NĂM THỨ
HAI MƯƠI MỐT
ISSN 1859-2740
6/9
204 + 205
NĂM HỌC 2019 - 2020

Toán tuổi thơ 2

TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO





HONG HA®

TRỤ SỞ CHÍNH
Cơ sở I: 25 Lý Thường Kiệt, Hoàn Kiếm, HN.
Cơ sở II: 672 Ngô Gia Tự, Long Biên, HN.
Tel: 024.36523330 * Fax: 024.36524157
Email: congty@vpphongha.com.vn
Website: www.vpphongha.com.vn

CHI NHÁNH ĐÀ NẴNG
23-25 Đường Yên Thế,
P. Hoà An, Q. Cẩm Lệ.
Điện thoại: 0236 3649 046
Fax: 0236 3649 046

CHI NHÁNH TP.HCM
Lô 10, Đường số 4, KCN Tân Tạo
P. Tân Tạo A, Q. Bình Tân.
Điện thoại: 028 3756 2158
Fax: 028.3756 2157

Toán tuổi thơ 2 TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
TS. TRẦN QUANG VINH
Phó Tổng biên tập phụ trách tạp chí:
TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

ỦY VIÊN

NGND. VŨ HỮU BÌNH
TS. NGUYỄN MINH ĐỨC
ThS. ĐẶNG HIỆP GIANG
TS. NGUYỄN MINH HÀ
ThS. NGUYỄN NGỌC HÂN
PGS. TS. VŨ ĐÌNH HÒA
ThS. TRẦN QUANG HÙNG
TS. LÊ THỐNG NHẤT
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG
ThS. PHẠM ĐỨC TÀI
NGND. PGS. TS. TÔN THÂN
PGS. TS. LÊ ANH VINH

TÒA SOẠN

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702
Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com
Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com
Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Trị sự - Phát hành:
TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG,
NGUYỄN THỊ HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH
Biên tập - Chế bản:
NGUYỄN QUANG TUẤN, VŨ THỊ MAI, ĐỖ TRUNG KIÊN
Mĩ thuật: **TRẦN NGỌC TRƯỜNG**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY

Rừng cười 4
Máy gì?
Lê Việt Ngọc
Đo trí thông minh 5
Tìm số còn thiếu
Đỗ Thị Thúy Ngọc
Toán quanh ta 6
Bài toán "Lãi suất ngân hàng"
Nguyễn Tiến Hợp
Nhìn ra thế giới 8
Hướng dẫn giải Đề thi IMC 2019
Võ Quốc Bá Cẩn
Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc 11
Ai là thủ phạm gây án?
Trần Phương Nam
Compa vui... tính 13
Có tồn tại tam giác không?
Nguyễn Xuân Bình
Học ra sao? 14
Một số phương pháp tìm cực trị hình học
Trương Quang An
Một số ứng dụng của bất đẳng thức Minkowski
Bùi Minh Trung
Thách đấu 21
Trận đấu thứ một trăm sáu mươi chín
Nguyễn Minh Hà
Chữ & chữ số 22
Kì 48
Lê Anh Tuấn
Đề thi kiểm tra chất lượng học sinh giỏi lớp 6 huyện Chương Mỹ, TP. Hà Nội 23
Đề thi khảo sát chọn học sinh giỏi lớp 7 huyện Xuân Trường, tỉnh Nam Định 24

Đề thi Olympic lớp 8 quận Hoàng Mai, TP. Hà Nội 25

Dành cho các nhà toán học nhỏ 29

Sử dụng tính chất của hàm số bậc nhất để giải toán

Thái Nhật Phượng

Kết quả Thi giải toán qua thư 32

Giải toán thế nào? 38

Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định

Nguyễn Xuân Cảnh

Sai ở đâu? Sửa cho đúng 43

Lời giải được chưa?

Nguyễn Thanh Giang



Dạy - Học chương trình giáo dục phổ thông mới - Chương trình 2018

Những yêu cầu cần đạt ở lớp 7 44

Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ 48

Kì 32

Thái Nhật Phượng

Vào thăm Vườn Anh 49

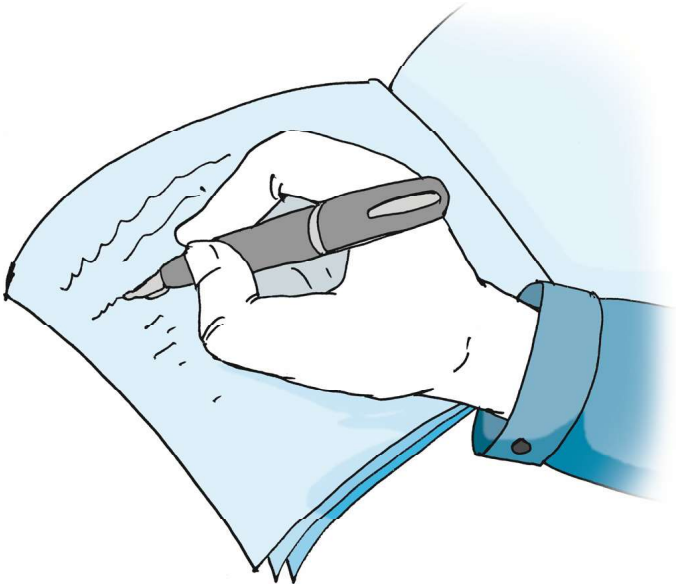
Các quốc gia Châu Á

Nguyễn Thị Hiền

Vượt vũ môn 50

Toán tổ hợp trong đề thi chọn học sinh giỏi và tuyển sinh vào lớp 10 chuyên

Nguyễn Đức Tấn



Lịch sử Toán học 55

Sai phân pháp trong cuốn sách toán chữ Hán "Đại thành toán học chỉ minh"

(Tiếp theo TTT2 số 200+201)

Tạ Duy Phượng, Phạm Vũ Lộc, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết

Đề thi các nước 58

Australian Mathematics Competition 2019

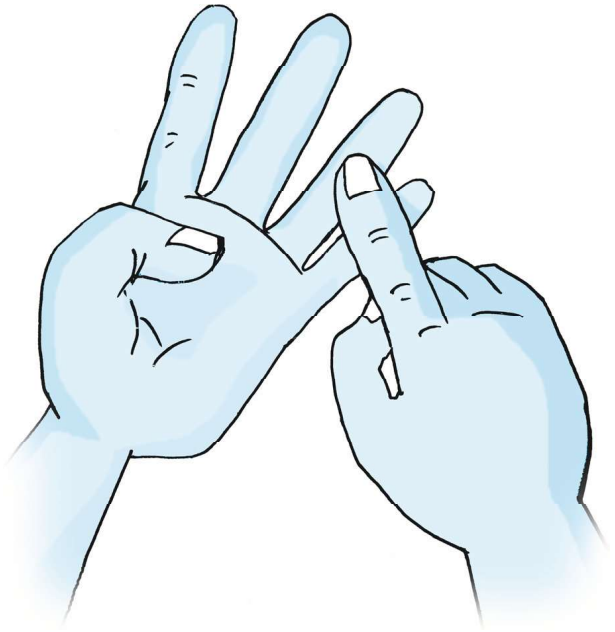
Đỗ Trung Kiên

Thì thầm... Thì thầm thôi... 62

Thi giải toán qua thư 63

Minh họa bìa 1: Nguyễn Thị Ngọc Thủy

(Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông)





Problem 11(204+205). How many 3-digit numbers are there that have odd number of factors?

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH

Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội

Các bạn hãy giải bài toán trên bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé! Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

Kết quả

Problem 9(202).

Let a, b be the two numbers.

$a + b = 100$. Therefore,

$ab = a(100 - a) = 100a - a^2$

$= 2500 - 2500 + 100a - a^2$

$= 2500 - (a^2 - 100a + 2500)$

$= 2500 - (a - 50)^2$.

As $(a - 50)^2$ non-negative.

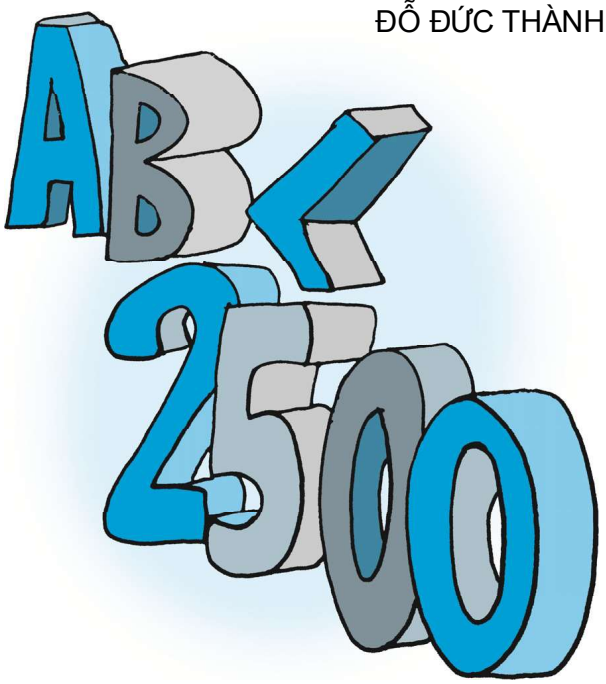
Consequently, $ab \leq 2500$.

HONG HA

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau có lời giải đúng: *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Bạch Thái Sơn*, 7A1, THCS Vĩnh Yên, Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Ngọc Diệu*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Phạm Thùy Trâm*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Nguyễn Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**.

Các bạn sau có lời giải tốt được khen: *Nguyễn Mạnh Hùng*, 9A3, THCS Giấy Phòng Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Trương Quang Mạnh*, 9D, THCS Đặng Thanh Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Trần Kiên*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

ĐỖ ĐỨC THÀNH

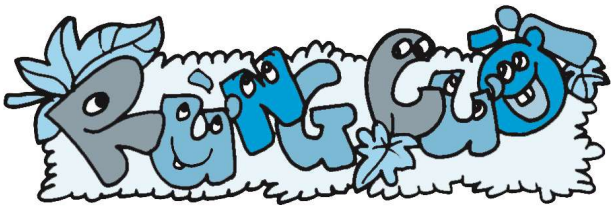


THÔNG BÁO VỀ CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2020

Từ năm 2005 đến năm 2014, tạp chí đã phối hợp với các Sở Giáo dục và Đào tạo tổ chức được 3 lần Giao lưu Toán Tuổi thơ và 7 lần Olympic Toán Tuổi thơ toàn quốc. Từ năm học 2015 - 2016 đến nay, tạp chí Toán Tuổi thơ phối hợp với các Sở Giáo dục và Đào tạo tổ chức cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc thành công tại các tỉnh (thành): Hà Nội (năm 2016), Trà Vinh (năm 2017), Lào Cai (năm 2018), thành phố Đà Nẵng (năm 2019). Đây là một sân chơi trí tuệ, lành mạnh, bổ ích cho các em học sinh và các thầy cô giáo.

Sở Giáo dục và Đào tạo Nghệ An đã có công văn số 17/SGD&ĐT - GDTH ngày 03/01/2020 về việc nhận lời mời đăng cai cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc năm 2020. Cuộc thi sẽ được tổ chức vào tuần thứ hai của tháng 6. Mọi thông tin về cuộc thi được công bố trên trang điện tử http://www.toantuoitho.vn và trên các số tạp chí hàng tháng.

TTT



Kì này Máy gì?

Máy gì lượn ở trên trời
Máy gì xẻ gỗ giúp người nhanh hơn
Máy gì đồng hạn mừng rơn
Máy gì vải vóc đẹp trơn ra đều
Máy gì may áo đáng yêu
Máy gì nghịch ngợm người kêu rụt vào
Máy gì nâng vật lên cao
Máy gì cắt lúa, rào rào thóc ra
Máy gì làm mát phòng ta
Máy gì nguyên tắc khéo mà phiền nhau
Mong thần dân đoán thật mau
Gửi bài, đợi Trẫm số sau thưởng liền!

LÊ VIỆT NGỌC
(Thanh Xuân, Hà Nội)





Kết quả **(TTT2 số 202)**

Loài chim nào?

Chim én báo hiệu xuân sang
Bồ câu biểu tượng hòa bình thế gian
Chào mào đội mũ rất xinh
Chim công hay múa lung linh đuôi xòe
Chích chòe tên có vần "oe"
Tu hú thì cứ mùa hè hay kêu
Bói cá chộp cá rất siêu
Chim vẹt có tính nghe nhiều nói theo
Cú mèo mặt giống như mèo
Chim chèo bẻo chỉ vần "eo" mới kì
Họa mi tiếng hót mê li
Cánh cụt chỉ bước, chẳng phi lên trời.

HONG HA

Nhận xét. Kì này Vua Tếu sẽ ban thưởng cho bốn thần dân làm đúng, trình bày đẹp có tên sau đây: *Nguyễn Thanh Sơn*, 6C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Thường Phong*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, **Bắc Ninh**; *Phạm Tuấn Minh*, 7B, THCS Tân Bình, TP. Tam Điệp, **Ninh Bình**; *Bùi Phạm Phương Anh*, 7A2, THCS Mộc Lỵ, Mộc Châu, **Sơn La**.

VUA TẾU



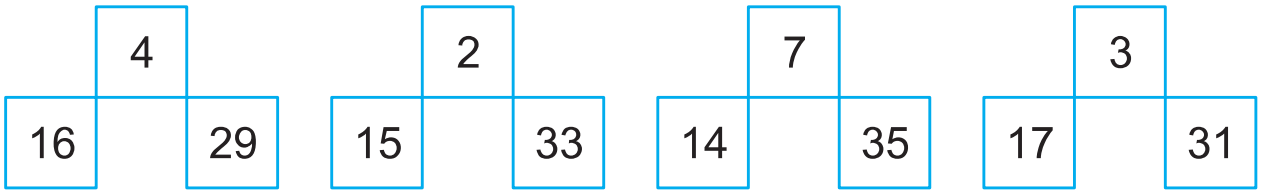
Kì này TÌM SỐ CÒN THIẾU!

Cho bảng số như sau:

5	2	3	10
6	4	1	11
1	9	?	12
12	?	6	?



Hãy chọn đáp án đúng để điền vào các dấu chấm hỏi (?) cho hợp lôgic.



A **B** **C** **D**

ĐỖ THỊ THÚY NGỌC

Phòng Giáo dục Trung học, Sở GD&ĐT Ninh Bình

(Sưu tầm và giới thiệu)

Kết quả SỐ NÀO THÍCH HỢP? (TTT2 số 202)

Đáp án. Có 8 hình tròn nhỏ tạo thành 4 cặp đối xứng nhau qua tâm hình tròn lớn. Mỗi số trong hình tròn nhỏ bằng tổng hai số liền sát hình tròn đối xứng, do đó **?** = 9 + 8 = **17**.



Nhận xét. Quy luật kì này khá dễ nên tất cả các bạn đều chọn đúng kết quả. Một số bạn diễn đạt chưa rõ ràng. Xin trao thưởng cho các bạn: *Dương Như Quỳnh*, 7A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Hoàng Minh Vũ*, 7D, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Lưu Thùy Dương*, 8A3, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, **Nam Định**; *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Lê Phú Quang*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

Các bạn sau được tuyên dương: *An Hà Hùng*, 7A1, THCS Mộc Ly, Mộc Châu, **Sơn La**; *Nguyễn Công Vinh*, *Nguyễn Anh Thư*, 7C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Lê Thị Diệu Thúy*, 9A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; *Đặng Đình Khánh*, 8/2, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Ngô Bích Loan*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.

NGUYỄN XUÂN BÌNH



BÀI TOÁN "LÃI SUẤT NGÂN HÀNG"

NGUYỄN TIẾN HỢP
Trường THCS Tân Thượng, Văn Bàn, Lào Cai

Trước hết, ta tìm hiểu một số hình thức tính lãi suất như sau:

Lãi đơn: Lãi được tính theo tỉ lệ phần trăm trong một khoảng thời gian cố định trước.

Ví dụ: Khi ta gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% /năm thì sau một năm số tiền lãi nhận được là

50 . 7% = 3,5 (triệu đồng).

Sau hai năm số tiền cả gốc lẫn lãi là

50 + 2 . 3,5 = 57 (triệu đồng).

Sau n năm số tiền cả gốc lẫn lãi là

50 + n . 3,5 (triệu đồng).

Kiểu tính lãi như trên gọi là *lãi đơn*.

Lãi kép hay lãi gộp: Được hiểu đơn giản là tái đầu tư lãi, tức là sau khi sinh lời, lãi đó được dồn vào tiền vốn để tiếp tục cho một chu kì đầu tư tiếp theo và tất nhiên, vốn gửi càng nhiều thì lãi lại càng cao hơn ở những giai đoạn sau. Sau một đơn vị thời gian (kì hạn), tiền lãi được gộp vào vốn và tính lãi. Câu "lãi mẹ đẻ lãi con" chính là từ kiểu tính lãi này.

Ví dụ: Khi ta gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% /năm thì sau một năm số gửi và tiền lãi là 50 + 3,5 = 53,5 (triệu đồng).

Toàn bộ số tiền này được gọi là gốc để tính lãi năm sau.

Tổng số tiền có được cuối năm thứ hai là

53,5 + 53,5 . 7% = 57,245 (triệu đồng).

Kiểu tính lãi như trên gọi là *lãi kép*.

Dưới đây là một số dạng toán kiểu tính lãi kép mà trên thực tế chúng ta thường lựa chọn.

1. Gửi tiền một lần

Ban đầu gửi vào ngân hàng số tiền là a (đồng). Biết lãi suất là m(%) /năm và không rút lãi vào cuối mỗi năm. Tính cả vốn lẫn lãi (T_n) sau n năm.

Bài toán 1. Một người gửi vào ngân hàng số tiền là 10 000 000 đồng với lãi suất là 7% /năm. Hỏi sau 5 năm người ấy nhận được bao nhiêu tiền cả gốc lẫn lãi?

Lời giải. Giả sử ban đầu người đó gửi a đồng vào ngân hàng với lãi suất là m(%) mỗi năm. Gọi T_n là số tiền người đó nhận được sau n năm.

Sau 1 năm, số tiền có là

$T_1 = a + ma = a(1 + m)$.

Sau 2 năm, số tiền có là

$T_2 = a(1 + m) + a(1 + m)m = a(1 + m)^2$.

...

Tương tự, sau n năm, số tiền sẽ là

$T_n = a(1 + m)^{n-1} + a(1 + m)^{n-1}.m = a(1 + m)^n$.

Áp dụng vào bài toán với a = 10 000 000 (đồng), m = 7%, n = 5 thì số tiền người đó nhận được là $T_5 = 10\,000\,000.(1 + 7\%)^5$

≈ 14 025 517 (đồng).

2. Gửi tiền hàng tháng

Hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền như nhau là a (đồng). Biết lãi suất là m(%) /tháng và không rút lãi vào cuối mỗi tháng. Hỏi sau n tháng, người ấy có bao nhiêu tiền?

Bài toán 2. Một người hàng tháng gửi 1 000 000 đồng vào ngân hàng để tiết kiệm cho con 6 tuổi với lãi suất là 0,45% /tháng. Hỏi khi con 18 tuổi (sau 12 năm) thì con của người ấy nhận được bao nhiêu tiền cả gốc lẫn lãi?

Lời giải. Giả sử người ấy hàng tháng gửi a đồng vào ngân hàng từ năm con 6 tuổi với lãi suất là m(%) mỗi tháng.

Cuối tháng thứ nhất số tiền có là
$T_1 = a(1 + m)$.
Vì hàng tháng người ấy tiếp tục gửi tiết kiệm a đồng nên số tiền gốc của đầu tháng thứ hai là
$a(1+m) + a = a[(1+m) + 1]$
$= \frac{a}{(1+m)-1}[(1+m)^2 - 1] = \frac{a}{m}[(1+m)^2 - 1].$
Số tiền cuối tháng thứ hai là
$T_2 = \frac{a}{m}[(1+m)^2 - 1](1+m).$
...
Số tiền cả gốc lẫn lãi vào cuối tháng thứ n là
$T_n = \frac{a}{m}[(1+m)^n - 1](1+m).$
Áp dụng vào bài toán với a = 1 000 000 (đồng), m = 0,45%, n = 12 × 12 = 144 thì số tiền người đó nhận được là
$T_{12} = \frac{1000\ 000}{0,45\%}[(1+0,45\%)^{144} - 1](1+0,45\%)$
≈ 202 894 858 (đồng).

3. Rút sổ tiết kiệm theo định kì

Số tiền ban đầu gửi vào ngân hàng là a (đồng), lãi suất là m(%) /tháng, mỗi tháng rút ra một số tiền như nhau là T (đồng). Tính số tiền còn lại sau n tháng.

Bài toán 3. Bố của bạn Minh gửi tiết kiệm cho bạn Minh 20 000 000 đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,45% /tháng. Nếu hàng tháng bạn Minh rút từ ngân hàng ra 900 000 (đồng) vào ngày ngân hàng tính lãi để sinh hoạt và học tập. Hỏi sau 1 năm bạn Minh còn bao nhiêu tiền ở ngân hàng?

Lời giải. Gọi số tiền gửi ban đầu là a (đồng), số tiền rút ra hàng tháng là T (đồng), lãi suất là m(%) /tháng, thời gian gửi là n.
Sau 1 tháng số tiền có $a + am = a(1 + m)$
$= ak$ (với $k = 1 + m$).
Số tiền còn lại sau khi rút là $ak - T$.
Sau 2 tháng số tiền có là $ak - T + (ak - T)m$
$= (ak - T)(1 + m) = (ak - T)k = ak^2 - Tk$.
Số tiền còn lại sau khi rút là
$ak^2 - Tk - T = ak^2 - T(k+1) = ak^2 - T\frac{k^2-1}{k-1}.$
Sau 3 tháng số tiền có
$\left(ak^2 - T\frac{k^2-1}{k-1}\right)k = ak^3 - T\frac{k^3-k}{k-1}.$
Số tiền còn lại sau khi rút là
$ak^3 - T\frac{k^3-k}{k-1} - T = ak^3 - T\frac{k^3-1}{k-1}.$
...
Sau n tháng số tiền còn lại sau khi rút là
$ak^n - T\frac{k^n-1}{k-1}.$
Vậy sau 1 năm (12 tháng), bạn Minh còn số tiền ở ngân hàng là
$20\ 000\ 000.(1+0,45\%)^{12}$
$-900\ 000.\frac{(1+0,45\%)^{12}-1}{(1+0,45\%)-1}$
≈ 10 035 784 (đồng).

Bài tập tự luyện

Bài 1. Một người gửi tiết kiệm 10 000 000 đồng vào ngân hàng trong khoảng thời gian 10 năm với lãi suất 5% /năm. Hỏi rằng người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lãi suất 4,2% /tháng?

Bài 2. Một người muốn rằng sau 2 năm phải có 20 triệu đồng để mua xe. Hỏi người đó phải gửi vào ngân hàng một khoản tiền như nhau hàng tháng là bao nhiêu, biết rằng lãi suất tiết kiệm là 0,45% /tháng?

Bài 3. Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng trong vòng 2 năm với lãi suất là 0,5% /tháng. Hỏi cuối mỗi tháng, vào ngày ngân hàng tính lãi, người đó rút ra một số tiền như nhau là bao nhiêu để sau 2 năm vừa hết số tiền đã gửi ở trên?

Bài 4. Từ khi Nam vào lớp 6 (lúc Nam 11 tuổi), mỗi tháng gia đình gửi 2 000 000 đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,45% /tháng. Khi Nam bắt đầu vào học Đại học (khi đó Nam đủ 18 tuổi), thì gia đình không gửi tiền vào ngân hàng nữa và Nam mỗi tháng rút ra 4 000 000 đồng để chi tiêu. Hỏi Nam có đủ chi tiêu trong 4 năm học Đại học không?

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI IMC 2019

VÕ QUỐC BÁ CẨN
Trường Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, Hà Nội

(Đề đăng trên TTT2 số 203)

Trong bài này, chúng tôi chỉ trình bày lời giải chi tiết cho phần II (điền đáp số) và phần III (tự luận).

Dưới đây là đáp án của phần I (trắc nghiệm).

1. D; **2.** B; **3.** B; **4.** D;
5. D; **6.** B; **7.** A; **8.** C.

Dưới đây là lời giải chi tiết của phần II và phần III.

9. $\sqrt{(n+2)(n+1)n(n-1)+1}$

$=\sqrt{(n^2+n-2)(n^2+n)+1}$

$=\sqrt{(n^2+n)^2-2(n^2+n)+1}=\sqrt{(n^2+n-1)^2}$

$=|n^2+n-1|$.

10. Điều kiện: $x\neq 1$. Đặt $a=\dfrac{2x+5}{3}$ và $b=\dfrac{1-x}{2}$, phương trình đã cho trở thành

$$a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\Leftrightarrow a-b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\Leftrightarrow a-b=\frac{a-b}{ab}.$$

Từ đó ta có $a=b$ hoặc $ab=1$.

✻ Nếu $a=b$, ta có

$$\frac{2x+5}{3}=\frac{1-x}{2}\Leftrightarrow x=-1.$$

✻ Nếu $ab=1$, ta có

$$\left(\frac{2x+5}{3}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)=1\Leftrightarrow (x+1)(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1;\ x=-\frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-1,\ -\dfrac{1}{2}\right\}$.

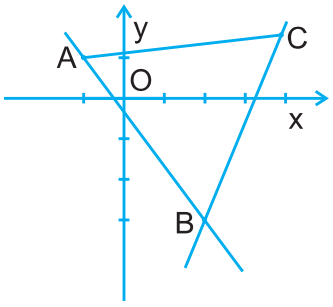
11. Rõ ràng đường thẳng AB không song song với trục hoành nên phương trình đường thẳng AB có dạng $y=ax+b$. Do đường thẳng AB đi qua hai điểm A(–1, 1) và B(2, –3) nên

$$\begin{cases}-a+b=1\\2a+b=-3\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{4}{3},\ b=-\frac{1}{3}.$$

Do đó đường thẳng AB có phương trình là

$$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}.$$

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Dựng tam giác đều ABC sao cho C nằm ở phía trên đường thẳng AB (tức ta phải có $y_C>-\dfrac{4}{3}x_C-\dfrac{1}{3}$) thì C thuộc d.



