z}$ và $t<2021$.

b) Vì $-2020<0$ nên x là số âm

$\Leftrightarrow t-2021>0\Leftrightarrow t>2021$.

Vậy $t\in\mathbb{Z}$ và $t>2021$.

c) Vì $-2020\ne0$ nên x không là số dương cũng không là số âm $\Leftrightarrow x=0$

$\Leftrightarrow t-2021=0\Leftrightarrow t=2021$.

Bài toán 8. Cho số $x=\frac{-7m+709}{123456}$. Tìm các số nguyên dương m để x là số hữu tỉ dương.

Lời giải. Vì $123456>0$ nên $x>0$

$\Leftrightarrow -7m+709>0\Leftrightarrow m<\frac{709}{7}=101\frac{2}{7}$.

Mà m là số nguyên dương nên $m\in\{1; 2; 3; \ldots; 101\}$.

5. Tìm điều kiện để số hữu tỉ $x=\frac{a}{b}$ là một số nguyên.

- Số hữu tỉ $x=\frac{a}{b}$ là một số nguyên khi và chỉ khi a chia hết cho b.

Bài toán 9. Tìm các số nguyên a để số $x=\frac{3a-26}{a-7}$ là số nguyên.

Lời giải. $x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(3a-26)\vdots(a-7)$.

Mà $3a-26=3(a-7)-5$.

Do đó $5\vdots(a-7)\Rightarrow a-7\in\{1; -1; 5; -5\}$

$\Rightarrow a\in\{8; 6; 12; 2\}$.

Bài toán 10. Tìm các số nguyên x để số $t=\frac{4x}{x^2+3}$ là số nguyên.

Lời giải. $t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4x \vdots (x^2+3)$

$\Rightarrow 4x^2 \vdots (x^2+3)$

$\Rightarrow [4(x^2+3)-12] \vdots (x^2+3) \Rightarrow 12 \vdots (x^2+3)$.

Mà $x^2+3 \geq 3$.

Do đó $x^2+3 \in \{3; 4; 6; 12\}$

$\Rightarrow x^2 \in \{0; 1; 3; 9\}$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; 1; -1; 3; -3\}$.

Thử lại ta thấy $x \in \{0; 1; -1; 3; -3\}$ thỏa mãn t là số nguyên.

6. Chứng tỏ một phân số là phân số tối giản, tìm điều kiện để một phân số là phân số tối giản

Số $x = \frac{a}{b}$ là phân số tối giản khi và chỉ khi ƯCLN(a, b) = 1.

Bài toán 11. Chứng tỏ phân số $\frac{2n+3}{5n+7}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n.

Lời giải. Đặt d = ƯCLN(2n + 3, 5n + 7), $d \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\begin{cases} 2n+3 \vdots d \\ 5n+7 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 5(2n+3)-2(5n+7) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d.$$

Mà $d \in \mathbb{N}^*$ nên d = 1.

Vậy $\frac{2n+3}{5n+7}$ là phân số tối giản.

Bài toán 12. Tìm các số tự nhiên n để phân số $\frac{n-2}{3n+7}$ là phân số tối giản.

Lời giải. Gọi d là ước nguyên tố chung của n − 2 và 3n + 7.

Ta có

$$\begin{cases} n-2 \vdots d \\ 3n+7 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (3n+7)-3(n-2) \vdots d$$

$\Rightarrow 13 \vdots d \Rightarrow d = 13$.

$n - 2 \vdots 13$ nên đặt $n - 2 = 13k$ $(k \in \mathbb{Z})$

hay $n = 13k + 2$.

Vậy $n \neq 13k + 2$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì phân số đã cho là phân số tối giản.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho a, c ∈ ℕ và b, d ∈ ℕ* thỏa mãn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Chứng tỏ rằng $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$.

Bài 2. Cho số $x = \frac{a-2020}{1963}$ $(a \in \mathbb{Z})$. Tìm a để:

a) $x < 0$ b) $x > 0$ c) $x = 0$.

Bài 3. Tìm các số tự nhiên n để phân số $\frac{n-7}{11n+2}$ là phân số tối giản.

Bài 4. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau là các phân số tối giản $\frac{1}{n+4}, \frac{2}{n+5}, \frac{3}{n+6}, ..., \frac{100}{n+103}$.



THÁCH ĐẤU

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM BẢY MƯƠI BA

Người thách đấu: *Nguyễn Minh Hà*, **Hà Nội**.

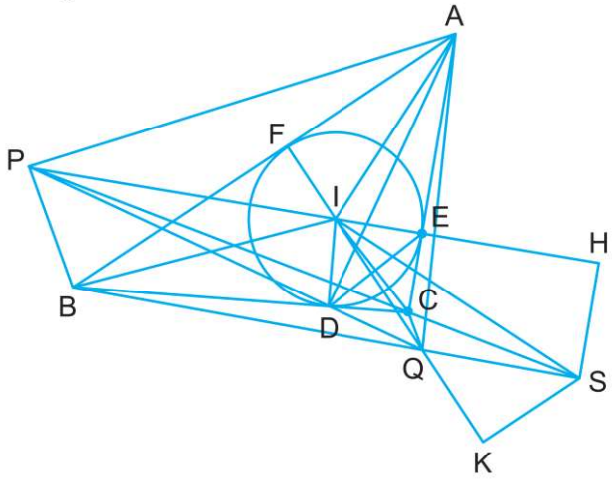
Bài toán thách đấu: Cho hình chữ nhật ABCD. Điểm M chạy trên tia BC (M khác B). Trung trực của AM theo thứ tự cắt các tia AB, AD tại N, P. Tìm vị trí điểm M sao cho diện tích tam giác ANP nhỏ nhất.

Thời hạn: Trước ngày 08.10.2020 theo dấu bưu điện.

Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM BẢY MƯƠI MỐT (TTT2 số 207)

Đề bài. Cho (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với ba cạnh BC, CA, AB. P, Q theo thứ tự là giao điểm của IE, IF và đường thẳng qua D vuông góc với AD. Gọi S là giao điểm của BQ và CP. Chứng minh $\widehat{AIS} = 90^\circ$.

Lời giải.



Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của S trên IE, IF.

Ta có $\widehat{AIP} = 180^\circ - \widehat{AIE} = 180^\circ - \widehat{AIF} = \widehat{AIQ}$.

Do đó IA chứa phân giác trong của $\widehat{PIQ}$. (1)

Dễ thấy các tứ giác IECD, AEDP nội tiếp.

Do đó $\widehat{DPA} = \widehat{DEC} = \widehat{DIC}$.

Mặt khác $\widehat{PDA} = \widehat{IDC} = 90^\circ$.

Suy ra $\Delta DAP \backsim \Delta DCI$ (g.g).

Tương tự $\Delta DAQ \backsim \Delta DBI$ (g.g).

Vậy $\frac{DP}{DQ} = \frac{DP}{DA}.\frac{DA}{DQ} = \frac{DI}{DC}.\frac{DB}{DI} = \frac{DB}{DC}$.

Do đó BP // CQ.

Từ đó, chú ý rằng SK // BF, SH // CE, BF = BD, CE = CD.

Suy ra

$$\frac{SH}{SK} = \frac{SH}{CE}.\frac{BF}{SK}.\frac{CE}{BF} = \frac{SP}{CP}.\frac{BQ}{SQ}.\frac{CD}{BD}$$

$$= \frac{SP}{CP}.\frac{CP}{SC}.\frac{CQ}{BP} = \frac{SP}{SC}.\frac{SC}{SP} = 1.$$

Do đó IS là phân giác ngoài của $\widehat{PIQ}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AIS} = 90^\circ$.

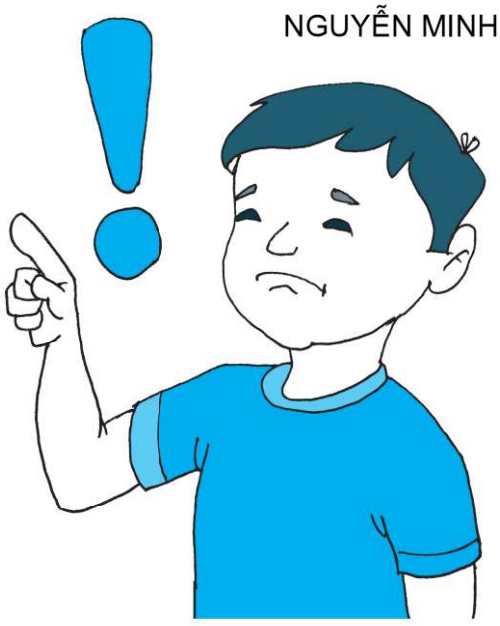
HONG HA

Nhận xét. 1) Bài toán này là sự phối hợp hai chủ đề lớn của hình học phẳng: tam giác đồng dạng và tứ giác nội tiếp.

2) Kết quả vẫn đúng khi PQ là đường thẳng bất kì đi qua D.

3) Bài toán này khó, không có võ sĩ nào đăng quang trong trận đấu này.

NGUYỄN MINH HÀ



Chữ & chữ số

Kì này KÌ 52

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số, biết các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau và A là số khác 0.

$$\overline{ADD}+\overline{ADD}+\overline{ADD}+\overline{ADD}=\overline{SUM}.$$

TTT

Kết quả KÌ 50 (TTT2 số 207)

Lời giải. *(Đây là lời giải của bạn Hoàng Minh Vũ)*

$\overline{SIX}+\overline{SIX}+\overline{SIX}=\overline{NINE}+\overline{NINE}$

$\Leftrightarrow 3\overline{SIX}=2\overline{NINE}.$

Vì $102\le\overline{SIX}\le 987$ nên

$306\le 3\overline{SIX}\le 3\times 987=2961.$

Vì $1012\le\overline{NINE}\le 9897$ mà

$2\overline{NINE}=3\overline{SIX}\le 2961$

$\Rightarrow 1012\le\overline{NINE}\le 1480\Rightarrow N=1.$

Vì $3\overline{SIX}=2\overline{NINE}$ nên $3X=2E$.

Do $0\le E\le 9$ nên X chỉ có thể là số chẵn và $2\le X\le 6$. Suy ra X = 2, 4, 6.

- Với X = 2 thì E = 3, khi đó

$3\times\overline{SIX}=2\times\overline{NINE}\Leftrightarrow 3\times\overline{SI2}=2\times\overline{1I13}$

$\Leftrightarrow 300S + 30I + 6 = 2000 + 200I + 20 + 6$

$\Leftrightarrow 300S = 2020 + 170I$

$\Leftrightarrow 30S = 202 + 17I.$

Suy ra 202 + 17I là số chẵn chục nên I = 4, dẫn đến S = 9.

Thử lại 942 + 942 + 942 = 2826 = 1413 + 1413 (thỏa mãn đầu bài).

- Với X = 4 thì E = 6, tương tự ta có I = 4 (loại vì I = X = 4).
- Với X = 6 thì E = 9, tương tự ta cũng tìm được I = 4, S = 9 (loại vì S = E = 9).

Vậy chỉ có duy nhất một đáp số: S = 9, I = 4, X = 2, N = 1, E = 3.

Một số chú thích: Trong tiếng Anh Six là 6, Nine là 9. Đầu bài là 6 + 6 + 6 = 9 + 9 cũng có ý nghĩa.

Các tài liệu tiếng Anh gọi dạng toán này là cryptarithm (crypt - mật mã và arithmetic - số học), tức là dạng toán học giải trí (mathematical recreation), có mục đích giải mã các bài toán số học với các chữ cái được thay bằng các chữ số.

Xem trong: Martin Gadner, The magic number of Dr. Matrix, 1985, trang 180 và 299) Bài toán trên được gọi là *Alan Wayne's cryptarithm*, thường giả thiết là chữ số đầu tiên của số là khác 0. Khi ấy bài toán có duy nhất nghiệm 942 + 942 + 942 = 2826 = 1413 + 1413. Số 1413 là bốn chữ số của số Pi viết ngược lại và 942 : 3 = 314 là ba chữ số đầu của số Pi. Nếu chấp nhận số đầu tiên có thể bằng 0 thì ta còn có thêm một nghiệm nữa là 472 + 472 + 472 = 0708 + 0708. Terry Terman và Daniel S. Marcus nhận xét rằng $472\times 3 = 1416$ cho 5 chữ số của Pi làm tròn ($\pi\approx 3.1415926\approx 3.1416$).

HONG HA

Nhận xét. Bài này không quá khó, các bạn sau có lời giải tốt trình bày sạch đẹp được thưởng kì này: *Hoàng Minh Vũ*, 7D, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Đoàn Nguyên Vũ*, 6B, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Phạm Đăng Việt Bách*, 6C4, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Đức Dũng*, 6E, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Thị Ngọc Anh,* 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

Các bạn sau được khen: *Nguyễn Hải Triều*, 6B, *Nguyễn Sĩ Bách*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Võ Sỹ Quốc Anh*, 6_1, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Võ Trọng Khải*, *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; *Trần Hữu Nhân*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Tiến Dũng*, *Dương Nguyên Khánh*, *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

TTT



ĐỀ THI SMO VÒNG 2 NĂM 2010 VÀ 2011

VÕ QUỐC BÁ CẨN
Trường Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, Hà Nội
(Dịch và giới thiệu)

Olympic Toán học Singapore (SMO - Singapore Mathematics Olympiad) là kì thi Toán học lớn nhất Singapore. Nguồn gốc của kì thi là cuộc thi Toán học giữa các trường (Inter-School Mathematical Competition), bắt đầu từ những năm 1950. Đến những năm 1980, kì thi mở rộng để tất cả các trường THCS và THPT có thể tham gia và đổi tên là Singapore Secondary Schools Mathematics Competitions (dành cho khối THCS) Singapore Mathematical Olympiad (dành cho khối THPT).

Từ năm 1995, kì thi có ba khối Junior, Senior và Open, và được gọi chung là Singapore Mathematics Olympiad.

Khối Junior dành cho lớp 7 - 8, khối Senior dành cho lớp 9 - 10, còn khối Open không có giới hạn độ tuổi. Học sinh có thể tham gia đồng thời khối Junior/Senior và Open, nhưng không thể đồng thời tham gia khối Junior và Senior vì ngày thi của hai khối trùng nhau.

Đối với cả ba khối, kì thi gồm 2 vòng. Vòng 1 (diễn ra vào đầu tháng 6) là bài thi gồm trắc nghiệm và điền đáp án; làm 25 câu trong 2 giờ 30 phút. Đối với khối Junior và Senior, có 5 câu trắc nghiệm và 20 câu tự luận. Đối với khối Open, cả 25 câu đều là tự luận. Tất cả các câu đều chiếm 1 điểm. Khoảng 10% thí sinh có điểm cao nhất trong vòng 1 được mời tham dự vòng 2 (diễn ra vào cuối tháng 6), là một bài thi tự luận gồm 5 câu. Thời gian làm bài là 3 giờ đối với khối Junior và 4 giờ đối với khối Senior và Open. Mỗi câu của vòng 2 chiếm 10 điểm.

Kì thi SMO có 4 loại giải: Huy chương Vàng, Bạc, Đồng và Bằng khen (Honorable Mentions). Đối với những thí sinh không được dự vòng 2, điểm của vòng 1 sẽ được sử dụng để xét Huy chương Bạc, Đồng và Bằng khen. Tất cả các thí sinh dự vòng 2 đều nhận được ít nhất Huy chương Bạc, và tổng điểm 2 vòng sẽ được dùng để xét Huy chương Vàng.

Sau vòng 2, 20 thí sinh mang quốc tịch Singapore có điểm cao nhất sẽ được mời tham dự trại hè huấn luyện. Họ sẽ có 3 bài kiểm tra, mỗi bài mô phỏng một ngày thi IMO. Điểm đặc biệt là đề thi của bài kiểm tra thứ nhất dễ hơn mức độ IMO, và điểm mỗi bài của bài này chỉ là 3,5 điểm thay vì 7 điểm. Sau đó, 6 thí sinh với tổng điểm 3 bài kiểm tra cao nhất sẽ được đại diện Singapore dự thi IMO.

Trong số này và các số tới đây, chúng tôi sẽ giới thiệu đề thi vòng 2, khối Junior, của kì thi SMO. Dưới đây là đề thi của hai năm 2010 và 2011.

Năm 2010

Bài 1. Cho hình vuông ABCD. Các đường chéo AC và BD của hình vuông cắt nhau tại điểm S. Gọi P là trung điểm của cạnh AB. Các đường thẳng AC và PD cắt nhau tại điểm M, các đường thẳng BD và PC cắt nhau tại điểm N. Chứng minh rằng tứ giác PMSN ngoại tiếp một đường tròn và bán kính của đường tròn đó bằng MP – MS.

Bài 2. Sử dụng các chữ số 1, 3, 4, 7, 9 (mỗi chữ số dùng đúng một lần) để tạo thành các số tự nhiên có năm chữ số không chia hết cho 11. Tính tổng của tất cả các số này.

Bài 3. Giả sử n là số nguyên dương có tính chất: Tồn tại các số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$

không nhất thiết phân biệt nhau nhưng có ít nhất năm số đôi một khác nhau thỏa mãn với mọi $1 \le i < j \le n$, đều tồn tại hai số k, l, mỗi số đều khác với từng số trong i và j, sao cho $a_i + a_j = a_k + a_l$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

Bài 4. Một học sinh thực hiện phép tính m chia cho n với n là số nguyên dương không vượt quá 100. Cậu ta thu được kết quả $\frac{m}{n} = \overline{0,167a_1a_2...}$

Chứng minh rằng học sinh này đã tính sai ở đâu đó.

Bài 5. Trên bảng có viết các số $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2010}$. Mỗi bước, người ta chọn hai số x, y nào đó trên bảng, xóa đi và thay bằng số $x + y + xy$. Quá trình như vậy được thực hiện lặp lại cho đến khi chỉ còn một số trên bảng. Tìm số đó.

Năm 2011

Bài 1. Cho bốn số thực dương a, b, c, d. Đặt $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ và $y = \sqrt{c^2 + d^2}$. Chứng minh rằng $xy \ge ac + bd$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2) với $0 < r_1 < r_2$, tiếp xúc trong với nhau tại điểm P. Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O_1) song song với đường kính của đường tròn (O_2) tại P, cắt đường tròn (O_2) tại hai điểm M và N. Chứng minh rằng PR là phân giác của góc MPN.

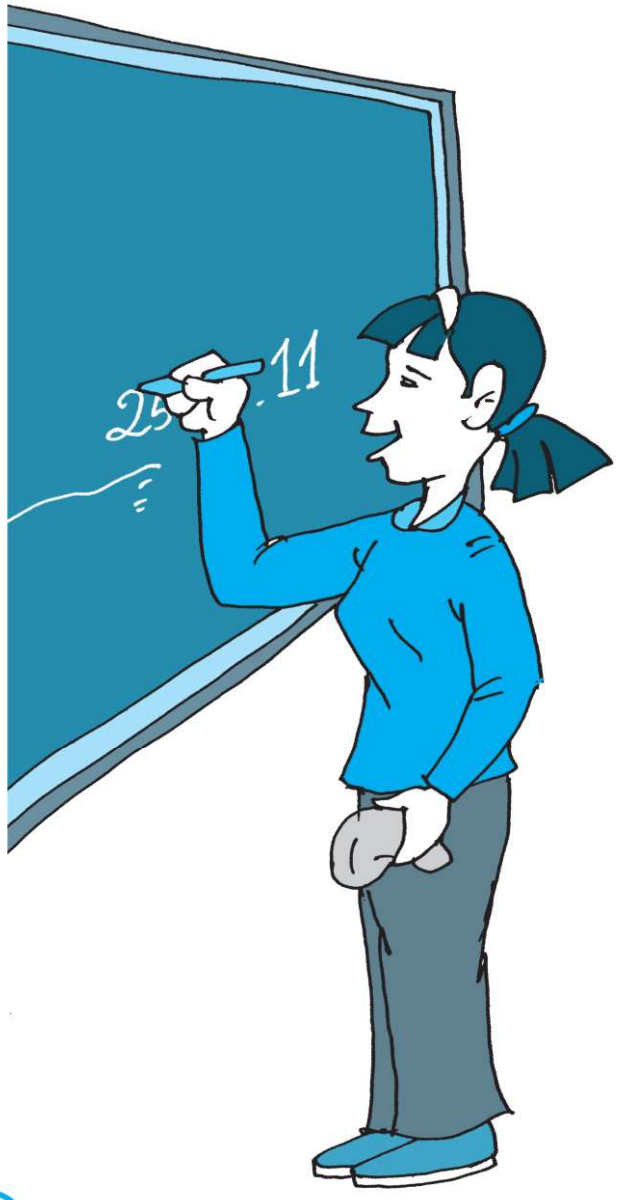
Bài 3. Cho $S_1, S_2, ..., S_{2011}$ là các tập hợp khác rỗng, các phần tử ở mỗi tập hợp là các số tự nhiên liên tiếp, thỏa mãn hai tập hợp bất kì đều có ít nhất một phần tử chung. Chứng minh rằng các tập hợp $S_1, S_2, ..., S_{2011}$ có một phần tử chung x nào đó.