Do tam giác ABC đều nên $BC^2=CA^2=AB^2$. Từ đó, ta có

$$(x_C-2)^2+(y_C+3)^2=(x_C+1)^2+(y_C-1)^2$$

$$=(2+1)^2+(-3-1)^2=25.$$

Vì $(x_C-2)^2+(y_C+3)^2=(x_C+1)^2+(y_C-1)^2$ nên $6x_C-8y_C-11=0$, hay $x_C=\dfrac{8y_C+11}{6}$.

Lại có $(x_C+1)^2+(y_C-1)^2=25$ nên

$$\left(\frac{8y_C+11}{6}+1\right)^2+(y_C-1)^2=25$$

$$\Leftrightarrow 100y_C^2+200y_C-575=0.$$

Giải phương trình này, ta được

$$y_C=\frac{-2+3\sqrt{3}}{2}\ \text{(tương ứng, } x_C=\frac{1+4\sqrt{3}}{2}\text{)}$$

hoặc $y_C = \frac{-2-3\sqrt{3}}{2}$ (tương ứng, $x_C = \frac{1-4\sqrt{3}}{2}$).

Đối chiếu với điều kiện $y_C > -\frac{4}{3}x_C - \frac{1}{3}$, ta tìm được tọa độ điểm C là $\left(\frac{1+4\sqrt{3}}{2}, \frac{-2+3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Do B(2, –3) và $C\left(\frac{1+4\sqrt{3}}{2}, \frac{-2+3\sqrt{3}}{2}\right)$ thuộc d nên d không song song với trục tung.

Từ đó, phương trình của d có dạng $y = mx + n$ với (m, n) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2m+n=-3 \\ \frac{1+4\sqrt{3}}{2}m+n=\frac{-2+3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{48+25\sqrt{3}}{39} \\ n=-\frac{213+50\sqrt{3}}{39}. \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng d cần tìm là $y = \frac{48+25\sqrt{3}}{39}x - \frac{213+50\sqrt{3}}{39}$.

12. Do phương trình đã cho luôn có nghiệm thực với mọi a nên biệt thức Δ' của phương trình phải luôn không âm với mọi a, tức ta phải có $a^2 + a - 2b \geq 0$ với mọi a, hay $\frac{a^2+a}{2} \geq b, \forall a$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi b nhỏ hơn hoặc bằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^2+a}{2}$. Ta thấy

$$T = \frac{a^2+a}{2} = \frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{2} \geq \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = -\frac{1}{2}$ nên $T_{min} = -\frac{1}{8}$.

Từ đó suy ra $b \leq -\frac{1}{8}$.

13. Giải thiết của bài toán có thể được viết lại thành $(a-5)^2 + (b-12)^2 + (c-13)^2 = 0$.

Từ đó suy ra a = 5, b = 12, c = 13.

Vì $5^2 + 12^2 = 13^2$ nên tam giác ABC vuông tại C, suy ra đường cao ứng với cạnh lớn nhất của tam giác ABC chính là đường cao kẻ từ C. Gọi h_c chính là độ dài đường cao đó.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ab$.

Suy ra $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$.

14. Từ đồ thị, ta suy ra $k < 0$ và điểm A(2, 0) thuộc đồ thị hàm số đã cho, nên $2k + b = 0 \Leftrightarrow b = -2k$.

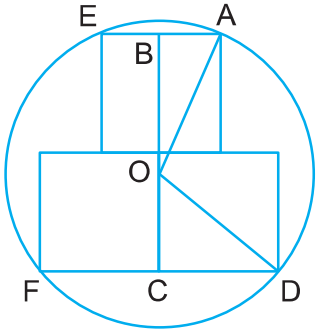
Ta có $k(x-3) + b > 0 \Leftrightarrow k(x-3) - 2k > 0 \Leftrightarrow k(x-5) > 0 \Leftrightarrow x < 5$ (do $k < 0$).

Vậy tập tất cả các số thực x thỏa mãn yêu cầu đề bài là $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$.

15. Gọi O là tâm của đường tròn đã cho.

Kí hiệu các đỉnh của các hình vuông như hình vẽ bên dưới.

Gọi B là trung điểm của AE và C là trung điểm của DF thì O thuộc đường thẳng BC.



Gọi x là độ dài mỗi cạnh của các hình vuông nhỏ thì ta có $AB = \frac{x}{2}$ và $CD = x$. Áp dụng định lý Pythagoras trong các tam giác OAB (vuông tại B) và OCD (vuông tại C), ta có

$$1 = OA^2 = AB^2 + BO^2 = \frac{x^2}{4} + BO^2,$$

$$1 = OD^2 = CD^2 + CO^2 = x^2 + CO^2.$$

Nếu O thuộc tia đối của tia CB thì $OB = 2x + OC$ nên $1 = \frac{x^2}{4} + OB^2 = \frac{x^2}{4} + (2x + OC)^2$

$$\geq \frac{x^2}{4} + (2x)^2 + OC^2 > x^2 + OC^2 = 1 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Nếu O thuộc tia đối của tia BC thì $OC = 2x + OB$ nên $1 = x^2 + OC^2 = x^2 + (2x + OB)^2$

$$> x^2 + OB^2 > \frac{x^2}{4} + OB^2 = 1. \text{ (mâu thuẫn).}$$

Do đó O phải nằm giữa hai đầu đoạn thẳng BC. Đặt $y = OC$ $(0 < y < 2x)$ thì $OB = 2x - y$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + (2x - y)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Trừ hai phương trình theo vế, ta được $\dfrac{1}{4}x(13x - 16y) = 0$. Suy ra $y = \dfrac{13}{16}x$.

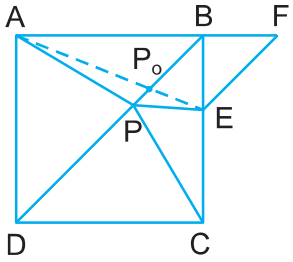
Thay vào phương trình $x^2 + y^2 = 1$, ta được

$$x^2 + \left(\frac{13}{16}x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{16\sqrt{17}}{85} \text{ (do } x > 0\text{)}.$$

Vậy độ dài cạnh của mỗi hình vuông là $\dfrac{16\sqrt{17}}{85}$.

16. Vì A và C đối xứng với nhau qua đường thẳng BD nên PA = PC.

Suy ra PE + PC = PE + PA ≥ AE.



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P trùng với P_o là giao điểm của AE và BD.

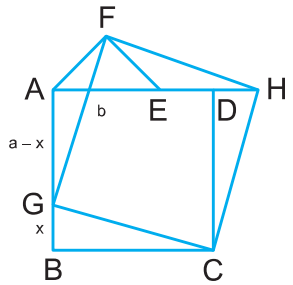
Do đó tổng PE + PC đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi P trùng với P_o.

Qua E kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại F khi đó tam giác BEF vuông cân tại B. Từ đó suy ra BE = BF = 2, AF = 7 và $EF = 2\sqrt{2}$. Áp dụng định lí Thales trong tam giác AEF với P_oB // EF, ta được

$$\frac{P_oB}{EF} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow P_oB = \frac{AB \cdot EF}{AF} = \frac{5 \cdot 2\sqrt{2}}{7} = \frac{10\sqrt{2}}{7}.$$

Vậy khi PE + PC nhỏ nhất thì $PB = P_oB = \dfrac{10\sqrt{2}}{7}$.

17. ✻ Trường hợp 1: b < a.

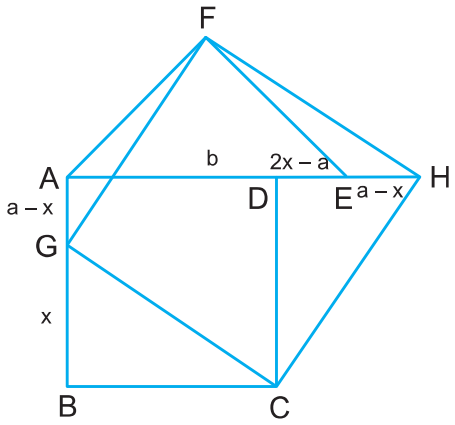


Đặt BG = x thì AG = a – x. Do hai tam giác FAG và FEH bằng nhau nên EH = AG = a – x. Mặt khác, do hai tam giác GBC và HDC bằng nhau nên DH = x.

Từ đó suy ra ED = a – 2x.

Vì AE + DE = AD nên b + (a – 2x) = a, hay b = 2x. Như vậy, trong trường hợp này, ta có $\dfrac{BG}{AE} = \dfrac{x}{b} = \dfrac{1}{2}$.

✻ Trường hợp 2: a < b < 2a.



Đặt BG = x thì AG = a – x. Do hai tam giác FAG và FEH bằng nhau nên EH = AG = a – x. Mặt khác, do hai tam giác GBC và HDC bằng nhau nên DH = x. Từ đó suy ra ED = 2x – a.

Vì AD + DE = AE nên a + (2x – a) = b. Suy ra b = 2x. Như vậy, trong trường hợp này, ta cũng có $\dfrac{BG}{AE} = \dfrac{x}{b} = \dfrac{1}{2}$.

Tóm lại, trong cả hai trường hợp ta đều có $\dfrac{BG}{AE} = \dfrac{1}{2}$.

18. Ta có $y = \dfrac{x+1}{x^2+3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+3)} \le \dfrac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi x = 1 nên

$a = \max y = \dfrac{1}{2}$. Tương tự, ta cũng có

$$y = \frac{x+1}{x^2+3} = -\frac{1}{6} + \frac{(x+3)^2}{6(x^2+3)} \ge -\frac{1}{6}.$$

Đẳng thức xảy ra khi x = –3 nên

$b = \min y = -\dfrac{1}{6}$.

Vậy $a + b = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.



AI LÀ THỦ PHẠM GÂY ÁN?



TRẦN PHƯƠNG NAM *(ghi lại)*

Tôi sang nhà thám tử Sê Lốc Cốc để cảm ơn anh đã kể tôi nghe về vụ án có liên quan tới những con số trên điện thoại của nạn nhân vì có nhiều bạn đọc nhỏ của tạp chí Toán Tuổi thơ 2 khá hứng thú và phá án thành công.

Lần này, tôi đề nghị thám tử kể cho tôi nghe một vụ án mà nhờ kiến thức của môn học khác Toán để tìm ra thủ phạm.

Sê Lốc Cốc nhìn tôi cười:

- Các bạn nhỏ của Toán Tuổi thơ khá thật đấy! Phá án vụ ấy cũng là một cách áp dụng kiến thức môn Toán vào cuộc sống. Bây giờ thì thử xem các bạn nhỏ có giỏi môn Hoá học không nhé!

Tôi tròn xoe mắt:

- Vụ án có liên quan tới kiến thức môn Hoá?

Sê Lốc Cốc chậm rãi:

- Đúng thế! Một hôm cảnh sát trưởng gọi tôi đến gấp hiện trường vụ án xảy ra trong phòng thí nghiệm Hoá học của một Viện nghiên cứu. Khi tôi tới nơi thì nạn nhân đang nằm gục nửa người trên chiếc bàn làm việc. Tôi đeo găng nhẹ lật nạn nhân lên một chút thì thấy một tờ giấy đã loang lổ máu với tên hai hoá chất chắc ghi từ chiếc bút nằm cạnh đấy. Tên các hoá chất ghi trên tờ giấy là:

Lithium

Sodium

Tôi hỏi cảnh sát trưởng: "Ai báo tin cho ngài?". Cảnh sát trưởng kể: "Nhân viên bảo vệ thấy muộn rồi mà giáo sư chưa về nên đã vào phòng thí nghiệm. Khi thấy cảnh tượng này đã điện báo cho cảnh sát địa phương. Cảnh sát địa phương báo tôi."

Tôi hỏi tiếp: "Viện này chỉ có một lối vào duy nhất là qua phòng bảo vệ. Hôm nay là ngày nghỉ nên số người đến Viện chắc không nhiều. Ngài đã biết những ai đến Viện ngày hôm nay không?". Cảnh sát trưởng đưa tôi

danh sách mà bảo vệ cung cấp, kể cả bảo vệ thì có 5 người trong danh sách:

Piter

Lina

Leo

Lotus

Julia

Tôi cười nói với ông ta: Tôi cần ngay địa chỉ của một người trong số này và chúng ta đến bắt ngay kẻ thủ phạm kẻo tên này "cao chạy, xa bay".

Nghe đến đấy, tôi ngạc nhiên:

- Tại sao thám tử lại biết ngay được đích danh thủ phạm?

Thám tử cười:

- Giáo sư đã kịp ghi lại… tên thủ phạm. Nhớ kiến thức Hoá học từ thời đi học nên chẳng khó khăn để biết tên kẻ giết người.

Tôi vốn dốt môn Hoá nên cứ ngơ ngác.

Sê Lốc Cốc vỗ vai:

- Đăng lên Toán Tuổi thơ đi… Các bạn nhỏ sẽ biết ai là thủ phạm!

Nào các bạn nhỏ yêu chuyên mục này hãy ra tay nhé! Các bạn có thể tra cứu lại những kiến thức Hoá học để nhanh chóng biết tên thủ phạm như thám tử Sê Lốc Cốc nhé!

Kết quả **(TTT2 số 202)**

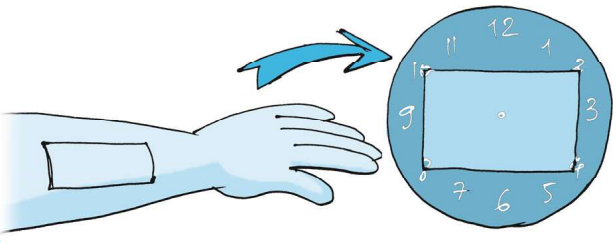
NHỮNG CON SỐ TRÊN ĐIỆN THOẠI CỦA NẠN NHÂN

Trong vụ án này, manh mối để tìm ra thủ phạm chính là chiếc điện thoại của nạn nhân với dãy số 2-4-8-10 trên màn hình điện thoại. Thoạt nhìn dãy số đó, chúng ta ắt sẽ nghĩ tới quy luật của dãy số, hay là dãy số đó có liên quan gì tới chữ cái. Nhưng "chìa khóa" để giải mã "bí ẩn" lại nằm ở chiếc đồng hồ treo tường. Chúng ta hãy để ý tới bốn con số 2, 4, 8, 10 trên đồng hồ, khi nối chúng lại với nhau theo đúng thứ tự sẽ tạo thành hình chữ nhật. Kết hợp với hình xăm trên cánh tay của 3 kẻ tình nghi, ta có thể khẳng định chắc chắn rằng: Người có vết xăm hình chữ nhật chính là thủ phạm vụ trọng án này.

Nhận xét. Kì này có rất nhiều bạn tham gia phá án. Thật vui vì tất cả các bạn cũng "tài tình" không kém gì thám tử Sê Lốc Cốc. Phần quà sẽ được gửi tới các bạn sau: *Dương Như Quỳnh*, 7A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Lưu Thùy Dương*, 8A3, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, **Nam Định**; *Đinh Thúy Vân*, 8B, THCS Tân Bình, TP. Tam Điệp, **Ninh Bình**; *Lê Phú Quang*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**.

Các "thám tử nhí" sau cũng rất đáng khen: *Nguyễn Kim Dung*, 9A5, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Lưu Thành Đạt*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; *Bùi Bá Minh Đức*, 6A, *Lê Hương Thảo*, 6C, *Nguyễn Thường Phong*, 7A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, **Bắc Ninh**; *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, 6A2, *Nguyễn Long An*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Bạch Thái Sơn*, 7A1, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**; *Vũ Đức Đạt*, 7C, *Hoàng Minh Vũ*, 7D, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Phạm Minh Châu, Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phạm Hoàng Nhật Minh*, 6A, *Đoàn Nguyên Vũ, Lưu Ngọc Diệp*, 6B, *Đoàn Xuân Bảng*, 7D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Phan Thùy Trâm, Ngô Bích Loan*, 7C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Lê Thị Phương Thảo*, 8A, *Lê Thị Diệu Thúy*, 9A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

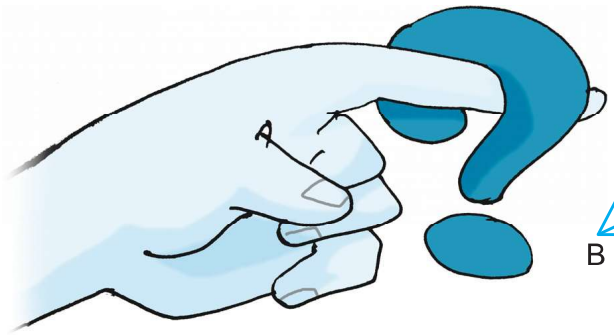
Thám tử Sê Lốc Cốc

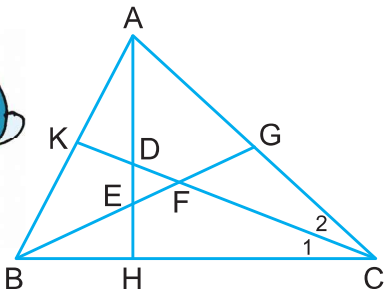




Kì này CÓ TỒN TẠI TAM GIÁC KHÔNG?

Bài toán. Trong tam giác ABC vẽ đường cao AH, trung tuyến BG và phân giác CK, chúng cắt nhau tạo thành tam giác DEF (như hình vẽ). Hỏi có tam giác ABC nào để tam giác DEF là tam giác đều hay không?





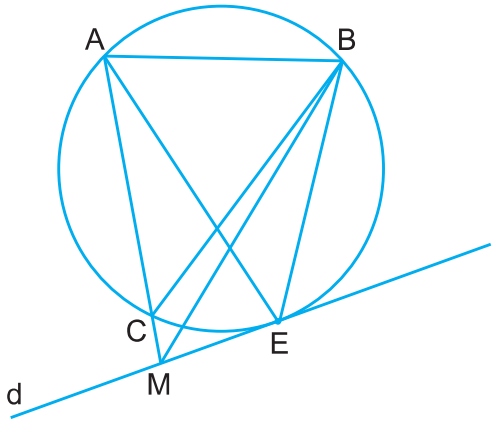
NGUYỄN XUÂN BÌNH

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Kết quả **(TTT2 số 202)**

GÓC SÚT LỚN NHẤT

Lời giải. Vị trí tốt nhất để sút bóng vào lưới là vị trí E trên đường thẳng d sao cho đường tròn (ABE) tiếp xúc với d.



Ta chứng minh góc nhìn từ E đến AB không nhỏ hơn góc nhìn từ điểm M tùy ý trên d đến AB.

Thật vậy, gọi M là điểm tùy ý trên d, đường thẳng MA cắt đường tròn (ABE) tại điểm C.

Ta có

$\widehat{ACB} > \widehat{AMB}$ (góc ngoài tam giác BMC).

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AEB}$ (cùng chắn cung AB trên đường tròn (ABE)).

Suy ra $\widehat{AEB} > \widehat{AMB}$.

Vậy điểm E trên đường thẳng d có góc sút lớn nhất đến khung thành AB.

Nhận xét. Rất đáng tiếc kì này không bạn nào có lời giải đúng.

VŨ ĐÌNH HÒA





MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ HÌNH HỌC

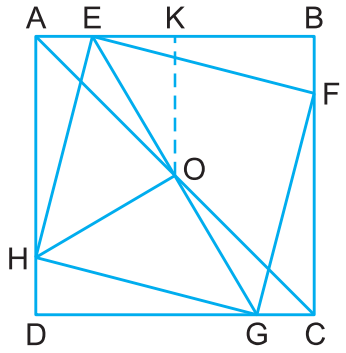
TRƯƠNG QUANG AN
Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi

Bài viết này chúng tôi xin giới thiệu về một số phương pháp tìm cực trị thường gặp trong các bài toán hình học phẳng.

1. Vận dụng quan hệ giữa độ dài đường xiên và đường vuông góc

Bài toán 1. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = DH. Xác định vị trí của các điểm E, F, G, H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải.



Dễ thấy

$\Delta HAE = \Delta EBF = \Delta FCG = \Delta GDH$ (c.g.c).

Suy ra $HE = EF = FG = GH$ và $\widehat{AHE} = \widehat{BEF}$

$\Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^o$.

Từ đó ta có tứ giác EFGH là hình vuông.

Gọi O là giao điểm của AC và EG.

Tứ giác AECG có AE = CG, AE // CG nên AECG là hình bình hành.

Suy ra O là trung điểm của AC và của EG, do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

Vì ΔHOE vuông cân tại O nên $HE = \sqrt{2}OE$.

Chu vi tứ giác EFGH là $4HE = 4\sqrt{2}OE$.

Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ OE nhỏ nhất.

Kẻ $OK \perp AB\,(K \in AB)$.

Theo quan hệ giữa độ dài đường vuông góc và đường xiên $OE \geq OK$ (độ dài OK không đổi) nên $OE = OK \Leftrightarrow E \equiv K$.

Do đó chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Bài toán 2. Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua trung điểm M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi K là giao điểm của CM và DB.

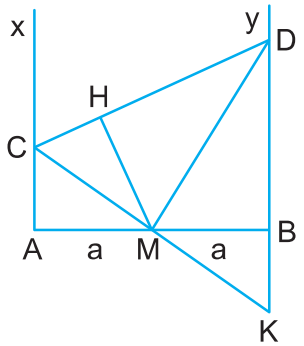
$\Delta MAC = \Delta MBK$ (g.c.g) $\Rightarrow MC = MK$.

ΔDCK có đường cao DM là trung tuyến nên ΔDCK là tam giác cân tại D.

Suy ra $\widehat{CDM} = \widehat{KDM}$.

Kẻ $MH \perp CD\,(H \in CD)$.

Do M thuộc tia phân giác của góc CDK nên MH = MB = a.



Ta có

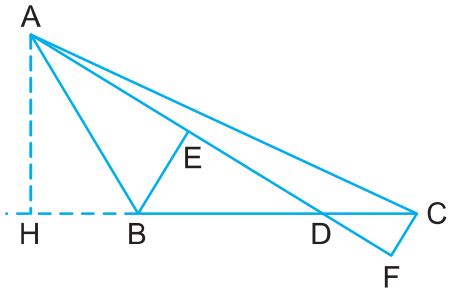
$$S_{MCD} = \frac{1}{2}CD.MH \geq \frac{1}{2}AB.MH = \frac{1}{2}.2a.a = a^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi CD $\perp$ Ax, khi đó $\widehat{AMC} = 45^o$, $\widehat{BMD} = 45^o$.

Do đó tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất khi các điểm C, D được xác định trên Ax, By sao cho AC = BD = a.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có góc B là góc tù, điểm D di chuyển trên cạnh BC. Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và từ C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, C trên AD. Ta có $S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC}$ hay

$\frac{1}{2}.AD.BE + \frac{1}{2}.AD.CF = S_{ABC}$.

Suy ra $BE + CF = \frac{2S_{ABC}}{AD}$.

Do đó BE + CF lớn nhất khi và chỉ khi đường xiên AD nhỏ nhất hay hình chiếu HD của AD trên BC là nhỏ nhất.

Vì HD $\geq$ HB (do $\widehat{ABD} > 90^o$) nên HD = HB khi và chỉ khi D $\equiv$ B.

Vậy khi D trùng B thì tổng các khoảng cách từ B và từ C đến AD có giá trị lớn nhất.

2. Quan hệ giữa độ dài đoạn thẳng và độ dài đường gấp khúc

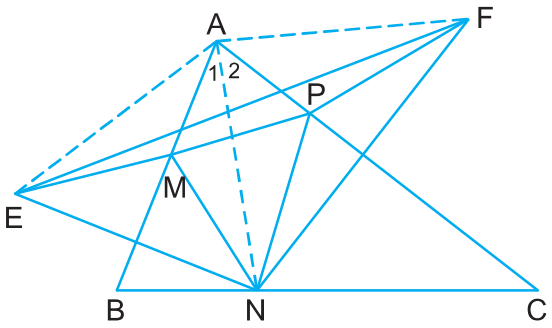
Bài toán 4. Cho tam giác ABC nhọn. Dựng tam giác MNP nội tiếp tam giác ABC (M thuộc AB, N thuộc BC, P thuộc AC) sao cho tam MNP có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải. Dựng các điểm E, F đối xứng với N lần lượt qua AB, AC (Hình a).

Chu vi tam giác MNP là

NM + MP + PN = EM + MP + PF $\geq$ EF.

Ta cần xét khi nào thì EF nhỏ nhất.

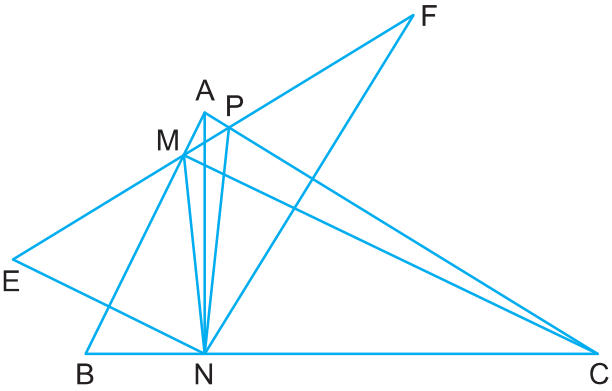


(Hình a)

Ta có $\widehat{EAF} = 2\widehat{A_1} + 2\widehat{A_2} = 2\widehat{BAC}$.

Vì ΔEAF là tam giác cân có góc ở đỉnh không đổi nên cạnh đáy EF nhỏ nhất khi và chỉ khi cạnh bên AE nhỏ nhất hay AN nhỏ nhất, tức là N là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC (Hình b).

Xét tam giác NMP có MB là đường phân giác ngoài của góc NMP, PC là đường phân giác ngoài của góc NPM mà MB cắt PC tại A nên NA là tia phân giác của góc MNP.



(Hình b)

Vì AN $\perp$ NC nên NC là đường phân giác ngoài của góc MNP, PC là đường phân giác ngoài của góc MPN.

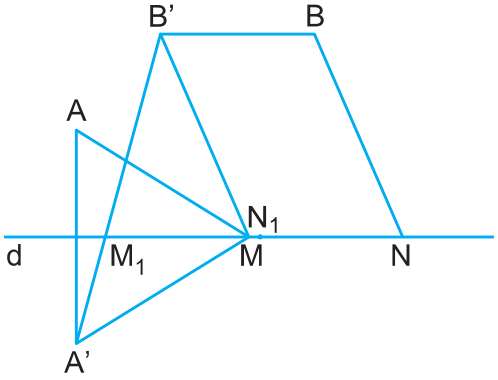
Mà NC cắt PC tại C nên MC là tia phân giác trong của góc NMP, từ đó suy ra MB $\perp$ MC.

Tương tự PC $\perp$ PB.

Vậy chu vi tam giác MNP nhỏ nhất khi M, N, P là chân ba đường cao của tam giác ABC.

Bài toán 5. Cho hai điểm A và B nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d. Hai điểm M, N thuộc d và độ dài MN = a (không đổi). Xác định vị trí hai điểm M, N để đường gấp khúc AMNB có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. Dựng hình bình hành BNMB' thì BB' = MN = a (không đổi) nên B' cố định.
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d thì A' cố định và A'M = AM.



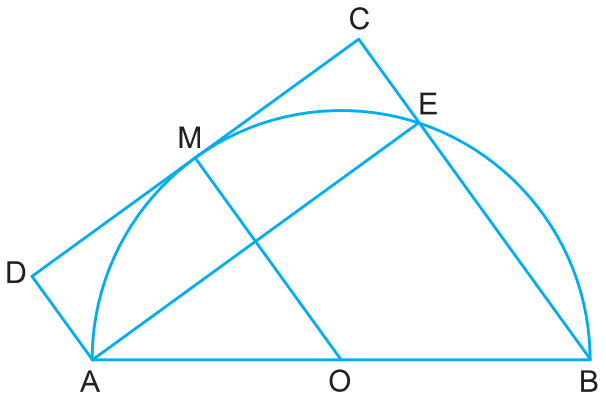
Ta có AM + MN + NB = A'M + MN + MB'
= (A'M + MB') + MN ≥ A'B' + a (không đổi).
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng với M_1 là giao điểm của A'B' với đường thẳng d, N trùng với N_1 ($M_1N_1 = a$, $N_1 \in$ d).

3. Quan hệ giữa độ dài dây cung và đường kính đường tròn

Bài toán 6. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. M là điểm di động trên nửa đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D, C lần lượt là hình chiếu của A; B trên tiếp tuyến ấy. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác ABCD có giá trị lớn nhất.

Lời giải. Ta có AD ⊥ DC, BC ⊥ DC.
Suy ra AD // BC nên ABCD là hình thang vuông.
Vì OM ⊥ DC nên OM // AD và O là trung điểm AB nên OM là đường trung bình của hình thang ABCD.

Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2}.DC = OM.DC.$



Vẽ AE ⊥ BC ⇒ $\overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{DCE} = \overset{\frown}{AEC} = 90^o$ nên tứ giác ADCE là hình chữ nhật.
⇒ DC = EA .
Lại có $\overset{\frown}{AEB} = 90^o$ nên E thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB.
Từ đó ta có

$S_{ABCD} = AE.OM \le AB.OM = 2R.R = 2R^2$

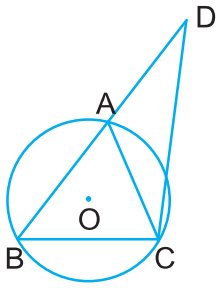
(không đổi).
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AE là đường kính của (O; R) khi đó OM ⊥ AB tại O
⇔ M là điểm chính giữa của cung AB.

Bài toán 7. Cho đường tròn (O; R), BC là dây cung cố định (BC ≠ 2R). A là điểm chuyển động trên cung lớn BC. Xác định vị trí của A để chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải. Trên tia đối của tia AB lấy D sao cho AD = AC. Ta có ΔADC cân tại A nên

$\overset{\frown}{BDC} = \dfrac{\overset{\frown}{BAC}}{2} = \dfrac{1}{4}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = \alpha$ (không đổi).

Mà BC cố định, suy ra D thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC.



Gọi P_{ABC} là chu vi của tam giác ABC.
Ta có P_{ABC} = AB + AC + BC (BC không đổi) lớn nhất
⇔ AB + AC = AB + AD = BD đạt giá trị lớn nhất hay BD là đường kính của cung chứa góc nói trên. Khi đó

$\overset{\frown}{BCD} = 90^o = \overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ADC}.$

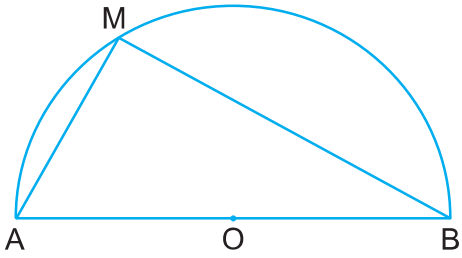
Mà $\overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{ADC}$ (vì AC = AD).
Do đó $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ACB} \Leftrightarrow \text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}.$
Suy ra A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

4. Sử dụng bất đẳng thức đại số

Bài toán 8. Cho M là điểm di động trên nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Xác định vị trí điểm M để $MA + \sqrt{3}MB$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. Tam giác AMB có $\widehat{AMB} = 90^o$ nên theo định lí Pythagoras ta có

$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2$.



Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$MA + \sqrt{3}.MB = |MA + \sqrt{3}.MB|$

$\le \sqrt{(1+3)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{4.4R^2} = 4R.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

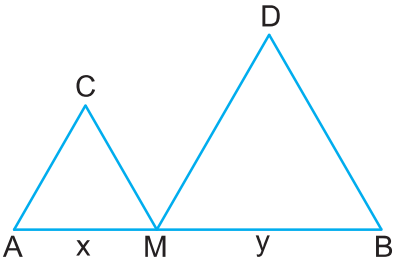
$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^o \Leftrightarrow \widehat{ABM} = 30^o.$

Vậy $MA + \sqrt{3}MB$ đạt giá trị lớn nhất khi M thuộc cung AB sao cho sđ$\widehat{MA} = 60^o$.

Bài toán 9. Cho điểm M di động trên đoạn thẳng AB có độ dài bằng a không đổi. Trên nửa mặt phẳng bờ chứa AB, vẽ các tam giác đều AMC và BMD. Xác định vị trí của M để tổng diện tích các tam giác AMC và BMD là nhỏ nhất.

Lời giải. Đặt MA = x, MB = y. Ta có

$S_{AMC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}, S_{BMD} = \frac{y^2\sqrt{3}}{4}.$



Do đó

$S_{AMC} + S_{BMD} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + y^2)$

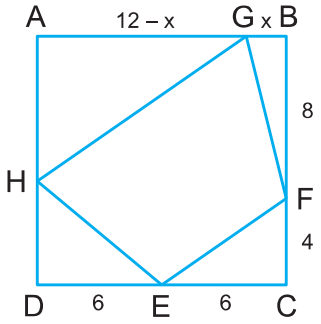
$\ge \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{(x+y)^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y khi đó M là trung điểm của AB.

Vậy $S_{AMC} + S_{BMD}$ nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ khi M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài toán 10. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 12 cm, E là trung điểm của CD, điểm F thuộc cạnh BC sao cho CF = 4 cm. Các điểm G và H theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AD sao cho GH // EF. Xác định vị trí của điểm G sao cho tứ giác EFGH có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

Lời giải.



Đặt BG = x thì AG = 12 – x.

Vì EF // GH nên $\Delta GAH \backsim \Delta ECF$ (g.g).

Suy ra

$\frac{AH}{CF} = \frac{AG}{CE} \Leftrightarrow \frac{AH}{4} = \frac{12-x}{6} \Rightarrow AH = 8 - \frac{2}{3}x$

$\Rightarrow DH = AD - AH = 4 + \frac{2}{3}x$. Ta có

$S_{EFGH} = S_{ABCD} - S_{AGH} - S_{BFG} - S_{CEF} - S_{DHE}$

$= 144 - \frac{1}{2}.\left(8 - \frac{2}{3}x\right)(12-x) - 4x - 12 - (12 + 2x)$

$= 144 - 48 + 8x - \frac{1}{3}x^2 - 6x - 24$

$= -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 72 = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 75 \le 75.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 3 hay điểm G nằm trên cạnh AB sao cho BG = 3 cm.

Vậy tứ giác EFGH có diện tích lớn nhất bằng 75 cm^2.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tam giác ABC cân (AB = AC). Lấy điểm D trên cạnh BC (D khác B,C). Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABD và ACD. Xác định vị trí của D để tích r_1r_2 đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD có AB = 6m, điểm E nằm trên cạnh AB sao cho AE = 2m. Xác định vị trí điểm F trên cạnh BC sao cho hình thang EFGH (G thuộc cạnh CD, H thuộc cạnh AB và EH // GF // BD) có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.



MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

BÙI MINH TRUNG
Trường THCS Mỹ Long Nam, Cầu Ngang, Trà Vinh

Bất đẳng thức Minkowski: Cho hai dãy số thực $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ thì ta luôn có $\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+....+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

$\geq \sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2}$.

Nếu $b_1, b_2, ..., b_n$ khác 0 thì đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=....=\frac{a_n}{b_n}$. Bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng hình học nhờ công thức tính khoảng cách giữa hai điểm trên mặt phẳng tọa độ. Dưới đây là một số ứng dụng của bất đẳng thức trên.

1. Sử dụng bất đẳng thức Minkowski để giải phương trình

Bài toán 1. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+12x+61}+\sqrt{x^2-14x+113}=\sqrt{338}. \quad (1)$$

Lời giải. ĐKXĐ

$$\begin{cases} x^2+12x+61\geq 0 \\ x^2-14x+113\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)^2+25\geq 0 \\ (x-7)^2+64\geq 0. \end{cases}$$

Do đó phương trình xác định với mọi số thực x.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(x+6)^2+5^2}+\sqrt{(7-x)^2+8^2}=\sqrt{338}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta được

$$VT(1)=\sqrt{(x+6)^2+5^2}+\sqrt{(7-x)^2+8^2}$$

$$\geq \sqrt{(x+6+7-x)^2+(5+8)^2}=\sqrt{338}=VP(1).$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x+6).8=5(7-x)$

$\Leftrightarrow x=-1$.

Do đó $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài toán 2. Giải phương trình

$$\sqrt{8x^2-16x+10}+\sqrt{2x^2-4x+4}$$

$$=\sqrt{7-x^2+2x}. \quad (1)$$

Lời giải. ĐKXĐ

$$\begin{cases} 8x^2-16x+10\geq 0 \\ 2x^2-4x+4\geq 0 \\ 7-x^2+2x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(x-1)^2+2\geq 0 \\ 2(x-1)^2+2\geq 0 \\ (x-1)^2\leq 8 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{2}\leq x\leq 1+2\sqrt{2}.$

Phương trình (1) tương đương với

$$\sqrt{(2x-1)^2+(3-2x)^2}+\sqrt{(2-x)^2+x^2}$$

$$=\sqrt{8-(x-1)^2}. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta được

$$\sqrt{(2x-1)^2+(3-2x)^2}+\sqrt{(2-x)^2+x^2}$$

$$\geq \sqrt{(2x-1+2-x)^2+(3-2x+x)^2}$$

$$=\sqrt{2x^2-4x+10}=\sqrt{2(x-1)^2+8}\geq\sqrt{8}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có

$$\sqrt{8-(x-1)^2}\geq\sqrt{8}\Leftrightarrow 8-(x-1)^2\geq 8$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\leq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x-1=0 \\ (2x-1)x=(3-2x)(2-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2x^2-x=2x^2-7x+6 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

(Thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Sử dụng bất đẳng thức Minkowski để giải hệ phương trình

Bài toán 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=12 \\ \sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{y^2-y+1}=2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{y^2-y+1}$$

$$=\sqrt{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\left(1-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{x^2+xy+y^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=2$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x\,;\,y)=(2\,;\,2)$.

Bài toán 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ x-\sqrt{y-2}=2. \end{cases}$$

Lời giải. ĐKXĐ $x\geq 2;\ y\geq 2$.

Ta có $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3x}{4}\geq 2\sqrt{\dfrac{x}{4}.\dfrac{1}{x}}+\dfrac{3.2}{4}=\dfrac{5}{2}$.

Tương tự $y+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{5}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\geq\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=2$.

Thay vào phương trình thứ hai thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ là $(x\,;\,y)=(2\,;\,2)$.

3. Sử dụng bất đẳng thức Minkowski để chứng minh bất đẳng thức

Bài toán 5. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}\geq\sqrt{z^2+zx+x^2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có $\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2+\left(y-\frac{z}{2}\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2+\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{z^2+zx+x^2}.$$

Bài toán 6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\geq\sqrt{3}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{a^2}}$$

$$\geq\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{b}+\frac{\sqrt{2}}{c}\right)^2}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{a^2}}$$

$$\geq\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{\sqrt{2}}{b}+\frac{\sqrt{2}}{c}\right)^2}$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$=\sqrt{3}.1=\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=3$.

Bài toán 7. Cho x, y, z là các số thực dương và $x+y+z\leq 1$. Chứng minh rằng

$$P=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{82}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$P=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}$$

$$\geq\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}. \quad (1)$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM -GM ta có

$$(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$$

$$=81(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-80(x+y+z)^2$$

$$\geq 2\sqrt{81.(x+y+z)^2.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}-80.1$$

$$=2.9(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-80$$

$$\geq 2.9.9-80=82.$$

Thay vào (1) ta được

$$P=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{82}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

4. Sử dụng bất đẳng thức Minkowski để tìm cực trị của một biểu thức đại số

Bài toán 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\sqrt{9x^2-6x+2}+3\sqrt{4x^2+4x+2}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có $P=2\sqrt{9x^2-6x+2}+3\sqrt{4x^2+4x+2}$

$$=\sqrt{(2-6x)^2+2^2}+\sqrt{(6x+3)^2+3^2}$$

$$\geq\sqrt{(2-6x+6x+3)^2+(2+3)^2}=5\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{2-6x}{6x+3}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=0.$

Vậy $P_{min}=5\sqrt{2}$ khi $x=0$.

Bài toán 9. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$P=\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}$$

$$\geq\sqrt{(a+b+c)^2+(3-a-b-c)^2}.$$

Mặt khác ta có

$$(a+b+c)^2+(3-a-b-c)^2$$

$$=2(a+b+c)^2-6(a+b+c)+9$$

$$=2\left(a+b+c-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\geq\frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Vậy $P_{min}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài toán 10. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $(a+2)(b+2)=\frac{25}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$.

Lời giải. Theo giả thiết ta có

$$(a+2)(b+2)=\frac{25}{4}\Leftrightarrow ab+2a+2b=\frac{9}{4}.$$

Ta lại có

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab;\ 2a^2+\frac{1}{2}\geq 2a;\ 2b^2+\frac{1}{2}\geq 2b.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^2+b^2}{2}+2a^2+2b^2+1\geq ab+2a+2b=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{5a^2}{2}+\frac{5b^2}{2}\geq\frac{5}{4}\Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{1}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$F=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}=\sqrt{1^2+(a^2)^2}+\sqrt{1^2+(b^2)^2}$$

$$\geq\sqrt{(1+1)^2+(a^2+b^2)^2}\geq\sqrt{4+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Vậy $F_{min}=\frac{\sqrt{17}}{2}$ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

THÁCH ĐẤU

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM SÁU MƯƠI CHÍN

Người thách đấu: *Nguyễn Minh Hà*, **Hà Nội**.

Bài toán thách đấu: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Hai điểm C, D chạy trên nửa đường tròn sao cho $\overset{\frown}{COD} = 90^o$ và $\overset{\frown}{AOC} < \overset{\frown}{AOD}$. Tìm vị trí của C, D sao cho tích AD.BC đạt giá trị lớn nhất.

Thời hạn: Trước ngày 08.3.2019 theo dấu bưu điện.

Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM SÁU MƯƠI BẢY (TTT2 số 202)

Đề bài. Có n đội bóng tham gia một giải thi đấu bóng đá ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Giải đấu tổ chức theo thể thức thi đấu vòng tròn một lượt. Cách tính điểm mỗi trận đấu như sau: Đội thắng được 3 điểm, đội thua được 0 điểm, trận đấu có kết quả hòa thì mỗi đội được 1 điểm. Khi kết thúc giải không có hai đội nào có điểm bằng nhau. Hỏi đội đứng đầu ít nhất hơn đội xếp cuối bao nhiêu điểm?

Lời giải. Kí hiệu a_i là điểm của đội thứ i, không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

Vì a_i là các số tự nhiên do đó

$T_n = a_n - a_1 = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_2 - a_1) \geq n - 1$.

Ta kí hiệu aTb là đội a thắng đội b, aHb là đội a hòa đội b.

✻ Với n = 2: Có một trận đấu duy nhất 2T1 $\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 3 \Rightarrow T_2 = 3$.

✻ Với n = 3: Xét các khả năng thì không có $a_3 - a_2 = 1 \Rightarrow T_3 \geq 3$, $T_3 = 3$ nếu 3T1, 3H2, 2H1 ($a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$).

✻ Với n = 4: $T_4 = 3$. Ví dụ 4T3, 4H2, 4H1, 3H2, 3T1, 2H1 ($a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5$).

✻ Giả sử $n \geq 4$ và có một kết quả đấu cho n đội mà $a_1 = n - 2, a_2 = n - 1, ..., a_n = 2n - 3$.

Bây giờ ta có đội thứ n + 1 với các kết quả thi đấu: (n + 1)Tn, (n – 1)T(n + 1), (n – 2)T(n + 1), (n + 1)T(n – 3), (n – 4)T(n + 1), (n – 5)T(n + 1), ...

- Nếu n = 3k thì điểm của các đội thứ 1, 2, 3,..., n + 1 tương ứng là n – 1, n + 2, n, n + 4, n + 5, n + 3, ..., 2n – 2, 2n – 1, 2n – 3, n + 1 khi kết quả của đội thứ (n + 1) với ba đội 1, 2, 3 là (n + 1)T3, 2T(n + 1), 1H(n + 1).
- Nếu n = 3k + 1, kết quả tương ứng n – 1, n + 2, n + 3, n + 1, n + 5, ..., 2n – 2, 2n – 1, 2n – 3, n khi kết quả của đội thứ (n + 1) với đội 1 là (n + 1)H1.
- Nếu n = 3k + 2, kết quả tương ứng n + 1, n, n + 3, n + 4, n + 2, ..., 2n – 2, 2n – 1, 2n – 3, n – 1 khi kết quả của đội thứ (n + 1) với hai đội 1 và 2 là 1T(n + 1), 2H(n + 1).

Cả ba trường hợp, điểm của (n + 1) đội đều là (n + 1) số nguyên dương liên tiếp n – 1, n, n + 1, ..., 2n – 1.

Như vậy nếu $n \geq 4$ giá trị nhỏ nhất của T_n bằng n – 1, giá trị nhỏ nhất của T_3 bằng 3, T_2 chỉ có một giá trị bằng 3.

Nhận xét. Đây là bài toán tổ hợp rất hay và khó, phần học sinh Việt Nam hay bị mất nhiều điểm trong kì thi học sinh giỏi quốc tế. Có 4 võ sĩ tham gia trận đấu, nhưng rất tiếc không có võ sĩ nào giải đúng bài toán này. Rất mong ở những trận đấu sau sẽ có võ sĩ đăng quang trong các trận đấu hấp dẫn như thế này.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Chữ & chữ số

Kì này KÌ 48

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số, biết các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau và khác 0.

$$\overline{MUA}+\overline{XUAN}=2020.$$

LÊ ANH TUẤN

(Quỳnh Lưu, Nghệ An)



Kết quả KÌ 46 (TTT2 số 202)

Lời giải. Do $\overline{TOAN}\times\overline{TOAN}=\overline{TUOITHO}$ $<9999999<4000\times4000.$

Do đó T chỉ có thể bằng 1, 2, 3.

Mặt khác, nếu T = 2 thì

$\overline{TOAN}\times\overline{TOAN}>2000\times2000=4000000.$

Khi đó

$\overline{TOAN}\times\overline{TOAN}=\overline{2UOI2HO}<4000000$ (vô lí).

Tương tự, nếu T = 3 thì

$\overline{TOAN}\times\overline{TOAN}>3000\times3000=9000000.$

Khi đó

$\overline{TOAN}\times\overline{TOAN}=\overline{3UOI3HO}<9000000$ (vô lí).

Do đó T chỉ có thể bằng 1.

Vì ...N × ...N = ...O và O ≠ N, O ≠ 1 nên N chỉ có thể bằng 2, 3, 4, 7, 8 và O tương ứng bằng 4, 9, 6, 9, 4.

Nếu O ≥ 5 thì

$\overline{TUOITHO}=\overline{TOAN}\times\overline{TOAN}$

$\geq1500\times1500=2250000.$

$\Rightarrow$ T ≥ 2 (vô lí vì T = 1).

Suy ra O chỉ có thể bằng 4.

Với O = 4 thì N = 2.

Khi đó A = 3 hoặc A ≥ 5 (vì A ≠ T = 1, A ≠ N = 2, A ≠ O = 4).

Ta có $\overline{TOAN}\times\overline{TOAN}=\overline{14A2}\times\overline{14A2}$

$\geq1432\times1432=2050624,$ vô lí vì T = 1.

Vậy bài toán không có nghiệm.

HONG HA

Nhận xét. Có nhiều bạn gửi lời giải về tòa soạn. Tuy nhiên đa số các bạn lập luận chưa thực sự gãy gọn. Nhiều bạn đưa ra lời giải quá vắn tắt, trong khi một số bạn lại giải quá dài dòng. Các bạn sau đây có lời giải đúng và được thưởng kì này: *Đoàn Minh Đức*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Mạnh Hùng*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**.

TTT



ĐỀ THI KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LỚP 6
HUYỆN CHƯƠNG MỸ, TP. HÀ NỘI

Năm học 2018 - 2019

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(4,0 điểm)*

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{\left(1,08-\dfrac{2}{25}\right):\dfrac{4}{7}}{\left(6\dfrac{5}{9}-3,25\right).2\dfrac{2}{17}}$ và $B=\dfrac{0,8:\left(\dfrac{4}{5}.1,25\right)}{0,64-\dfrac{2}{17}}+(1,2.0,5):0,8$

Tính A + 3B.

2) Cho $S=\dfrac{1}{3.7}+\dfrac{1}{7.11}+\dfrac{1}{11.15}+...+\dfrac{1}{2019.2023}$. So sánh S với $\dfrac{504}{6068}$.

Bài 2. *(4,0 điểm)*

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:

1) $(2x-1)^2:9=49$;

2) $3^x+3^{x+2}=810$;

3) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{3}$;

4) $80\vdots x$; $56\vdots x$ và $x\geq 3$.

Bài 3. *(3,0 điểm)*

1) Cho $A=5+5^2+5^3+...+5^{2019}$. Chứng tỏ rằng 4A + 5 là số chính phương.

2) Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n thì 3n + 2 và 5n + 3 là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 4. *(2,0 điểm)*

1) Cho phân số $P=\dfrac{2019}{x-2020}$. Tìm số nguyên x để P có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

2) Hãy chia số 36 thành ba số a, b, c sao cho $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$ và $\dfrac{b}{c}=\dfrac{4}{3}$.

Bài 5. *(6,0 điểm)*

1) Cho điểm O nằm trên đường thẳng xy. Trên tia Ox lấy điểm M sao cho OM = 1 cm. Trên tia Oy lấy hai điểm N và P sao cho ON = 1 cm, OP = 3 cm.

a) Chứng tỏ rằng điểm N là trung điểm của đoạn thẳng MP.

b) Trên tia đối của tia My lấy điểm Q sao cho MQ = 2 cm. Tìm trung điểm của các đoạn thẳng PQ, MN, NQ? Giải thích vì sao?

2) Cho hai tia Ox và Oy đối nhau. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy, vẽ các tia OA, OB, OC sao cho $\widehat{xOA}=45^o$; $\widehat{xOB}=80^o$; $\widehat{yOC}=65^o$.

a) Tia OA có là tia phân giác của góc xOB không? Vì sao?

b) Chứng tỏ rằng tia OB là tia phân giác của góc AOC.

c) Vẽ tiếp 2016 tia gốc O trong đó không có hai tia nào trùng nhau kể cả các tia đã cho. Hỏi có tất cả bao nhiêu góc được tạo thành?

Bài 6. *(1,0 điểm)*

Lớp 6A có 45 học sinh làm bài kiểm tra môn Toán không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có hai bạn được điểm 10. Chứng tỏ rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau. Biết rằng điểm kiểm tra là số tự nhiên từ 0 đến 10.

ĐỀ THI KHẢO SÁT CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 7

HUYỆN XUÂN TRƯỜNG, TỈNH NAM ĐỊNH

Năm học 2018 - 2019

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. *(6,0 điểm)*

1) Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{0,375 - 0,3 + \dfrac{3}{11} + \dfrac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \dfrac{5}{11} - \dfrac{5}{12}} + \dfrac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \dfrac{5}{3} - 1,25}$.

2) Tìm x, biết: $\left|\dfrac{5}{3} - x\right| - \left|\dfrac{-5}{6}\right| = \left|\dfrac{-5}{9}\right|$.