Bài 4. Xét các số nguyên dương $a_o, a_1, ..., a_{2011}$, trong đó $a_o = 2^{2011} - 1$ và a_m là ước lẻ lớn nhất của $3a_{m-1} + 1$ với mọi $m = 1, 2, ..., 2010$. Tìm a_{2011}.

Bài 5. Trên bảng có viết số 10. Mỗi bước, bạn A được phép thực hiện một trong các thao tác sau:

- Xóa một số 1 trên bảng, và thay bằng số 10.
- Xóa một số 10 trên bảng, và thay bằng một số 1 và một số 25.
- Xóa một số 25 trên bảng, và thay bằng hai số 10.

Biết rằng, sau một số hữu hạn bước bạn A thực hiện các thao tác theo quy tắc trên, trên bảng có đúng một trăm số 1. Hỏi lúc đó, tổng tất cả các số trên bảng có thể đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?



ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

QUẬN BA ĐÌNH, TP. HÀ NỘI

Năm học 2019 - 2020
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(4,0 điểm)*

Cho các biểu thức: $A = (\sqrt{2,4} + \sqrt{5,4} - \sqrt{15})(\sqrt{2,4} - \sqrt{5,4} + \sqrt{15})$ và $B = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}.\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}}$.

Chứng minh rằng A và B là các số nguyên.

Bài 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x - \sqrt{5x} + 4 = 2\sqrt{x-1}$.

b) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + \frac{1}{b} \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{ab}{a^2 + b^2}$.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

a) Tìm số tự nhiên a biết a + 20 và a – 69 đều là số chính phương.

b) Cho A là một tập hợp gồm ba số tự nhiên có tính chất: Tổng hai phần tử tùy ý của A là một số chính phương. Chứng minh rằng trong tập hợp A có không quá một số lẻ.

Bài 4. *(4,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) và đường cao AH.

a) Cho biết AH = 12 cm và BC = 25 cm. Tính tổng AB + AC.

b) Đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \ge \frac{9}{BC^2}$.

Bài 5. *(4,0 điểm)* Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, dây CD (C thuộc cung AD), gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ A đến CD, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho CM = DN.

a) Chứng minh BN vuông góc với CD.

b) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh $S_{\Delta AIB} = S_{\Delta AMC} + S_{\Delta CID} + S_{\Delta DNB}$.

CÁCH ĐẶT MUA TẠP CHÍ NĂM HỌC 2020 - 2021

*** Cá nhân đặt mua tại các bưu cục của VNPT theo mã số:** Tạp chí Toán Tuổi thơ 1 - **C169**; Tạp chí Toán Tuổi thơ 2 - **C169.1**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2018 - **C169.2**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2018 - **C169.3**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2019 - **C169.4**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2019 - **C169.5**.

*** Đơn vị đặt mua xin liên hệ trực tiếp Tòa soạn theo số 024.35682701.**

Email: tapchitoantuoitho@gmail.com

ĐỀ KIỂM TRA CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 9

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NỘI - AMSTERDAM

Năm học 2019 - 2020

Thời gian làm bài: 150 phút

CAO VĂN DŨNG

Bài 1. *(5 điểm)*

1) Tìm các số x sao cho $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-3\sqrt{x}+4}$ là số nguyên.

2) Cho các số thực a, b, c khác –1 thoả mãn a + b + c + 2 = abc. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}$.

Bài 2. *(5 điểm)*

1) Giải phương trình $2x+5\sqrt{x}=11+\dfrac{14}{x-2}$.

2) Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn xy(x + y) + 2 chia hết cho 3. Chứng minh xy(x + y) – 7 chia hết cho 9.

3) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho 2p – 1, 2q – 1 và 2pq – 1 đều là số chính phương.

Bài 3. *(3 điểm)*

1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\le\dfrac{a}{1+bc}+\dfrac{b}{1+ca}+\dfrac{c}{1+ab}\le\dfrac{1}{4abc}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

2) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn xy + yz + zx > 0 và x + y ≤ z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+z}}+\dfrac{z}{x+y}$.

Bài 4. *(6 điểm)*

1) Cho tam giác ABC nhọn với AB = c, BC = a, CA = b. Gọi BE và CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ và $EF\le\dfrac{2a+b+c}{8}$.

2) Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD. Gọi I là trung điểm AD. Gọi E và F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC và IB. Các đường thẳng BF và CE cắt nhau tại điểm K. Đường thẳng qua A song song với BC cắt KB, KC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh MA.BD = NA.DC và KA đi qua điểm L đối xứng với D qua trung điểm BC.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A. Tính $\dfrac{S_{ABC}}{S_{KBC}}$.

Bài 5. *(1 điểm)*

Cho A là tập hợp con của tập hợp {1; 2; 3; ...; 100} trong đó phần tử nhỏ nhất của A là 1, phần tử lớn nhất của A là 100. Giả sử A có tính chất: Với mỗi $x\in A$, $x\ne 1$ thì x hoặc bằng tổng 2 phần tử thuộc A hoặc bằng 2 lần 1 phần tử thuộc A. Tìm số phần tử nhỏ nhất có thể của tập hợp A.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ VÀO 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN-ĐHQGHN

Năm học 2019 - 2020

Môn thi: Toán

(Đề đăng trên TTT2 số 208)

Bài 1. 1) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(2x+y)(3x+2y)=15\\(2x+y)(6+xy)=15.\end{cases}$$

Suy ra $3x+2y=6+xy$

$\Leftrightarrow (x-2)(y-3)=0.$

• Với $x=2$ ta có $(y+4)(2y+6)=15$

$\Leftrightarrow 2y^2+14y+9=0$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-7\pm\sqrt{31}}{2}.$

• Với $y=3$ ta có $(2x+3)(3x+6)=15$

$\Leftrightarrow 2x^2+7x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{41}}{4}.$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x,y)=\left(2;\frac{-7\pm\sqrt{31}}{2}\right),\left(\frac{-7\pm\sqrt{41}}{4};3\right).$$

2) Đặt $x=\dfrac{2a+b}{a-b}$, $y=\dfrac{2b+c}{b-c}$, $z=\dfrac{2c+a}{c-a}.$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $x+y+z=3+xy+yz+zx.$

Ta có

$$x+1=\frac{3a}{a-b},\ x-2=\frac{3b}{a-b},$$

$$y+1=\frac{3b}{b-c},\ y-2=\frac{3c}{b-c},$$

$$z+1=\frac{3c}{c-a},\ z-2=\frac{3a}{c-a}.$$

Suy ra

$(x+1)(y+1)(z+1)=(x-2)(y-2)(z-2)$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)+1=3(x+y+z)-8.$

$\Leftrightarrow x+y+z=3+xy+yz+zx$ (đpcm).

Bài 2. 1) Ta có

$(\overline{ab})^2=(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$

Có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của b^2. Để có chữ số tận cùng là b thì $b=5$ hoặc $b=6$.

• Với $b=5$ ta có $(\overline{a5})^2=100a^2+100a+25$ có hai chữ số tận cùng là 25 nên $a=2$ và thu được $\overline{ab}=25.$

• Với $b=6$ ta có $(\overline{a6})^2=100a^2+120a+36$ có hai chữ số tận cùng là hai chữ số tận cùng của $20a+36$.

Thử với $a=1,2,\ldots,9$ thu được $a=7$ khi đó $7.20+36=176$ có hai chữ số tận cùng là 76 và thu được $\overline{ab}=76.$

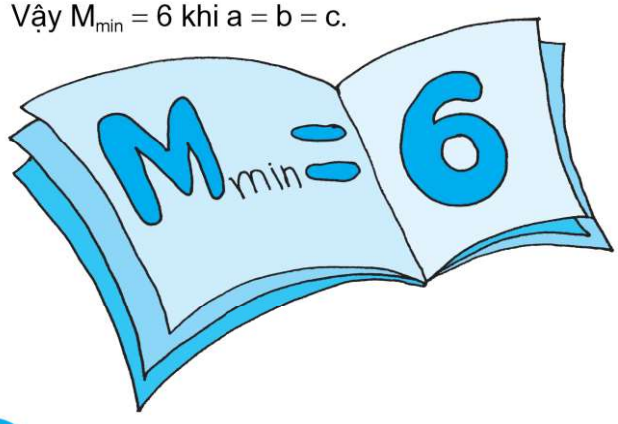
2) Ta có $(p-a)(p-b)(p-c)$

$=\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}$

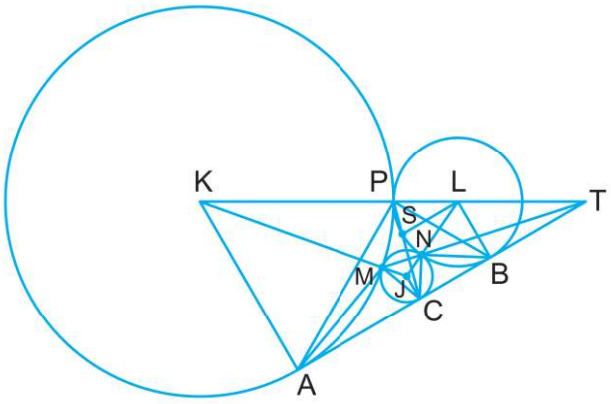
$\le\dfrac{c}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{b}{2}$

$\Rightarrow M\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}}\ge 3\sqrt[3]{8}=6.$

Vậy $M_{min}=6$ khi $a=b=c.$



Bài 3.



1) Ta thấy KA // LB do cùng vuông góc với AB nên

$$\widehat{APK} + \widehat{LPB} = \frac{180^\circ - \widehat{PKA}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{PLB}}{2}$$

$$= 180^\circ - \frac{\widehat{PKA} + \widehat{PLB}}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow PB \perp PA.$

2) Tương tự câu 1) thì $\widehat{CMA} = \widehat{CNB} = 90^\circ.$

Do đó $\widehat{MNB} = 90^\circ + \widehat{CNM} = 90^\circ + \widehat{MCA}$

$= 90^\circ + (90^\circ - \widehat{MAC}) = 180^\circ - \widehat{MAC}.$

Từ đó suy ra bốn điểm A, M, N, B cùng nằm trên một đường tròn.

3) Gọi T là giao điểm của AB và KL.

Dễ thấy

$$\frac{MK}{MJ}.\frac{NJ}{NL}.\frac{TL}{TK}$$

$$= \frac{MK}{MJ}.\frac{NJ}{NL}.\frac{LB}{KA}$$

$$= \frac{MK}{KA}.\frac{NJ}{MJ}.\frac{LB}{NL} = 1.$$

Theo định lí Menelaus trong tam giác KJL thì M, N, T thẳng hàng.

Mặt khác

$\widehat{LPB} = 90^\circ - \widehat{APK} = 90^\circ - \widehat{PAK} = \widehat{PAB}$

nên PT tiếp xúc với đường tròn (PAB).

Từ đó ta có $TP^2 = TA.TB = TM.TN = TC^2$

hay TP = TC.

Suy ra $\widehat{TCP} = \widehat{TPC} = \widehat{LSP}$ nên LS // AB.

Bài 4. Với a, b, c > 0 và ab + bc + ca = 1 nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}.$

Ta có

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = 1 + \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{ab+bc+ca}$$

$$\geq 1 + \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{ab+bc+ca+c^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2+2c^2}{(c+a)(c+b)}.$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{a^2+b^2+2c^2}{(c+a)(c+b)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+2c^2)(a+b) + 8abc$$

$$\geq 2(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)(a+b) + 2c^2(a+b) + 8abc$$

$$\geq 2a^2(b+c) + 2b^2(c+a) + 2c^2(a+b) + 4abc$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)(a+b) + 4abc$$

$$\geq 2ab(a+b) + 2c(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 2c(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-2c) \geq 0$$

(đúng vì $a \geq c$, $b \geq c$).



VỀ MỘT TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

NGUYỄN TIẾN LÂM

(Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Đề thi vào 10 chuyên Toán của Hà Nội năm 2020 có bài toán số học khá hay, nguồn gốc là một đề thi Vùng vịnh (Baltic) năm 2018. Trong bài viết này xin trình bày một tính chất liên quan về số chính phương, từ đó dẫn ra một số bài toán tương tự như bài toán thi chuyên Toán của Hà Nội năm vừa rồi.

Tính chất số học của số chính phương

Với $a \in \mathbb{N}$ thì

- Khi chia a^2 cho 3 thì được một trong hai số dư là 0 hoặc 1.
- Khi chia a^2 cho 4 thì được một trong hai số dư là 0 hoặc 1.
- Khi chia a^2 cho 5 thì được một trong ba số dư là 0; 1 hoặc 4.
- Khi chia a^2 cho 8 thì được một trong ba số dư là 0; 1 hoặc 4.
- Khi chia a^2 cho 7 thì được một trong bốn số dư là 0; 1; 2 hoặc 4.

Chứng minh. Ta chứng minh một trường hợp, các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự.

Ta xét ba trường hợp

✻ Nếu $a \equiv 0 \pmod 3$ thì $a^2 \equiv 0 \pmod 3$.

✻ Nếu $a \equiv 1 \pmod 3$ thì $a^2 \equiv 1 \pmod 3$.

✻ Nếu $a \equiv 2 \pmod 3$ thì $a^2 \equiv 4 \pmod 3$ tức là $a^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Tóm lại, khi chia a^2 cho 3 thì được một trong hai số dư là 0 hoặc 1.

Lưu ý tính chất trên chỉ là điều kiện cần chứ không phải điều kiện đủ để kiểm tra một số có phải là số chính phương hay không, nghĩa là nếu một số chia 3 dư 0 hoặc 1 thì chưa chắc khẳng định được số đó có phải là số chính phương hay không.

Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $[\sqrt{5n+1}] = [\sqrt{5n+2}] = [\sqrt{5n+3}]$, trong đó [x] là kí hiệu cho số nguyên lớn nhất không vượt quá x, còn được gọi là phần nguyên của x.

Lời giải. Ta đặt $a = [\sqrt{5n+1}]$ thì a là số nguyên và theo định nghĩa về phần nguyên ta phải có $a \le [\sqrt{5n+1}] < a+1$

hay tương đương với $a^2 \le 5n+1 < (a+1)^2$.

Từ bất đẳng thức trên, ta suy ra

$a^2 < 5n+2 \le (a+1)^2$.

Tuy nhiên $5n + 2 \equiv 2 \pmod 5$ nên $5n + 2$ không là số chính phương, nói cách khác dấu bằng ở bất đẳng thức $5n + 2 < (a + 1)^2$ không xảy ra và kéo theo $a^2 < 5n + 2 < (a + 1)^2$.

Từ đó ta lại có $a^2 < 5n + 3 \le (a + 1)^2$.

Hoàn toàn tương tự, vì $5n + 3$ cũng không phải là số chính phương nên $a^2 < 5n + 3 < (a + 1)^2$.

Tóm lại ta chứng minh được

$a^2 < 5n+2 < 5n+3 < (a+1)^2$ hay

$a < \sqrt{5n+2} < \sqrt{5n+3} < a+1$.

Suy ra $[\sqrt{5n+2}]=[\sqrt{5n+3}]=a$.

Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 2. Xét các số nguyên dương m, n thỏa mãn $\sqrt{11}-\frac{m}{n}>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{11}-\frac{m}{n}\geq\frac{3(\sqrt{11}-3)}{mn}$.

(Đề thi vào 10 chuyên Toán Hà Nội năm 2020)

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $11n^2\geq\left(m+\frac{3(\sqrt{11}-3)}{m}\right)^2$

$=m^2+6(\sqrt{11}-3)+\frac{9(\sqrt{11}-3)^2}{m^2}$.

Có thể kiểm tra trực tiếp với $m\in\{1;2\}$ thì vế phải nhỏ hơn 11 và do đó nhỏ hơn $11n^2$.

Ta xét với $m\geq 3$ ta có

$m^2+6(\sqrt{11}-3)+\frac{9(\sqrt{11}-3)^2}{m^2}$

$\leq m^2+6(\sqrt{11}-3)+(\sqrt{11}-3)^2$

$=m^2+2$.

Ta sẽ chứng minh $11n^2\geq m^2+2$.

Thật vậy, từ giả thiết suy ra $11n^2>m^2$, kéo theo $11n^2\geq m^2+1$.

Tuy nhiên nếu $11n^2=m^2+1$ thì m^2 chia 11 dư 10 điều này không xảy ra do số chính phương chia 11 không thể dư 10.

Do đó $11n^2>m^2+1$ và dẫn tới $11n^2\geq m^2+2$.

Phép chứng minh hoàn tất.

Nhận xét. Một câu hỏi đặt ra là hằng số α tốt nhất để bất đẳng thức $\sqrt{11}-\frac{m}{n}\geq\frac{\alpha}{mn}$ đúng là bao nhiêu?

Chứng minh. Tương tự như trên, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $11n^2\geq m^2+\frac{\alpha^2}{m^2}+2\alpha$.

Lưu ý là cặp (m, n) = (3; 1) thỏa mãn điều kiện $\sqrt{11}-\frac{m}{n}>0$ nên trong bất đẳng thức trên chọn m = 3, n = 1 thì ta có $11\geq 9+2\alpha+\frac{\alpha^2}{9}=\left(3+\frac{\alpha}{3}\right)^2$.

Từ đó $\alpha\leq 3(\sqrt{11}-3)$.

Chứng minh trên khẳng định $\alpha=3(\sqrt{11}-3)$ là hằng số tốt nhất theo nghĩa không thể thay bằng số lớn hơn.

Bài toán 3. Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a\sqrt{3}>b\sqrt{7}$. Chứng minh rằng $a\sqrt{3}-b\sqrt{7}>\frac{1}{a+b}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $3a^2-7b^2\geq 1$.

Xét các khả năng sau

- Nếu $3a^2-7b^2=1$ hay $3a^2=7b^2+1$, dẫn tới $7b^2\equiv 2\pmod 3$, suy ra $b^2\equiv 2\pmod 3$, vô lí.
- Nếu $3a^2-7b^2=2$ hay $3a^2=7b^2+2$, dẫn tới $3a^2\equiv 2\pmod 7$, suy ra $a^2\equiv 3\pmod 7$, vô lí.

Từ hai điều trên ta suy ra $3a^2-7b^2\geq 3$.

Do đó $a\sqrt{3}-b\sqrt{7}=\frac{3a^2-7b^2}{a\sqrt{3}+b\sqrt{7}}$

$\geq\frac{3}{a\sqrt{3}+b\sqrt{7}}$

$>\frac{3}{a\sqrt{9}+b\sqrt{9}}=\frac{1}{a+b}$.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có bất đẳng thức $\{n\sqrt{3}\}>\frac{1}{n\sqrt{3}}$, trong đó $\{x\}=x-[x]$ là phần lẻ của số thực x.

Lời giải. Đặt $m=[n\sqrt{3}]$ thì $m\in\mathbb{N}$ và $m\leq n\sqrt{3}$.

Tuy nhiên đẳng thức không thể xảy ra do $n\sqrt{3}$ là số vô tỉ và do đó ta phải có

$3n^2-m^2\geq 1$.

Nếu $3n^2 - m^2 = 1$ hay $m^2 + 1 = 3n^2 \equiv 0 \pmod 3$, dẫn tới $m^2 \equiv 2 \pmod 3$, vô lí.

Do đó $3n^2 - m^2 \geq 2$.

Sử dụng kết quả trên ta có

$$\{n\sqrt{3}\} = n\sqrt{3} - m = \frac{3n^2 - m^2}{n\sqrt{3} + m}$$

$$\geq \frac{2}{n\sqrt{3} + n\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{3}}.$$

Nhận xét. Thực ra, ta còn có thể chứng minh hằng số c lớn nhất là 1 sao cho bất đẳng thức $\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Thật vậy ta sẽ chỉ ra nếu $c > 1$ thì luôn tồn tại số nguyên dương n sao cho $\{n\sqrt{3}\} \leq \frac{c}{n\sqrt{3}}$.

Giả sử ngược lại $\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ với mọi số nguyên dương n. Ta viết lại

$$n\sqrt{3} - m > \frac{c}{n\sqrt{3}} \Rightarrow m^2 < 3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} \quad (*)$$

Ta sẽ chỉ ra tồn tại vô hạn cặp số nguyên dương (m, n) là nghiệm của phương trình $3n^2 - m^2 = 2$

(lưu ý rằng nếu m, n thỏa mãn phương trình $3n^2 - m^2 = 2$ thì $m = [n\sqrt{3}]$).

Rõ ràng bộ $(m_o, n_o) = (1; 1)$ thỏa mãn phương trình $3n^2 - m^2 = 2$.

Nếu bộ (m_i, n_i) thỏa mãn phương trình thì $(m_{i+1}, n_{i+1}) = (2m_i + 3n_i, m_i + 2n_i)$ cũng thỏa mãn phương trình vì

$$3n_{i+1}^2 - m_{i+1}^2 = 3(m_i + 2n_i)^2 - (2m_i + 3n_i)^2$$

$$= 3n_i^2 - m_i^2 = 2.$$

Từ chứng minh trên ta thấy rằng luôn tồn tại cặp số nguyên dương (m_k, n_k) thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3n_k^2 - m_k^2 = 2$ đồng thời $3n_k^2 > \frac{c^2}{2c - 2}$.