3) Tìm số nguyên x, biết: $\dfrac{\sqrt{49}}{6} < \left|x - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{26}{\sqrt{81}}$.

Bài 2. *(3,0 điểm)*

Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi x_1 và x_2 là hai giá trị tương ứng của x; y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của y.

a) Tính x_1 và y_1, biết $2x_1 = 5y_1$ và $2x_1 - 3y_1 = 12$.

b) Tính y_1, biết $x_1 = 2x_2$ và $y_2 = 10$.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có AB < AC. Kẻ AH vuông góc với BC (H ∈ BC). Lấy điểm D trên AC sao cho AD = AB. Kẻ DE và DK lần lượt vuông góc với BC và AH (E ∈ BC, K ∈ AH).

a) So sánh độ dài BH và AK.

b) Tính số đo góc HAE.

Bài 4. *(4,0 điểm)*

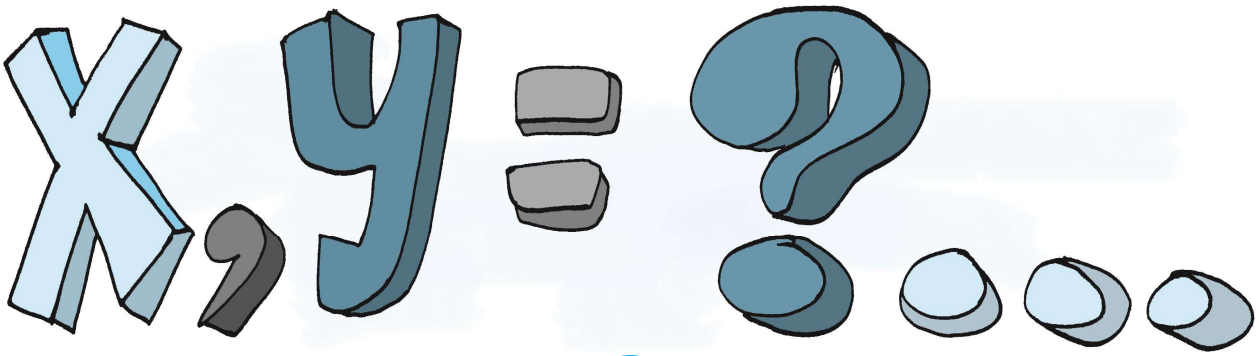
Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^o$; $\hat{C} = 15^o$. Trên tia đối của tia AB lấy hai điểm M, D sao cho BA = AM = MD. Kẻ DE vuông góc với AC tại E.

a) Chứng minh rằng tam giác AME đều.

b) Chứng minh rằng EC = ED.

Bài 5. *(3,0 điểm)*

Cặp số (x ; y) nào thỏa mãn đẳng thức sau: $3^{2x+1}.7^y = 9.21^y$?



ĐỀ THI OLYMPIC LỚP 8
QUẬN HOÀNG MAI, TP. HÀ NỘI

Năm học 2018 - 2019

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(4,0 điểm)*

1) Cho a, b, c thỏa mãn $a - b = 4$ và $b - c = -2$.

Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}$.

2) Cho $S = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $S \vdots 7$.

Bài 2. *(5,0 điểm)*

1) Giải phương trình $(12x + 7)^2 (3x + 2)(2x + 1) = 3$.

2) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2y + 4xy + 4y = 162x + 162$.

Bài 3. *(3,0 điểm)*

Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x^3 + y^3 + 6xy = 8$.

1) Chứng minh $x + y = 2$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{x^2 + y^2} + \dfrac{1}{xy}$.

Bài 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) có H là trực tâm. Qua A kẻ các đường thẳng song song với BH và CH tạo với các đường thẳng này hình bình hành AEHF (AE // BH).

1) Chứng minh $\Delta EHA \backsim \Delta ABC$.

2) Kẻ trung tuyến AM của tam giác ABC. Chứng minh $AM \perp EF$.

3) Kẻ HI vuông góc với AM tại I. Chứng minh $MC^2 = MI.MA$.

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Một giải bóng chuyền có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn một lượt, mỗi trận đấu chỉ có kết quả thắng hoặc thua (hai đội bất kì chỉ thi đấu với nhau đúng một trận). Biết đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ hai thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ chín thắng a_9 trận và thua b_9 trận. Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^3 + ... + a_9^2 = b_1^2 + b_2^3 + ... + b_9^2$.



THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI VÀO 10 THPT CHUYÊN

Năm học 2020 - 2021

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Bài 1. *(2 điểm)*

1) Cho $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$, $c = xy + \frac{1}{xy}$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

2) Giải phương trình nghiệm nguyên $(2x + y)^3 + 2019y^3 = x^3y^3$.

Bài 2. *(2 điểm)*

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x - 2y)(y^2 - 4y) = -2\\ x - y^2 + 2y = -3.\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2 + (2m - 1)x - 5m - 8 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = x_1^2$.

Bài 3. *(2 điểm)*

1) Cho a, b là hai số hữu tỉ khác 0 thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2a^2b^2$. Chứng minh rằng $\sqrt{1 - \frac{1}{ab}}$ là số hữu tỉ.

2) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng $AB + AC < 2AD$.



Bài 4. *(2 điểm)*

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). AO cắt đường tròn (O) tại D, E (D nằm giữa A và E). Một đường thẳng thay đổi qua A cắt đường tròn (O) tại M, N (M thuộc cung BD). Chứng minh rằng tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN thuộc một đường cố định và các đường thẳng BC, DN, ME đồng quy.

Bài 5. *(2 điểm)*

1) Cho a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = a + b + c - abc$.

2) Trong một hình vuông có cạnh bằng 1, đặt 2019 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính bằng $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng giao với ít nhất 1010 đường tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI VÀO 10 THPT CHUYÊN

Năm học 2020 - 2021

Môn thi: Toán

(Đề đăng trên TTT2 số 203)

Bài 1. 1) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{4}{a+b+c}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}=1$

$\Rightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}\right)=a+b+c$

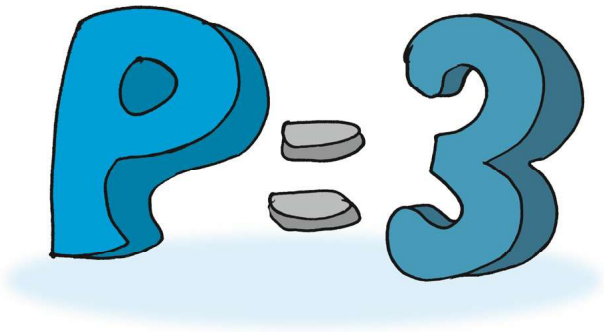
$\Rightarrow \dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0.$

Do đó $M=3\left(\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\right)+2(b-c+c-a+a-b)=0.$

2) ✻ Xét p = 2 ta có $p^2+59=63$ có 6 ước dương là 1; 3; 7; 9; 21; 63.

✻ Xét p = 3 ta có $p^2+59=68$ có 6 ước dương là 1; 2; 4; 17; 34; 68.

✻ Xét p > 3. Ta có p^2 là số chính phương lẻ nên p^2 chia 3 dư 1 và chia 4 dư 1, từ đó p^2+59 chia hết cho 3 và 4 hay p^2+59 chia hết cho 12. Suy ra p^2+59 có nhiều hơn 6 ước dương. Vậy p = 2 hoặc p = 3.



Bài 2. 1) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3(1+x^3)=16$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-20=0 \Leftrightarrow x=1.$

2) $(x^2+4x-12)(x^2+12x+20)=m.$ (1)

Phương trình (1) tương đương với

$(x-2)(x+6)(x+2)(x+10)=m$

$\Leftrightarrow (x^2+8x+12)(x^2+8x-20)=m.$

Đặt $t=x^2+8x+16=(x+4)^2\ge 0.$

Phương trình trở thành $(t-4)(t-36)=m$

$\Leftrightarrow t^2-40t+144-m=0.$ (2)

(1) có 4 nghiệm phân biệt khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=256+m>0\\ S=40>0\\ P=144-m>0\end{cases} \Leftrightarrow -256<m<144.$

Bài 3. 1) $3(ab+bc+ca)^2\le (a+b+c)^2\le 9.$

Do đó $\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le \dfrac{bc}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}$

$=\dfrac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le \dfrac{bc}{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right).$

Tương tự $\dfrac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le \dfrac{ca}{2}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{b+a}\right);$

$\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le \dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{c+b}+\dfrac{1}{c+a}\right).$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được $M\le \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}\le \dfrac{3}{2}.$ Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy $M_{max}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a=b=c=1.$

2) Ta có $\frac{1}{a^3(7b+3c)}+\frac{7b+3c}{100bc}$

$\geq 2\sqrt{\frac{1}{a^3(7b+3c)}.\frac{7b+3c}{100bc}}=\frac{1}{5a}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^3(7b+3c)}\geq \frac{1}{5a}-\frac{7}{100c}-\frac{3}{100b}.$

Tương tự ta có

$\frac{1}{b^3(7c+3a)}\geq \frac{1}{5b}-\frac{7}{100a}-\frac{3}{100c};$

$\frac{1}{c^3(7a+3b)}\geq \frac{1}{5c}-\frac{7}{100b}-\frac{3}{100a}.$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$\frac{1}{a^3(7b+3c)}+\frac{1}{b^3(7c+3a)}+\frac{1}{c^3(7a+3b)}$

$\geq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 4. Dễ chứng minh được OA vuông góc với EF nên OA là trung trực của PQ từ đó suy ra tam giác APQ cân tại A.

Tứ giác ACDF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{ACB} = \widehat{AQM}$. Suy ra tứ giác AQMF nội tiếp nên $\widehat{AMQ} = \widehat{AFQ}$.

Tứ giác BCEF nội tiếp nên $\widehat{AFQ} = \widehat{ACB}$.

Từ đó suy ra

$\widehat{AMQ} = \widehat{AFQ} = \widehat{ACB} = \widehat{AQM} \Rightarrow \Delta AMQ$ cân tại A hay AM = AQ.

Tương tự ΔANP cân tại A hay AN = AP.

Kết hợp với ΔAPQ cân tại A ta có AM = AN = AP = AQ.

Vậy M, N, P, Q cùng thuộc đường tròn tâm A.

Bài 5. 1) Đặt $n = 3k + r$ ($k \in \mathbb{N}$; $r \in \{0; 1; 2\}$).

Ta có $5^n + 4 = 5^{3k+r} + 4$

$= 5^r(125^k - 1) + 5^r + 4$.

Mà $125^k - 1$ chia hết cho $125 - 1 = 124$ nên $125^k - 1$ chia hết cho 31.

Lại có $r \in \{0; 1; 2\}$ nên $5^r + 4 \in \{5; 9; 29\}$.

Vậy $5^n + 4$ chia cho 31 dư 5 hoặc 9 hoặc 29.

2) Ta có 673 + 673 + 673 = 2019;

367 + 367 + 367 = 1101.

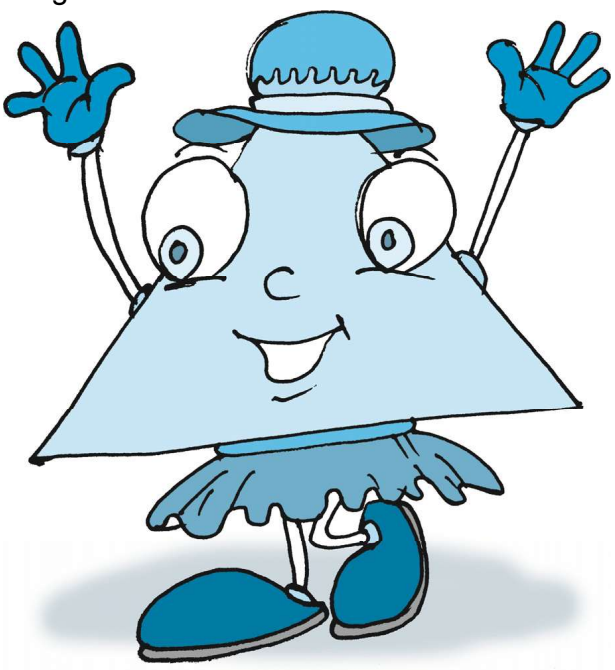
Do vậy ta tô màu các đỉnh của đa giác bằng hai màu đỏ và xanh: Tô màu đỏ nếu tại đỉnh đó ghi số 673, tô màu xanh nếu đỉnh đó ghi số 367. Bài toán giải xong nếu chứng minh được tồn tại ba đỉnh của đa giác là ba đỉnh của một tam giác cân, ba đỉnh này tô cùng màu.

Thật vậy: Vì đa giác đều có 2019 đỉnh là số lẻ nên tồn tại hai đỉnh kề nhau được tô cùng màu, gọi hai đỉnh đó là A và B. Đa giác này còn có đỉnh C nằm trên đường trung trực của AB.

⁎ Nếu C cùng màu với A và B thì tam giác ABC là tam giác cân có ba đỉnh tô cùng màu.

⁎ Nếu C khác màu với A và B, ta xét đỉnh D kề với đỉnh A (D khác B), đỉnh E kề với đỉnh B (E khác A). Nếu D, E khác màu với A và B thì tam giác DCE là tam giác cân có ba đỉnh tô cùng màu, nếu có ít nhất một trong hai đỉnh D hoặc E cùng màu với A và B, chẳng hạn D thì tam giác ADB cân có ba đỉnh cùng màu.

Như vậy tồn tại ba đỉnh của đa giác là ba đỉnh của một tam giác cân, ba đỉnh này được tô cùng màu.



SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT ĐỂ GIẢI TOÁN

THÁI NHẬT PHƯỢNG *(Khánh Hòa)*

Tính chất của hàm số bậc nhất, đặc biệt là tính chất đồng biến hay nghịch biến được sử dụng để giải nhiều bài toán khá hiệu quả. Chúng ta nhắc lại tính chất quan trọng này.

Tính chất của hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 0$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a < 0$.

Hệ quả: Xét hàm số $y = f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

✻ Nếu $f(\alpha) \geq 0$ và $f(\beta) \geq 0$ thì $f(x) \geq 0$.

✻ Nếu $f(\alpha) \leq 0$ và $f(\beta) \leq 0$ thì $f(x) \leq 0$.

✻ Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định D mà $f(\alpha) = f(\beta)$ với $\alpha, \beta \in$ D thì $\alpha = \beta$.

Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1. Cho hàm số bậc nhất $y = f(x) = (6m - m^2 - 10)x + m$ (m là hằng số). Hãy so sánh f(A) và f(B) với

$A = \sqrt{2016} + \sqrt{2018} + \sqrt{2020}$;

$B = \sqrt{2013} + \sqrt{2015} + \sqrt{2026}$.

Lời giải. Ta có $\sqrt{2016} - \sqrt{2013}$

$= \dfrac{3}{\sqrt{2016} + \sqrt{2013}} > \dfrac{3}{\sqrt{2020} + \sqrt{2026}}$;

$\sqrt{2018} - \sqrt{2015}$

$= \dfrac{3}{\sqrt{2018} + \sqrt{2015}} > \dfrac{3}{\sqrt{2020} + \sqrt{2026}}$.

Do đó

$\sqrt{2016} - \sqrt{2013} + \sqrt{2018} - \sqrt{2015}$

$> \dfrac{6}{\sqrt{2020} + \sqrt{2026}} = \sqrt{2026} - \sqrt{2020}$

$\Rightarrow A > B$.

Hàm số bậc nhất $y = f(x) = (6m - m^2 - 10)x + m$ có hệ số $a = 6m - m^2 - 10 = -(m - 3)^2 - 1 < 0$ nên f(x) nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$.

Từ đó suy ra f(A) < f(B).

Bài toán 2. Chứng minh với $m \leq -3$ và $-3 \leq x < \dfrac{1}{2}$ thì $x^2 - 2(m + 2)x + m \leq 0$.

Lời giải. Vì $-3 \leq x < \dfrac{1}{2}$ nên $-2x + 1 > 0$.

Suy ra hàm số bậc nhất $f(m) = (-2x + 1)m + x^2 - 4x$ đồng biến.

Do đó $f(m) \leq f(-3) = (-2x + 1)(-3) + x^2 - 4x$

$= (x - 1)(x + 3) \leq 0$

hay $x^2 - 2(m + 2)x + m \leq 0$ (đpcm).

Bài toán 3. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 + \dfrac{15}{4}xyz \geq \dfrac{1}{4}$.

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với $(x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 + \dfrac{15}{4}xyz \geq \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (1 - z)^3 - 3xy(1 - z) + z^3 + \dfrac{15}{4}xyz \geq \dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}z-1\right)xy+z^2-z+\frac{1}{4}\ge 0.$$

Đặt $t=xy \Rightarrow 0\le t\le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{1-z}{2}\right)^2$.

Xét $f(t)=\left(\frac{9}{4}z-1\right)t+z^2-z+\frac{1}{4}$.

✻ Nếu $z=\frac{4}{9}$ thì

$$f(t)=\left(\frac{4}{9}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{4}=\frac{1}{324}>0.$$

✻ Nếu $z\ne\frac{4}{9}$ thì $f(t)$ là hàm số bậc nhất có

$$f(0)=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0 \text{ và}$$

$$f\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)^2\right]=\left(\frac{9}{4}z-1\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^2+z^2-z+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{z}{16}(3z-1)^2\ge 0 \text{ (Do } z\ge 0).$$

Do đó $f(t)\ge 0$ (đpcm).

Bài toán 4. Cho $0 \le x, y, z, t \le 1$. Chứng minh rằng

$x + y + z + t + (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t) \ge 1$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = [1 - (1 - y)(1 - z)(1 - t)]x + y + z + t + (1 - y)(1 - z)(1 - t)$.

✻ Nếu $1-(1-y)(1-z)(1-t)=0$ thì

$f(x)=y+z+t+1\ge 1$.

✻ Nếu $1 - (1 - y)(1 - z)(1 - t) \ne 0$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất có $f(0) = y + z + t + (1 - y)(1 - z)(1 - t) = 1 + yz + yt + zt(1 - y) \ge 1$.

và $f(1)=1+y+z+t\ge 1$.

Do đó $f(x)\ge 1$ (đpcm).

Bài toán 5. Tìm các số $x, y, z \in [0; 1]$ thỏa mãn $x+y+z-(xy+yz+zx)=1$.

Lời giải. Xét hàm số

$f(x)=(1-y-z)x+y+z-yz-1$.

✻ Nếu $1-y-z=0$ thì $f(x)=-yz\le 0$.

✻ Nếu $1-y-z\ne 0$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất có $f(1) = -yz \le 0$;

$f(0) = y + z - yz - 1 = -(1 - y)(1 - z) \le 0$.

Do đó $f(x) \le 0$.

Đẳng thức xảy ra khi trong ba số x, y, z có một số bằng 0, một số bằng 1 và một số tùy ý thuộc $[0;1]$.

Vậy (x, y, z) = (0; 1; m) và các hoán vị với $m \in [0; 1]$.

Bài toán 6. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$.

Lời giải. Ta có

$$A-4=(x+y)^2-2xy+z^2+xyz-4$$

$$=(3-z)^2-2xy+z^2+xyz-4$$

$$=(z-2)xy+2z^2-6z+5.$$

Đặt $t = xy$, suy ra

$$0\le t\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{3-z}{2}\right)^2.$$

Xét hàm số $f(t)=(z-2)t+2z^2-6z+5$.

✻ Nếu $z=2$ thì $f(t)=1>0$.

✻ Nếu $z\ne 2$ thì $f(t)$ là hàm số bậc nhất có

$$f(0)=2z^2-6z+5=2\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0;$$

$$f\left[\left(\frac{3-z}{2}\right)^2\right]=(z-2)\left(\frac{3-z}{2}\right)^2+2z^2-6z+5$$

$$=\frac{1}{4}(z-1)^2(z+2)\ge 0 \text{ (Do } z\ge 0).$$

Do đó $f(t)\ge 0 \Rightarrow A\ge 4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy $A_{min} = 4$ khi $x = y = z = 1$.

Bài toán 7. Giải phương trình

$$5x-2\sqrt{x^2-6x+9}=5\sqrt{2x+1}$$

$$-2\sqrt{2x+10-6\sqrt{2x+1}}.$$

Lời giải. ĐKXĐ $x\ge -\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$5x-2\sqrt{(x-3)^2}=5\sqrt{2x+1}-2\sqrt{(\sqrt{2x+1}-3)^2}$

$\Leftrightarrow 5x-2|x-3|=5\sqrt{2x+1}-2|\sqrt{2x+1}-3|.$

Xét hàm số

$f(t)=5t-2|t-3|=\begin{cases}3t+6 & (t\ge 3)\\ 7t-6 & (t<3).\end{cases}$

Suy ra f(t) là hàm đồng biến và phương trình trên có dạng $f(x)=f(\sqrt{2x+1})$.

Do đó $x=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2x-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1+\sqrt{2}$.

Bài toán 8. Giải phương trình

$\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)(\sqrt{x+2}-2).$

Lời giải. ĐKXĐ $x\ge -2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$\dfrac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \dfrac{x+4}{x^2-2x+3}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}.\end{array}\right.$ (1)

Từ (1) ta có

$(x+4)(\sqrt{x+2}+2)=(x+1)(x^2-2x+3)$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{(x+2)^2}+2)$

$=(x-1+2)[(x-1)^2+2].$ (2)

Xét hàm số $f(t)=(t+2)(t^2+2)=t^3+2t^2+2t+4.$

Với $t_1<t_2$ ta có

$f(t_1)-f(t_2)=(t_1^3-t_2^3)+2(t_1^2-t_2^2)+2(t_1-t_2)$

$=(t_1-t_2)(t_1^2+t_2^2+t_1t_2+2t_1+2t_2+2)$

$=\dfrac{1}{2}(t_1-t_2)\left[t_1^2+t_2^2+(t_1^2+2t_1t_2+t_2^2)+4(t_1+t_2)+4\right]$

$=\dfrac{1}{2}(t_1-t_2)\left[t_1^2+t_2^2+(t_1+t_2+2)^2\right]<0.$

$\Rightarrow f(t_1)<f(t_2)$ nên f(t) là hàm số đồng biến và phương trình (2) có dạng $f(\sqrt{x+2})=f(x-1)$.

Do đó

$\sqrt{x+2}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=2;\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho $y=f(x)=(m^2-3m+9)x-m$. So sánh $f\left(\dfrac{5}{\sqrt{6}}+\dfrac{6}{\sqrt{7}}+\dfrac{7}{\sqrt{5}}\right)$ và $f(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$.

Bài 2. Cho $m\le 1$; $x\ge 1$. Chứng minh rằng $x^2-2(3m-1)x+m+3\ge 0$.

Bài 3. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

a) $5(x^2+y^2+z^2)\le 6(x^3+y^3+z^3)+1.$

b) $7(xy+yz+zx)\le 2+9xyz.$

c) $x^2y+y^2z+z^2x\le\dfrac{4}{27}.$

d) $x^2+y^2+z^2+xyz\ge\dfrac{10}{27}.$

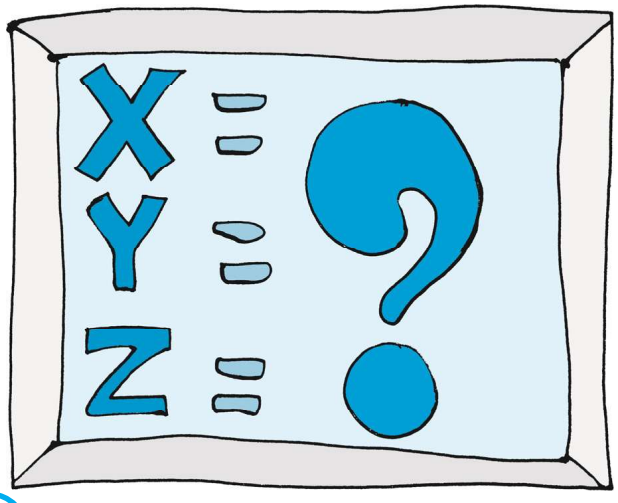
Bài 4. Tìm $x, y, z\in[0;2]$ thỏa mãn $2(x+y+z)-(xy+yz+zx)=4$.

Bài 5. Cho $x, y, z\in[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2(1-y)+y^2(1-z)+z^2(1-x)$.

Bài 6. Giải phương trình

$3(x-\sqrt{5x-4})=\sqrt{x^2-2x+1}$

$-\sqrt{5x-3-2\sqrt{5x-4}}.$



Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(202). Cho $A = 5n^2 + 10n + 601$, với n là số tự nhiên. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các chữ số của A.

Lời giải. Vì n là số tự nhiên nên A chia 5 dư 1.

Do đó $A \neq 10^k$ (với $k \in \mathbb{N}^*$) và $A > 1$ nên tổng các chữ số của A lớn hơn 1.

Với $n = 8$ thì $A = 5.8^2 + 10.8 + 601 = 1001$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng các chữ số của số A là 2.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Lê Văn Quang Hiếu*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Dương Trung Quốc*, 6D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; *Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Lê Phú Quang*, 7D; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Hoàng Nhật Nam*, 6A12, THCS Vinschool Times City, Q. Hai Bà Trưng; *Nguyễn Trần Kiên*; *Hoàng Anh Khôi*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

PHÙNG KIM DUNG

Bài 2(202). Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^{2013} + y^{2016} + z^{2019} = 2018^{2021}$.

Lời giải. (Theo lời giải của bạn *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**).

Ta có $2018 \equiv 2 \pmod 9$

$\Rightarrow 2018^{2021} \equiv 2^{2021} \pmod 9$.

Mặt khác

$2^{2021} = 2^{2016}.2^5 = (2^9)^{224}.2^5 = 512^{224}.2^5$

$\Rightarrow 2^{2021} \equiv (-1)^{224}.2^5 \equiv 1.32 \equiv 5 \pmod 9$.