Khi đó

$$\frac{c^2}{3n_k^2} - 2c < -2$$

$$\Rightarrow 3n_k^2 + \frac{c^2}{3n_k^2} - 2c < 3n_k^2 - 2 = m_k^2.$$

Do đó, nếu ta chọn $n = n_k$ thì đẳng thức (*) sẽ sai.

Một số bài toán luyện tập

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi n là số tự nhiên thì

$$[\sqrt[3]{9n+1}] = [\sqrt[3]{9n+2}] = \ldots = [\sqrt[3]{9n+7}].$$

Bài 2. Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} \geq \frac{2(\sqrt{7} - 2)}{mn}.$$

Bài 3. a) (Israel 2010) Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn $\sqrt{23} - \frac{m}{n} > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{23} - \frac{m}{n} \geq \frac{3}{mn}$.

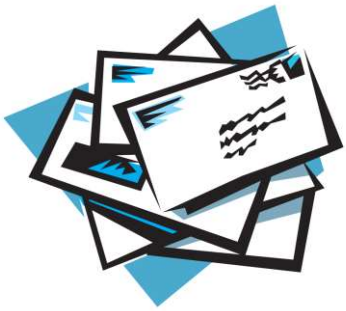
b) Xét các số nguyên dương m, n thỏa mãn $\sqrt{23} - \frac{m}{n} > 0$. Chứng minh rằng hằng số β tốt nhất để bất đẳng thức $\sqrt{23} - \frac{m}{n} \geq \frac{\beta}{mn}$ luôn đúng là $4(\sqrt{23} - 4)$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $\{n\sqrt{7}\} > \frac{3\sqrt{7}}{14n}$.

Bài 5. Cho p là số nguyên tố có dạng $8k + 7$. Chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{p} - \frac{a}{b} > 0$ thì $\sqrt{p} - \frac{a}{b} > \frac{1}{ab}$.

Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(207). Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn $x^y = z - 1$.

Lời giải. Ta có $x^y = z - 1 \Leftrightarrow x^y + 1 = z$.

Vì x, y, z là các số nguyên tố nên $x \geq 2$, $y \geq 2$ và $z \geq 5$.

Do đó z là số nguyên tố lẻ nên x^y là số chẵn.

Suy ra $x = 2$, khi đó $z = 2^y + 1$.

Nếu y lẻ thì giả sử $y = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), ta có

$z = 2^y + 1 = 2^{2k+1} + 1 = 2.4^k + 1$

$= 2.[BS(3) + 1] + 1 = BS(3)$ nên $z \vdots 3$, vô lí vì z là số nguyên tố lớn hơn 3.

Do đó y chẵn, suy ra $y = 2$,

khi đó $z = 2^2 + 1 = 5$.

Vậy các số cần tìm là $x = y = 2$, $z = 5$.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay, không dễ, sử dụng kiến thức lớp 6. Có nhiều bạn tham gia giải và đa số giải đúng. Xin khen một số bạn trình bày gọn gàng, sạch sẽ: *Lê Ngọc Xuân Thơ*, 6A3, *Nguyễn Anh Thư*, 7A1 THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Hán Duy Anh*, *Phùng Thu Thủy*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**, *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; *Phạm Thị Thu Ngân*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Lê Thị Khánh Hằng*, *Nguyễn Kim Mạnh*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Phan Thùy Trâm*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Hoàng Thanh Hoa*, 6D, *Chu Thanh Ngọc*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

PHÙNG KIM DUNG

Bài 2(207). Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số dạng $\overline{abccba}$ chia hết cho 7, trong đó a, b, c là các chữ số thỏa mãn $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$ và $0 < a \leq 9$.

Lời giải. Ta có

$\overline{abccba} = 100001a + 10010b + 1100c$

$= 7(14286a + 1430b + 157c) - (a - c)$.

- Khi $a - c = -7$ ta có 2 cặp (a, c) thỏa mãn là (1; 8) và (2; 9).
- Khi $a = c$ ta có 9 cặp (a, c) thỏa mãn.
- Khi $a - c = 7$ ta có 3 cặp (a, c) thỏa mãn là (7; 0); (8; 1) và (9; 2).

Vậy có tất cả $2 + 9 + 3 = 14$ cặp (a, c) thỏa mãn.

Mặt khác ta có 10 cách chọn số b.

Do đó có tất cả $14.10 = 140$ số thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn tham gia giải bài, hầu hết các lời giải gửi đến đều đúng. Các bạn đây có lời giải tốt: *Nguyễn Duy Thành*, *Nguyễn Huy Hoàng*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Dương Trung Quốc*, 6D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Hải Triều*, 6B, *Nguyễn Sĩ Bách*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Phan Quang Triết*, *Phan Hữu Cường*, *Nguyễn Gia Bảo*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Minh Hoàng*, *Võ Trọng Khải*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Phạm Đăng Việt Bách*, 6C4, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, *Nguyễn Hoàng Nhật Nam*, 6A12, THCS Vinschool Times City, Q. Hai Bà Trưng, **Hà Nội**.

CAO VĂN DŨNG

Bài 3(207). Anh Thọ là một vận động viên chơi cờ tướng. Để luyện tập điều độ, mỗi ngày anh chơi ít nhất 1 ván, mỗi tuần anh chơi không quá 13 ván. Chứng minh rằng tồn

tại một số ngày liên tiếp anh chơi tổng số 20 ván.

Lời giải. Gọi số ván cờ anh Thọ chơi ngày thứ nhất, thứ hai,…, thứ hai mươi lần lượt là $a_1, a_2, ..., a_{20}$.

Xét 20 tổng:

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

...

$S_{20} = a_1 + a_2 + ... + a_{20}$.

Vì trong 20 ngày anh chơi không quá 3.13 = 39 ván nên ta có

$1 \le S_1 < S_2 < S_3 < ... < S_{20} < 39$.

• Nếu trong 20 tổng ấy, có một tổng chia hết cho 20 thì giá trị đó bằng 20, bài toán được giải xong.

• Nếu trong 20 tổng ấy không tồn tại tổng nào chia hết cho 20 thì theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai tổng có cùng số dư khi chia cho 20, chẳng hạn hai tổng đó là S_m và S_n $(1 \le m < n \le 20)$.

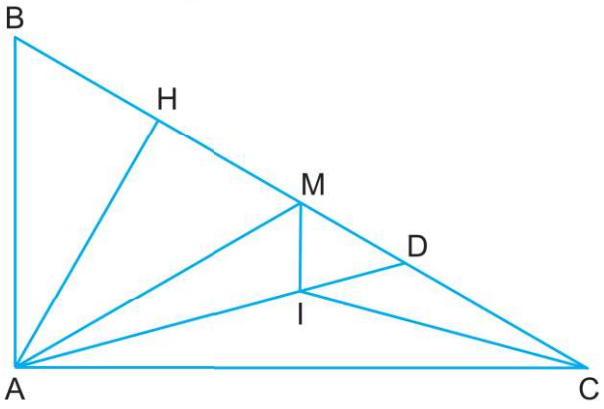
Khi đó $S_n - S_m \vdots 20 \Rightarrow S_n - S_m = 20$.

Suy ra $a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n = 20$ (đpcm).

Nhận xét. Đa số các bạn tham gia giải đúng bài này. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn và trình bày sạch đẹp: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Trần Bảo Ngọc*, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Phan Thùy Trâm*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Nguyễn Hải Triều*, 6B, *Lê Văn Quang Hiếu*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Phùng Khánh Linh*, 7A1, THCS Nghi Hương, TX. Cửa Lò; *Phan Hữu Cường*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, *Nguyễn Minh Huy*, *Hán Duy Anh*, *Nguyễn Duy Thành*, *Nguyễn Quang Khải*, 6A2, *Nguyễn Trung Kiên*, 7A1, *Nguyễn Trung Hiếu*, 7A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài 4(207). Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^o$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho AB + BD = AC + CD. Tia phân giác trong của $\widehat{ACB}$ cắt AD tại I. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh MI song song với AB.



Lời giải. Kẻ AH ⊥ BC tại H.

Ta có ΔABC vuông tại A và $\widehat{ABC} = 60^o$ nên BC = 2AB, AB = 2BH.

Tam giác AHC vuông có $\widehat{ACH} = 30^o$ nên AC = 2AH.

Theo giả thiết AB + BD = AC + CD

⇔ AB + 2BD = AC + CD + BD = AC + BC = 2AH + 2AB.

⇔ 2BD = 2AH + AB = 2AH + 2BH

⇔ BD = AH + BH ⇔ AH = BD − BH = HD.

Suy ra ΔAHD vuông cân tại H

$\Rightarrow \widehat{HAD} = 45^o \Rightarrow \widehat{DAC} = 15^o$.

Vì CI là phân giác của góc ACB nên $\widehat{ICA} = 15^o$.

Do đó $\widehat{IAC} = \widehat{ICA}$

⇒ ΔIAC cân tại I hay IA = IC.

Mặt khác ΔABC vuông tại A có M là trung điểm của BC nên MA = MC.

Từ đó ta có M, I thuộc đường trung trực của đoạn AC nên MI ⊥ AC ⇒ MI // AB.

Nhận xét. Một số bạn giải bài toán này bằng cách sử dụng định lí Thales đảo, kiến thức này đã vượt quá chương trình lớp 7. Các bạn sau có lời giải tốt: *Dương Trung Quốc*, 6D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm

Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Gia Bảo*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Minh Hoàng*, *Võ Trọng Khải*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; *Võ Thị Minh Huyền*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

HỒ QUANG VINH

Bài 5(207). Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $x^3 + y^3 = 2z^3$;

ii) $x + y + 4z$ là tích của hai số nguyên tố.

Lời giải. Với mọi số nguyên a, ta có $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6.

Từ đây, ta suy ra

$x + y + 4z = -(x^3 - x) - (y^3 - y) - 4(z^3 - z) + x^3 + y^3 + 4z^3$

$= -(x^3 - x) - (y^3 - y) - 4(z^3 - z) + 6z^3$ chia hết cho 6.

Vì $x + y + 4z$ là tích của hai số nguyên tố nên $x + y + 4z = 6$.

Mặt khác, do x, y, z là các số nguyên dương nên $x + y + 4z \geq 6$.

Theo kết quả trên thì dấu đẳng thức trong đánh giá phải xảy ra, tức ta phải có

$x = y = z = 1$.

Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có duy nhất một bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn yêu cầu đề bài là (1; 1; 1).

Nhận xét. Điểm mấu chốt trong lời giải chính là nhận xét $a^3 - a$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên a. Hầu hết các lời giải gửi đến tòa soạn đều sử dụng nhận xét này.

Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả: *Huỳnh Nguyên Phát*, 8A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Ngô Thị An Bình*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Tp Vinh, **Nghệ An**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Hán Duy Anh*, *Nguyễn Quang Khải*, *Nguyễn Minh Huy*, *Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, *Nguyễn Duy Thành*, *Phùng Thu Thủy*, 6A2, *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Nguyễn Ngô Quang Tùng*, 8A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**.

VÕ QUỐC BÁ CẨN

Bài 6(207). Giải phương trình

$x^3 + 3x^2 + 1 = \sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1-6x}$.

Lời giải. ĐKXĐ $x \geq -\frac{1}{4}$.

Với điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$ ta có

$x^3 + 3x^2 + 1 = x^2(x + 3) + 1 > 0$.

Suy ra $\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1-6x} > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1-6x} > 0$.

Do đó $1 + 4x \geq 0$; $1 - 6x > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\sqrt{1+4x} = \sqrt{1.(1+4x)} \leq \frac{1+(1+4x)}{2} = 1+2x. \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{1-6x} = \sqrt[3]{1.1.(1-6x)}$$

$$\leq \frac{1+1+(1-6x)}{3} = 1-2x. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1-6x} \leq (1+2x)(1-2x). \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh

$$x^3+3x^2+1 \geq (1+2x)(1-2x). \quad (4)$$

Thật vậy $(4) \Leftrightarrow x^3+7x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x+7) \geq 0$ (luôn đúng với mọi $x \geq -\frac{1}{4}$).

Do đó (4) luôn đúng với mọi $x \geq -\frac{1}{4}$.

Từ (3) và (4) suy ra

$$\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1-6x} \leq x^3 + 3x^2 + 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{0\}$.

Nhận xét. Một số em khi dùng bất đẳng thức AM–GM nhưng đã không chứng minh $1 + 4x \geq 0$; $1 - 6x \geq 0$. Các bạn sau có lời giải tốt: *Huỳnh Nguyên Phát*, 8A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3,

THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trần Minh Hoàng*, *Võ Trọng Khải*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 9D5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Đức Trọng*, 9E, THCS Đa Tốn, Gia Lâm, **Hà Nội**; *Lương Minh Hiếu*, *Trần Minh Khôi*, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Hà Quang Tùng*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

NGUYỄN NGỌC HÂN

Bài 7(207). Cho a, b, c thuộc khoảng (0; 2) thỏa mãn abc = (1 – a)(2 – b)(3 – c). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{12}+\frac{c^2}{27}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra a < 1 và

$$\frac{(1-a)(2-b)(3-c)}{abc}=1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{2}{b}-1\right)\left(\frac{3}{c}-1\right)=1.$$

Đặt $x=\frac{1}{a}-1,\ y=\frac{2}{b}-1,\ z=\frac{3}{c}-1.$

Khi đó x, y, z là các số thực dương và xyz = 1.

Ta có $a=\frac{1}{x+1}\Rightarrow\frac{a^2}{3}=\frac{1}{3(x+1)^2}.$

Tương tự ta có

$$\frac{b^2}{12}=\frac{1}{3(y+1)^2},\ \frac{c^2}{27}=\frac{1}{3(z+1)^2}.$$

Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số x, y, z luôn có hai số hoặc cùng lớn hơn hoặc bằng 1 hoặc cùng nhỏ hơn 1, giả sử hai số đó là x, y.

Khi đó ta có (x – 1)(y – 1) ≥ 0

$\Rightarrow$ xy + 1 ≥ x + y

$\Rightarrow$ 2(xy + 1) ≥ (x + 1)(y + 1).

Bởi vậy $P=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}\right)^2+\frac{2}{(x+1)(y+1)}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]$$

$$\ge\frac{1}{3}\left[\frac{2}{(x+1)(y+1)}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]\ge\frac{1}{3}\left[\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\frac{1}{z}+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]=\frac{1}{3}.\frac{z(z+1)+1}{(z+1)^2}$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{\frac{3}{4}(z+1)^2+\frac{1}{4}(z-1)^2}{(z+1)^2}\ge\frac{1}{3}.\frac{\frac{3}{4}(z+1)^2}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1 khi đó $a=\frac{1}{2},\ b=1,\ c=\frac{3}{2}.$

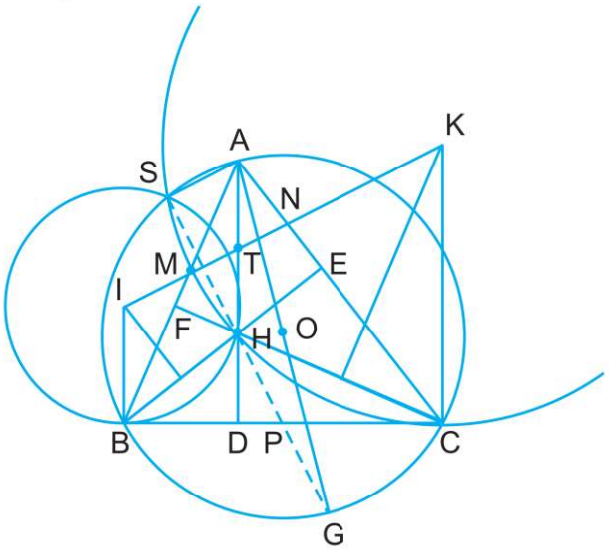
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{4}$.

Nhận xét. Đây là bài toán bất đẳng thức hay, có nhiều cách giải khác nhau, cách giải trên là cách ngắn gọn nhất vì chỉ dùng các kĩ thuật biến đổi đơn giản mà không cần sử dụng các bất đẳng thức phụ. Các bạn sau có lời giải tốt: *Đào Quang Huy*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Lương Minh Hiếu*, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Đức Trọng*, 9E, THCS Đa Tốn, Gia Lâm, **Hà Nội**; *Võ Trọng Khải*, *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Huỳnh Nguyên Phát*, 8A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài 8(207). Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng kẻ qua B vuông góc với BC cắt đường trung trực của BH tại I, đường thẳng kẻ qua C vuông góc với BC cắt đường trung trực của CH tại K. IK giao với AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng tứ giác AMHN là hình bình hành.

Lời giải.



Gọi S là giao của các đường tròn (I; IB) và (K; KC).

Dễ thấy các đường tròn này đi qua H và BC là tiếp tuyến chung của chúng.

Do đó

$\widehat{BSC} = \widehat{BSH} + \widehat{CSH}$

$= \widehat{HBC} + \widehat{HCB}$

$= 180^o - \widehat{BHC}$

$= 180^o - \widehat{EHF}$

$= \widehat{BAC}$.

Suy ra S thuộc đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi P là giao của SH với BC.

Ta có $PB^2 = PH.PS = PC^2$.

Suy ra PB = PC hay P là trung điểm BC.

Vẽ đường kính AG của đường tròn (O).

Dễ thấy tứ giác BHCG là hình bình hành, hay HG đi qua P nên S, H, P, G thẳng hàng.

Do S thuộc (O) nên $\widehat{ASG} = 90^o$.

Lại có IK là trung trực của SH nên IK là đường trung bình của tam giác ASH, hay IK đi qua trung điểm T của AH.

Từ đó ta có $\widehat{ANT} = \widehat{BHP}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc),

$\widehat{NAT} = \widehat{HBP}$ (cùng phụ với góc ACB).

Do đó $\Delta ANT \backsim \Delta BHP$ (g.g).

Suy ra $\frac{TN}{HP} = \frac{AT}{BP}$.

Tương tự $\Delta AMT \backsim \Delta CHP$ (g.g).

Suy ra $\frac{TM}{HP} = \frac{AT}{CP}$.

Lại vì BP = CP suy ra TM = TN.

Như vậy T là trung điểm của AH và MN nên AMHN là hình bình hành.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Huỳnh Nguyên Phát*, 8A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định**; *Ngô Thị An Bình*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Hà Quang Tùng*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

TRẦN QUANG HÙNG

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

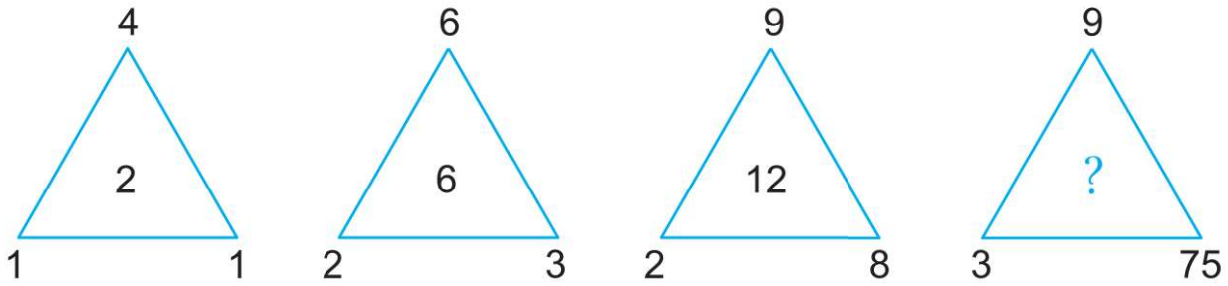
Nguyễn Tuấn Dương, 9D5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Phan Thùy Trâm*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Nguyễn Gia Bảo*, *Phan Hữu Cường*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Hải Triều*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Lương Minh Hiếu*, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Dương Trung Quốc*, 6D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; *Hán Duy Anh*, *Nguyễn Duy Thành*, 6A2; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Huỳnh Nguyên Phát*, 8A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định**; *Nguyễn Đức Trọng*, 9E, THCS Đa Tốn, Gia Lâm, **Hà Nội**; *Võ Trọng Khải*, *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.



Kì này

TÌM SỐ THÍCH HỢP

Tìm số thích hợp điền vào dấu **?** cho hợp quy luật.



MAI VĂN NĂM

Trường THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình

Kết quả

TÌM CÁC CHỮ SỐ (TTT2 số 207)

Quy luật. Các số của dãy đều có 4 chữ số. Số tạo bởi hai chữ số sau cùng chính bằng lũy thừa với cơ số là chữ số hàng nghìn, số mũ là chữ số hàng trăm:

Chẳng hạn, số 2416 có $2^4 = 16$; số 2532 có $2^5 = 32$;…

Theo quy luật đó, với số $\overline{52ab}$ ta có $5^2 = \overline{ab} = 25$;

Với số $\overline{724c}$ ta có $7^2 = \overline{4c} = 49$.

Vậy a = 2, b = 5, c = 9.

HONG HA

Nhận xét. Bài kì này tương đối dễ, tất cả các bạn đều tìm ra đáp số đúng. Xin trao thưởng cho các bạn: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Phan Đại Hoàng*, 7C, THCS Hưng Bình; *Phan Quang Triết*, *Phan Hữu Cường*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Thị Thu Ngân*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Các bạn sau được tuyên dương: *Hán Duy Anh*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Trần Phương Linh*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Trần Hữu Nhân*, 6A, THCS Bình Thịnh; *Kiều Danh Chính*, *Trần Đức Huy*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh.**

NGUYỄN XUÂN BÌNH





MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN

ThS. TRẦN THỊ THÁI HÒA
Khoa Sư phạm, Đại học Hà Tĩnh

Biểu thức có điều kiện là biểu thức đại số trong đó giá trị của các biến số bị ràng buộc bởi một hoặc nhiều điều kiện nào đó. Bằng cách dựa vào phép biến đổi đại số, đặt ẩn phụ, phương pháp hệ số bất định, sử dụng các tính chất của hàm số, đánh giá biểu thức đại số... chúng ta chuyển biểu thức có điều kiện ban đầu về một biểu thức đơn giản và dễ dàng tính toán hơn. Dưới đây là một số phương pháp giải các bài toán tính giá trị biểu thức có điều kiện.

1. Phương pháp biến đổi đại số

Bài toán 1. Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Tính giá trị biểu thức $A = \left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)$.

Lời giải. Ta có $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

$\Leftrightarrow (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y) - 3xyz = 0$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2)$

$- 3xy(x + y + z) = 0$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

$\Leftrightarrow x + y + z = 0$

hoặc $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$.

• Với $x + y + z = 0$ suy ra

$x + y = -z$, $y + z = -x$, $z + x = -y$.

Khi đó $A = \left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)$

$= \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{xyz}$

$= \frac{-xyz}{xyz} = -1.$

• Với $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = y = z.$

Khi đó $A = \left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)$

$= \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{xyz} = \frac{2x.2y.2z}{xyz} = 8.$

Bài toán 2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 4} + y) = 2.$

Tính giá trị biểu thức $B = 2x + y$.

Lời giải. Ta có $(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 4} + y) = 2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 4} + y)(\sqrt{y^2 + 4} - y)$

$= 2(\sqrt{y^2 + 4} - y)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 1} + 2x = \sqrt{y^2 + 4} - y.$ (1)

Tương tự $(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 4} + y) = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4} + y = 2\sqrt{x^2 + 1} - 2x.$ (2)

Cộng vế với vế (1) và (2) ta được

$2x + y = -y - 2x$

$\Leftrightarrow 2x + y = 0.$

Vậy $B = 2x + y = 0$.

2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Bài toán 3. Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $(3a + 3b + 3c)^3 = 24 + (3a + b - c)^3 + (3b + c - a)^3 + (3c + a - b)^3$. Tính giá trị của biểu thức $C = (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$.

(Đề tuyển sinh vào 10, chuyên KHTN năm học 2015 - 2016).

Lời giải. Đặt $x = 3a + b - c$, $y = 3b + c - a$, $z = 3c + a - b$.

Từ giả thiết ta có

$(x + y + z)^3 = 24 + x^3 + y^3 + z^3$

$\Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 24 + (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$

$\Leftrightarrow 24 - 3(x + y)(y + z)(z + x) = 0$

$\Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 8$

$\Leftrightarrow (2a + 4b)(2b + 4c)(2c + 4a) = 8$

$\Leftrightarrow (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = 1$

Vậy $C = (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = 1$.

3. Phương pháp hệ số bất định

Bài toán 4. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 3x^2 = 2 + 5z^2. \end{cases}$$

Tính giá trị biểu thức $D = 7x^2 + y^2 - 11z^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 3x^2 = 2 + 5z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 3x^2 - 5z^2 = 2. \end{cases}$$

Ta tìm các số thực a, b thỏa mãn

$a(x^2 + y^2 - z^2) + b(3x^2 - 5z^2) = 7x^2 + y^2 - 11z^2$

$\Leftrightarrow (a + 3b)x^2 + ay^2 - (a + 5b)z^2$

$= 7x^2 + y^2 - 11z^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 7 \\ a = 1 \\ a + 5b = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy $D = 1.0 + 2.2 = 4$.

4. Sử dụng tính chất của hàm số

Bài toán 5. Cho $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - 3x + 3x^2}$. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$E = f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + ... + f\left(\frac{2010}{2012}\right) + f\left(\frac{2011}{2012}\right).$$

(Đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2014 - 2015)

Lời giải. Với $a + b = 1$, ta chứng minh hàm số đã cho có tính chất $f(a) + f(b) = 1$.

Thật vậy, ta có

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - 3x + 3x^2} = \frac{x^3}{x^3 + (1 - x)^3}.$$

Do đó $f(a) = \dfrac{a^3}{a^3 + (1 - a)^3}$

$$\Rightarrow f(b) = f(1 - a) = \frac{(1 - a)^3}{(1 - a)^3 + a^3}$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) = \frac{a^3}{a^3 + (1 - a)^3} + \frac{(1 - a)^3}{a^3 + (1 - a)^3} = 1.$$

Từ đó ta có

$$E = \left[f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2011}{2012}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2012}\right) + f\left(\frac{2010}{2012}\right)\right]$$

$$+ ... + \left[f\left(\frac{1005}{2012}\right) + f\left(\frac{1007}{2012}\right)\right] + f\left(\frac{1006}{2012}\right)$$

$$= 1005 + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1005 + \frac{1}{2}$$

$$= 1005,5.$$

5. Phương pháp đánh giá

Bài toán 6. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^5 + b^5 + c^5 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tính giá trị biểu thức $S = a^{2012} + b^{2013} + c^{2014}$.

(Đề thi chọn HSG tỉnh Hà Tĩnh năm học 2013 - 2014)

Lời giải. Từ $a^5 + b^5 + c^5 = a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow a^2(a^3 - 1) + b^2(b^3 - 1) + c^2(c^3 - 1) = 0$ (*)

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ nên $1 - a^2 = b^2 + c^2 \geq 0$

$\Rightarrow -1 \leq a \leq 1$

$\Rightarrow a^3 - 1 \leq 0$.

Tương tự ta cũng có $b^3 - 1 \leq 0$, $c^3 - 1 \leq 0$.

Kết hợp (*) suy ra

$a^2(a^3 - 1) = b^2(b^3 - 1) = c^2(c^3 - 1) = 0$.

Từ đó trong ba số a, b, c có hai số bằng 0 và một số bằng 1.

Do đó $S = a^{2012} + b^{2013} + c^{2014} = 1$.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2018$ và $\dfrac{1}{b + c} + \dfrac{1}{c + a} + \dfrac{1}{a + b} = \dfrac{2017}{2018}$.

Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}.$$

(Đề thi HSG TP Hà Nội năm học 2017 - 2018)

Bài 2. Cho x, y là các số thực sao cho $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2x + y}$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}$.

(Đề thi HSG TP. Hồ Chí Minh năm học 2018 - 2019)

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ BÊ-ZU VÀO BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

NGÔ THƯỢNG THỦY

Trường THCS Độc Lập, TP. Thái Nguyên, Thái Nguyên

Bài toán liên quan đến nghiệm của đa thức trong đó có sử dụng định lí Bê-zu là dạng toán khá thú vị, thường xuất hiện trong một số đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi các cấp. Bài viết này sẽ giới thiệu và giúp bạn đọc hiểu rõ hơn một số dạng bài toán liên quan tới chủ đề này.

✻ **Nghiệm của đa thức**

- Giá trị x = a được gọi là nghiệm của đa thức f(x) nếu f(a) = 0.
- Số nghiệm của đa thức không vượt quá số bậc của đa thức đó.

✻ **Định lí Bê-zu** (*Bézout, 1730-1783, nhà Toán học Pháp*): Số dư khi chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a bằng giá trị của đa thức f(x) tại x = a.

✻ **Hệ quả:** Đa thức f(x) chia hết cho x – a khi và chỉ khi f(a) = 0.

Bài toán 1. Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện f(2019).f(2020) = 2021. Chứng minh rằng đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Giả sử ngược lại, đa thức f(x) có nghiệm nguyên x = a. Theo định lí Bê-zu ta có f(x) chia hết cho x – a.

Khi đó, ta viết f(x) = (x – a).g(x) (trong đó g(x) cũng là đa thức có các hệ số nguyên).

Ta có f(2019).f(2020) = 2021

$\Rightarrow$(2019 – a).(2020 – a).g(2019).g(2020) = 2021.

Vì 2019 – a, 2020 – a là hai số nguyên liên tiếp nên vế trái chia hết cho 2, trong khi vế phải không chia hết cho 2 (vô lí).

Vậy đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

Bài toán 2. Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên. Biết rằng tích f(0).f(1).f(2)…f(2020) không chia hết cho 2021. Chứng minh rằng đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Giả sử ngược lại, đa thức f(x) có nghiệm nguyên x = a. Tương tự như bài toán 1, ta viết f(x) = (x – a).g(x) (trong đó g(x) cũng là đa thức có hệ số nguyên).

Ta có f(0) = (0 – a).g(0).

f(1) = (1 – a).g(1).

…

f(2020) = (2020 – a).g(2020).



Nhà Toán học Étienne Bézout, người Pháp

Nhân theo vế các đẳng thức trên ta được
$f(0).f(1).f(2)\ldots f(2020)$
$= (0 - a).(1 - a)\ldots(2020 - a).g(0).g(1)\ldots g(2020).$
Vì vế phải chứa tích của 2021 thừa số nguyên liên tiếp nên vế phải chia hết cho 2021; trong khi vế trái không chia hết cho 2021 (vô lí).
Vậy đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

Bài toán 3. Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 2$. Tìm số dư khi chia f(2019) cho 3.

Lời giải. Theo đầu bài, suy ra $f(0) - 2 = f(1) - 2 = 0$ hay đa thức $f(x) - 2$ có hai nghiệm là 0 và 1.
Theo định lí Bê-zu, $f(x) - 2$ chia hết cho x và $x - 1$.
Khi đó, ta viết $f(x) - 2 = x(x - 1).g(x)$ (trong đó g(x) cũng là đa thức có các hệ số nguyên).
Suy ra $f(x) = x(x - 1).g(x) + 2$.
Dẫn tới $f(2019) = 2019.2018.g(2019) + 2$.
Vì 2019 chia hết cho 3 nên f(2019) chia cho 3 dư 2.

Bài toán 4. Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên thỏa mãn đa thức $f(x) - 1$ có ít nhất 4 nghiệm nguyên khác nhau. Chứng minh rằng đa thức $f(x) + 1$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Giả sử đa thức $f(x) - 1$ có ít nhất 4 nghiệm nguyên khác nhau là x_1, x_2, x_3, x_4. Theo định lí Bê-zu, ta viết
$f(x) - 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).\ g(x)$
(trong đó g(x) cũng là đa thức có các hệ số nguyên).
Giả sử ngược lại, đa thức $f(x) + 1$ có nghiệm nguyên $x = a$ thì suy ra $f(a) + 1 = 0$ hay $f(a) = -1$. Thay $x = a$ vào đẳng thức trên ta có
$f(a) - 1 = (a - x_1)(a - x_2)(a - x_3)(a - x_4).\ g(a).$
Suy ra $(a - x_1)(a - x_2)(a - x_3)(a - x_4).\ g(a) = -2$.
Vì $a - x_1, a - x_2, a - x_3, a - x_4$ là 4 số nguyên phân biệt nên -2 phân tích được dưới dạng tích của 4 số nguyên khác nhau (vô lí). Vậy đa thức $f(x) + 1$ không có nghiệm nguyên.

Bài toán 5. Cho đa thức f(x) có bậc 4, hệ số cao nhất là 1 và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 10$, $f(2) = 20$, $f(3) = 30$. Tính giá trị $f(12) + f(-8)$.

Lời giải. Xét đa thức $g(x) = 10x$.
Ta thấy $g(1) = 10$, $g(2) = 20$, $g(3) = 30$.
Suy ra đa thức $f(x) - g(x)$ có 3 nghiệm là 1; 2; 3.
Vì hệ số cao nhất của $f(x) - g(x)$ là 1 nên theo định lí Bê-zu, ta viết
$f(x) - g(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - x_o)$,
trong đó x_o là một nghiệm của $f(x) - g(x)$.
Suy ra $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - x_o) + 10x$.
Lần lượt thay $x = 12$, $x = -8$ vào đẳng thức trên ta có
$f(12) = (12 - 1)(12 - 2)(12 - 3)(12 - x_o) + 10.12 = 12000 - 990x_o$,
$f(-8) = (-8 - 1)(-8 - 2)(-8 - 3)(-8 - x_o) + 10.(-8) = 7840 + 990x_o$.
Do đó $f(12) + f(-8) = 19840$.

Phân tích. Trong bài toán này, nếu ta giả sử $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và thay các giá trị f(1), f(2), f(3) thì ta phải giải hệ 3 phương trình 4 ẩn. Điều này không thực hiện được. Nhiều học sinh khi đọc lời giải sẽ thắc mắc tại sao lại xét được đa thức $g(x) = 10x$. Điều này không được tự nhiên khi giải bài toán này.
Điều này được giải thích như sau: Vì đa thức f(x) có bậc 4 nên ta chọn g(x) có bậc nhỏ hơn bậc của f(x) và có 3 hệ số chưa biết theo lũy thừa giảm dần.
Giả sử đa thức g(x) bậc 2 có dạng $g(x) = ax^2 + bx + c$. Vì cần có $g(1) = 10$, $g(2) = 20$, $g(3) = 30$ nên ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b + c = 10 \\ 4a + 2b + c = 20 \\ 9a + 3b + c = 30. \end{cases}.$$

Giải hệ này ta thu được $a = 0$; $b = 10$; $c = 0$.
Từ đó ta chọn được $g(x) = 10x$.

Bài toán 6. Cho đa thức f(x) có bậc 4, hệ số cao nhất là 1 và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 3$,

f(3) = 11, f(5) = 27. Tính giá trị biểu thức f(–2) + 7f(6) + 2021.

Phân tích. Tương tự như bài toán 5, ta tìm đa thức g(x) bậc 2 có dạng $g(x) = ax^2 + bx + c$. Vì cần có g(1) = 3, g(3) = 11, g(5) = 27 nên ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 9a+3b+c=11 \\ 25a+5b+c=27. \end{cases}$$

Giải hệ này ta nhận được a = 1, b = 0, c = 2. Suy ra $g(x) = x^2 + 2$.

Lời giải. Xét đa thức $g(x) = x^2 + 2$.

Thấy g(1) = 3, g(3) = 11, g(5) = 27.

Suy ra đa thức f(x) – g(x) có 3 nghiệm là 1; 3; 5.

Vì hệ số cao nhất của f(x) – g(x) là 1 nên theo định lí Bê-zu, ta viết

$f(x) - g(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-x_o)$,

trong đó x_o là một nghiệm của f(x) – g(x).

Suy ra $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-x_o) + x^2 + 2$.

Lần lượt thay x = –2, x = 6 vào đẳng thức trên và thu gọn ta có

$f(-2) = 216 + 105x_o$, $f(6) = 128 - 15x_o$.

Suy ra $f(-2) + 7f(6) + 2021 = 216 + 105x_o + 7(128 - 15x_o) + 2021 = 3133$.

Bài toán 7. Cho hai đa thức

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $Q(x) = x^2 + x + 2020$.

Biết rằng phương trình P(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt, còn phương trình P(Q(x)) = 0 vô nghiệm. Chứng minh rằng $P(2020) > \frac{1}{64}$.

Lời giải. Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình P(x) = 0. Vì hệ số cao nhất của P(x) là 1 nên theo định lí Bê-zu, ta viết

$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Khi đó $P(Q(x)) = [Q(x)-x_1][Q(x)-x_2][Q(x)-x_3]$

Vì phương trình P(Q(x)) = 0 vô nghiệm nên các đa thức $Q(x) - x_1$, $Q(x) - x_2$, $Q(x) - x_3$ cũng vô nghiệm.

Ta có $Q(x) - x_1 = x^2 + x + 2020 - x_1$ vô nghiệm nên $\Delta = 1 - 4(2020 - x_1) < 0$

$\Rightarrow 2020 - x_1 > \frac{1}{4}$. Tương tự, $2020 - x_2 > \frac{1}{4}$, $2020 - x_3 > \frac{1}{4}$.

Nhân theo vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$(2020-x_1)(2020-x_2)(2020-x_3) > \frac{1}{64}$$

hay $P(2020) > \frac{1}{64}$ (đpcm).

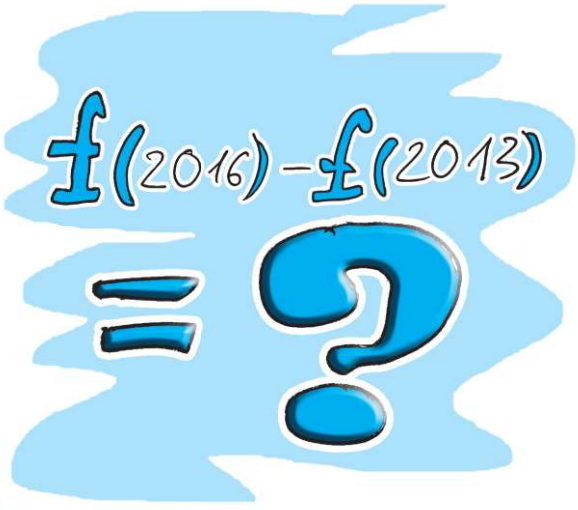
Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên thỏa mãn |f(x)| = 2 với 5 giá trị khác nhau của x. Chứng minh rằng đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

Bài 2. Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên thỏa mãn đa thức f(x) – 7 có bốn nghiệm nguyên phân biệt. Chứng minh rằng đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

Bài 3. Cho đa thức P(x) là đa thức bậc 4 và có hệ số cao nhất là 1. Biết rằng P(2016) = 2017, P(2017) = 2018, P(2018) = 2019, P(2019) = 2020. Chứng minh rằng P(2020) là một số tự nhiên chia hết cho 5.

Bài 4. Cho đa thức f(x) là đa thức bậc 3 và có hệ số cao nhất là 2. Biết rằng f(2014) = 2015, f(2015) = 2016. Tính giá trị của biểu thức f(2016) – f(2013).





CỰC TRỊ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

CAO NGỌC TOẢN
Trường THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế

Bài toán. Cho số thực x thỏa mãn $0 \le x \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x^2 - 3x + 3}{x + 1}$.

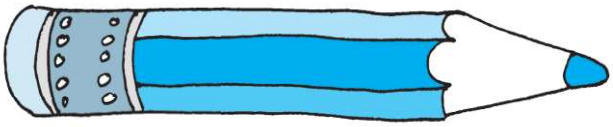
Lời giải. Ta có $P = 2x - 5 + \dfrac{8}{x+1}$.

Với $0 \le x \le 2$ thì $-5 \le 2x - 5 \le -1$, $\dfrac{8}{3} \le \dfrac{8}{x+1} \le 8$.

Suy ra $-\dfrac{7}{3} \le P \le 7$.

Vậy $P_{max} = 7$, $P_{min} = -\dfrac{7}{3}$.

Theo bạn cách giải trên đúng chưa? Cách giải của bạn thế nào?



Kết quả **(TTT2 số 207)**

LỜI GIẢI ỔN CHƯA?

Phân tích lỗi sai: Lời giải sai ở chỗ khi bình phương hai vế đẳng thức $|x_1 - x_2| = x_1 + x_2$ mà quên không đặt điều kiện $x_1 + x_2 \ge 0$.

Lời giải đúng

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\Delta' \ge 0$

$\Leftrightarrow (m + 2)^2 - (m^2 - 9) \ge 0 \Leftrightarrow 4m + 13 \ge 0$

$\Leftrightarrow m \ge -\dfrac{13}{4}$.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 4 \\ x_1 x_2 = m^2 - 9. \end{cases}$

Nếu $x_1 + x_2 \ge 0$ hay $2m + 4 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -2$ khi đó ta có $|x_1 - x_2| = x_1 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2$

$\Leftrightarrow x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Kết hợp với điều kiện $m \ge -2$, suy ra $m = 3$.

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

HONG HA

Nhận xét. Bài toán này không khó phát hiện lỗi sai, các bạn tham gia giải bài đều phát hiện lỗi sai, từ đó đã có lời giải đúng. Đặc biệt đáng khen là, tuy bài thuộc toán lớp 9 nhưng có các em học sinh lớp 7 và lớp 8 tham gia giải bài. Các bạn sau có lời giải tốt, được thưởng kì này: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Nguyễn Hoàng Hải*, 8C, THCS số 1 Bảo Hà, Bảo Yên, **Lào Cai**.

VI MẠNH TƯỜNG



NHỮNG YÊU CẦU CẦN ĐẠT Ở LỚP 9

(Tiếp theo TTT2 số 208)

HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Hình học trực quan

Các hình khối trong thực tiễn

Hình trụ. Hình nón. Hình cầu

- Mô tả (đường sinh, chiều cao, bán kính đáy), tạo lập được hình trụ.
- Mô tả (đỉnh, đường sinh, chiều cao, bán kính đáy), tạo lập được hình nón.
- Mô tả (tâm, bán kính), tạo lập được hình cầu, mặt cầu. Nhận biết được phần chung của mặt phẳng và hình cầu.
- Tính được diện tích xung quanh của hình trụ, hình nón, diện tích mặt cầu.
- Tính được thể tích của hình trụ, hình nón, hình cầu.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính diện tích xung quanh, thể tích của hình trụ, hình nón, hình cầu (ví dụ: tính thể tích hoặc diện tích xung quanh của một số đồ vật quen thuộc có dạng hình trụ, hình nón, hình cầu,...).