Suy ra $2018^{2021} \equiv 5 \pmod 9$. (1)

Với a là số nguyên thì a chỉ có thể có dạng $9k$; $9k \pm 1$; $9k \pm 2$; $9k \pm 3$; $9k \pm 4$, với k là số nguyên.

Do đó $a^3 \equiv m^3 \pmod 9$, với $m \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\}$.

Suy ra a^3 chia cho 9 chỉ có thể dư 0; 1; 8.

Từ đó suy ra với các số nguyên x, y, z thì $x^{2013} + y^{2016} + z^{2019} = (x^{671})^3 + (x^{672})^3 + (x^{673})^3$ chia cho 9 chỉ có thể dư 0; 1; 2; 3; 6; 7; 8. (2)

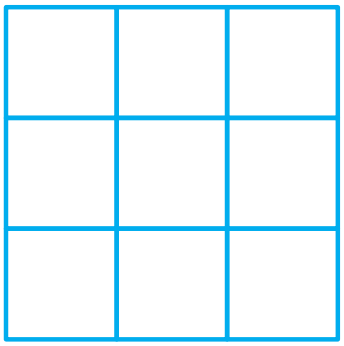
Từ (1) và (2) suy ra không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^{2013} + y^{2016} + z^{2019} = 2018^{2019}$.



Nhận xét. Đây là bài toán số học khá hay, một số bạn biến đổi không chính xác nên không đúng số dư khi chia 2018^{2021} cho 9, ngoài bạn *Hoàng*, các bạn sau có lời giải tốt: *Lê Văn Quang Hiếu*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Trần Kiên*, *Nguyễn Quang Minh*, *Hoàng Anh Khôi*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

NGUYỄN NGỌC HÂN

Bài 3(202). Viết ngẫu nhiên chín số 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 vào chín ô vuông trong hình bên, mỗi ô chứa một số. Gọi x là tổng các số trong 3 hàng, y là tổng các số trong 3 cột, z là tổng các số trong 2 đường chéo. Đặt S = x + y + z. Tìm giá trị lớn nhất của S.



Lời giải. Ta thấy tổng các số trong 3 hàng bằng tổng các số trong 3 cột và chính là tổng 9 số đã cho.

Suy ra x = y = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 = 126.

Do đó S = x + y + z = 252 + z.

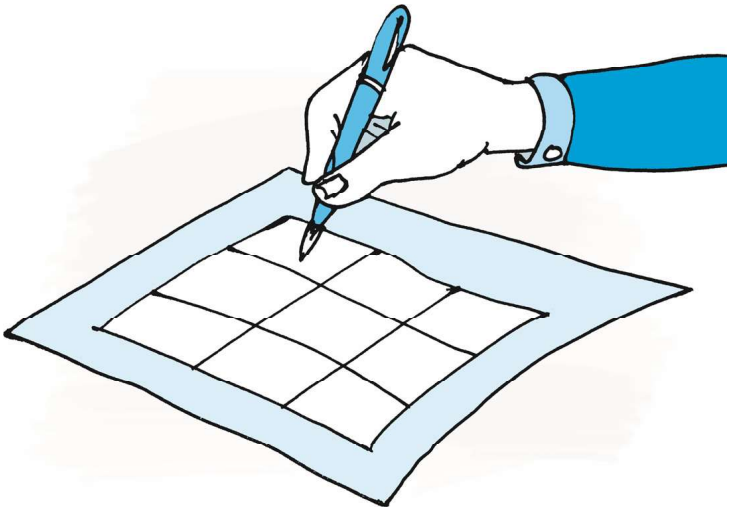
Vậy để S lớn nhất thì z phải lớn nhất.

Khi tính tổng các số ở hai đường chéo thì số ở ô chính giữa được tính 2 lần nên để z lớn nhất thì số ở ô chính giữa phải là số lớn nhất trong 9 số đã cho nên số đó là 26.

Các số còn lại nằm trên hai đường chéo phải là 14, 17, 20, 23.

Do đó z_{max} = 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 26 = 126.

Vậy S_{max} = 252 + 126 = 378.



Hình dưới đây minh họa một cách điền 9 số vào 9 ô vuông để S_{max}= 378.

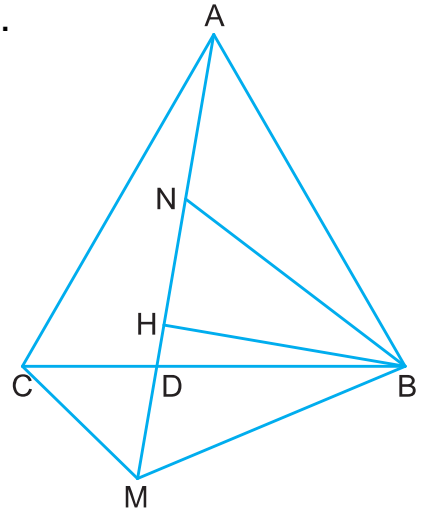
14	11	23
2	26	5
20	8	17

Nhận xét. Đa số các bạn tham gia giải đúng bài này. Một số bạn khi tính z chỉ tính số ở ô chính giữa một lần nên dẫn đến kết quả sai. Các bạn sau có lời giải đúng: *Đào Quang Minh*, 6A; *Dương Trung Quốc*, 6D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; *Bạch Thái Sơn*, 7A1, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Đoàn Nguyên Vũ*, 6B, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Lê Văn Quang Hiếu*, *Nguyễn Cảnh Nam Khánh*, 7D; *Lê Khắc Hưng*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Ngọc Việt*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Đoàn Minh Đức*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, H. Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Trần Kiên*; *Nguyễn Quang Minh*; *Hoàng Anh Khôi, 7C1*; *Phạm Đăng Việt Bách*, 6C4, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

CAO VĂN DŨNG

Bài 4(202). Cho tam giác đều ABC có số đo độ dài cạnh là một số tự nhiên. Gọi D là điểm tùy ý trên cạnh BC (D không trùng với B và C). Trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 60^o$. Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ không là số chính phương.

Lời giải.



Đặt cạnh của tam giác đều là a ($a \in \mathbb{N}^*$).

Trên cạnh AM lấy điểm N sao cho MN = MB khi đó tam giác MNB đều, suy ra MB = NB.

Kết hợp với CB = AB, $\widehat{CBM} = \widehat{ABN}$ $(= 60^o - \widehat{NBC})$ nên ta có

$\Delta CBM = \Delta ABN$ (c.g.c).

Từ đó AN = CM.

Suy ra AM = AN + NM = MB + MC.

Kẻ BH ⊥ MN ($H \in MN$).

Vì tam giác MNB đều nên ta có

$$HM = HN = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}MB.$$

Đặt MB = x thì $HM = \frac{x}{2}$, MC = y thì MA = x + y và $AH = \frac{x}{2} + y$.

Áp dụng định lí Pythagoras cho tam giác HMB và HAB vuông tại H ta có:

$$BH^2 = MB^2 - MH^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4};$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \frac{3x^2}{4}$$

$\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = a^2$. Từ đó suy ra

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (x + y)^2 + x^2 + y^2$$

$$= 2(x^2 + xy + y^2) = 2a^2.$$

Do $a \in \mathbb{N}^*$ nên $MA^2 + MB^2 + MC^2$ không là số chính phương.

Nhận xét. Điểm mấu chốt của bài toán là chỉ ra MA = MB + MC. Các bạn sau có lời giải đúng: *Trần Thị Thanh Thảo*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

HỒ QUANG VINH



Bài 5(202). Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-2x} = 2\sqrt{2}.$$

Lời giải. ĐKXĐ: $0 < x \le \frac{1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương x và 1 − x ta có

$$1 = x + (1-x) \ge 2\sqrt{x(1-x)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \ge 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương $\frac{1}{\sqrt{x}}$ và $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \ge 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}} \ge 2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1-2x}\ge 2\sqrt{2}$.

Do đó $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1-2x}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

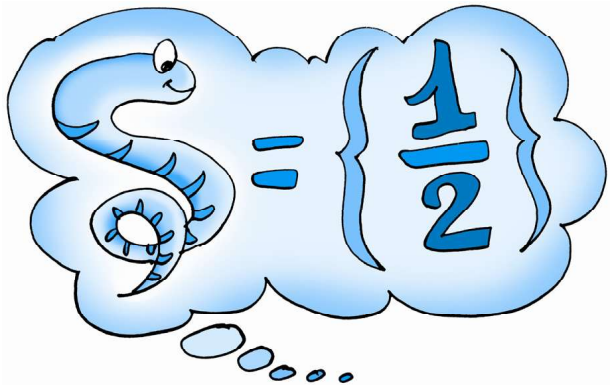
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Nhận xét. Đây là bài toán khá quen thuộc, hầu hết các bạn học sinh đều có lời giải đúng và theo hướng đánh giá. Có nhiều bạn quên không đủ thông tin trường hoặc huyện tỉnh, TP nên không được khen kì này. Các bạn sau có lời giải đúng, trình bày tốt: *Phạm Duy Nguyên Lâm*, 8A1, THCS Thanh Xuân, Q. Thanh Xuân; *Nguyễn Thái Hoàng*, 9A5, THCS Cầu Giấy; *Nguyễn Trần Kiên*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Ngọc Diệu*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Đức An*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Quốc Bảo Long*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Phạm Ngọc Trinh*, 9B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**; *Kim Anh Hùng*, 8A1, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Vũ Đình Hoàng*, *Nguyễn Mạnh Hùng*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; *Phùng Đăng Dương*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG



Bài 6(202). Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $0 < x, y, z, t \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{xyzt+3}{x+y+z+t}$.



Lời giải. Từ giả thiết, ta có

$(1-x)(1-y)\ge 0\Leftrightarrow xy+1\ge x+y$.

$(1-xy)(1-z)\ge 0\Leftrightarrow xyz+1\ge xy+z$.

$(1-xyz)(1-t)\ge 0\Leftrightarrow xyzt+1\ge xyz+t$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được $xyzt+3\ge x+y+z+t$ hay

$$Q=\frac{xyzt+3}{x+y+z+t}\ge 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 1.

Nhận xét. Bằng cách giải tương tự, ta có thể giải được bài toán tổng quát: Nếu $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương không lớn hơn 1 thì $n-1+x_1x_2...x_n\ge x_1+x_2+...+x_n$.

Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Tuấn Đạt*, 9B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; *Phùng Đăng Dương*, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.

VÕ QUỐC BÁ CẨN

Bài 7(202). Giải hệ phương trình

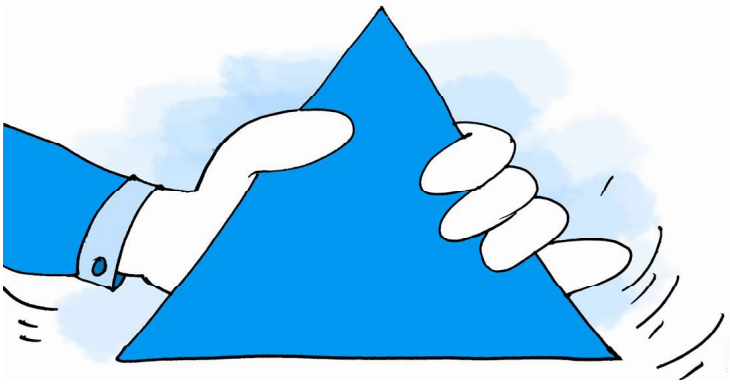
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ |x^3-y^3|+|y^3-z^3|+|z^3-x^3|=32\sqrt{2}. \end{cases}$$

Lời giải. Do vai trò của x, y, z như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y \ge z$. Khi đó $x^3 \ge y^3 \ge z^3$. Từ đó ta có

$$32\sqrt{2} = |x^3-y^3|+|y^3-z^3|+|z^3-x^3|$$
$$= (x^3-y^3)+(y^3-z^3)+(x^3-z^3) = 2(x^3-z^3)$$
$$\Leftrightarrow x^3-z^3 = 16\sqrt{2} = (2\sqrt{2})^3$$
$$= (\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3 \ge (\sqrt{x^2+z^2})^3$$
$$\Leftrightarrow (x^3-z^3)^2 \ge (x^2+z^2)^3$$
$$\Leftrightarrow 0 \ge (x^2+z^2)^3-(x^3-z^3)^2$$
$$= x^6+3x^4z^2+3x^2z^4+z^6-x^6+2x^3z^3-z^6$$
$$= x^2z^2\left[2x^2+2z^2+(x+z)^2\right]$$
$$\Rightarrow xz = 0 \Rightarrow y = 0.$$

- Với $x = 0, y = 0$ thì $z = -2\sqrt{2}$.
- Với $z = 0, y = 0$ thì $x = 2\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 6 nghiệm là $(2\sqrt{2}, 0, 0)$ và các hoán vị; $(-2\sqrt{2}, 0, 0)$ và các hoán vị.



Nhận xét. Đây là bài toán giá trị tuyệt đối dạng cơ bản. Các bạn sau có lời giải tốt: *Ngô Thị An Bình*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Duy Nguyên Lâm*, 8A1, THCS Thanh Xuân, Q. Thanh Xuân; *Lê Duy Anh*, 9C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

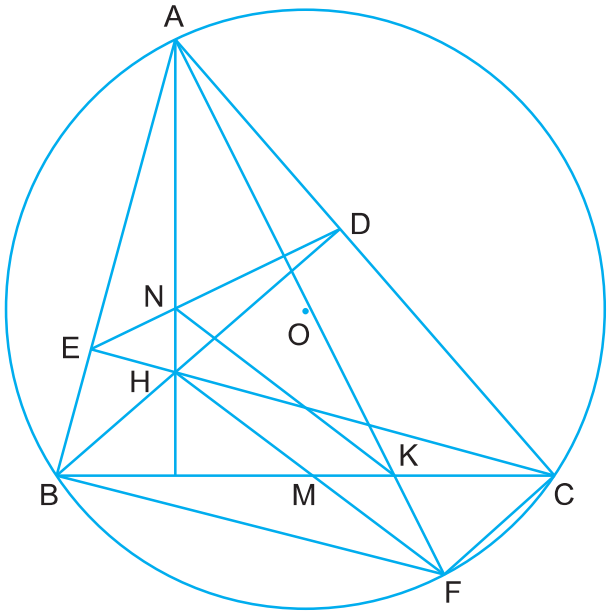
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài 8(202). Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BD, CE của ΔABC cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của AH và DE, K là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng HM // NK.

Lời giải. Dựng đường kính AF của đường tròn (O). Ta dễ thấy BH và CF cùng vuông góc với AC nên BH // CF.

Tương tự thì CH // BF, do đó tứ giác HBFC là một hình bình hành.

Vậy M là trung điểm chung của BC và HF.



Ta có $\widehat{AFC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung AC), $\widehat{ABC} = \widehat{AHE}$ (cùng phụ với góc BAH) nên $\widehat{AFC} = \widehat{AHE}$ mà $\widehat{AEH} = \widehat{ACF} = 90^o$.

Do đó $\Delta AEH \backsim \Delta ACF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AH} = \dfrac{AC}{AF}$ (1).

Lại có tứ giác BCDE nội tiếp nên $\widehat{AEN} = \widehat{ACK}$ dẫn đến $\Delta AEN \backsim \Delta ACK$ (g.g).

Do đó $\dfrac{AN}{AE} = \dfrac{AK}{AC}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{AN}{AH} = \dfrac{AK}{AF}$.

Theo định lí Thales đảo thì NK // HF, mà M là trung điểm của HF nên HM // NK. Đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Duy Khôi*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Lại Trường Giang*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ**; *Lê Thành Trung*, 9D, THCS Điện Biên, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Phạm Duy Nguyên Lâm*, 8A1, THCS Thanh Xuân, Q. Thanh Xuân; *Lê Duy Anh, Nguyễn Lương Uy*, 9C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

TRẦN QUANG HÙNG



ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

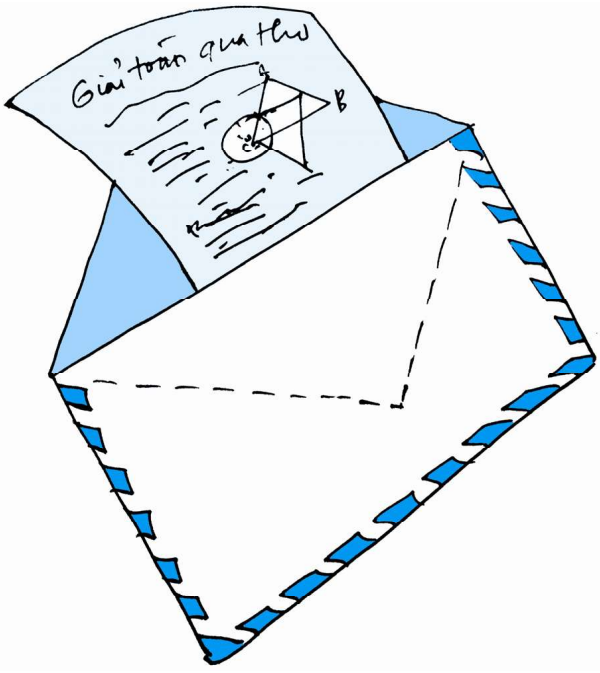
Hoàng Anh Khôi, *Nguyễn Trần Kiên*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy; *Phạm Duy Nguyên Lâm*, 8A1, THCS Thanh Xuân, Q. Thanh Xuân, **Hà Nội**; *Lê Văn Quang Hiếu*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Phùng Đăng Dương*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Dương Trung Quốc*, 6D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; *Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Đức An*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Đoàn Minh Đức*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Đoàn Nguyên Vũ*, 6B, *Nguyễn Ngọc Diệu*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Lê Thành Trung*, 9D, THCS Điện Biên, TP. Thanh Hóa; *Lê Phú Quang*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

CÁCH ĐẶT MUA TẠP CHÍ NĂM 2020

⁎ Đặt tại bưu điện của VNPT: Tạp chí Toán Tuổi thơ 1: **C169**; Tạp chí Toán Tuổi thơ 2: **C169.1**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2018: **C169.2**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2018: **C169.3**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2017: **C169.4**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2017: **C169.5**.

⁎ Các tập thể nhà trường có thể đặt qua Phòng GD và ĐT hoặc Sở GD và ĐT.

Thông tin chi tiết liên hệ qua số máy 0912268725 (gặp chị Trịnh Thị Tuyết Trang).





CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH

NGUYỄN XUÂN CẢNH

Trường THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, Vĩnh Phúc

Trong các bài toán hình học thì dạng toán chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định là một trong những dạng bài khó, hay gặp trong các đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh và thi vào trường THPT chuyên.

Để chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định ta thường đi theo các bước sau:

- Tìm hiểu nội dung bài toán: Trong bước này cần xác định rõ yếu tố cố định, quan hệ giữa các yếu tố không đổi với các yếu tố thay đổi, tìm mối quan hệ giữa các yếu tố đó.

- Dự đoán điểm cố định: Dựa vào những vị trí đặc biệt của yếu tố chuyển động để dự đoán điểm cố định bằng cách lấy một vài vị trí đặc biệt cộng với các đặc điểm bất biến khác như tính chất đối xứng, song song, thẳng hàng…

- Tìm tòi hướng giải: Từ việc dự đoán điểm cố định, tìm mối quan hệ giữa điểm đó với các yếu tố chuyển động, yếu tố cố định và yếu tố không đổi.

Dưới đây là một số bài toán chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định.

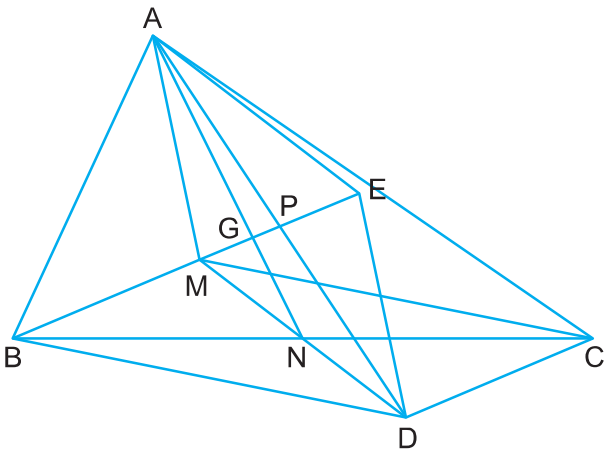
Bài toán 1. Cho tam giác ABC, M là một điểm nằm trong tam giác. Lần lượt vẽ các hình bình hành BMCD, AMDE. Chứng minh rằng khi M di động thì đường thẳng ME luôn đi qua một điểm cố định.

⁎ *Phân tích.* Trước hết thử hai vị trí của M là trọng tâm và trực tâm của tam giác ABC. Từ đó ta dự đoán ME luôn đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải. Gọi N là trung điểm của BC khi đó N cố định. Vì BMCD là hình hình hành nên N cũng là trung điểm của MD.

Do đó AN là đường trung tuyến của tam giác AMD.

Vì AMDE là hình bình hành nên ME cắt AD tại trung điểm P của mỗi đường nên MP là đường trung tuyến của tam giác AMD.



Tam giác AMD có hai đường trung tuyến AN và MP cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác AMD, suy ra $AG = \frac{2}{3}AN$.

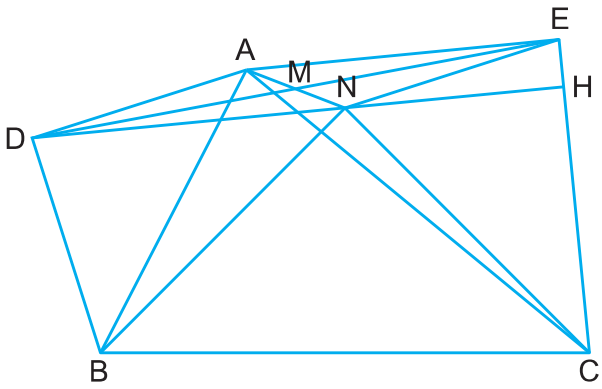
Do A, N cố định nên G cố định.

Vậy ME luôn đi qua điểm cố định là trọng tâm G của tam giác ABC.

Nhận xét. Với bài toán trên ta cũng có thể chứng minh theo hướng lấy G là trọng tâm của tam giác ABC (khi đó G cố định) rồi chứng minh M, G, E thẳng hàng.

Bài toán 2. Cho hai điểm cố định B và C. Một điểm A thay đổi trên một trong hai nửa mặt phẳng bờ BC sao cho A, B, C không thẳng hàng. Dựng hai tam giác vuông cân ADB và ACE với DA = DB; EA = EC sao cho điểm D và C nằm khác phía đối với đường thẳng AB, E và B nằm khác phía đối với đường thẳng AC. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng đường thẳng AM luôn đi qua một điểm cố định.

⁎ *Phân tích.* Xét trường hợp đặc biệt đó là tam giác ABC vuông cân tại A, khi đó A, D, E thẳng hàng và M trùng với A, tức là AM đi qua điểm cố định là đỉnh của tam giác vuông cân với đáy BC.



Lời giải. Dựng hình bình hành ADNE và gọi H là giao điểm của DN với CE.

Theo tính chất hình bình hành ta có A, M, N thẳng hàng.

Xét ΔBDN và ΔNEC có BD = NE (= AD), $\widehat{BDN} = 90^o - \widehat{ADN} = 90^o - \widehat{AEN} = \widehat{NEC}$,

DN = EC (= AE) nên $\Delta BDN = \Delta NEC$ (c.g.c).

Suy ra NB = NC (1); $\widehat{DNB} = \widehat{ECN}$.

Lại có DH // AE và

$\widehat{AEC} = 90^o \Rightarrow \widehat{NHC} = 90^o$.

Do đó $\widehat{DNB} + \widehat{HNC} = \widehat{HCN} + \widehat{HNC} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{BNC} = 90^o$ (2).

Từ (1) và (2) ta được tam giác BNC vuông cân tại N do đó N cố định.

Vậy AM luôn đi qua điểm N cố định.

Bài toán 3. Cho đường tròn (O; R) và dây AB cố định. C là một điểm chuyển động trên cung lớn AB. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng đường thẳng kẻ qua M và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định.

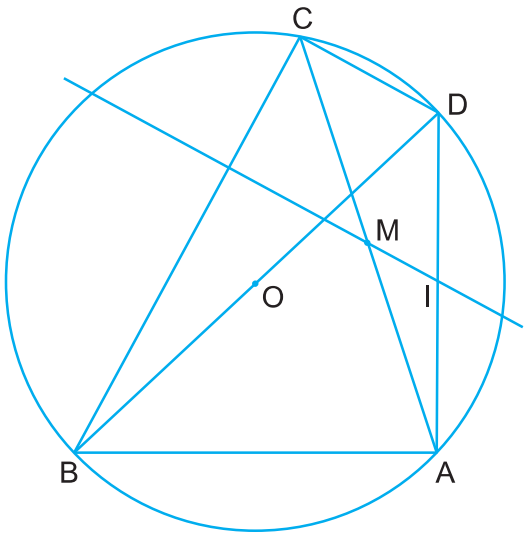
Lời giải. Vẽ đường kính BD, do B cố định nên D cố định.

Giả sử đường thẳng kẻ qua M và vuông góc với BC cắt AD tại I. Ta có $\widehat{BCD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BD).