Đa giác đều

Đa giác đều

- Nhận dạng được đa giác đều.
- Nhận biết được phép quay.
- Mô tả được các phép quay giữ nguyên hình đa giác đều.
- Nhận biết được những hình phẳng đều trong tự nhiên, nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo, ...
- Nhận biết được vẻ đẹp của thế giới tự nhiên biểu hiện qua tính đều.

Thực hành trong phòng máy tính với phần mềm toán học (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện)

- Sử dụng phần mềm để hỗ trợ việc học các kiến thức hình học.
- Thực hành sử dụng phần mềm để vẽ hình và thiết kế đồ hoạ liên quan đến đường tròn, tam giác vuông, đa giác đều.

MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Một số yếu tố thống kê

Thu thập và tổ chức dữ liệu

Mô tả và biểu diễn dữ liệu trên các bảng, biểu đồ

- Lí giải và thiết lập được các dữ liệu vào bảng, biểu đồ thích hợp ở dạng như: bảng thống kê; biểu đồ tranh; biểu đồ dạng cột/ cột kép (column chart), biểu đồ hình quạt tròn (pie chart); biểu đồ dạng đoạn thẳng (line graph).
- Phát hiện và lí giải được số liệu không chính xác dựa trên mối liên hệ toán học đơn giản giữa các số liệu đã được biểu diễn trong những ví dụ đơn giản.
- Lí giải và thực hiện được cách chuyển dữ liệu từ dạng biểu diễn này sang dạng biểu diễn khác.

Phân tích và xử lí dữ liệu

Bảng tần số, biểu đồ tần số. Bảng tần số tương đối, biểu đồ tần số tương đối

- Xác định được tần số (frequency) của một giá trị.

- Thiết lập được bảng tần số, biểu đồ tần số (biểu diễn các giá trị và tần số của chúng ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng).
- Giải thích được ý nghĩa và vai trò của tần số trong thực tiễn.
- Xác định được tần số tương đối (relative frequency) của một giá trị.
- Thiết lập được bảng tần số tương đối, biểu đồ tần số tương đối (biểu diễn các giá trị và tần số tương đối của chúng ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ hình quạt tròn).
- Giải thích được ý nghĩa và vai trò của tần số tương đối trong thực tiễn.
- Thiết lập được bảng tần số ghép nhóm, bảng tần số tương đối ghép nhóm.
- Thiết lập được biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm (histogram) (ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng).
- Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 9 và trong thực tiễn.

Một số yếu tố xác suất

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu. Xác suất của biến cố trong một số mô hình xác suất đơn giản

- Nhận biết được phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu.
- Tính được xác suất của biến cố bằng cách kiểm đếm số trường hợp có thể và số trường hợp thuận lợi trong một số mô hình xác suất đơn giản.

Thực hành trong phòng máy tính với phần mềm toán học (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện)

- Sử dụng được phần mềm để vẽ bảng tần số, biểu đồ tần số, bảng tần số tương đối, biểu đồ tần số tương đối.
- Sử dụng được phần mềm mô tả thí nghiệm ngẫu nhiên.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Nhà trường tổ chức cho học sinh một số hoạt động sau và có thể bổ sung các hoạt động khác tuỳ vào điều kiện cụ thể.

Hoạt động 1: Tìm hiểu một số kiến thức về tài chính như:
- Thực hành lập kế hoạch đầu tư cá nhân.
- Làm quen với bảo hiểm.
- Làm quen với bài toán về tăng trưởng (xác định vốn đầu tư để đạt được tỉ lệ tăng trưởng mong đợi).

Hoạt động 2: Thực hành ứng dụng các kiến thức toán học vào thực tiễn và các chủ đề liên môn, chẳng hạn:
- Vận dụng kiến thức về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn trong bài toán cân bằng hệ số ở phương trình hoá học.
- Vận dụng kiến thức về xác suất trong việc tính xác suất kết quả đời con của các phép lai.

Hoạt động 3: Tổ chức các hoạt động ngoài giờ chính khoá như thực hành ngoài lớp học, dự án học tập, các trò chơi học toán, cuộc thi về toán, chẳng hạn:
- Vận dụng kiến thức về tỉ số lượng giác trong thực tiễn (ví dụ: đo khoảng cách giữa hai vị trí mà giữa chúng có vật cản hoặc chỉ đến được một trong hai vị trí).
- Vận dụng các công thức tính diện tích, thể tích vào thực tiễn: đo đạc và tính diện tích, thể tích của các hình khối trong khuôn viên của trường có liên quan đến hình trụ, hình nón, hình cầu.
- Tìm kiếm hoặc thực hành tạo dựng các đoạn video liên quan đến đường tròn, tam giác vuông, đa giác đều và phép quay.

Hoạt động 4 (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện): Tổ chức giao lưu với các chuyên gia nhằm hiểu nhiều hơn về vai trò của Toán học trong thực tiễn và trong các ngành nghề.

TTT *(Tổng hợp)*

Nguồn: Bộ Giáo dục và Đào tạo

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM HOÀN THÀNH CÔNG TÁC BỒI DƯỠNG ... *(Tiếp theo bìa 2)*

II. VỀ CÔNG TÁC CHUẨN BỊ, CUNG ỨNG SGK

1. Đối với SGK phục vụ học sinh từ lớp 2 đến lớp 12, NXBGDVN đã hoàn thành việc in, nhập kho hơn 113 triệu bản. Tính đến ngày 15/8/2020, NXBGDVN đã phát hành được 93% sản lượng theo kế hoạch về các địa phương, đạt 92% so với cùng kì (do ảnh hưởng của đại dịch COVID-19 nên việc mua sắm SGK và đồ dùng học tập diễn ra chậm hơn mọi năm).

- Đối với SGK lớp 1, NXBGDVN đã hoàn thành việc in, nhập kho được hơn 14 triệu bản, tương đương 115% kết quả lựa chọn của các địa phương. Đến ngày 15/8/2020, NXBGDVN đã cung ứng tới các địa phương hơn 13 triệu bản SGK lớp 1 đạt tỉ lệ 107% so với kết quả lựa chọn SGK của các địa phương.

2. *Giá bán SGK từ lớp 2 đến lớp 12 vẫn được giữ như những năm học trước*. Bảng giá SGK được niêm yết tại các cửa hàng sách của NXBGDVN, các công ty Sách - Thiết bị trường học cả nước và trên webiste của NXBGDVN tại địa chỉ *www.nxbgd.vn*.

3. NXBGDVN đã tiếp tục kiện toàn, củng cố hệ thống kênh phát hành trong toàn quốc nhằm đảm bảo cung ứng đầy đủ, đồng bộ, kịp thời đến các nhà trường, học sinh (HS), GV, không để xảy ra tình trạng thiếu sách, sốt sách đặc biệt trong giai đoạn triển khai áp dụng Chương trình giáo dục phổ thông 2018. Phát triển hệ thống bán lẻ tại các địa phương để phục vụ nhu cầu của HS và GV.

Trong tháng phát hành phục vụ khai giảng năm học mới, hệ thống cửa hàng bán lẻ thuộc hệ thống NXBGDVN chuẩn bị đầy đủ hàng hóa, mở cửa bán hàng tất cả các ngày trong tuần, niêm yết đầy đủ bảng giá, đồng thời tổ chức các chương trình khuyến mãi phong phú.

- Đường dây nóng (0377 333 545) giải đáp mọi thắc mắc về nhu cầu mua SGK được duy trì từ 8h00 đến 22h00 hàng ngày trong khoảng thời gian từ ngày 15/6 đến ngày 15/9/2020, kể cả thứ Bảy, Chủ nhật và ngày lễ.

NXBGDVN khẳng định sẽ tiếp tục chủ động ứng phó với diễn biến phức tạp của dịch bệnh, các hiện tượng bất thường của thời tiết để đảm bảo cung ứng đầy đủ SGK tới tay HS khi bước vào năm học mới.

III. VỀ CÔNG TÁC ĐẤU TRANH CHỐNG IN LẬU, PHÁT HÀNH SÁCH GIẢ

Trước tình trạng sách giáo dục bị in lậu tràn lan với số lượng lớn, thủ đoạn ngày càng tinh vi, Bộ GD&ĐT đã có văn bản gửi Bộ Công thương đề nghị phối hợp xử lí tình trạng sách giáo dục bị làm giả xâm nhập vào các nhà trường. Văn bản cũng đề nghị Bộ

Công thương đưa nội dung này vào kế hoạch hàng năm về công tác phòng chống hàng lậu, hàng giả, hàng nhái, hàng kém chất lượng. Trong tháng 7 và tháng 8 vừa qua, Cục Quản lí thị trường (QLTT) - Bộ Công thương và cơ quan QLTT các địa phương đã kiểm tra, phát hiện nhiều tổ chức, cá nhân sản xuất, kinh doanh xuất bản phẩm lậu. Cụ thể:

- Ngày 9/7/2020, Tổng cục QLTT và Đội QLTT số 17 - Cục QLTT Hà Nội kiểm tra cơ sở kinh doanh thuộc Công ty TNHH Phú Hưng Phát, địa chỉ số 87 ngõ 1141 Giải Phóng, quận Hoàng Mai và thu giữ 27.200 cuốn SGK các loại chưa xuất trình được hóa đơn chứng từ chứng minh nguồn gốc, có dấu hiệu in lậu.
- Ngày 13/7/2020, tại Công ty Cổ phần dịch vụ Chính Nghĩa có địa chỉ tại A2-6 TT Bảo tàng hậu cần Mỹ Đình (quận Nam Từ Liêm, Hà Nội), Đội QLTT số 14 phát hiện 1.033 kg bìa và ruột sách bán thành phẩm mang tên NXBGDVN. Bên ngoài xưởng cũng có 1.245 kg bìa và ruột sách bán thành phẩm mang tên NXBGDVN.
- Ngày 23/7/2020, tại Nhà sách giáo dục Bình Thủy (Hộ kinh doanh Thanh Thủy, địa chỉ số 67 Nguyễn Khoái, phường Bạch Đằng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội), A03 - Bộ Công an phát hiện hàng nghìn cuốn sách bổ trợ, bước đầu xác định đều dán tem nhái, tem chống giả của NXBGDVN.
- Ngày 6/8/2020, Cục QLTT Hà Giang đã kiểm tra một số nhà sách trên địa bàn tỉnh, tạm giữ gần 4.000 quyển SGK có dấu hiệu giả mạo NXBGDVN.
- Ngày 13/8/2020, Cục QLTT Thái Nguyên đã kiểm tra đồng loạt tại các địa điểm trên địa bàn TP. Thái Nguyên, phát hiện 116 đầu sách với trên 2.500 bản sách có dấu hiệu giả mạo sách của NXBGDVN.
- Chiều ngày 17/8/2020, A03 - Bộ Công an phối hợp với Thanh tra Sở Thông tin và Truyền thông Hà Nội đã kiểm tra Công ty cổ phần Hợp Thành Phát tại số 779 đường Nguyễn Khoái, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, phát hiện 5.314 cuốn sách và 426 kg bán thành phẩm, có dấu hiệu in lậu sản phẩm của NXBGDVN.

Để tránh mua phải sách in lậu, sách giả, GV, phụ huynh và HS nên tìm mua sách tại các hệ thống phân phối chính thức của NXBGDVN, các công ty Sách - Thiết bị trường học địa phương, không mua sách từ các nguồn trôi nổi trên thị trường.

IV. VỀ CÔNG TÁC XÃ HỘI, HỖ TRỢ HS CÓ HOÀN CẢNH ĐẶC BIỆT

Để hỗ trợ cho mọi HS đều có đủ SGK đến trường, NXBGDVN sẽ tiếp tục thực hiện các công tác xã hội như tặng SGK cho con các gia đình chính sách, gia đình thương binh liệt sĩ, gia đình có hoàn cảnh đặc biệt khó khăn, đồng thời sẽ đầu tư xây dựng Tủ sách dùng chung, tổ chức mua SGK cũ tặng cho thư viện các trường học thuộc địa bàn khó khăn; tổ chức phát động các phong trào quyên góp SGK, khuyến khích HS giữ gìn, bảo quản và sử dụng lại SGK.

XUÂN HOA

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

Kì 36

CLB1. Given that $x^2 - 4x + 1 = 0$. Find the value of the expression $B = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 20x + 2025$.

CLB2. Given a, b satisfying

$$a + \frac{1}{a+1} = b + \frac{1}{b-1} - 2 \text{ and } a - b + 2 \neq 0.$$

Find the value of the expression $T = ab - a + b$.

CLB3. Solve the following equations

a) $|x - 2019| + |2x - 2020| + |3x - 2021| = x - 2022$.

b) $\dfrac{x^2 + x - 1 + |x^2 - (x-1)|}{2} = 35x - 250$.

CLB4. Given positive integers a and b such that $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} = \dfrac{8}{2a+b}$ and $2010 \le 4a + 7b \le 2020$.

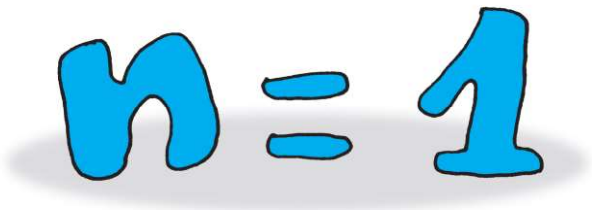
Find the value of $P = a + b$.

CLB5. Given triangle ABC with BD and CE being two altitudes. Let I be the midpoint of BC, AI intersects BD and CE at K and J respectively. The line through A and perpendicular to AI intersects BD and CE at M and N respectively. From M and N, construct lines parallel to BC, intersecting AI at P and Q respectively. Prove that

a) ABM is similar to JCA and ANC is similar to KAB.

b) AM = AN.

ĐỖ ĐỨC THÀNH *(dịch)*



Kết quả Kì 34 (TTT2 số 207)

CLB1. $M = a^3 + b^3 + 2019ab - 673^3$

$= a^3 + b^3 + 3(a+b)ab - 673^3$

$= (a+b)^3 - 673^3$

$= 673^3 - 673^3 = 0$.

CLB2. $27^{2010} = (3^3)^{2010}$

$= 3^{6030} = (3^2)^{3015} = 9^{3015} < 10^{3015}$.

Số 10^{3015} là số nhỏ nhất có 3016 chữ số.

Do đó số 27^{2010} có ít hơn 3016 chữ số.

CLB3.

• $M = x - y = 2x - (x + y)$

$= 2x - (x^2 + y^2)$

$= -(x-1)^2 - y^2 + 1 \le 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 tại $x = 1, y = 0$.

• $M = x - y = (x + y) - 2y$

$= x^2 + y^2 - 2y$

$= x^2 + (y-1)^2 - 1 \ge -1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0, y = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là -1 tại $x = 0$, $y = -1$.

CLB4.

✻ Xét $n = 1$ thì $4^n + 9^{n-1} = 5$ là số nguyên tố.

✻ Xét $n \ge 2$

• Nếu n chẵn thì $n - 1$ lẻ, khi đó 4^n có chữ số tận cùng là 6 còn 9^{n-1} có chữ số tận cùng là 9.

Do đó $4^n + 9^{n-1}$ có số tận cùng là 5 nên $(4^n + 9^{n-1}) \vdots 5$.

• Nếu n lẻ thì $n - 1$ chẵn, khi đó 4^n có chữ số tận cùng là 4 còn 9^{n-1} có chữ số tận cùng là 1.

Do đó $4^n + 9^{n-1}$ có số tận cùng là 5 nên $(4^n + 9^{n-1}) \vdots 5$.

Mà $4^n + 9^{n-1} > 5$ với $n \ge 2$ nên $4^n + 9^{n-1}$ là hợp số.

Vậy $n = 1$ là giá trị duy nhất cần tìm.

(Xem tiếp trang 7)



Kì này FIND THE KEY TO SOLVE THE RIDDLE

LẠI HẰNG PHƯỢNG
Trường THCS Nam Trung Yên - Quận Cầu Giấy - Hà Nội

Riddle 1: What 8 letter word can have a letter taken away and it still makes a word. Take another letter away and it still makes a word. Keep on doing that until you have one letter left. What is the word?

Riddle 2: Can you name three consecutive days without using the words Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday, Friday, Saturday, or Sunday?

Riddle 3: Samuel was out for a walk when it started to rain. He did not have an umbrella and he wasn't wearing a hat. His clothes were soaked, yet not a single hair on his head got wet. How could this happen?

Riddle 4: What room do ghosts avoid?

Riddle 5: When does Christmas come before Thanks giving?

Riddle 6: What belongs to you, but other people use it more than you?

Riddle 7: Mr. and Mrs. Brown have five daughters and each daughter has one brother. How many people are in the Brown family?

Riddle 8: You live in a one storey house made entirely of redwood. What color would the stairs be?

Riddle 9: Re-arrange the letters, O O U S W T D N E J R, to spell just one word. What is it?

Riddle 10: What is more useful when it is broken?

Kết quả OPPOSITE (TTT2 số 207)

Mặc dù đại dịch Covid-19 đang diễn ra, nhưng Chủ Vườn rất vui vì kì này vẫn tiếp tục được chào đón rất nhiều các bạn ghé thăm. Sau đây là đáp án của kì trước.

- **Các từ hàng ngang từ trên xuống dưới:** GOOD, NEAR, HAPPY, SOFT, HOT, HIGH.
- **Các từ hàng dọc từ trái sang phải:** BLACK, OPPOSITE, DRY, NORTH, HEALTHY, THIN.

Nhận xét. Đây là một trong những dạng bài khá quen trong các đề kiểm tra. Chủ Vườn hi vọng các bạn sẽ sử dụng tốt những từ tiếng Anh đơn giản này nhé!

5 bạn có tên sau đây được nhận quà: *Vũ Huy Sáng*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trần Duy Quân*, 8A, THCS Đại Sơn; *Nguyễn Kim Mạnh*, 7D, Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**, *Nguyễn Duy Thành*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

Các bạn sau được khen: *Đậu Mai Phương*, 7A, *Nguyễn Linh Chi*, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Phan Quang Triết*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Phan Thùy Trâm*, 7C, THCS Bạch Liêu, Thị trấn Yên Thành, **Nghệ An**.

Chủ Vườn



SỬ DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLET ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

BÙI MINH TRUNG

Trường THCS Mỹ Long Nam, Cầu Ngang, Trà Vinh

Những năm gần đây trong đề thi tuyển sinh khối 10 chuyên, thi học sinh giỏi các cấp, thi toán quốc tế thường xuyên xuất hiện bài toán hình học tổ hợp với nhiều dạng và nhiều cách giải phong phú. Nguyên lí Dirichlet là một phương pháp giải hay và được sử dụng phổ biến nhất trong các bài toán hình học tổ hợp này.

Nguyên lí Dirichlet. Ta phát biểu nguyên lí dạng tổng quát: Nếu nhốt n con thỏ vào k cái lồng (n, k nguyên dương) thì tồn tại một lồng chứa ít nhất $\left[\frac{n}{k}\right]+1$ con thỏ. Kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Dưới đây là một số bài toán để các bạn làm quen với dạng toán hình học tổ hợp.

Bài toán 1. Cho 2009 điểm nằm trong hình chữ nhật có kích thước 4×251. Vẽ 2009 đường tròn bán kính $\sqrt{2}$ nhận 2009 điểm đã cho làm tâm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đường tròn chứa ít nhất 3 điểm trong 2009 điểm đã cho.

Lời giải. Chia hình chữ nhật có kích thước 4×251 thành 1004 hình vuông có độ dài cạnh là 1.

Vì có 2009 điểm phân biệt nằm bên trong hình chữ nhật chứa 1004 hình vuông, theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ít nhất 1 hình vuông có độ dài cạnh là 1 chứa ít nhất $\left[\frac{2009}{1004}\right]+1=3$ điểm trong 2009 điểm đã cho.

Không mất tính tổng quát, giả sử 3 điểm đó là A, B, C.

Do mỗi hình vuông có độ dài cạnh là 1 nên khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm thuộc miền của hình vuông là $\sqrt{2}$.

Khi đó $AB \le \sqrt{2}$, $AC \le \sqrt{2}$.

Suy ra A, B, C thuộc hình tròn tâm A bán kính $\sqrt{2}$.

Chứng tỏ tồn tại ít nhất 1 đường tròn có tâm là một trong 2009 điểm đã cho, có bán kính $\sqrt{2}$ chứa ít nhất 3 điểm trong 2009 điểm đã cho.

Bài toán 2. Cho 121 điểm phân biệt nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác đều có cạnh bằng 6. Chứng minh rằng có thể vẽ được một hình tròn đường kính bằng $\sqrt{3}$ chứa ít nhất 11 điểm trong số các điểm đã cho.

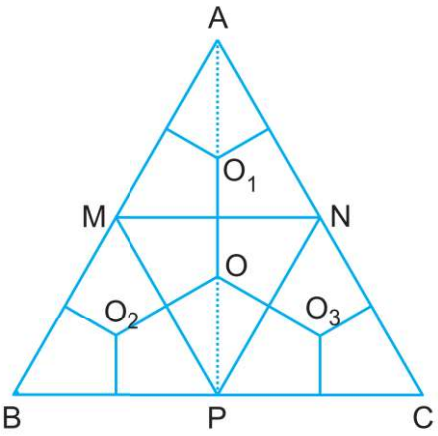
Lời giải. Giả sử ABC là tam giác đều có cạnh bằng 6.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, AC, BC.

Các đoạn thẳng MN, MP, NP chia tam giác ABC thành 4 tam giác đều bằng nhau.

Gọi O, O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các tam giác đều MNP, AMN, BMP, CPN.

Từ O, O_1, O_2, O_3 vẽ các đoạn thẳng vuông góc đến các cạnh của các tam giác đều MNP, AMN, BMP, CPN.



Khi đó tam giác ABC được chia thành 12 tứ giác và mỗi tứ giác đều nội tiếp đường tròn có đường kính bằng nhau và bằng O_1A.

Mà $O_1A = \frac{1}{3}AP = \frac{1}{3}.\frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Mặt khác có 121 điểm thuộc 12 tứ giác nên theo nguyên lí Dirichlet có một tứ giác chứa ít nhất $\left[\frac{121}{12}\right] + 1 = 11$ điểm.

Vậy có thể vẽ được một hình tròn đường kính bằng $\sqrt{3}$ chứa ít nhất 11 điểm trong số các điểm đã cho.

Bài toán 3. Trong một hình vuông có cạnh 4cm, người ta đặt 2011 đường tròn có đường kính $\frac{1}{30}$ cm. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng giao với 17 đường tròn.

Lời giải. Kẻ 124 đường thẳng song song với 1 cạnh của hình vuông, cách nhau $\frac{4}{125}$ cm chúng chia hình vuông ra thành 125 hình chữ nhật có chiều rộng $\frac{4}{125}$ cm.

Do $\frac{1}{30} > \frac{4}{125}$ nên mỗi đường tròn đều bị cắt bởi ít nhất một đường thẳng nói trên.

Có 124 đường thẳng, 2011 đường tròn và $2011 = 124.16 + 27$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một đường thẳng cắt $16 + 1 = 17$ đường tròn trong số 2011 đường tròn đã cho.

Bài toán 4. Cho đa giác đều (H) có 14 đỉnh. Chứng minh rằng trong 6 đỉnh bất kì của hình (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

Lời giải. Các đỉnh của (H) chia đường tròn ngoại tiếp thành 14 cung bằng nhau, mỗi cung có số đo là $\alpha = \frac{360^o}{14}$.

Các dây nối hai đỉnh của (H) chắn các cung nhỏ có số đo là α, 2α, 3α,..., 7α.

Vậy độ dài các dây đó chỉ nhận 7 giá trị khác nhau.

Lấy 6 đỉnh của (H) thì số dây nối hai trong 6 đỉnh đó là $(6 \times 5) : 2 = 15$.

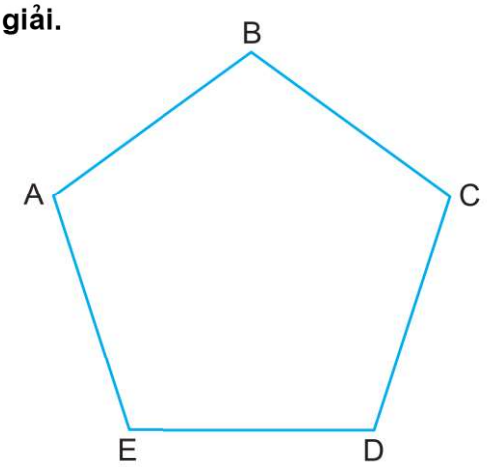
Vì 15 dây này có độ dài nhận không quá 7 giá trị khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet phải có $\left[\frac{15}{7}\right] + 1 = 3$ dây cùng độ dài, trong ba dây đó luôn có hai dây không cùng đầu mút (vì hai dây bất kì trong ba dây có chung đầu mút thì ba dây bằng nhau đó tạo thành một tam giác đều, do đó số đỉnh của (H) chia hết cho 3, trái với giả thiết).

Dễ thấy nếu hai dây bằng nhau của một đường tròn không chung đầu mút thì 4 đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình thang cân).

Từ đó suy ra trong 6 đỉnh bất kì của hình (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

Bài toán 5. Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, hoặc tím. Chứng minh rằng khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó cùng màu hoặc đôi một khác màu.

Lời giải.



Xét ngũ giác đều ABCDE, ta nhận thấy 3 đỉnh bất kì của ngũ giác luôn tạo thành một tam giác cân.

Do đó khi tô 5 đỉnh bằng 3 màu xanh, đỏ, tím sẽ xảy ra hai khả năng sau:

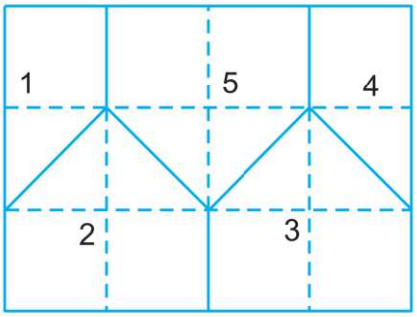
- Nếu tô 5 đỉnh A, B, C, D, E bởi đủ 3 loại màu đã cho thì tồn tại 3 đỉnh có màu khác nhau và tạo thành một tam giác cân.

• Nếu tô 5 đỉnh A, B, C, D, E bởi nhiều nhất 2 màu thì sẽ có ít nhất 3 đỉnh cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

Vậy trong mọi trường hợp luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có 3 đỉnh được tô bởi cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

Bài toán 6. Cho 6 điểm phân biệt thuộc một hình chữ nhật có kích thước 3×4 (các điểm này có thể nằm bên trong hay trên cạnh của hình chữ nhật). Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong 6 điểm này mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

Lời giải. Ta chia hình chữ nhật thành 5 hình đa giác như hình vẽ



Có 6 điểm nằm trong 5 hình nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai điểm cùng thuộc một hình.

Xét trên mỗi đa giác thì khoảng cách giữa hai điểm luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng độ dài đường chéo lớn nhất trong đa giác đó hay nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Bài toán 7. Trong mặt phẳng cho 17 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối 2 điểm bất kì (trong 17 điểm) được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng luôn tồn tại tam giác có 3 cạnh cùng màu.

Lời giải. Lấy 1 điểm A bất kì trong 17 điểm, gọi A_1, A_2, A_3, ..., A_{16} là các điểm còn lại.

Nối điểm A với các điểm A_1, A_2, A_3, ..., A_{16} ta được 16 đoạn thẳng.

Theo nguyên lí Dirichlet, trong 16 đoạn được tô bởi một trong ba màu thì tồn tại ít nhất 6 đoạn cùng màu.

Không mất tính tổng quát giả sử AA_1, AA_2, ..., AA_6 cùng màu, chẳng hạn màu xanh.

• Nếu trong các đoạn A_iA_j $(1 \le i \ne j \le 6)$ có ít nhất một đoạn màu xanh thì tam giác AA_iA_j có ba cạnh cùng màu xanh.

• Nếu tất cả các đoạn nối các điểm A_1, A_2, ..., A_6 chỉ có hai màu đỏ hoặc vàng.

Giả sử đoạn A_iA_j màu đỏ khi đó 5 đoạn còn lại tô bởi 2 màu đỏ, vàng nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 3 đoạn cùng màu, vậy cũng có tam giác 3 cạnh cùng màu (đỏ hoặc vàng).

Bài toán 8. Trong một hình vuông cạnh bằng 1 có 2019 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\frac{1}{91}$ nằm trong hình vuông đó mà không có điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

(Đề thi HSG Toán 9, tỉnh Nghệ An năm học 2018 - 2019)

Lời giải. Chia hình vuông đã cho thành 2025 hình vuông nhỏ có cạnh bằng nhau và bằng $\frac{1}{45}$.

Gọi (O_1), (O_2), ..., (O_{2025}) là các hình tròn nội tiếp các hình vuông nhỏ này bán kính bằng nhau và bằng $\frac{1}{90}$. Gọi (C_1), (C_2), ..., (C_{2025}) lần lượt là các hình tròn đồng tâm với các hình tròn trên, có bán kính bằng nhau và bằng $\frac{1}{91}$. Các hình tròn này nằm trong hình vuông nhỏ và đôi một không có điểm chung.

Có 2019 điểm nên tồn tại một hình tròn trong 2025 hình tròn (C_1), (C_2), ..., (C_{2025}) không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Bài toán 9. Trong hình tròn (O) có bán kính bằng 21 đơn vị, cho 399 điểm bất kì A_1, A_2, …, A_{399}. Chứng minh rằng tồn tại vô số hình tròn có bán kính bằng 1 đơn vị nằm trong hình tròn (O) và không chứa điểm nào trong 399 điểm đã cho.

Lời giải. Vẽ hình tròn (C) tâm O bán kính bằng 20 đơn vị, hình tròn (C) có diện tích là $S = 400\pi$.

Vẽ 399 hình tròn có tâm lần lượt là A_1, A_2, …, A_{399} bán kính bằng 1 đơn vị, khi đó tổng diện tích 399 hình tròn này là $S' = 399\pi < S$.

Do đó 399 hình tròn này không thể phủ hết hình tròn (C).

Suy ra có vô số các điểm B_1, B_2, …, B_n,… nằm trong hình tròn (C) nhưng không thuộc bất kì 399 hình tròn tâm lần lượt là A_1, A_2, …, A_{399} đã vẽ.

Vậy tồn tại vô số hình tròn có bán kính bằng 1 đơn vị nằm trong hình tròn (O) và không chứa điểm nào trong 399 điểm đã cho.

Bài toán 10. Lấy 2013 điểm thuộc miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh của tứ giác ta được 2017 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác ban đầu là 1 cm^2. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2017 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4028}$ cm^2.

Lời giải. Gọi 2013 điểm thêm vào tứ giác là A_1, A_2, …, A_{2013}.

Đầu tiên lấy A_1, nối A_1 với bốn đỉnh của tứ giác ta được 4 tam giác không có điểm trong chung.

Sau đó lấy A_2 trên mặt phẳng lúc này có 6 điểm (A_1, A_2 và 4 đỉnh của tứ giác).

Vì 6 điểm này không có 3 điểm nào thẳng hàng nên A_2 nằm trong một trong 4 tam giác vừa kẻ ban đầu.

Nối A_2 với ba đỉnh của tam giác đó, trên hình lúc này có tổng cộng 6 tam giác đôi một không có điểm trong chung.

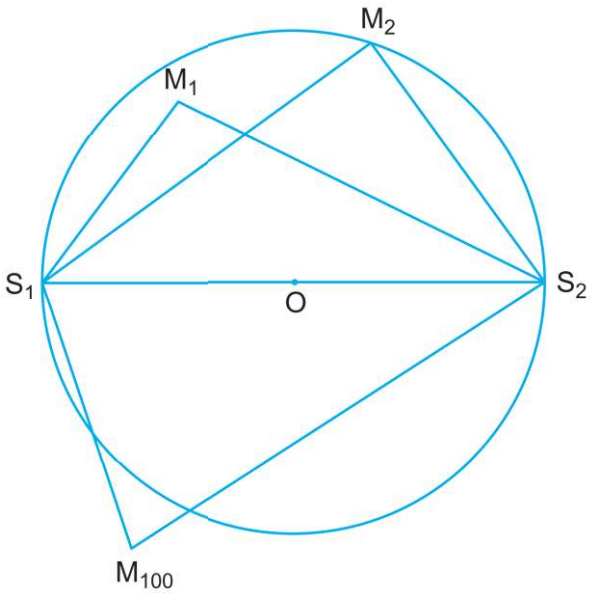
Tương tự với A_3, A_4, …, A_{2013}, mỗi khi thêm một điểm thì hình vẽ tăng thêm 2 tam giác. Cuối cùng có 4 + 2. 2012 = 4028 tam giác đôi một không có điểm trong chung, mỗi tam giác có ba đỉnh là ba trong 2017 điểm đã cho.

Tổng diện tích của 4028 tam giác là 1 cm^2 (diện tích tứ giác ban đầu), nên tam giác có diện tích nhỏ nhất không vượt quá $\frac{1}{4028}$ cm^2.

Bài toán 11. Cho 1000 điểm M_1, M_2, …, M_{1000} trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính bằng 1 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho $SM_1 + SM_2 + ... + SM_{1000} \geq 1000$.

Lời giải.

Gọi S_1S_2 là đường kính của đường tròn (O) có bán kính bằng 1.



Vì $S_1S_2 = 2$ nên ta có

$$\begin{cases} S_1M_1 + S_2M_1 \geq S_1S_2 = 2 \\ S_1M_2 + S_2M_2 \geq S_1S_2 = 2 \\ .... \\ S_1M_{1000} + S_2M_{1000} \geq S_1S_2 = 2. \end{cases}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$(S_1M_1 + S_1M_2 + ... + S_1M_{1000}) + (S_2M_1 + S_2M_2 + ... + S_2M_{1000}) \geq 2000$.

Theo nguyên lí Dirichlet, trong hai ngoặc của vế trái có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000.

Giả sử $S_1M_1 + S_1M_2 + ... + S_1M_{1000} \geq 1000$,

khi đó lấy $S \equiv S_1$ ta có điều phải chứng minh.



PHƯƠNG PHÁP VỊ TRÍ SAI KÉP GIẢI MỘT LỚP HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN TRONG SÁCH TOÁN HÁN NÔM

TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học)*
PHẠM VŨ LỘC *(Trung tâm Vũ trụ Việt Nam)*
ĐOÀN THỊ LỆ *(Đại học Thanh Hoa, Đài Loan)*
CUNG THỊ KIM THÀNH, PHAN THỊ ÁNH TUYẾT

1. Phương pháp vị trí sai kép

Chương 7 cuốn sách Cửu chương toán thuật được Lưu Huy biên soạn vào năm 263 có tên là Doanh bất túc (thừa không đủ), trình bày lời giải 20 bài toán lập và giải hệ hai phương trình bậc nhất. Bài toán đầu tiên được phát biểu như sau: Có một số người cùng mua hàng. Nếu mỗi người trả 8 tiền, thì thừa 3 tiền. Nếu mỗi người trả 7 tiền, thì thiếu 4 tiền. Hỏi có bao nhiêu người, giá hàng bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x là số người, y (tiền) là số tiền phải trả. Ta có hệ $\begin{cases} 8x = y + 3 \ (1) \\ 7x = y - 4. \ (2) \end{cases}$

Giải hệ ta được $x = 7$, $y = 53$.

Đáp số: 7 người mua, giá hàng 53 tiền.

Nhận xét: Có thể coi hai phương trình trên là phương trình của hai đường thẳng, nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm của hai đường thẳng.

Ghi chú: Phương trình (1) là thừa (doanh), phương trình (2) là nục (thiếu). Đây chính là dạng toán Doanh bất túc trong [1]. Dạng toán này xuất phát từ các bài toán thực tế: mua hàng, chia tiền, xếp chỗ,... phương tây gọi phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất là Quy tắc vị trí sai kép (the rule of double false position): từ hai vị trí sai (thừa và thiếu), tìm được đáp số đúng. Dạng toán Doanh bất túc đã được trình bày trong các sách toán Việt Nam viết bằng chữ Hán và chữ Nôm (sách toán Hán Nôm).

Bài viết này trình bày phương pháp giải một lớp hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $\begin{cases} ax = y + b \\ a'x = y + b' \end{cases}$ trong các sách toán Hán Nôm Việt Nam.

Lưu ý: Ngày xưa chưa có khái niệm số âm và số dương (chỉ có thừa và thiếu, cộng và trừ), cũng không có kí hiệu và phương trình toán học, mọi bài toán được giải bằng lời khá dài dòng. Dạng toán lập và giải hệ hai phương trình bậc nhất là dạng toán quen thuộc với học sinh Trung học cơ sở, vì vậy để bài viết được ngắn gọn, chúng tôi chỉ lập phương trình và cung cấp đáp số. Bạn đọc có thể tự giải hoặc tìm hiểu qua các tài liệu.

2. Dạng toán Doanh bất túc trong các sách toán Hán Nôm

Trong các sách toán Hán Nôm có khá nhiều bài toán dạng Doanh bất túc với phân loại và áp dụng sáng tạo. Các bài toán này đã có trong sách của Lương Thế Vinh cách đây 500 năm, hoặc trong các sách đầu thế kỉ XVIII, nhưng nó vẫn còn tính thời sự và có thể được các giáo viên tham khảo và dùng làm các đề luyện thi vào 10.

Dạng 2.1 Doanh bất túc (thừa không đủ)

Nguyễn Hữu Thận giải thích ([3], Quyển 6, trang 72) Doanh nục chư pháp (Các phép thừa thiếu) như sau: Doanh nghĩa là thừa, nục là không đủ vậy. Khi có thừa hoặc không đủ thì bù cho nhau để tìm số ở giữa (tìm nghiệm đúng).

Trong [4], Phạm Gia Kỷ cũng giảng: Doanh khuyết (thừa thiếu) tức là thừa và không đủ vậy. Hoặc 3 người, 5 người, hoặc bao nhiêu người góp vốn mua một vật, mỗi người xuất

vốn bằng nhau. Nhưng mỗi người xuất nhiều thì so với giá vật còn dư, mỗi người xuất ít thì so với giá vật không đủ. Nay căn cứ số thừa thiếu mà tính, có thể biết bao nhiêu người góp vốn, giá vật.

Bài 2.1.1 ([2], trang 30b) Nay có một số học trò đến trường, ngồi trên các chiếu, nếu mỗi chiếu ngồi 5 người thì thiếu 4 người, nếu 4 người ngồi 1 chiếu thì thừa 3 người. Hỏi có bao nhiêu trò, bao nhiêu chiếu?

Lời giải. Gọi x là số chiếu, y là số trò.

Ta có hệ $\begin{cases} 5x = y + 4 \\ 4x = y - 3. \end{cases}$

Đáp: 7 chiếu, 31 học trò.

Ghi chú: Học trò ngày xưa ngồi học trên chiếu.

Bài 2.1.2 ([4], trang 46a) Nay mua vật. Nếu mỗi người xuất 3 lạng 8 tiền thì thừa 7 lạng 2 tiền, mỗi người xuất 3 lạng 3 tiền thì thiếu 4 lạng 8 tiền. Hỏi số người, giá vật bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x là số người, y (lạng) là số tiền.

Ta có hệ $\begin{cases} 3,8x = y + 7,2 \\ 3,3x = y - 4,8. \end{cases}$

Đáp: 24 người mua hàng, giá vật là 84 lạng.

Ghi chú: 1 lạng = 10 tiền (đơn vị tiền cổ)

Bài 2.1.3 ([4], trang 49b) Nay mua vật. Nếu cứ 4 người xuất 5 lạng bạc thì thừa 1 lạng 5 tiền, nếu 6 người xuất 7 lạng bạc thì thiếu 2 lạng. Số người, giá vật là bao nhiêu?

Lời giải. Cứ 4 người xuất 5 lạng thì một người xuất $\frac{5}{4}$ lạng. Nếu 6 người xuất 7 lạng thì một người xuất $\frac{7}{6}$ lạng.

Gọi x là số người, y (lạng) là giá vật.

Ta có hệ $\begin{cases} \frac{5}{4}x = y + 1,5 \\ \frac{7}{6}x = y - 2. \end{cases}$

Đáp: 42 người, giá vật 51 lạng.

Dạng 2.2 Lưỡng doanh (Cả hai cùng thừa)

Nguyễn Hữu Thận ([3], Quyển 6, trang 73) đã giảng: Nếu cả hai cùng thừa hoặc cả hai cùng thiếu thì tìm người và tìm số tiền đều phải giảm xuống giống nhau (cùng trừ).

Bài 2.2.1 ([3], Quyển 6, trang 77) Giả sử có người chia quả, mỗi người được chia 12 quả thì thừa 12 quả, mỗi người 13 quả thì vẫn thừa 6 quả. Hỏi số người và số quả mỗi thứ bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x là số người, y là số quả.

Ta có hệ $\begin{cases} 12x = y - 12 \\ 13x = y - 6. \end{cases}$

Đáp: 6 người, 84 quả.

Bài 2.2.2 ([3], Quyển 6, trang 79) Giả sử có một tấm gấm, không biết dài bao nhiêu thước. Cần làm thành trướng, cắt thành 6 bức thì mỗi bức thừa 1 thước 2 thốn. Cắt thành 7 bức thì so với trướng cũ, mỗi bức vẫn thừa 2 thốn. Hỏi tấm gấm và tấm trướng mỗi thứ dài bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x là chiều dài một bức trướng, y là chiều dài tấm gấm. Vì mỗi bức thừa 1,2 thước nên 6 bức thừa 7,2 thước, mỗi bức thừa 0,2 thước nên 7 bức thừa 1,4 thước.