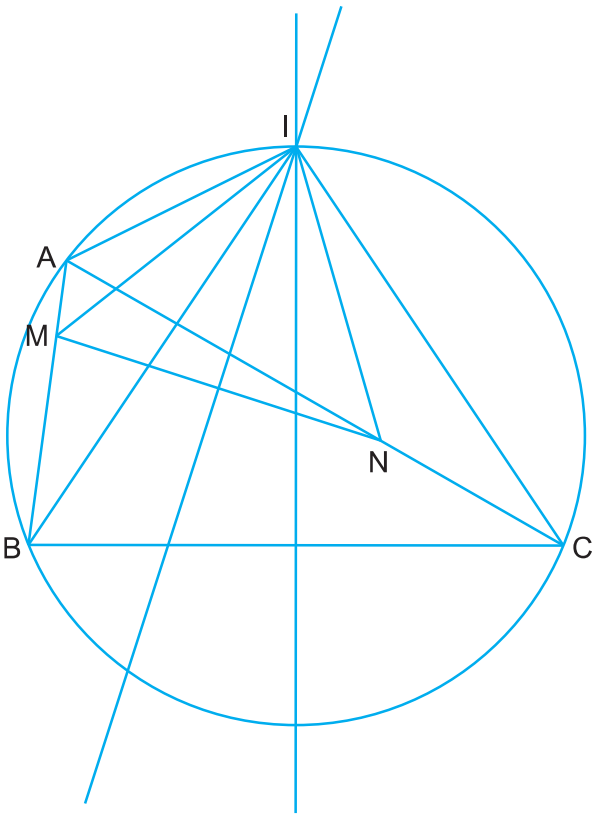
Do đó MI // CD.

Xét ΔACD có MA = MC, MI // CD.

Suy ra I là trung điểm của AD cố định hay đường thẳng kẻ qua M và vuông góc với BC đi qua I cố định.



Bài toán 4. Cho tam giác ABC và hai điểm M, N thứ tự chuyển động trên hai tia BA, CA sao cho BM = CN. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.



⁕ *Phân tích.* Khi M ≡ B thì N ≡ C.

Do đó đường trung trực của MN là trung trực của BC.

Vậy điểm cố định nằm trên đường trung trực của BC.

Giả sử AB < AC, khi M trùng với A thì N trùng với K (K ∈ AC, CK = AB).

Trung trực của AK cắt trung trực của BC tại I, chứng tỏ rằng I nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải. Gọi I là giao điểm của các đường trung trực của BC và MN.

Xét ΔIMB và ΔINC có

BM = CN (gt), IM = IN, IB = IC (vì I thuộc trung trực của MN và BC).

Do đó $\Delta IMB = \Delta INC$ (c.c.c).

Suy ra $\widehat{MBI} = \widehat{NCI}$.

Xét tứ giác ABCI có $\widehat{MBI} = \widehat{NCI}$ nên tứ giác ABCI nội tiếp hay I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mà đường trung trực của BC cố định nên I cố định.

Vậy trung trực của MN đi qua I cố định.

Nhận xét. Ta cũng có thể giải bài toán theo cách: Lấy I là giao điểm của đường trung trực cạnh BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, rồi chứng minh I thuộc đường trung trực của MN theo hướng chứng minh MI = NI.

Bài toán 5. Cho đường tròn tâm O, dây AB. Điểm M di chuyển trên cung lớn AB. Các đường cao AE, BF của tam giác ABM cắt nhau ở H. Đường tròn tâm H bán kính HM cắt MA, MB theo thứ tự ở C, D.

a) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ M vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ H và vuông góc với CD cũng đi qua một điểm cố định.

⁎ *Phân tích.* a) Ta thấy ngay đường thẳng kẻ qua M và vuông góc với CD đi qua điểm O.

b) Xét hai vị trí đặc biệt của M, đó là M ở vị trí sao cho MA, MB lần lượt là đường kính thì ta xác định được vị trí của điểm K.

Khi đó ta thấy tứ giác MHOK là hình bình hành đồng thời MH có độ dài không đổi suy ra K cố định.

Lời giải. a) Kẻ tiếp tuyến Mx với đường tròn (O) thì $\widehat{xMO} = 90^o$.

Ta có $\widehat{xMB} = \widehat{MAB}$ (cùng chắn cung MB của đường tròn tâm O).

Lại có $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^o$ nên tứ giác ABEF nội tiếp đường tròn đường kính AB.

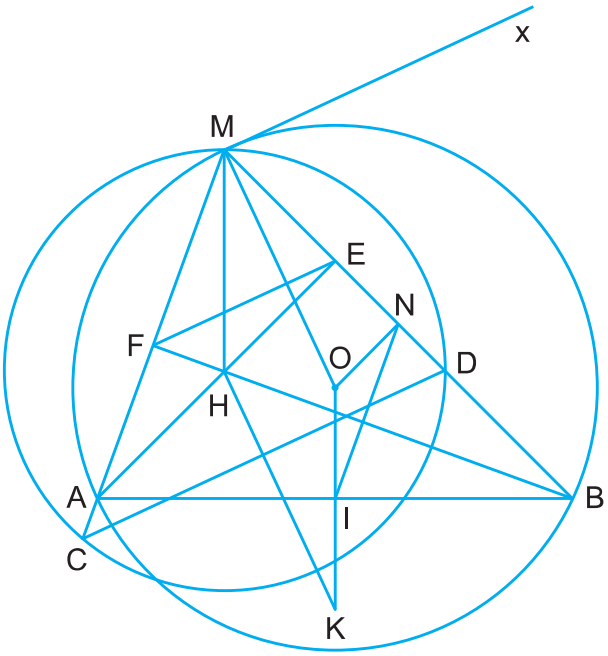
Suy ra $\widehat{MEF} = \widehat{MAB}$.

Do đó $\widehat{MEF} = \widehat{xMB}$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên Mx // EF.

Lại có $\widehat{xMO} = 90^o$.

Suy ra OM ⊥ EF (1).



Ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD.

HE ⊥ MD nên E là trung điểm MD.

Tương tự F là trung điểm MC.

Suy ra EF là đường trung bình tam giác MCD hay EF // CD (2).

Từ (1) và (2) suy ra OM ⊥ CD.

Do đó đường thẳng đi qua M và vuông góc với CD đi qua điểm cố định O.

b) Gọi K là điểm đối xứng với O qua AB, ta có OK ⊥ AB tại trung điểm I của AB.

Mà MH ⊥ AB suy ra MH // OK.

Gọi N là hình chiếu vuông góc của O trên MB thì BN = MN.

Vì OI // MH (cùng vuông góc với AB), IN // AB nên $\widehat{OIN} = \widehat{HMA}$ (góc có cạnh tương ứng song song), tương tự $\widehat{ONI} = \widehat{HAM}$.

Từ đó suy ra $\Delta OIN \backsim \Delta HMA$ (g.g).

Do đó $\frac{OI}{HM} = \frac{IN}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow MH = 2OI = OK$.

Vậy tứ giác MHKO là hình bình hành.

Suy ra HK // OM, mà OM ⊥ CD, nên HK ⊥ CD.

Do O, AB cho trước, nên K là điểm cố định. Vậy đường thẳng kẻ từ H vuông góc CD đi qua điểm K cố định.

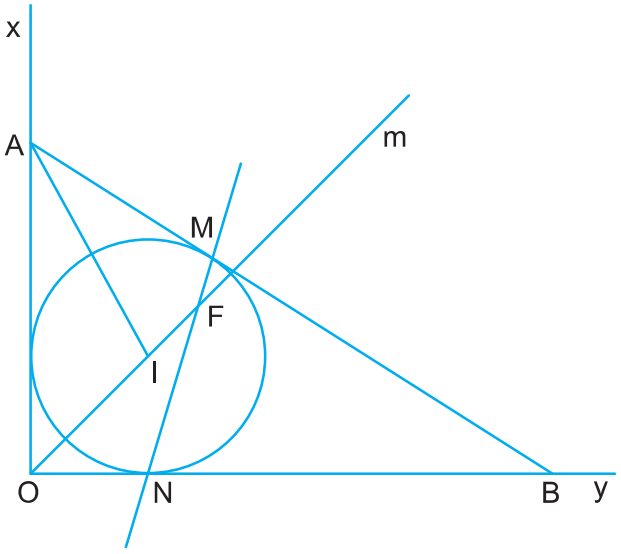
Nhận xét. Với phần b ta cũng có thể chứng minh theo cách: Gọi K là giao điểm của đường thẳng kẻ qua H vuông góc với CD và đường thẳng kẻ qua O vuông góc với BC, rồi chứng minh K cố định.

Bài toán 6. Cho góc vuông xOy, điểm A cố định trên Ox, điểm B di chuyển trên Oy. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABO tiếp xúc với AB, BO theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

✻ *Phân tích.* Vì ΔBMN cân do đó khi $B \equiv O$ thì $\widehat{MNB} = 45^o$ nên điểm cố định phải nằm trên phân giác của góc xOy.

Khi B cách O rất xa thì bán kính đường tròn (I) gần bằng $\frac{OA}{2}$ khi đó MN là đường thẳng song song với Ox và cách Ox một khoảng bằng $\frac{OA}{2}$.

Lời giải.



Giả sử phân giác Om của góc xOy cắt MN tại F.

Vì ΔBMN cân do đó $\widehat{ONM} = 90^o + \frac{\hat{B}}{2}$.

Lại có $\widehat{AIO} = 90^o + \frac{\hat{B}}{2}$.

Suy ra $\widehat{ONM} = \widehat{AIO}$.

Từ đó ta có $\Delta AIO \backsim \Delta FNO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OF}{OA} = \frac{ON}{OI} = \cos\widehat{ION} = \cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow OF = \frac{OA}{\sqrt{2}} \text{ không đổi.}$$

Bài toán 7. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Vẽ đường thẳng (d) quay quanh O cắt AD, BC theo thứ tự tại E, F. Từ E, F lần lượt vẽ các đường thẳng song song với BD, CA chúng cắt nhau tại I. Qua I vẽ đường thẳng (m) vuông góc với EF. Chứng minh đường thẳng (m) luôn đi qua một điểm cố định khi (d) quay quanh O.

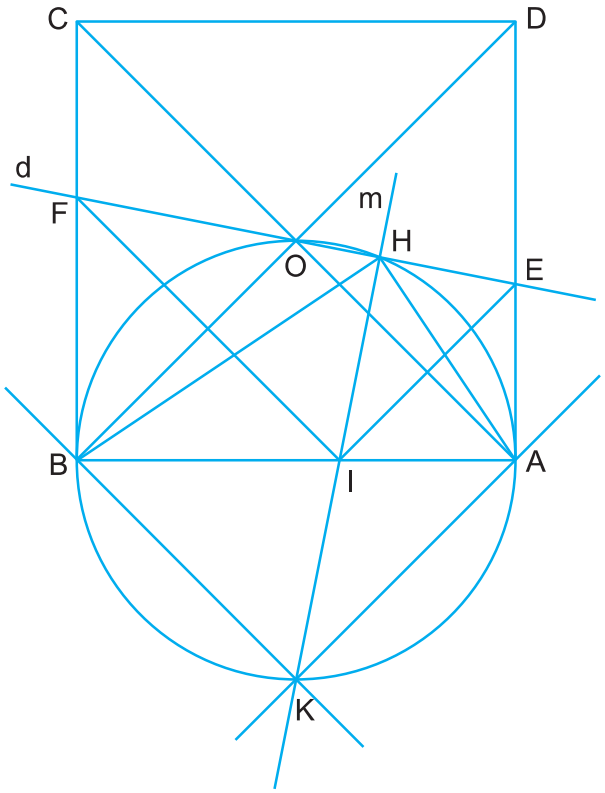
✻ *Phân tích.* Khi $E \equiv A$ thì HI qua A và vuông góc với AC.

Khi $E \equiv D$ thì HI qua B và vuông góc với BD.

Do tính chất đối xứng của hình vẽ nên điểm cố định nằm trên đường trung trực của AB.

Dự đoán điểm cố định K nằm trên đường tròn đường kính AB.

Lời giải.



Dễ thấy I thuộc AB.

Gọi H là giao điểm của đường thẳng (m) và EF.

Ta có $\widehat{IHE}+\widehat{IAE}=180^o$ nên tứ giác IHEA nội tiếp.

Suy ra $\widehat{IHA}=\widehat{IEA}=\widehat{BDA}=45^o$.

Tương tự $\widehat{IHF}+\widehat{IBF}=180^o$ nên tứ giác IHFB nội tiếp.

Suy ra $\widehat{IHB}=\widehat{IFB}=\widehat{ACB}=45^o$.

Vẽ đường tròn đường kính AB, ta có

$\widehat{BHA}=\widehat{IHA}+\widehat{IHB}=90^o$ nên H thuộc đường tròn đường kính AB.

Gọi K là giao điểm của HI với đường tròn đường kính AB ta có:

sđ $\overset{\frown}{KA}=2\widehat{KHA}=2\widehat{IHA}=90^o$.

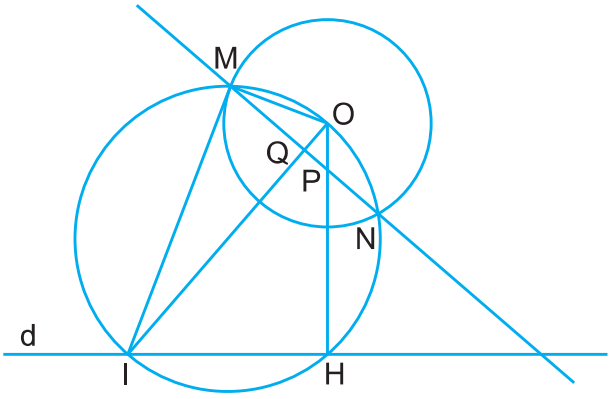
Do K thuộc đường tròn đường kính AB và số đo cung KA bằng 90° nên K cố định hay đường thẳng (m) đi qua K cố định.

Bài toán 8. Cho đường thẳng (d) nằm ngoài đường tròn (O). I là điểm di động trên (d). Đường tròn đường kính OI cắt (O) tại M, N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

⁕ *Phân tích.* Do M, N đối xứng với nhau qua OI nên điểm cố định nằm trên đường thẳng qua O và vuông góc với (d).

Lời giải. Kẻ OH vuông góc với (d) tại H, OH cắt MN tại P.

Gọi Q là giao điểm của MN và OI.



Xét ΔOQP và ΔOHI có góc O chung, $\widehat{OQP}=\widehat{OHI}=90^o$.

Suy ra ΔOQP ∽ ΔOHI (g.g).

Do đó $\frac{OP}{OI}=\frac{OQ}{OH}\Rightarrow OP.OH=OQ.OI.$

Lại có tam giác OMI vuông tại M và có đường cao MQ nên $OM^2=OQ.OI$.

Từ đó ta có $OP.OH=OM^2\Rightarrow OP=\frac{OM^2}{OH}$ (không đổi do O, H cố định và OM là bán kính của (O) không đổi).

Vậy P cố định, do đó MN đi qua P cố định.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho góc vuông xOy. A, B theo thứ tự chuyển động trên Ox, Oy sao cho OA + OB = a (a là độ dài cho trước). Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB. Chứng minh rằng đường thẳng qua G và vuông góc với AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho đường tròn tâm (O). Từ điểm A cố định ở ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C là tiếp điểm). Lấy điểm M trên cung nhỏ BC. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC, AC, AB. MB cắt DF tại P, MC cắt DE tại Q. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cung nhỏ BC thì đường thẳng nối giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MPF và MQE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 3. Cho đoạn thẳng AB và một điểm M bất kì trên đoạn thẳng ấy. Từ M vẽ tia Mx vuông góc với AB. Trên tia Mx lấy hai điểm C, D sao cho MC = MA, MD = MB. Đường tròn (O_1) qua ba điểm A, M, C và đường tròn (O_2) qua ba điểm B, M, D cắt nhau tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên AB.





LỜI GIẢI ĐƯỢC CHƯA?

NGUYỄN THANH GIANG
Trường THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên

Bài toán. Giả sử M là điểm nằm trên nửa đường tròn (O) đường kính AB. Kẻ MH vuông góc với AB tại H (H không trùng O). Đường tròn (O') đường kính MH cắt MA, MB và (O) lần lượt tại E, F và C (C khác M). Chứng minh rằng AB, EF, CM đồng quy.

Một học sinh đã giải như sau:

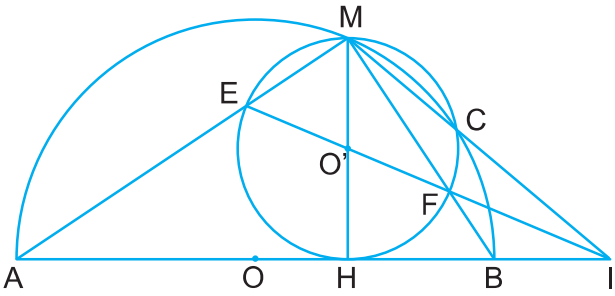
Gọi I là giao điểm của EF và MC, ta chứng minh A, B, I thẳng hàng hay MH vuông góc với HI. Thật vậy ta có

$$\widehat{HMI} = \widehat{HMC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{HC};$$

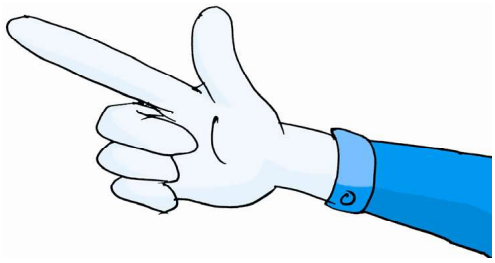
$$\widehat{MIH} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{HM} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{HC}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{MC}$$

$$\Rightarrow \widehat{HMI} + \widehat{MIH} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{HC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{MC}) = 90^o$$

$\Rightarrow MH \perp HI$ (đpcm).



Các bạn hãy nhận xét xem lời giải trên có chỗ nào chưa ổn? Bạn hãy sửa lại cho đúng nhé!



Kết quả **(TTT2 số 202)**

KẾT LUẬN NHƯ THẾ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

Lời giải sai lầm ở chỗ

MA + MC > AC và MB + MD > BD do bạn đó không xét khả năng điểm M thuộc AC và BD.

Lời giải đúng

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có MA + MC ≥ AC và MB + MD ≥ BD.

Do đó MA + MB + MC + MD ≥ AC + BD.

Đẳng thức xảy ra khi M ≡ O.

Vậy khi M là giao điểm hai đường chéo AC và BD thì tổng MA + MB + MC + MD đạt giá trị nhỏ nhất.

HONG HA

Nhận xét. Bài toán này không khó phát hiện lỗi sai, nên có nhiều học sinh lớp 7 tham gia giải quyết, hầu hết đều phát hiện đúng và giải lại tốt, có một số ít lời giải lại chưa thật chặt chẽ.

Các bạn sau có lời giải tốt và nhận được quà kì này: *Thân Lan Phương*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thanh Tuấn*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh, **Nghệ An**; *Trần Minh Hoàng*, 7E THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Lưu Thùy Dương*, 8A3, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, **Nam Định**; *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**.

Các bạn sau có lời giải đúng được khen: *Đặng Quang Huy*, 8G; *Trương Quang Mạnh*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Lê Khắc Hưng*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Sơn Hải*; *Nguyễn Mạnh Hùng*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; *Trần Thị Thanh Thảo*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Thị Diệu Thúy*, 9A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

VI MẠNH TƯỜNG

NHỮNG YÊU CẦU CẦN ĐẠT Ở LỚP 7

MẠCH KIẾN THỨC "SỐ VÀ ĐẠI SỐ"

1. Số

✿ Số hữu tỉ

+ Số hữu tỉ và tập hợp các số hữu tỉ. Thứ tự trong tập hợp các số hữu tỉ

- Nhận biết được số hữu tỉ và lấy được ví dụ về số hữu tỉ.
- Nhận biết được tập hợp các số hữu tỉ.
- Biểu diễn được số hữu tỉ trên trục số.
- Nhận biết được số đối của một số hữu tỉ.
- Nhận biết được thứ tự trong tập hợp các số hữu tỉ. So sánh được hai số hữu tỉ.

+ Các phép tính với số hữu tỉ

- Thực hiện được các phép tính: cộng, trừ, nhân, chia trong tập hợp số hữu tỉ.
- Mô tả được phép tính luỹ thừa với số mũ tự nhiên của một số hữu tỉ và một số tính chất của phép tính đó (tích và thương của hai luỹ thừa cùng cơ số, luỹ thừa của luỹ thừa).
- Mô tả được thứ tự thực hiện các phép tính, quy tắc dấu ngoặc, quy tắc chuyển vế trong tập hợp số hữu tỉ.
- Vận dụng được các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối của phép nhân đối với phép cộng, quy tắc dấu ngoặc với số hữu tỉ trong tính toán (tính viết và tính nhẩm, tính nhanh một cách hợp lí).
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với các phép tính về số hữu tỉ (ví dụ: các bài toán liên quan đến chuyển động trong Vật lí, trong đo đạc,...).

✿ Số thực

+ Căn bậc hai số học

- Nhận biết được khái niệm căn bậc hai số học của một số không âm.
- Tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) căn bậc hai số học của một số nguyên dương bằng máy tính cầm tay.

+ Số vô tỉ. Số thực

- Nhận biết được số thập phân hữu hạn và số thập phân vô hạn tuần hoàn.
- Nhận biết được số vô tỉ, số thực, tập hợp các số thực.
- Nhận biết được trục số thực và biểu diễn được số thực trên trục số trong trường hợp thuận lợi.
- Nhận biết được số đối của một số thực.
- Nhận biết được thứ tự trong tập hợp các số thực.
- Nhận biết được giá trị tuyệt đối của một số thực.
- Thực hiện được ước lượng và làm tròn số căn cứ vào độ chính xác cho trước.

+ Tỉ lệ thức và dãy tỉ số bằng nhau

- Nhận biết được tỉ lệ thức và các tính chất của tỉ lệ thức.
- Vận dụng được tính chất của tỉ lệ thức trong giải toán.
- Nhận biết được dãy tỉ số bằng nhau.
- Vận dụng được tính chất của dãy tỉ số bằng nhau trong giải toán (ví dụ: chia một số thành các phần tỉ lệ với các số cho trước, ...).

+ Giải toán về đại lượng tỉ lệ

- Giải được một số bài toán đơn giản về đại lượng tỉ lệ thuận (ví dụ: bài toán về tổng sản phẩm thu được và năng suất lao động, ...).
- Giải được một số bài toán đơn giản về đại lượng tỉ lệ nghịch (ví dụ: bài toán về thời gian hoàn thành kế hoạch và năng suất lao động, ...).

2. Đại số

✿ Biểu thức đại số

+ Biểu thức đại số

- Nhận biết được biểu thức đại số.
- Tính được giá trị của một biểu thức đại số.

+ Đa thức một biến

- Nhận biết được định nghĩa đa thức một biến.
- Nhận biết được cách biểu diễn đa thức một biến; xác định được bậc của đa thức một biến.
- Tính được giá trị của đa thức khi biết giá trị của biến.
- Nhận biết được khái niệm nghiệm của đa thức một biến.
- Thực hiện được các phép tính: phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia trong tập hợp các đa thức một biến; vận dụng được những tính chất của các phép tính đó trong tính toán.

MẠCH KIẾN THỨC "HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG"

1. Hình học trực quan

✿ Các hình khối trong thực tiễn

+ Hình hộp chữ nhật và hình lập phương

- Mô tả được một số yếu tố cơ bản (đỉnh, cạnh, góc, đường chéo) của hình hộp chữ nhật và hình lập phương.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính thể tích, diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật, hình lập phương (ví dụ: tính thể tích hoặc diện tích xung quanh của một số đồ vật quen thuộc có dạng hình hộp chữ nhật, hình lập phương,...).

+ Lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác

- Mô tả được hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác (ví dụ: hai mặt đáy là song song; các mặt bên đều là hình chữ nhật) và tạo lập được hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác.
- Tính được diện tích xung quanh, thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính thể tích, diện tích xung quanh của một lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác (ví dụ: tính thể tích hoặc diện tích xung quanh của một số đồ vật quen thuộc có dạng lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác,...).

2. Hình học phẳng

✿ Các hình hình học cơ bản

+ Góc ở vị trí đặc biệt. Tia phân giác của một góc

- Nhận biết được các góc ở vị trí đặc biệt (hai góc kề bù, hai góc đối đỉnh).
- Nhận biết được tia phân giác của một góc.
- Nhận biết được cách vẽ tia phân giác của một góc bằng dụng cụ học tập.

+ Hai đường thẳng song song. Tiên đề Euclid về đường thẳng song song

- Mô tả được một số tính chất của hai đường thẳng song song.
- Mô tả được dấu hiệu song song của hai đường thẳng thông qua cặp góc đồng vị, cặp góc so le trong.
- Nhận biết được tiên đề Euclid về đường thẳng song song.

+ Khái niệm định lí, chứng minh một định lí

Nhận biết được thế nào là một định lí, chứng minh một định lí.

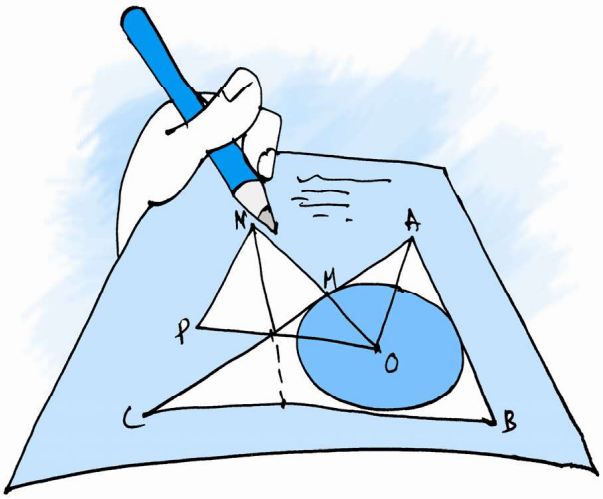
+ Tam giác. Tam giác bằng nhau. Tam giác cân. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên. Các đường đồng quy của tam giác

- Giải thích được định lí về tổng các góc trong một tam giác bằng 180°.
- Nhận biết được liên hệ về độ dài của ba cạnh trong một tam giác.
- Nhận biết được khái niệm hai tam giác bằng nhau.