Ta có hệ $\begin{cases} 6x = y - 7,2 \\ 7x = y - 1,4. \end{cases}$

Đáp: Mỗi tấm trướng dài 5,8 thước, tấm gấm ban đầu dài 42 thước.

Ghi chú: 1 thước ngày xưa (thước ta) = 0,4 m, 1 thước = 10 thốn.

Bài 2.2.3 ([5], trang 47a) Nay có người mua vật. Mỗi người xuất 2 lạng bạc thì thừa 2 lạng, mỗi người xuất 1 lạng 8 tiền 5 phân bạc thì thừa 6 tiền 5 phân. Hỏi số người, giá vật là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x là số người, y (lạng) là giá vật.

Ta có $\begin{cases} 2x = y + 2 \\ 1,85x = y + 0,65. \end{cases}$

Đáp: 9 người, giá vật 16 lạng.

Ghi chú: 1 lạng = 10 tiền, 1 tiền = 10 phân.

Dạng 2.3 Lưỡng nục (Cả hai đều thiếu)

Bài 2.3.1 ([3], Quyển 6, trang 80) Giả sử mua trâu, nếu mỗi con 15 quan thì không đủ 80 quan, nếu mỗi con 13 quan thì vẫn không đủ 16 quan. Hỏi số con trâu và số tiền mỗi thứ là bao nhiên?

Lời giải. Gọi x là số trâu, y (quan) là số tiền.

Ta có hệ $\begin{cases} 15x = y + 80 \\ 13x = y + 16. \end{cases}$

Đáp: 32 trâu, 400 quan.

Bài 2.3.2 ([3], Quyển 6, trang 82) Giả sử có gạo đổi lụa, không biết có bao nhiêu gạo, biết rằng đổi 20 tấm lụa thì gạo không đủ 10 vuông, đổi 16 tấm lụa thì gạo vẫn không đủ 2 vuông. Hỏi giá mỗi tấm lụa, số lụa và số gạo mỗi thứ là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x là giá mỗi tấm lụa, y là số vuông gạo. Ta có $\begin{cases} 20x = y + 10 \\ 16x = y + 2. \end{cases}$

Đáp: 1 tấm lụa giá 2 vuông gạo, 20 tấm lụa giá 40 vuông gạo, số gạo là 30 vuông.

Ghi chú: Vuông - đơn vị đong gạo ngày xưa.

1 vuông gạo = 604 gr 50.

Dạng 2.4 Nhất doanh nhất thích túc (Một thừa một đủ)

Bài 2.4.1 ([4], trang 48b) Nay mua vật. Nếu mỗi người xuất 5 lạng vàng thì thừa 7 lạng, nếu mỗi người xuất 4 lạng thì đủ. Hỏi số người mua hàng và giá vật là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x là số người, y (lạng) là giá vật.

Ta có hệ $\begin{cases} 5x = y + 7 \\ 4x = y. \end{cases}$

Đáp: 7 người, giá vật là 28 lạng.

Bài 2.4.2 ([3], Quyển 6, trang 85) Giả sử phải tính số ngày trong hành trình, nếu mỗi ngày đi được 55 dặm thì cách nơi muốn đến 60 dặm, nếu mỗi ngày đi 60 dặm thì đến đúng nơi. Hỏi số ngày và số dặm đường mỗi thứ là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x là số ngày, y (dặm) là quãng đường đi. Ta có hệ $\begin{cases} 55x = y - 60; \\ 60x = y. \end{cases}$

Đáp: 12 ngày, quãng đường dài 720 dặm.

Bài 2.4.3 ([3], Quyển 6, trang 82) Giả sử có các nhà góp lương thực, không biết có bao nhiêu nhà, chỉ biết mỗi nhà góp 3 bát gạo thì thừa 20 vuông, mỗi vuông là 30 bát, mỗi nhà góp 2 bát 5 hợp gạo thì đủ. Hỏi số nhà và số gạo mỗi thứ là bao nhiêu?

Lời giải. 20 vuông = 20×30 bát = 600 bát.

Gọi x là số nhà, y là số bát gạo.

Ta có $\begin{cases} 3x = y + 600 \\ 2,5x = y. \end{cases}$

Đáp: 1200 nhà góp 3000 bát = 100 vuông.

Dạng 2.5 Nhất nục nhất thích túc (Một thiếu một đủ)

Bài 2.5.1 ([4], trang 49a) Nay mua vật. Nếu mỗi người xuất 6 lạng bạc thì thiếu 12 lạng, nếu mỗi người xuất 8 lạng thì đủ. Hỏi người và giá vật.

Lời giải. Gọi x là số người, y (lạng) là giá vật.

Ta có hệ $\begin{cases} 6x = y - 12 \\ 8x = y. \end{cases}$

Đáp: 6 người, giá vật 48 lạng.

Bài 2.5.2 ([3], Quyển 6, trang 92) Giả sử có thuyền chở gỗ, cứ 4 thuyền chở 60 cây thì thiếu 60 cây, cứ 3 thuyền chở 40 cây thì vừa đủ. Hỏi số thuyền và số cây mỗi thứ là bao nhiêu?

Lời giải. 4 thuyền chở 60 cây thì mỗi thuyền chở 15 cây, 3 thuyền chở 40 cây thì trung bình mỗi thuyền chở $\frac{40}{3}$ cây.

Gọi x là số thuyền, y là số cây gỗ.

Ta có hệ $\begin{cases} 15x = y + 60 \\ \frac{40}{3}x = y. \end{cases}$

Đáp: 36 thuyền chở 480 cây gỗ.

Dạng 2.6 Các bài toán khó

Sách toán Hán Nôm cũng thường có mục Các bài toán khó, tương tự như toán nâng cao trong các sách toán hiện đại. Mục này liệt kê một số bài toán đưa về dạng doanh bất túc, tuy không khó với học sinh hiện nay, nhưng có thể được coi là khó với các sĩ tử ngày xưa.

Bài 2.6.1 ([3], Quyển 6, trang 76) Giả sử có đám người đi thuyền qua sông. Nếu mỗi thuyền chở 13 người thì thừa 12 người. Nếu mỗi thuyền chở 18 người thì thừa 1 thuyền. Hỏi tất cả số người và số thuyền là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x là số thuyền, y là số người.

Ta có hệ $\begin{cases} 13x = y - 12 \\ 18(x-1) = y. \end{cases}$

Đáp: 6 thuyền, 90 người.

Bài 2.6.2 ([5], Đề 15, trang 53-54) Trong nhà, khách và ghế không biết bao nhiêu, nhưng nếu 2 người cùng ngồi một ghế thì 9 người không có ghế ngồi, nếu 3 người một ghế thì 9 ghế lại không có người ngồi. Nay hỏi trong nhà có bao nhiêu khách, bao nhiêu ghế?

Lời giải. Gọi x là số ghế, y là số người.

Ta có hệ $\begin{cases} 2x = y - 9 \\ 3(x-9) = y. \end{cases}$

Đáp: 36 ghế, 81 người.

Kết luận. Lập và giải phương trình, hệ phương trình (bậc nhất và bậc hai) là dạng toán thường xuyên có mặt trong các đề thi vào 10 hiện nay. Dạng toán giải hệ phương trình bậc nhất xuất phát từ những bài toán thực tế, đã có mặt trong các sách toán Trung Hoa cách đây 2000 năm với tên gọi Doanh bất túc (thừa không đủ), và vẫn còn được quan tâm và phát triển trong thế kỉ XXI với tên gọi Phương pháp vị trí sai kép (xem [6]). Bài viết giới thiệu các bài toán dạng Doanh bất túc trong một số sách toán Hán Nôm, qua đó có thể tìm hiểu và phân tích phương pháp giải toán cũng như tư duy toán học của người Việt xưa. Hi vọng nó vẫn có ích trong dạy và học ngày nay, nhất là trong các buổi ngoại khóa toán.

Tài liệu dẫn

[1] 刘徽 Lưu Huy (năm 263), *Cửu chương toán thuật* 九章算术, https://ctext.org/nine-chapters/zh, Bản dịch tiếng Nga (1958), tiếng Anh (1999), tiếng Pháp (2004).

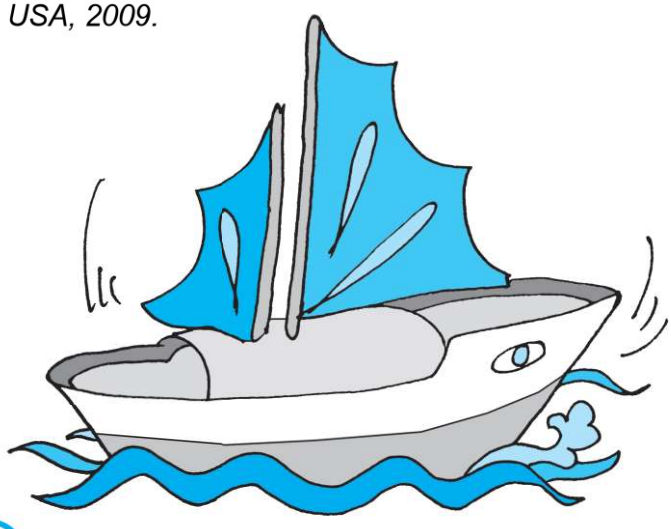
[2] 梁世榮 Lương Thế Vinh, 算法大成 *Toán pháp đại thành*, Thư viện Hán Nôm, A.2931, Vhv. 1152.

[3] 阮有慎 Nguyễn Hữu Thận (năm 1829), 意齋算法一得錄, *Ý trai toán pháp nhất đắc lục*, Thư viện Hán Nôm, A.1336.

[4] 范嘉紀 Phạm Gia Kỷ, 大成算學指明 *Đại thành toán học chỉ minh*, Thư viện Hán Nôm, A.1555.

[5] 阮瑾 *Nguyễn Cẩn (1909),* 筆算指南 Bút toán chỉ nam*, Thư viện Hán Nôm, A.1031, Vhv.282.*

[6] *Joanna Maria Papakonstantinou, Historical Development of the BFGS Secant Method and Its Characterization Properties, Luận án Tiến sĩ, Rice University, Houston, USA, 2009.*



AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION AMC 2019

INTERMEDIATE DIVISION

AUSTRALIAN SCHOOL YEARS 9 AND 10

Time allowed: 60 *minutes*

ĐỖ TRUNG KIÊN *(Sưu tầm và giới thiệu)*

Questions 1 to 10, 3 marks each

1. The value of $20.19 - 19$ is

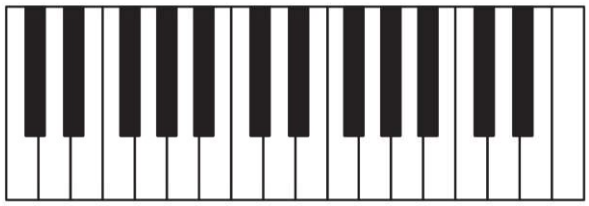
(A) 39.19 (B) 20.38 (C) 20

(D) 1.19 (E) 1

2. Sharyn's piano lesson was 40 minutes long, and finished at 4.10 pm. When did it start?

(A) 3.30 pm (B) 3.40 pm (C) 3.50 pm

(D) 4.40 pm (E) 4.50 pm



3. Which of the following is closest to 7×1.8?

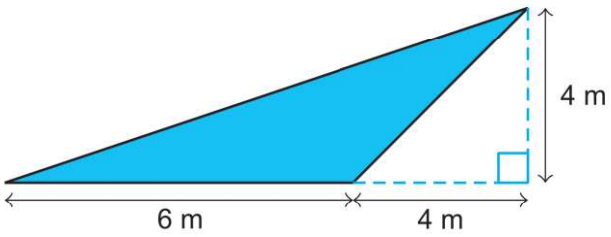
(A) 10 (B) 11 (C) 12

(D) 13 (E) 14

4. What is the area of the shaded triangle?

(A) $8\,m^2$ (B) $12\,m^2$ (C) $14\,m^2$

(D) $20\,m^2$ (E) $24\,m^2$



5. Five-eighths of a number is 200. What is the number?

(A) 120 (B) 320 (C) 275

(D) 75 (E) 280

6. Every row and every column of this 3×3 square must contain each of the numbers 1, 2 and 3.

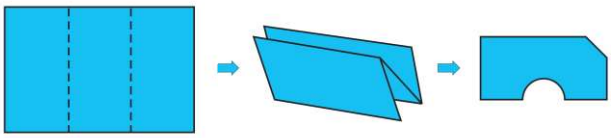
What is value of N + M?

(A) 2 (B) 3 (C) 4

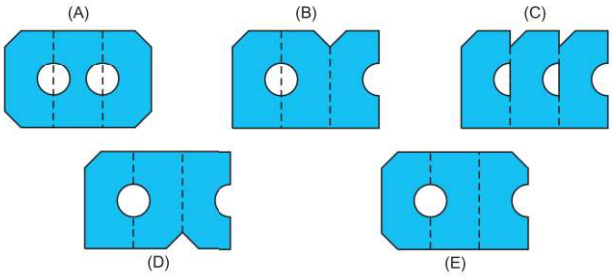
(D) 5 (E) 6

1		
	2	N
		M

7. A piece of paper is folded in three, then a semi-circular cut and a straight cut are made, as shown in the diagram.



When the paper is unfolded, what does it look like?



8. When a rectangle is cut in half, two squares are formed. If each square has a perimeter of 48, what is the perimeter of the original rectangle?

(A) 96 (B) 72 (C) 36

(D) 24 (E) 12

9. Consider the *undulating* number sequence

1, 4, 7, 4, 1, 4, 7, 4, 1, 4, ... ,

which repeats every four terms. The running total of the first 3 terms is 12. The running total of the first 7 terms is 28.

Which one of the following is also a running total of this sequence?

(A)61 (B) 62 (C) 67

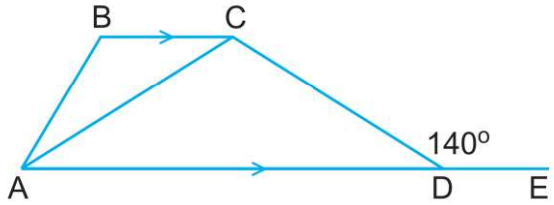
(D) 66 (E) 65

10. Sebastien has a Personal Identification Number (PIN) consisting of four digits. The first three digits in order are 591. If Sebastien's PIN is divisible by 3, then how many possibilities are there for the final digit?

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5

Questions 11 to 20, 4 marks each

11. A quadrilateral ABCD has AD // BC, AB = BC and AC = CD. The external $\angle CDE = 140°$. What is the value, in degrees, of $\angle ABC$?

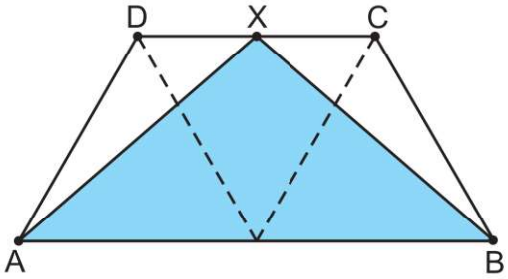


(A) 90 (B) 100 (C) 110
(D) 120 (E) 130

12. In my dance class, 14 students are taller than Bob, and 12 are shorter than Alice. Four students are both shorter than Alice and taller than Bob. How many students are in my dance class?

(A) 22 (B) 24 (C) 26
(D) 28 (E) 30

13. Three equilateral triangles are joined to form the quadrilateral ABCD shown.
The point X is halfway along CD.
What fraction of the area of ABCD is shaded?



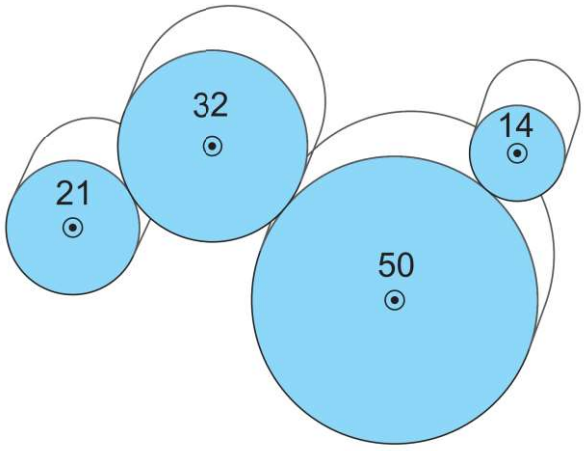
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{3}{5}$

14. In a year 10 Maths class, there are 30 students. Each student is either 15 or 16 years old, and either left- or right-handed.
The ratio of right-handed students to left-handed students is 4 : 1, the ratio of 15 year olds to 16 year olds is 1 : 2 and the ratio of left-handed 15 year olds to left-handed 16 year olds is 1 : 5.
If the names of the students in this class are placed in a hat and one is selected at random, what is the probability that the student selected is 15 years old and right-handed?

(A) $\frac{1}{30}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{3}{10}$
(D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{4}{5}$

15. The set of four rollers shown has fixed axles and transfers rotation from each roller to the next without slipping. Their diameters are 21 cm, 32 cm, 50 cm and 14 cm respectively.
While the 21 cm roller makes a full rotation (360°), through which angle does the 14 cm roller rotate?

(A) 180° (B) 310° (C) 360°
(D) 540° (E) 620°



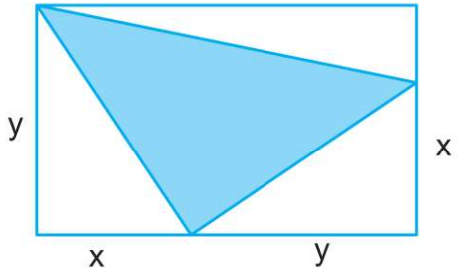
16. In a box of apples, $\frac{3}{7}$ of the apples are red and the rest are green. Five more green apples are added to the box. Now $\frac{5}{8}$ of the apples are green.
How many apples are there now in the box?

(A)32 (B) 33 (C) 38
(D) 40 (E) 48

17. Asha chooses a whole number from 1 to 5 and announces it. Then Richy chooses a whole number from 1 to 5 and announces it. Finally, Asha chooses a whole number from 1 to 5 and announces it.
If the sum of the three numbers announced is a multiple of 7, then Asha wins; otherwise, Richy wins.

What number should Asha choose on her first turn to guarantee that she can win?
(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5

18. The area of the shaded triangle inside this rectangle is



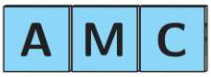
(A) $\frac{1}{2}(x+y)^2$ (B) $x(x+y)$ (C) $y(x+y)$

(D) $\frac{1}{2}(y^2-x^2)$ (E) $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

19. These three cubes are labelled in exactly the same way, with the 6 letters A, M, C, D, E and F on their 6 faces:

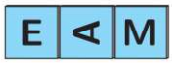


The cubes are now placed in a row so that the front looks like this:



When we look at the cubes from the opposite side, we will see

(A)


(B)


(C)


(D)

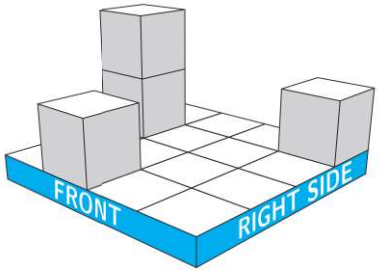

(E)

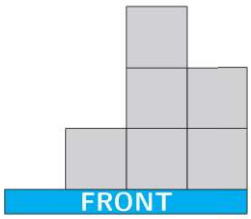

20. Five numbers are placed in a row. From the third number on, each number is the average of the previous two numbers. The first number is 12 and the last number is 7. What is the third number?
(A) 4 (B) 5 (C) 6
(D) 7 (E) 8

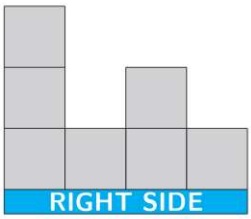
Questions 21 to 25, 5 marks each

21. A pool can be filled through three pipes that can be used together or separately.
If only the first pipe is used, the pool is filled in 21 hours. If only the second pipe is used, the pool is filled in 24 hours. If all three pipes are used, the pool is filled in 8 hours.
How long will it take to fill the pool using only the third pipe?
(A) 12 hours B. 14 hours C. 27 hours
D. 28 hours E. 30 hours

22. A 4 cm × 4 cm board can have 1 cm^3 cubes placed on it as shown.
The board is cleared, then a number of these cubes are placed on the grid. The front and right side views are shown.
What is the maximum number of cubes there could be on the board?





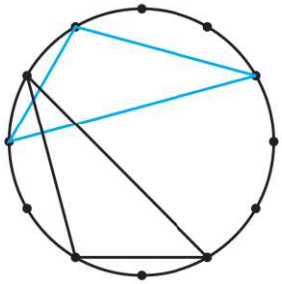


(A) 10 (B) 11 (C) 16
(D) 17 (E) 18

23. Manny has three ways to travel the 8 kilometres from home to work: driving his car takes 12 minutes, riding his bike takes 24 minutes and walking takes 1 hour and 44 minutes. He wants to know how to get to work as quickly as possible in the event that he is riding his bike and gets a flat tyre.
He has three strategies:
(i) If he is close to home, walk back home and then drive his car.
(ii) If he is close to work, just walk the rest of the way.
(iii) For some intermediate distances, spend 20 minutes fixing the tyre and then continue riding his bike.
He knows there are two locations along the route to work where the strategy should change. How far apart are they?
(A) 2 km (B) 3 km (C) 4 km
(D) 5 km (E) 6 km

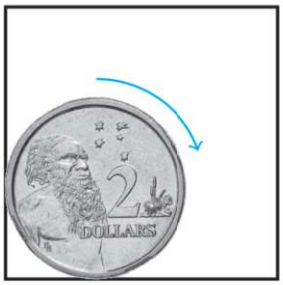
24. Out of modern musical theory comes the following question. Twelve points are equally

spaced around a circle. Three points are to be joined to make a triangle.
We count two triangles as being the same only if they match perfectly after rotating, but not reflecting. For instance, the two triangles shown are the same.
How many different triangles can be made?



(A) 10 (B) 14 (C) 19
(D) 20 (E) 22

25. A circular coin of radius 1 cm rolls around the inside of a square without slipping, always touching the boundary of the square.
When it returns to where it started, the coin has performed exactly one whole revolution.
In centimetres, what is the side length of the square?



(A) π (B) 3.5 (C) $1+\pi$
(D) 4 (E) $2+\frac{\pi}{2}$

For questions 26 to 30, shade the answer as an integer from 0 to 999 in the space provided on the answer sheet.
Questions 26–30 are worth 6, 7, 8, 9 and 10 marks, respectively.

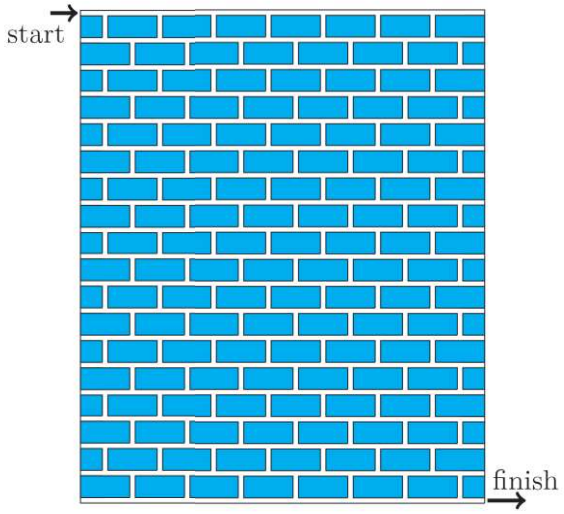
26. A positive whole number is called *stable* if at least one of its digits has the same value as its position in the number. For example, 78247 is stable because a 4 appears in the 4^{th} position. How many stable 3-digit numbers are there?

27. When I divide an integer by 15, the remainder is an integer from 0 to 14. When I divide an integer by 27, the remainder is an integer from 0 to 26.
For instance, if the integer is 100 then the remainders are 10 and 19, which are different.
How many integers from 1 to 1000 leave the same remainders after division by 15 and after division by 27?

28. The number 35 has the property that when its digits are both increased by 2, and then multiplied, the result is $5 \times 7 = 35$, equal to the original number.
Find the sum of all two-digit numbers such that when you increase both digits by 2, and then multiply these numbers, the product is equal to the original number.

29. The Leader of Zip decrees that the digit 0, since it represents nothing, will no longer be used in any counting number. Only counting numbers without 0 digits are allowed. So the counting numbers in Zip begin 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, ... , where the tenth counting number is 11.
When you write out the first one thousand allowable counting numbers in Zip, what are the last three digits of the final number?

30. Antony the ant is at the top-left corner of this brick wall and needs to get to the bottom-right corner.
Because it is a hot day, he avoids the dark bricks and only walks on the cooler white mortar between the bricks and at the top and bottom of the wall.
There are 18 rows of bricks, each with 7 whole bricks and one half-brick in an alternating pattern.
How many different ways are there for Antony to walk to the opposite corner as quickly as possible?



Thì thầm... Thì thầm thôi...

Tuổi hồng... xin cứ tuổi hồng
Chuyện gì quá sớm... xin không trả lời



Hỏi: Dịch bệnh đang bùng phát trở lại nhưng địa phương em chưa có ca dương tính nào. Theo anh có cần thiết phải đeo khẩu trang khi ra khỏi nhà không?

Em gái
(THCS Đông Tân, TP. Thanh Hóa)

Đáp:

Phòng dịch nhớ phải phòng xa
Đeo khẩu trang chắc chắn là tốt hơn
Dịch chưa lan tới địa phương
Nhưng mà diễn biến khó lường em ơi!



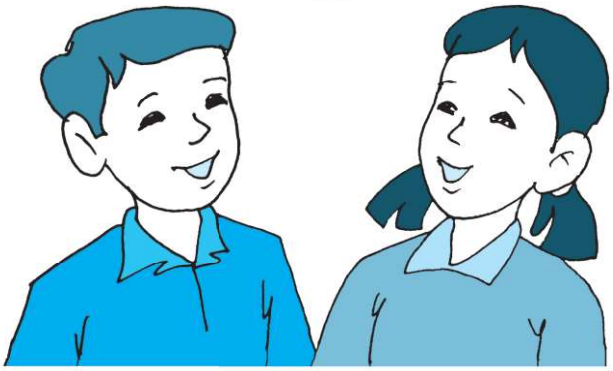
Hỏi: Vừa qua em trượt vào lớp 10, buồn quá anh ơi! Bố mẹ bảo em đi học nghề, theo anh có nên không?

LÊ V.T.
(Phú Mỹ, Bình Định)

Đáp:

Có bao nhiêu cách vào đời
Học nghề cho giỏi, bao người thành công
Cùng bố mẹ tính cho thông
Tương lai vẫn cứ màu hồng mà em...



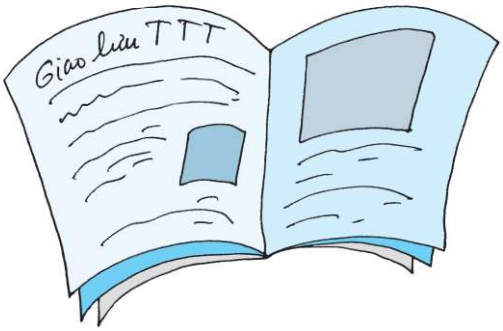


Hỏi: Anh ơi! Em lỡ thích một bạn gái cùng lớp rồi thì phải làm sao đây?

TRẦN MẠNH D.
(THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Đáp:

"Thích" thì mới chỉ hơn "Quen"
Chuyện này các bạn tuổi "teen" thấy nhiều
Nhưng đừng vội chuyển thành "Yêu"
Cố "bình thường hóa" mọi điều sẽ êm.



Hỏi: Năm 2020 bị lỡ mất "Giao lưu Toán Tuổi thơ" vì dịch SARS-CoV-2, liệu năm 2021 có tổ chức không anh ơi?

NGUYỄN THỊ HOÀI T.
(Thanh Xuân, Hà Nội)

Đáp:

Cảm ơn bạn đã không quên
Sang năm hết dịch, ưu tiên chuyện này
Mời về quê Bác đúng ngày
Giao lưu gặp gỡ vui thay thầy trò!

ANH PHÓ GỠ XƯA



CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(209+210). Cho 53 số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng luôn tìm được hai số trong các số đã cho mà hiệu của hai số này chia hết cho 210.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài 2(209+210). Trên bảng có hai số 1 và 2. Thực hiện ghi số theo quy tắc sau: Nếu trên bảng có hai số a, b thì được phép ghi thêm số c = a + b + ab. Hỏi bằng cách đó có thể xuất hiện các số 2019, 2020 và 2021 được không?

VŨ ĐÌNH HÒA *(Hà Nội)*

Bài 3(209+210). Cuối năm học, 200 học sinh tiêu biểu của nhà trường được cho đi xem phim. Cô giáo mua 200 vé hết 3365000 đồng. Trong các vé đã mua này có một số vé được giảm giá 25%. Cho biết giá gốc mỗi vé (khi không giảm giá) là một số nguyên dương. Hỏi nếu không có vé nào được giảm giá, số tiền mua 200 vé sẽ là bao nhiêu?

TRẦN QUANG VINH
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Bài 4(209+210). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AC lấy điểm D, trên nửa mặt phẳng không chứa điểm A với bờ là đường thẳng BC lấy điểm E sao cho tia BD là tia phân giác của góc ABE và EC vuông góc với AC. Chứng minh BD ≤ 2DE.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(Trường THCS phường Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

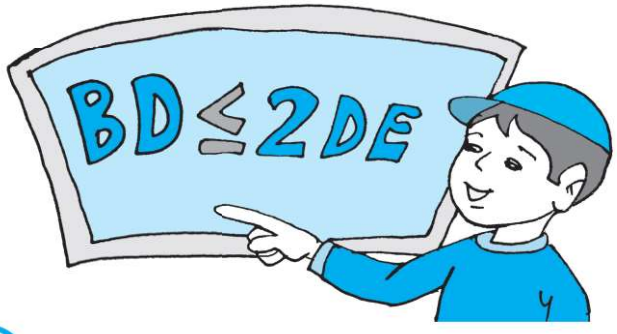
Translated by Thanh Do Duc

1(209+210). Prove that among 53 different integers, there always exists a pair of numbers whose difference is divisible by 210.

2(209+210). If there are 2 numbers a and b already written on the board, we are allowed to write another number c = a + b + ab. Is it possible for 2019, 2020 and 2021 to appear on the board if we start with numbers 1 and 2?

3(209+210). 200 students go to the movies. Among the tickets, some tickets are discounted by 25% and the teacher pays 3365000 VND for 200 tickets. If there were no discounts, how much would the teacher have to pay for those 200 tickets given that the price of each ticket is an integer?

4(209+210). Given isosceles right triangle ABC (angle A = 90°) where AB = AC. Point D on AC, point E is on the other side of BC with respect to A such that BD is the interior bisector of angle ABE and EC is perpendicular to AC. Show that BD ≤ 2DE.



CÁC LỚP THCS

Bài 5(209+210). Giải phương trình

$$x + 2\sqrt{8x - x^2} = 4(1 + \sqrt{x}).$$

NGUYỄN MINH SANG

(Trường THCS Lâm Thao, Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài 6(209+210). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b + c - a} + \frac{1}{c + a - b} + \frac{1}{a + b - c} \le \frac{3}{(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}.$$

DƯƠNG ĐỨC LÂM

(Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài 7(209+210). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

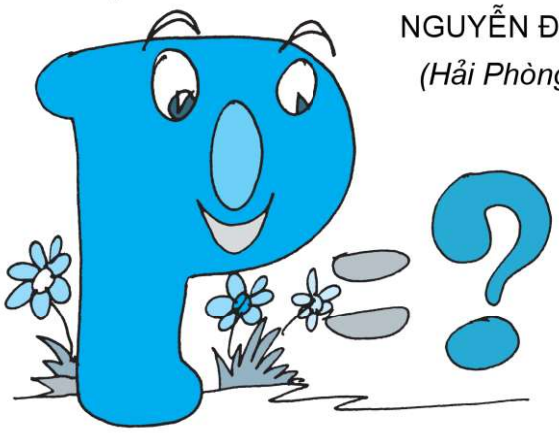
$$P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3abc}{ab + bc + ca}.$$

HOÀNG NGỌC MINH

(Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

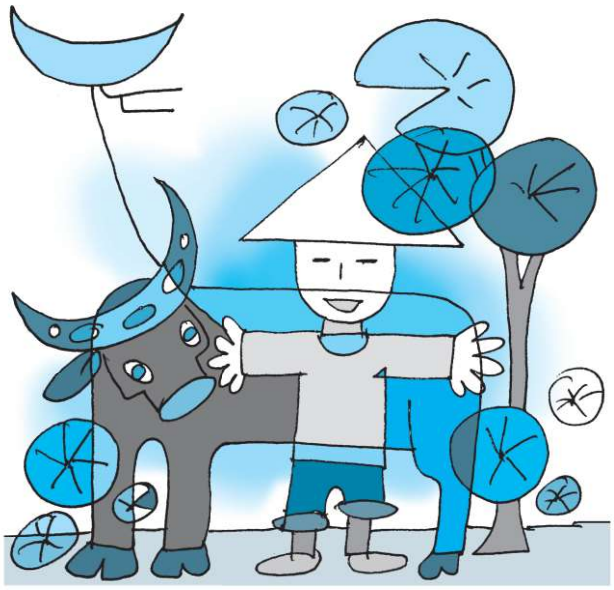
Bài 8(209+210). Cho tứ giác lồi ABCD có tất cả các góc nhỏ hơn 150° và $\hat{A} + \hat{D} = 150^\circ$. Chứng minh rằng

$$S_{ABCD} > \frac{1}{4}(AB.CD + AB.BC + BC.CD).$$



NGUYỄN ĐỄ

(Hải Phòng)



SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

5(209+210). Solve the following equation

$$x + 2\sqrt{8x - x^2} = 4(1 + \sqrt{x}).$$

6(209+210). Given a, b and c are the side lengths of a triangle satisfying $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Show that

$$\frac{1}{b + c - a} + \frac{1}{c + a - b} + \frac{1}{a + b - c} \le \frac{3}{(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}.$$

7(209+210). Given a, b and c are positive real numbers such that a + b + c = 3. Find the minimum value of the expression:

$$P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3abc}{ab + bc + ca}.$$

8(209+210). Given convex quadrilateral ABCD with all angles smaller than 150°, and $\hat{A} + \hat{D} = 150^\circ$. Show that

$$S_{ABCD} > \frac{1}{4}(AB.CD + AB.BC + BC.CD).$$

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM HOÀN THÀNH CÔNG TÁC BỒI DƯỠNG GIÁO VIÊN SỬ DỤNG SÁCH GIÁO KHOA LỚP 1

CHUẨN BỊ, CUNG ỨNG ĐẦY ĐỦ SÁCH GIÁO KHOA PHỤC VỤ NĂM HỌC 2020 - 2021



Ảnh: Hiền Thương

Thực hiện công văn số 2058/BGDĐT-GDTH ngày 10/6/2020 của Bộ Giáo dục và Đào tạo (GD&ĐT) về việc thực hiện bồi dưỡng giáo viên (GV) và cung ứng SGK lớp 1 năm học 2020-2021, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã hoàn thành công tác bồi dưỡng GV sử dụng SGK lớp 1 và chuẩn bị đầy đủ SGK, cung ứng tới các địa phương trong cả nước.

I. VỀ CÔNG TÁC BỒI DƯỠNG GIÁO VIÊN SỬ DỤNG SGK LỚP 1

1. NXBGDVN đã đầu tư lớn về con người, trang thiết bị và các điều kiện kĩ thuật... để tổ chức tập huấn GV theo 3 phương án: (1) Tập huấn trực tiếp theo kế hoạch chung của Bộ GD&ĐT và kế hoạch riêng của một số địa phương; (2) Tập huấn trực tuyến với hệ thống các STUDIO tại Hà Nội và TP. Hồ Chí Minh. Qua quá trình triển khai đã được các địa phương đánh giá cao; (3) Tập huấn thông qua các học liệu điện tử, được đăng tải miễn phí trên trang web Tập huấn nhằm đảm bảo 100% GV dạy lớp 1 được tập huấn sử dụng SGK của NXBGDVN theo chỉ đạo của Bộ GD&ĐT.

2. Đối với tập huấn trực tiếp, đến ngày 15/8/2020, NXBGDVN đã hoàn thành việc triển khai tại 1.004 điểm, phòng tập huấn thuộc các địa phương trong cả nước với 123.488 lượt GV tham gia.

- NXBGDVN đã tổ chức tổng cộng 338 lớp tập huấn trực tuyến kết nối 39.856 điểm cầu (bao gồm cả điểm cầu cá nhân và tập thể), với 268.048 lượt GV tham gia. Tính đến hết ngày 16/8/2020, NXBGDVN đã tập huấn trực tuyến cho toàn bộ 63 tỉnh thành trong cả nước.
- Đối với việc truy cập và tham gia tập huấn thông qua các học liệu điện tử tại địa chỉ *taphuan.nxbgd.vn*, đã có 695 phòng giáo dục, 11.402 trường với 157.151 GV được cấp tài khoản truy cập với trên 30.000 lượt truy cập hàng ngày.

3. Việc kiểm tra đánh giá kết quả tập huấn GV sử dụng SGK lớp 1 được NXBGDVN thực hiện trên nền tảng Tập huấn tại địa chỉ *taphuan.nxbgd.vn*. Đến hết ngày 16/8/2020, đã có 120.603 GV tham gia tập huấn trên nền tảng này; 117.384 GV hoàn thành bài kiểm tra, đạt tỉ lệ trên 97%. Điểm trung bình bài kiểm tra giáo viên sau tập huấn tất cả các môn của cả 4 bộ sách là 9,2 điểm.

(Xem tiếp trang 46)

TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ CẦU GIẤY
ĐIỂM SÁNG TRÊN BẢN ĐỒ GIÁO DỤC THỦ ĐÔ



Đ/c Nguyễn Mạnh Hùng - UV BCHTW Đảng, Bộ trưởng Bộ Thông tin và Truyền thông, Đ/c Trần Thị Phương Hoa - Thành ủy viên, Bí thư Quận ủy Cầu Giấy cùng các đại biểu và Hội đồng Sư phạm nhà trường

Trường Trung học cơ sở Cầu Giấy thành lập ngày 17/6/2010 theo QĐ 1598/QĐ-UBND của UBND quận Cầu Giấy. Ngày 5/10/2018, trường THCS Cầu Giấy được UBND Thành phố Hà Nội phê duyệt Đề án trường Chất lượng cao và công nhận đạt tiêu chí trường Chất lượng cao. Trải qua hơn 10 năm hoạt động, nhà trường đã ghi những dấu ấn đậm nét trên bản đồ giáo dục thủ đô.

Trường có một đội ngũ cán bộ giáo viên (GV) có năng lực, tiên phong trong đổi mới. Bên cạnh đó, học sinh (HS) của trường được tuyển chọn đầu vào nên các em có tố chất tốt, thích nghi nhanh với việc đổi mới. Để phát huy hết được vai trò, năng lực của GV và HS, Ban Giám hiệu đã có những kế hoạch hoạt động mang tính chiến lược cùng sự chỉ đạo quyết liệt sát sao. Do đó trường liên tục đạt thành tích cao.

Hàng năm tỉ lệ HS đạt hạnh kiểm tốt đạt 100%, học lực giỏi đạt 97%. Chất lượng giáo dục đại trà đạt kết quả cao, 100% HS hoàn thành bậc THCS đạt loại khá, giỏi (không có HS xếp loại trung bình). Đây là nền tảng vững chắc cho chất lượng giáo dục mũi nhọn và kết quả thi vào THPT, THPT chuyên. Trong 5 năm học vừa qua, kết quả thi vào lớp 10 của HS nhà trường đều đứng trong tốp những trường có điểm cao nhất thành phố. HS đỗ vào các trường chuyên hàng năm đạt từ 70% đến hơn 80% (trong năm học 2018 - 2019, tỉ lệ này là 82,5%). Đặc biệt trong năm học 2019 - 2020, tỉ lệ đỗ chuyên và thi vào lớp 10 THPT của trường đứng đầu thành phố. Ngoài ra, trong các kì thi quốc gia, quốc tế, nhà trường cũng gặt hái nhiều thành tích nổi bật: Thi Toán Tuổi thơ cấp quốc gia: đạt 6 Huy chương (2 HCV; 3 HCB; 1 HCĐ); IMSO cấp quốc tế đạt 4 Huy chương (2 HCV, 2 HCB); IMSO mở rộng đạt 15 Huy chương (2HCV, 9HCB, 4HCĐ); WMTC đạt 5 Huy chương (1HCV, 1HCB, 2HCĐ, 1KK), trong đó có 1 HS đạt điểm cao nhất thế giới; 12 giải Bạch kim cuộc thi Khoa học kĩ thuật tại Đài Loan.



Thủ tướng Nguyễn Xuân Phúc gửi lẵng hoa chúc mừng nhân ngày khai giảng năm học 2020 - 2021

Từ năm học 2018 - 2019, trường THCS Cầu Giấy bắt đầu tuyển sinh hệ chất lượng cao và song bằng Cambridge, đánh dấu bước tiến mới của nhà trường trong quá trình xây dựng và phát triển. Trong năm học 2019 - 2020, nhà trường vinh dự được nhận Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, được Sở Giáo dục - Đào tạo Hà Nội kiểm định đạt mức độ 2, chuẩn quốc gia giai đoạn 2, được UBND Thành phố trao tặng cờ thi đua xuất sắc, bảng vàng thành tích mỗi ngày một dày thêm từ sự nỗ lực, tâm huyết của tập thể cán bộ giáo viên - nhân viên, sự năng động, tích cực của HS. Đó là tiền đề, là động lực tạo đà cho nhà trường có thêm nhiều thành công mới trong hành trình mang ánh sáng của tri thức đến với lớp lớp học trò.

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.
Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.
Mã số: 8BTT209M20. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 09 năm 2020.

Giá: 20 000 đồng