- Giải thích được các trường hợp bằng nhau của hai tam giác, của hai tam giác vuông.
- Mô tả được tam giác cân và giải thích được tính chất của tam giác cân (ví dụ: hai cạnh bên bằng nhau; hai góc đáy bằng nhau).
- Nhận biết được khái niệm: đường vuông góc và đường xiên; khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng. Giải thích được quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên dựa trên mối quan hệ giữa cạnh và góc đối trong tam giác (đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn và ngược lại).
- Nhận biết được đường trung trực của một đoạn thẳng và tính chất cơ bản của đường trung trực.
- Nhận biết được: các đường đặc biệt trong tam giác (đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác, đường trung trực); sự đồng quy của các đường đặc biệt đó.

+ Giải bài toán có nội dung hình học và vận dụng giải quyết vấn đề thực tiễn liên quan đến hình học

- Diễn đạt được lập luận và chứng minh hình học trong những trường hợp đơn giản (ví dụ: lập luận và chứng minh được các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau từ các điều kiện ban đầu liên quan đến tam giác,...).
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn liên quan đến ứng dụng của hình học như: đo, vẽ, tạo dựng các hình đã học.



✿ Thực hành trong phòng máy tính với phần mềm toán học (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện)

- Sử dụng phần mềm để hỗ trợ việc học các kiến thức hình học.
- Thực hành sử dụng phần mềm để vẽ hình và thiết kế đồ hoạ liên quan đến các khái niệm: tia phân giác của một góc, đường trung trực của một đoạn thẳng, các đường đặc biệt trong tam giác.

MẠCH KIẾN THỨC "MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT"

1. Một số yếu tố thống kê

✿ Thu thập và tổ chức dữ liệu

+ Thu thập, phân loại, biểu diễn dữ liệu theo các theo tiêu chí cho trước

- Thực hiện và lí giải được việc thu thập, phân loại dữ liệu theo các tiêu chí cho trước từ những nguồn: văn bản, bảng biểu, kiến thức trong các môn học khác và trong thực tiễn.
- Giải thích được tính hợp lí của dữ liệu theo các tiêu chí toán học đơn giản (ví dụ: tính hợp lí, tính đại diện của một kết luận trong phỏng vấn; tính hợp lí của các quảng cáo;...).

+ Mô tả và biểu diễn dữ liệu trên các bảng, biểu đồ

- Đọc và mô tả thành thạo các dữ liệu ở dạng biểu đồ thống kê: biểu đồ hình quạt tròn (pie chart); biểu đồ đoạn thẳng (line graph).
- Lựa chọn và biểu diễn được dữ liệu vào bảng, biểu đồ thích hợp ở dạng: biểu đồ hình quạt tròn (cho sẵn) (pie chart); biểu đồ đoạn thẳng (line graph).
- Nhận biết được những dạng biểu diễn khác nhau cho một tập dữ liệu.

✿ Phân tích và xử lí dữ liệu

Hình thành và giải quyết vấn đề đơn giản xuất hiện từ các số liệu và biểu đồ thống kê đã có

- Nhận ra được vấn đề hoặc quy luật đơn giản dựa trên phân tích các số liệu thu được ở dạng: biểu đồ hình quạt tròn (cho sẵn) (pie chart); biểu đồ đoạn thẳng (line graph).
- Giải quyết được những vấn đề đơn giản liên quan đến các số liệu thu được ở dạng: biểu đồ hình quạt tròn (cho sẵn) (pie chart); biểu đồ đoạn thẳng (line graph).
- Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức trong các môn học khác trong Chương trình lớp 7 (ví dụ: Lịch sử và Địa lí lớp 7, Khoa học tự nhiên lớp 7,...) và trong thực tiễn (ví dụ: môi trường, y học, tài chính,...).

2. Một số yếu tố xác suất

+ Làm quen với biến cố ngẫu nhiên. Làm quen với xác suất của biến cố ngẫu nhiên trong một số ví dụ đơn giản

- Làm quen với các khái niệm mở đầu về biến cố ngẫu nhiên và xác suất của biến cố ngẫu nhiên trong các ví dụ đơn giản.
- Nhận biết được xác suất của một biến cố ngẫu nhiên trong một số ví dụ đơn giản (ví dụ: lấy bóng trong túi, tung xúc xắc,...).

✿ Thực hành trong phòng máy tính với phần mềm toán học (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện)

Sử dụng được phần mềm để tổ chức dữ liệu vào biểu đồ hình quạt tròn (pie chart); biểu đồ đoạn thẳng (line graph).

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Nhà trường tổ chức cho học sinh một số hoạt động sau và có thể bổ sung các hoạt động khác tuỳ vào điều kiện cụ thể.

Hoạt động 1: Tìm hiểu một số kiến thức về tài chính:

- Thực hành tính toán việc tăng, giảm theo giá trị phần trăm của một mặt hàng hoặc một kế hoạch sản xuất, kinh doanh.
- Làm quen với giao dịch ngân hàng.
- Làm quen với thuế và việc tính thuế.

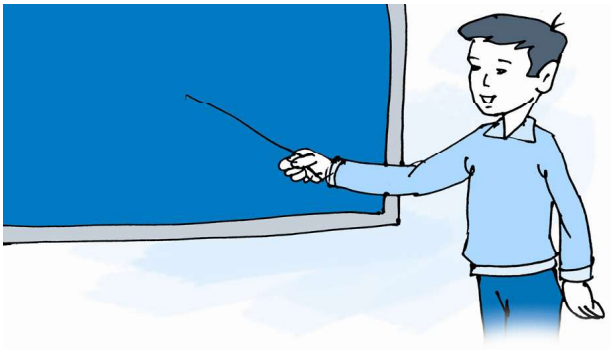
Hoạt động 2: Thực hành ứng dụng các kiến thức toán học vào thực tiễn và các chủ đề liên môn, chẳng hạn:

- Vận dụng kiến thức thống kê để đọc hiểu các bảng biểu trong Lịch sử và Địa lí lớp 7, Khoa học tự nhiên lớp 7.
- Thu thập, phân loại và biểu diễn dữ liệu (theo các tiêu chí cho trước) vào biểu đồ hình quạt tròn (pie chart) hoặc biểu đồ đoạn thẳng (line graph) từ một vài tình huống trong thực tiễn.

Hoạt động 3: Tổ chức các hoạt động ngoài giờ chính khoá như thực hành ngoài lớp học, dự án học tập, các trò chơi học Toán, cuộc thi về Toán, chẳng hạn:

- Tạo dựng các hình có liên quan đến tia phân giác của một góc, liên quan đến hai đường song song, liên quan đến hình lăng trụ đứng.
- Vận dụng kiến thức về tam giác bằng nhau trong thực tiễn, ví dụ: đo khoảng cách giữa hai vị trí mà giữa chúng có vật cản hoặc chỉ đến được một trong hai vị trí.
- Thu thập một số vật thể trong thực tiễn có dạng hình lăng trụ đứng và tính diện tích xung quanh của các vật thể đó.

Hoạt động 4 (nếu nhà trường có điều kiện thực hiện): Tổ chức giao lưu với học sinh có khả năng và yêu thích môn Toán trong trường và trường bạn.



TTT *(Tổng hợp)*

Nguồn: Bộ Giáo dục và Đào tạo

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

THÁI NHẬT PHƯỢNG

Kì 32

CLB1. Find the natural number a such that it has exactly 4 factors and three of the factors add up to a.

CLB2. Given number $x < 0$ such that $x^4 - 23x^2 + 1 = 0$. Find the value of $\frac{x^{18}+1}{x^9}$.

CLB3. Solve the following equation $6x^4 - 5x^3 - 5x - 6 = 0$.

CLB4. Given that $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ and $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ $(a,b,c \neq 0)$.

Show that $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

CLB5. Given right triangle ABC (right angle A and AB < AC), BM is the median line. Point D is one AC such that $\angle ABD = \angle CBM$. Draw DE perpendicular to BC at E. Prove that $\frac{DA}{DE} = \frac{BA}{BC}$.

ĐỖ ĐỨC THÀNH *(dịch)*

Kết quả Kì 30 (TTT2 số 202)

CLB1. Vì $x^4 \in \mathbb{Z}$ nên $3^y \in \mathbb{Z}$. Do đó $y \in \mathbb{N}$.

✻ Nếu $y = 0$ thì $x^4 = 28561 = 13^4$

$\Leftrightarrow x = 13$ hoặc $x = -13$.

✻ Nếu $y > 0$ thì 3^y chia hết cho 3. Vì 28562 chia 3 dư 2 nên x^4 chia 3 dư 2. Mặt khác x^4 là số chính phương nên x^4 chia 3 dư 0 hoặc 1 (mâu thuẫn). Vậy $(x; y) \in \{(13; 0); (-13; 0)\}$.

CLB2. Ta có

$(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$

$\Leftrightarrow 2(x^4 + y^4) \geq x^4 + x^3y + y^4 + xy^3$

$\Leftrightarrow 2(x^4 + y^4) \geq (x + y)^2(x^2 - xy + y^2)$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq 8(x^2 - xy + y^2)$ (Do $x + y = 4$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 2$.

CLB3. Ta có

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 12x + 9y - 6z = 36$. (1)

$\frac{x}{3} - \frac{y}{8} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x - 3y + 4z = 24$. (2)

Trừ vế với vế (1) cho (2) ta được

$6x + 12y - 10z = 12 \Leftrightarrow 3x + 6y - 5z = 6$.

Vậy $M = 6$.

CLB4. $(a - b)(b - c)(c - a)S = (c - b)(a^3 - a^2 + bc) + (a - c)(b^3 - b^2 + ca) + (b - a)(c^3 - c^2 + ab)$

$= (c - b)(a^3 - a^2 + bc) + (a - c)(b^3 - b^2 + ca) + [(b - c) + (c - a)](c^3 - c^2 + ab)$

$= (b - c)(c^3 - c^2 + ab - a^3 + a^2 - bc) + (c - a)(c^3 - c^2 + ab - b^3 + b^2 - ca)$

$= (b - c)(c - a)(c^2 + ca + a^2 - b - c - a) - (b - c)(c - a)(b^2 + bc + c^2 - b - c - a)$

$= (b - c)(c - a)(a^2 - b^2 + ca - bc)$

$= (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

$\Rightarrow S = a + b + c \in \mathbb{Z}$.

CLB5. Ta có $BC \leq AB + AC = 1 - BC$.

Suy ra $BC \leq \frac{1}{2}$. Vậy BC lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi B trùng A hoặc C trùng A.

Lại có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \geq \frac{1}{2}(AB + AC)^2$

$\Leftrightarrow 2BC^2 \geq (1 - BC)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}BC \geq 1 - BC$

$\Rightarrow BC \geq \sqrt{2} - 1$.

Vậy BC nhỏ nhất bằng $\sqrt{2} - 1$ khi $AB = AC = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt và được thưởng kì này là: *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Thanh Tuấn*, 8G; *Ngô Thị An Bình*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

NGUYỄN QUANG TUẤN



Kì này Các quốc gia Châu Á

NGUYỄN THỊ HIỀN
Trường Tiểu học Thanh Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh

Trong ô chữ kì này có chứa tên 11 quốc gia trong khu vực Châu Á. Các bạn hãy nhanh tay tìm ra và gửi đáp án về tòa soạn nhé!



P	H	I	L	I	P	P	I	N	E	S
V	G	W	U	L	K	D	E	I	S	Y
I	N	D	O	N	E	S	I	A	I	M
E	P	E	U	H	L	N	M	T	N	E
T	U	A	K	G	A	U	R	H	G	N
N	C	A	M	B	O	D	I	A	A	H
A	L	O	Y	L	S	D	Q	I	P	I
M	A	L	A	Y	S	I	A	L	O	O
E	E	T	N	M	V	N	E	A	R	M
W	O	V	M	O	T	U	R	N	E	L
P	R	C	A	P	Q	O	T	D	C	Y
O	H	B	R	U	N	E	I	V	X	E
T	I	M	O	R	L	E	S	T	E	R

Kết quả Magic Words (TTT2 số 202)

Không giống tiếng Việt, trong tiếng Anh không có thanh dấu. Vì thế, với một số từ, khi thay đổi thứ tự các chữ cái, ta sẽ có được những từ mới, với nghĩa hoàn toàn khác.

1. sore → rose (hoa hồng)
2. bus → sub (tàu ngầm)
3. add → dad (bố)
4. not → ton (tấn)
5. stone → notes (ghi chú)
6. panel → plane (máy bay)
7. net → ten (mười)
8. low → owl (con cú)
9. raw → war (chiến tranh)

HONG HA

Nhận xét. Nhiều bạn có đáp án đúng. 5 phần quà kì này sẽ được gửi tới những bạn may mắn sau: *Nguyễn Mạnh Hùng*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Đinh Phương Nga*, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**; *Phạm Tuấn Minh*, 7B, THCS Tân Bình, TP. Tam Điệp, **Ninh Bình**; *Hoàng Thị Yến Linh*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; *Nguyễn Đức Anh*, 7C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**.

Chúc các bạn một năm mới nhiều sức khỏe và học thêm được nhiều kiến thức bổ ích, lí thú.

Chủ Vườn



TOÁN TỔ HỢP
TRONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Toán tổ hợp là vấn đề hay và khó, thường gặp trong các kì thi chọn học sinh giỏi lớp 9 và thi vào lớp 10 chuyên toán THPT. Bài viết này chúng tôi xin được giới thiệu cùng bạn đọc một số bài toán tổ hợp qua kì thi chọn học sinh giỏi và kì thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán.

1. Bài toán giải bằng phương pháp phản chứng

Phương pháp phản chứng thuộc loại chứng minh gián tiếp dùng để chứng tỏ kết luận của bài toán là đúng bằng cách chứng tỏ phủ định kết luận là sai.

Bài toán 1. Huyện KS có 33 công ty, huyện KV có 100 công ty. Biết rằng, mỗi công ty của huyện KS hợp tác với ít nhất 97 công ty huyện KV. Chứng minh rằng có ít nhất 1 công ty của huyện KV hợp tác với tất cả các công ty của huyện KS.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, tỉnh Khánh Hòa, năm học 2019 - 2020)

Lời giải. Vì mỗi công ty của huyện KS hợp tác với ít nhất 97 công ty huyện KV. Nếu xem sự hợp tác 1 công ty huyện KS với 1 công ty huyện KV là một liên kết thì số liên kết ít nhất là $33.97 = 3201$ (liên kết).

Giả sử tất cả các công ty của huyện KV hợp tác với nhiều nhất 32 công ty của huyện KS, khi đó số liên kết nhiều nhất từ huyện KV vào huyện KS là $100.32 = 3200$ (liên kết).

Ta có $3200 < 3201$ (mâu thuẫn).

Vậy điều giả sử tất cả các công ty của huyện KV hợp tác với nhiều nhất 32 công ty của huyện KS là sai. Do đó có ít nhất 1 công ty của huyện KV hợp tác với tất cả các công ty của huyện KS.

Bài toán 2. Có 15 bạn học sinh nam và 15 bạn học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một học sinh mà hai bạn ngồi cạnh bạn đó đều là nữ.

(Đề thi vào 10 chuyên Toán, THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Phú Thọ, năm học 2019 - 2020)

Lời giải. Giả sử tồn tại một cách sắp xếp 30 bạn này vào bàn tròn sao cho không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nữ. Gọi các bạn đó lần lượt là A_1, A_2, ..., A_{30}. Chia 30 bạn này sang hai bàn tròn gồm A_1, A_3, ..., A_{29} và A_2, A_4, ..., A_{30} và giữ nguyên thứ tự. Khi đó cả hai bàn mới này không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau. Do đó số bạn nữ ở mỗi bàn không vượt quá $\left[\frac{15}{2}\right] = 7$. Như vậy tổng số bạn nữ của cả hai bàn không vượt quá 14. Mâu thuẫn với giả thiết, điều giả sử ở trên là sai. Vậy luôn tồn tại một học sinh mà hai bạn ngồi cạnh bạn đó đều là nữ.

Bài toán 3. Có 8 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 210. Chứng minh rằng trong 8 đoạn thẳng đó luôn tìm được 3 đoạn thẳng để ghép thành tam giác.

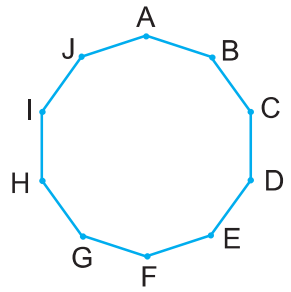
(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Ninh Bình, năm học 2018 - 2019)

Lời giải. Gọi độ dài của 8 đoạn thẳng đã cho là $a_1, a_2, a_3, ..., a_8$ với $10 < a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_8 < 210$. Giả sử không có ba đoạn thẳng nào để ghép thành tam giác. Ta có

$a_3 \ge a_2 + a_1 > 10 + 10 = 20$, $a_4 \ge a_3 + a_2 > 20 + 10 = 30$, $a_5 \ge a_4 + a_3 > 30 + 20 = 50$, $a_6 \ge a_5 + a_4 > 50 + 30 = 80$, $a_7 \ge a_6 + a_5 > 80 + 50 = 130$, $a_8 \ge a_7 + a_6 > 130 + 80 = 210$. Mâu

thuẫn giả thiết, điều giả sử trên là sai. Do vậy trong 8 đoạn thẳng đã cho luôn tìm được 3 đoạn thẳng để ghép thành tam giác.

Bài toán 4. Cho một đa giác lồi có 10 đỉnh như hình vẽ



(bốn đỉnh A, B, C, D được gọi là 4 đỉnh liên tiếp của đa giác). Các đỉnh của đa giác được đánh số một cách tùy ý bởi các số nguyên thuộc tập hợp {1; 2; ...; 9; 10} (biết mỗi đỉnh chỉ được đánh số bởi 1 số, các số được đánh ở các đỉnh là khác nhau). Chứng minh rằng ta luôn tìm được 4 đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số mà tổng các số đó lớn hơn 21.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán 9, tỉnh Nam Định, năm học 2018 - 2019)

Lời giải. Gọi các số khác nhau được đánh liên tiếp trên các đỉnh lần lượt là $x_1, x_2, ..., x_{10} \in \{1; 2; 3; ...; 9; 10\}$. Giả sử không tìm được 4 đỉnh liên tiếp của đa giác mà tổng các số được đánh trên các đỉnh lớn hơn 21. Ta có

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 21$, $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 21$,

$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 21$, ..., $x_{10} + x_1 + x_2 + x_3 \le 21$.

Do đó $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ $+ (x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + ... + (x_{10} + x_1 + x_2 + x_3) \le 21.10 = 210$. Suy ra $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} \le 52{,}5$ mâu thuẫn với $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 1 + 2 + ... + 10 = 55$. Điều giả sử trên là sai. Vậy ta luôn tìm được 4 đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số mà tổng các số đó lớn hơn 21.

Bài toán 5. Trong buổi gặp gỡ giao lưu giữa các học sinh đến từ n quốc gia, người ta nhận thấy rằng cứ 10 học sinh bất kì thì có ít nhất 3 học sinh đến từ cùng một quốc gia.

a) Gọi k là số quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ. Chứng minh $n < \dfrac{k+10}{2}$.

b) Biết rằng số học sinh tham dự buổi gặp gỡ là 60. Chứng minh rằng có thể tìm được ít nhất là 15 học sinh đến từ cùng một quốc gia.

(Đề thi vào 10 chuyên Toán, trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2019 - 2020)

Lời giải. Số quốc gia có đúng một học sinh tham dự là k nên số quốc gia có ít nhất hai học sinh tham dự là n – k. Khi đó ta chọn k học sinh từ k quốc gia có đúng một học sinh tham dự và 2(n – k) học sinh từ n – k quốc gia có ít nhất 2 học sinh tham dự.

a) Giả sử $n \ge \dfrac{k+10}{2} \Leftrightarrow k + 2(n-k) \ge 10$ thì từ ít nhất 10 học sinh gồm k học sinh từ k quốc gia cứ 1 học sinh tham dự và 2(n – k) học sinh từ n – k quốc gia có ít nhất 2 học sinh tham dự, ta luôn có 3 học sinh đến từ 1 quốc gia. Điều này mâu thuẫn với đề bài, vậy điều giả sử trên là sai. Do đó $n < \dfrac{k+10}{2}$.

b) Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán. Ta có mỗi quốc gia có đúng một học sinh tham dự và mỗi quốc gia có ít nhất 2 học sinh tham dự có nhiều nhất 14 học sinh tham dự. Do đó

$60 \le 1.k + 14(n-k) \Leftrightarrow 14n - 13k \ge 60$

$n \ge \dfrac{13k+60}{14}$.

Ta có

$\dfrac{13k+60}{14} \le n < \dfrac{k+10}{2} \Rightarrow 13k + 60 < 7k + 70$

$\Rightarrow 6k < 10 \Rightarrow k < \dfrac{5}{3} \Rightarrow k \in \{0;1\}$.

✻ $k = 0$ ta có $\dfrac{60}{14} \le n < 5$ (loại).

✻ $k = 1$ ta có $\dfrac{73}{14} \le n < \dfrac{11}{2}$ (loại).

Điều giả sử trên là sai. Vậy có thể tìm được ít nhất là 15 học sinh đến từ cùng một quốc gia.

2. Bài toán vận dụng nguyên lí Dirichlet

Nguyên lí Dirichlet được phát biểu đơn giản như sau: Nếu nhốt n con thỏ vào k cái lồng (n, k nguyên dương) thì tồn tại một lồng chứa ít nhất $\left[\dfrac{n}{k}\right] + 1$ con thỏ. Kí hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Bài toán 6. Hội trường có 14 dãy bàn, mỗi dãy có 20 chỗ. Có 200 bạn học sinh nghe bài

giảng đại chúng gồm hai buổi sáng và chiều. ở mỗi buổi các bạn học sinh đã ngồi vào một cách tùy thích. Chứng minh rằng luôn tồn tại được hai bạn học sinh đã ngồi cùng dãy với nhau trong cả buổi sáng và buổi chiều.

(Đề thi vào 10 chuyên Toán, trường thực hành ĐHSP TP. Hồ Chí Minh, năm học 2019 - 2020)

Lời giải. Ta có 200 = 14.14 + 4. Theo nguyên lí Dirichlet buổi sáng tồn tại một dãy bàn có ít nhất 15 học sinh ngồi. Buổi chiều, hội trường có 14 dãy, 15 = 14.1 + 1 do đó trong 15 học sinh ngồi cùng dãy buổi sáng theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 học sinh ngồi cùng dãy vào buổi chiều. Vậy luôn tìm được 2 bạn học sinh đã ngồi cùng dãy với nhau trong cả hai buổi sáng và chiều.

Bài toán 7. Trong kì thi chọn học sinh giỏi THCS cấp tỉnh, đoàn học sinh huyện A có 17 học sinh dự thi. Mỗi thí sinh có số báo danh là một số tự nhiên trong khoảng từ 1 đến 907. Chứng minh rằng có thể chọn ra 9 học sinh trong đoàn có tổng số báo danh chia hết cho 9.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Gia Lai, năm học 2019 - 2020)

Lời giải. Xét 5 số tự nhiên, theo nguyên lí Dirichlet trong 5 số đó có ít nhất 2 số chia cho 3 có cùng số dư. Khi đó xảy ra hai khả năng sau.

✻ Nếu chỉ có 2 số chia cho 3 có cùng số dư, khi đó 3 số còn lại khi chia cho 3 có số dư lần lượt là 0, 1, 2 nên tổng của chúng chia hết cho 3

✻ Nếu có ít nhất 3 số chia cho 3 có cùng số dư thì khi đó tổng của chúng chia hết cho 3.

Vậy trong 5 số tự nhiên, tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3.

Ta chia 17 số tự nhiên trong khoảng từ 1 đến 907 thành 3 nhóm gồm 5 số, 5 số và 7 số. Mỗi nhóm tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3. Gọi tổng của 3 số mỗi nhóm là 3a, 3b, 3c (a, b, c $\in \mathbb{N}^*$). Còn lại 17 − 3.3 = 8 số, trong 8 số này tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3, gọi tổng của 3 số đó là 3d (d $\in \mathbb{N}^*$). Còn lại 8 − 3 = 5 số, trong 5 số này tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3, gọi tổng 3 số đó là 3e (e $\in \mathbb{N}^*$). Trong 5 số a, b, c, d, e tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát giả sử là a, b, c. Ta có 3a + 3b + 3c = 3(a + b + c) chia hết cho 9. Do đó có thể chọn ra 9 học sinh trong đoàn có tổng số báo danh chia hết cho 9.

Bài toán 8. Cho 2020 chiếc kẹo và 1010 chiếc hộp sao cho không có hộp nào chứa nhiều hơn 1010 chiếc kẹo và mỗi hộp chứa ít nhất 1 chiếc kẹo. Chứng minh rằng có thể tìm thấy một số cái hộp mà tổng số kẹo trong các hộp đó bằng 1010 chiếc.

(Đề thi vào 10 chuyên Toán, tỉnh Bắc Ninh, năm học 2019 - 2020)

Lời giải. Gọi số kẹo có trong 1010 chiếc hộp lần lượt là $a_1, a_2, ..., a_{1010}$ ($a_i \in \mathbb{N}^*, a_i \leq 1010$).

✻ Giả sử $a_1 = a_2 = ... = a_{1010} = 2$ thì ta có $a_1 + a_2 + ... + a_{505} = 2.505 = 1010$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

✻ Nếu a_1 khác a_2, xét dãy số a_1, a_2, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, ..., $a_1 + a_2 + ... + a_{1009}$

- Nếu một trong các số của dãy chia hết cho 1010 thì ta có điều cần chứng minh.
- Nếu không có số nào chia hết cho 1010, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 số trong dãy số trên khi chia cho 1010 có cùng số dư, chẳng hạn $a_1 + a_2 + ... + a_k$ và $a_1 + a_2 + ... + a_l$ (k, l $\in \mathbb{N}^*$, k < l). Khi đó $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_l = (a_1 + a_2 + ... + a_l) - (a_1 + a_2 + ... + a_k) \vdots 1010$.

Mà $0 < a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_l < 2020$.

Nên $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_l = 1010$.

Vậy có thể tìm thấy một số hộp mà tổng số kẹo trong các hộp đó bằng 1010 chiếc.

Bài toán 9. Trong hình vuông cạnh bằng 1 có 2019 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\frac{1}{91}$ nằm trong hình vuông đó mà không có điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2018 - 2019)

Lời giải. Chia hình vuông đã cho thành 2025 hình vuông nhỏ có cạnh bằng nhau và bằng $\frac{1}{45}$. Gọi (O_1), (O_2), ..., (O_{2025}) là các hình tròn nội tiếp các hình vuông nhỏ này bán kính bằng

nhau và bằng $\frac{1}{45}:2=\frac{1}{90}$. Gọi (C_1), (C_2), ..., (C_{2025}) lần lượt là các hình tròn đồng tâm với các hình tròn trên, có bán kính bằng nhau và bằng $\frac{1}{91}$. Ta có các hình tròn này nằm trong hình vuông và đôi một không có điểm chung. Có 2019 điểm nên tồn tại một hình tròn trong 2025 hình tròn (C_1), (C_2), ..., (C_{2025}) không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Bài toán 10. Trên mặt phẳng cho 17 điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Giữa hai điểm bất kì trong ba điểm đã cho ta nối một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên dương (các số ghi trên các đoạn thẳng là các số nguyên dương khác nhau). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có cạnh là các đoạn thẳng đã nối mà tổng các số ghi trên 3 cạnh của tam giác đó chia hết cho 3.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bà Rịa-Vũng Tàu, năm học 2019 - 2020)

Lời giải. Ta tô màu các đoạn thẳng bằng một trong ba màu xanh, đỏ, vàng nếu số ghi trên đoạn thẳng khi chia cho 3 có dư là 0, 1, 2. Bài toán giải xong khi chứng tỏ tồn tại tam giác có ba cạnh cùng màu.

Gọi A là một trong 17 điểm đã cho. Xét các đoạn thẳng nối A với các điểm còn lại gồm 16 đoạn thẳng. Vì $16 = 3.5 + 1$ theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 6 đoạn thẳng cùng màu, không mất tính tổng quát, giả sử cùng màu xanh. Gọi đầu mút kia của 6 đoạn thẳng đó là B, C, D, E, F, G

⁕ Nếu tồn tại một đoạn thẳng nối 2 trong 6 điểm B, C, D, E, F, G là màu xanh, chẳng hạn BC khi đó tam giác ABC có ba cạnh cùng màu xanh.

⁕ Nếu tất cả các đoạn thẳng nối 2 trong 6 điểm B, C, D, E, F, G có màu đỏ hoặc vàng, xét 5 đoạn thẳng BC, BD, BE, BF, BG theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 đoạn thẳng cùng màu, chẳng hạn BC, BD, BE cùng đỏ.

- Nếu trong ba đoạn CD, DE, CE có 1 đoạn màu đỏ chẳng hạn CD thì tam giác BCD có ba cạnh tô đỏ
- Nếu trong ba đoạn CD, DE, CE đều tô vàng thì tam giác CDE có ba cạnh tô vàng. Bài toán đã được giải xong.

3. Bài toán giải dựa vào đại lượng bất biến

Khi các đối tượng thay đổi nhưng vẫn có tính chất không bị thay đổi trong quá trình biến đổi được gọi là tính chất bất biến. Phát hiện đại lượng bất biến trong bài toán nhằm giúp loại bỏ những kết quả không thể xảy ra.

Bài toán 11. Bạn Bình có 19 viên bi màu xanh, 21 viên bi màu đỏ và 23 viên bi màu vàng. Bình thực hiện trò chơi theo quy tắc sau: Mỗi lần Bình chọn 2 viên bi có màu khác nhau rồi sơn chúng bởi màu thứ ba (ví dụ: Nếu Bình chọn 2 viên bi gồm 1 viên màu xanh, một viên màu đỏ thì Bình sơn 2 viên bi này thành màu vàng). Hỏi sau một số hữu hạn lần thực hiện trò chơi theo quy tắc trên, bạn Bình có thể thu được tất cả các viên bi cùng một màu hay không? Tại sao?

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán-Tin, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2019 - 2020)

Lời giải. Sau mỗi lần thực hiện, mỗi loại màu bi sẽ tăng thêm 2 hoặc giảm 1. Như vậy hiệu số bi của hai loại bi khác màu trước và sau thực hiện sơn bi có cùng số dư khi chia cho 3. Giả sử Bình thu được tất cả các bi cùng màu. Khi đó hai loại bi kia có hiệu số viên bi là 0 chia hết cho 3. Mà lúc đầu thì hiệu của hai trong 3 số 19, 21, 23 đều không chia hết cho 3, điều này mâu thuẫn. Vậy bạn Bình không thể thu được các bi cùng một màu.

Bài toán 12. Trên bảng ô vuông 2019×2019, ở mỗi ô người ta điền toàn bộ dấu +. Sau đó thực hiện quá trình đổi dấu (dấu + thành dấu −, dấu − thành dấu +) lần lượt theo các bước sau:

Bước 1: Các ô ở dòng thứ i đều được đổi dấu i lần, $i = 1, 2, 3, ..., 2019$.

Bước 2: Các ô ở cột thứ j đều được đổi dấu $3j + 1$ lần, $j = 1, 2, 3, ..., 2019$.

Tính số dấu + còn lại trên bảng ô vuông sau

khi thực hiện quá trình đổi dấu trên.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2019 - 2020)

Lời giải. Theo đầu bài ta có dấu ghi trên ô vuông ở dòng i cột j được đổi dấu i + 3j + 1 lần.

Ta có (i + 3j + 1) + (i + j) = 2(i + 2j) + 1 là lẻ nên i + 3j + 1 và i + j khác tính chẵn lẻ. Do đó những ô vuông ở dòng i cột j mà i + j là số lẻ sẽ được đổi dấu một số chẵn lần như vậy, dấu ở các ô vuông đó vẫn là dấu +, còn các ô vuông ở dòng i cột j mà i + j là số chẵn sẽ được đổi dấu một số lẻ lần và dấu ở các ô vuông đó là dấu –.

Từ 1 đến 2019 có 1009 số chẵn và 1010 số lẻ nên số cặp (i, j) mà i + j là số lẻ bằng 1009.1010 + 1010.1009 = 2038180.

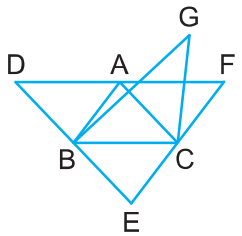
Vậy số các ô vuông còn lại mang dấu + là 2038180.

4. Các bài toán dạng khác

Bài toán 13. Trong mặt phẳng cho 8073 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2019 điểm nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Bình Định, năm học 2018 - 2019)

Lời giải. Trong số các tam giác có 3 đỉnh là các điểm đã cho, ta chọn ra tam giác có diện tích lớn nhất, giả sử đó là tam giác ABC và $S_{ABC} \le 1$. Qua A, B, C lần lượt vẽ các đường thẳng song song với BC, AC, AB chúng cắt nhau tạo thành tam giác DEF.



Ta có $S_{DEF} \le 4$. Nếu có điểm G nằm ngoài tam giác DEF, chẳng hạn G, E nằm khác phía đối với BC, khi đó $S_{GBC} > S_{ABC}$. Như vậy 8073 điểm đã cho đều nằm trong tam giác DEF. Mặt khác 8073 = 4.2018 + 1. Do đó theo nguyên lí Dirichlet có thể tìm được 2019 điểm đã cho nằm trong hoặc trên cạnh của một trong 4 tam giác ABD, ABC, EBC, ACF đều có diện tích nhỏ hơn 1.

Bài toán 14. Cho trước p là số nguyên tố. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy hai điểm $A(p^8; 0)$ và $B(p^9; 0)$ thuộc trục Ox. Có bao nhiêu tứ giác ABCD nội tiếp sao cho các điểm C, D thuộc trục Oy và đều có tung độ là các số nguyên dương?

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán, trường THPT Hạ Long, tỉnh Quảng Ninh, năm học 2018 - 2019)

Lời giải. Gọi C(0; c), D(0; d) (c > d > 0)

Vì tứ giác ABCD nội tiếp nên OD.OC = OA.OB hay $cd = p^8.p^9 = p^{17}$.

Mà c > d > 0 và p là số nguyên tố, nên có 9 cặp (c; d) thỏa mãn là $(p^{17}; 1)$, $(p^{16}; p)$, $(p^{15}; p^2)$; ...; $(p^9; p^8)$. Vậy có tất cả 9 tứ giác thỏa mãn đề toán.

Bài toán 15. Trong một buổi tổ chức Lễ tuyên dương các học sinh có thành tích học tập xuất sắc của một huyện, ngoại trừ bạn An, hai người bất kì đều bắt tay nhau. An chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng một cặp (hai người) chỉ bắt tay không quá một lần và có tổng cộng 420 cái bắt tay. Hỏi bạn An có bao nhiêu người quen trong buổi lễ tuyên dương đó?

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, tỉnh Bình Thuận, năm học 2018 - 2019)

Lời giải. Gọi số bạn tham dự lễ tuyên dương là x + 1 bạn và số người An quen là y bạn (x, y ∈ ℕ*, y ≤ x).

Số cái bắt tay là x(x – 1) : 2 + y.

Theo đề bài ta có x(x – 1) : 2 + y = 420

⇔ x(x – 1) + 2y = 840.

Do đó x(x – 1) + 2x ≥ x(x – 1) + 2y = 840

⇔ $x^2 + x \ge 840 \Leftrightarrow x \ge 29$.

Mà y ≥ 1 nên 840 = x(x – 1) + 2y ≥ x(x – 1) + 2

⇔ x(x – 1) ≤ 838 ⇔ x ≤ 29.

Từ đó suy ra x = 29.

Khi đó 29(29 – 1) + 2y = 840 ⇔ y = 14.

Vậy bạn An quen 14 bạn trong buổi lễ tuyên dương.



SAI PHÂN PHÁP TRONG CUỐN SÁCH TOÁN CHỮ HÁN "ĐẠI THÀNH TOÁN HỌC CHỈ MINH"

TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học)*
PHẠM VŨ LỘC *(Trung tâm Vũ trụ Việt Nam)*
ĐOÀN THỊ LỆ *(Đại học Thanh Hoa, Đài Loan)*
CUNG THỊ KIM THÀNH, PHAN THỊ ÁNH TUYẾT

(Tiếp theo TTT2 số 200+201)

Dạng 2. Đưa về phương trình bậc nhất một ẩn

Dạng 2.1. Sai phân hơn kém

Bài 2.1.1. (trang 31a) Nay có vàng 3 cân 12 lạng chia cho ba người không đều. Biết Ất kém Giáp mà nhiều hơn Bính đều 5 lạng. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Giải. Ta có 1 cân = 16 lạng, 3 cân 12 lạng = 60 lạng.

Gọi $x - 5$, x, $x + 5$ tương ứng là số vàng Bính, Ất, Giáp nhận được. Theo bài ra ta có

$(x - 5) + x + (x + 5) = 60 \Leftrightarrow x = 20$.

Vậy Bính nhận được 15 lạng, Ất nhận được 1 cân 4 lạng, Giáp nhận được 1 cân 9 lạng.

Bài 2.1.2. (trang 31b-32a) Nay có 265 thạch gạo, giao cho ba động tiên dùng. Động tiên ông 20 cung, động tiên tử (trẻ em) 50 cung, động tiên nữ 110 cung. Động tiên ông mỗi cung nhận nhiều hơn động tiên tử 7 đấu. Động tiên tử mỗi cung nhận được nhiều hơn động tiên nữ 5 đấu. Hỏi mỗi cung và mỗi động dùng bao nhiêu?

Giải. Ta có 265 thạch = 2650 đấu. Gọi $x + 7$, x, $x - 5$ tương ứng là số đấu gạo mỗi cung động tiên ông, tiên tử và tiên nữ nhận được. Theo bài ra ta có phương trình

$20(x + 7) + 50x + 110 (x - 5) = 2650$

$\Leftrightarrow x = 17$.

Vậy động tiên tử mỗi cung nhận 1 thạch 7 đấu, tổng 85 thạch; động tiên ông mỗi cung nhận 2 thạch 4 đấu, tổng 48 thạch; động tiên nữ mỗi cung nhận 1 thạch 2 đấu, tổng 132 thạch.

Lời bình: Bài toán phản ánh xã hội ngày xưa. Có thể được lấy từ sách toán Trung Hoa.

Dạng 2.2. Sai phân lần lượt giảm

(Nghĩa là mỗi vị trí giảm 1 phần, đến khi còn 1 phần thì dừng).

Bài 2.2.1. (trang 32a-32b) Nay có vàng 5 cân 12 lạng, muốn chia cho bốn cô gái, dùng phép lần lượt giảm mà thành. Mỗi cô nhận bao nhiêu?

Giải. Đổi 5 cân 12 lạng = $5 \times 16 + 12 = 92$ lạng. Gọi x là số vàng cô út nhận được.

Ta có $x + 2x + 3x + 4x = 92 \Leftrightarrow x = 9{,}2$.

Vậy cô út nhận 9 lạng 2; cô ba nhận $9{,}2 \times 2 = 18{,}4$ (1 cân 2 lạng 4); cô hai nhận $9{,}2 \times 3 = 27{,}6$ (1 cân 11 lạng 6); cô cả nhận $9{,}2 \times 4 = 36{,}8$ (2 cân 4 lạng 8).

Bài 2.2.2. (trang 32b) Có 1440 tấm gấm chia cho Công, Hầu, Bá. Mỗi hạng nhận bao nhiêu?

Giải. Gọi x là số tấm gấm Bá nhận được; Hầu nhận được $2x$; Công nhận được $3x$. Theo bài ra ta có $x + 2x + 3x = 1440$

$\Leftrightarrow 6x = 1440 \Leftrightarrow x = 240$.

Vậy Bá nhận được 240 tấm gấm, Hầu nhận được 480 tấm, Công nhận được 720 tấm.



Dạng 2.3. Sai phân lần lượt chia đôi
(Người đầu nhận nhiều nhất, người tiếp theo bằng nửa).

Bài 2.3.1. (trang 33a) Nay có gạo 672 thạch chia cho ba người Giáp, Ất, Bính theo phép chia đôi. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Giải Gọi x là số gạo Bính nhận được. Khi ấy Ất nhận được 2x; Giáp nhận được 4x. Ta có
$x + 2x + 4x = 672 \Leftrightarrow 7x = 672 \Leftrightarrow x = 96$.
Vậy Bính nhận được 96 thạch gạo, Ất nhận được 192 thạch, Giáp nhận được 384 thạch gạo.

Dạng 2.4. Sai phân lần lượt bốn sáu
(Bốn sáu tức người đầu tiên 6 phần thì người thứ hai 4 phần, người thứ hai 6 phần thì người thứ ba 4 phần).

Bài 2.4.1. (trang 33b) Nay phải nộp tiền thuế 4227 quan 5 mạch, lệnh ba hạng Giáp, Ất, Bính nộp theo phép bốn sáu. Hỏi mỗi người nộp bao nhiêu?

Giải Gọi x, y, z là số tiền Giáp, Ất, Bính phải nộp. Theo luật bốn sáu ta có $4x = 6y$, $4y = 6z$. Suy ra $y = \frac{2}{3}x$, $z = \frac{2}{3}y = \frac{4}{9}x$.
Theo bài ra ta có
$$x + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x = 4227{,}5 \Leftrightarrow x = 2002{,}5 \text{ (quan)}.$$
Vậy Giáp phải nộp 2002 quan 5 mạch; Ất phải nộp 1335 quan; Bính phải nộp 890 quan.

Dạng 2.5. Sai phân đắp đổi giảm dần
(Nghĩa là chia theo cấp số cộng với công sai d).

Bài 2.5.1. (trang 35a-35b) Chia 180 thạch gạo cho ba người Bính, Ất, Giáp theo phép đắp đổi giảm dần. Biết Bính ít hơn Giáp 36 thạch. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu gạo?

Giải. Gọi $x - d$, x, $x + d$ là số gạo Bính, Ất và Giáp nhận được. Ta có $(x - d) + x + (x + d) = 180 \Leftrightarrow x = 60$.
và $(x + d) - (x - d) = 36 \Leftrightarrow d = 18$. Vậy Ất nhận 60 thạch, Bính nhận 42 thạch, Giáp nhận 78 thạch.

Bài 2.5.2. (trang 35b-36a) Nay có vàng 15 cân, lệnh bốn phương theo phép đắp đổi giảm dần mà chia, chỉ biết Đông ở đầu nhiều hơn Bắc ở cuối 1 cân 2 lạng. Mỗi phương nhận bao nhiêu?

Giải. Gọi x, x + d, x + 2d, x + 3d là số vàng Bắc, Nam, Tây, Đông nhận được. Vì 1 cân 2 lạng tương ứng là 18 lạng. Theo bài ra ta có
$(x + 3d) - x = 18 \Leftrightarrow d = 6$.
Vì 15 cân là 240 lạng nên ta có $x + (x + d) + (x + 2d) + (x + 3d) = 240$
$\Leftrightarrow x + (x + 6) + (x + 12) + (x + 18) = 240$
$\Leftrightarrow x = 51$.
Vậy Bắc nhận 51 lạng; Nam nhận 57 lạng; Tây nhận 63 lạng; Đông nhận 69 lạng.

Dạng 2.6. Sai phân thắng bán, thái bán
(Thắng bán là hai phần ba, thái bán là ba phần tư).

Bài 2.6.1. (trang 37b) Nay có Giáp, Ất, Bính 3 hạng, mỗi hạng 368 người, được chia 3974 thạch 4 đấu gạo. Biết hạng Bính mỗi người nhận 4 phần, Ất nhận như Bính thắng bán, Giáp nhận như Ất thái bán. Hỏi mỗi người nhận bao nhiêu?

Giải. Số gạo mỗi người nhóm Bính nhận được là 4 phần. Mỗi người nhóm Ất nhận được là 6 phần. Mỗi người nhóm Giáp nhận được là 8 phần.
Tổng số phần $368 \times (4 + 6 + 8) = 6624$.
Một phần nhận $39744 : 6624 = 6$ (đấu).
Giáp mỗi người nhận 8 phần = 4 thạch 8 đấu; tổng $368 \times 4{,}8 = 1766$ thạch 4 đấu; Ất mỗi người 3 thạch 6 đấu, tổng 1324 thạch 8 đấu; Bính mỗi người 2 thạch 4 đấu, tổng 883 thạch 2 đấu.

Dạng 3. Đưa về hệ phương trình bậc nhất

Bài 3.1. (trang 28a-28b) Nay có bạc 786 lạng 6 tiền, mua gạo, mạch tổng 920 thạch. Gạo mỗi thạch giá 9 tiền 3 phân, mạch mỗi thạch giá 6 tiền 8 phân. Hỏi mỗi loại bao nhiêu?

Giải. 786 lạng 6 tiền = 7866 tiền. Gọi x và y tương ứng là số gạo và số mạch. Ta có
$$\begin{cases} x + y = 920 \\ 9{,}3x + 6{,}8y = 7866 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 644 \\ y = 276. \end{cases}$$

Vậy gạo 644 thạch, tổng 598 lạng 9 tiền 2 phân; mạch 276 thạch, tổng 187 lạng 6 tiền 8 phân.

Bài 3.2. (trang 29a) Nay có bạc 45 lạng 8 tiền, mua đồng, thiếc tổng 13862 lạng. Một tiền mua được 28 lạng đồng, một tiền mua được 34 lạng thiếc. Hỏi mỗi loại bao nhiêu?

Giải Gọi x và y tương ứng là số tiền mua đồng và thiếc. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} x + y = 458 \\ 28x + 34y = 13862 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 285 \\ y = 173. \end{cases}$$

Vậy đồng 7980 lạng hết 28 lạng 5 tiền; thiếc 5882 lạng hết 17 lạng 3 tiền.

Dạng 4. Đưa về phương trình vô định

Bài 4.1. (trang 29a-29b) Nay có 1337 lạng 5 tiền, mua gạo, mạch, đậu tổng 1965 thạch. Giá mỗi thạch gạo 8 tiền 5 phân, mạch 6 tiền 4 phân, đậu 4 tiền 5 phân. Hỏi mỗi loại bao nhiêu?

Giải. Gọi x, y, z tương ứng là số thạch gạo, mạch và đậu mua được. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} x + y + z = 1965 \\ 8,5x + 6,4y + 4,5z = 13375. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình vô định này ta được:
Gạo 822 thạch, giá 697 lạng 8 tiền; mạch 655 thạch, giá 419 lạng 2 tiền; đậu 488 thạch, giá 219 lạng 6 tiền. Đây là đáp số trong [4]. Còn những đáp số khác.

Bài 4.2. (trang 30a) Nay có bốn loại lụa (lăng, là, the, quyên) tổng giá 495 lạng 6 tiền, mua được 240 tấm. Lăng mỗi tấm 2 lạng 6 tiền, là mỗi tấm 2 lạng 3 tiền, the mỗi tấm 1 lạng 8 tiền, quyên mỗi tấm 1 lạng 3 tiền. Hỏi mỗi loại bao nhiêu?

Giải. Gọi x, y, z, t ($x, y, z, t \in \mathbb{Z}^+$) tương ứng là số tấm lăng, là, the, quyên. Ta có hệ

$$\begin{cases} x + y + z + t = 240 \\ 2,6x + 2,3y + 1,8z + 1,3t = 495,6. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình vô định này ta được
Lăng 72 tấm, giá 187 lạng 2 tiền; là 60 tấm, giá 138 lạng; the 60 tấm, giá 108 lạng; quyên 48 tấm, giá 62 lạng 4 tiền. Đây là đáp số trong [4]. Còn những đáp số khác.

Lời bình: Đây là hệ hai phương trình vô định bốn ẩn, có lẽ lần đầu tiên xuất hiện trong sách toán Việt, và ngay cả trong các sách toán hiện đại cũng ít gặp, xem thí dụ [2], [4].

Vĩ Thanh - Các sách toán Hán Nôm, thí dụ [4] và [5]. đã phân loại và trình bày những dạng toán và bài toán khác nhau về sai phân pháp. Thí dụ, những bài toán đưa về phương trình vô định ở [4] không thấy có trong [5] (xem [2] và bài viết này). Điều này chứng tỏ sự trưởng thành của toán học Việt Nam đầu thế kỉ XIX.

Tài liệu dẫn

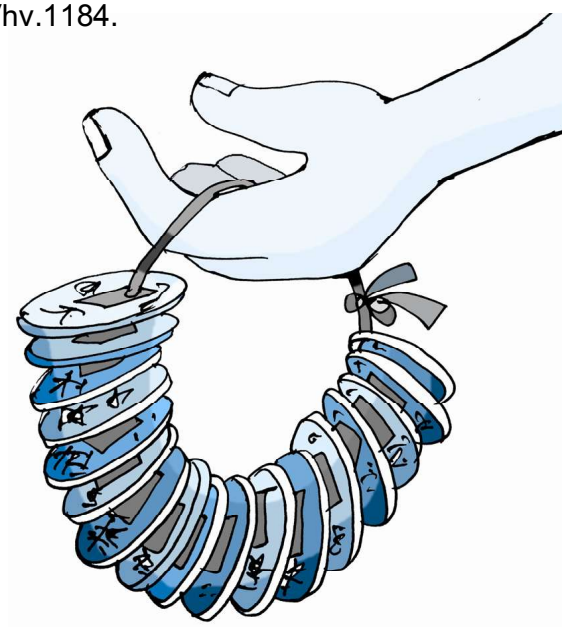
[1] Vũ Hữu Bình, *Phương trình nghiệm nguyên và kinh nghiệm giải*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2011.

[2] Tạ Duy Phượng, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Ánh Tuyết, *Sai phân pháp* trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, *Tạp chí Toán Tuổi thơ 2 số 183 và số 184*, trang 25-26.

[3] Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Văn Ngọc, Vũ Kim Thủy, *Bài giảng số học*, NXBGDVN, 2010.

[4] 梁世榮 Phạm Gia Kỷ, 大成算學指明 (Đại thành toán học chỉ minh), Mã số thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm (một bản duy nhất): A.1555.

[5] 阮有慎 Nguyễn Hữu Thận, 意齋算法-得錄 (Ý Trai toán pháp nhất đắc lục), Minh Mệnh 1829. Mã số Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm (ba bản): A.1136/a; A.1336+A.982; Vhv.1184.



AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION AMC 2019

JUNIOR DIVISION

AUSTRALIAN SCHOOL YEARS 6 AND 7

Time allowed: 60 *minutes*

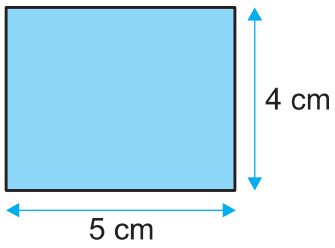
ĐỖ TRUNG KIÊN *(Sưu tầm và giới thiệu)*

Questions 1 to 10, 3 marks each

1. 201 − 9 =

(A) 111 (B) 182 (C) 188
(D) 192 (E) 198

2. This rectangle is 5 cm wide and 4 cm tall. What is its area in square centimetres?



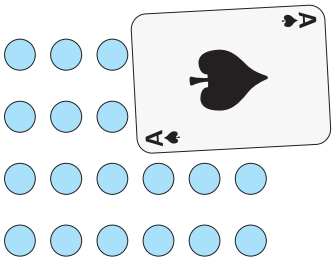
(A) 9 (B) 10 (C) 18
(D) 20 (E) 40

3. The table shows the number of boys and girls aged 10 or 11 in year 5.
How many boys aged 11 are in year 5?

	Age 10	Age 11	Total
Girls	14	25	39
Boys	9	?	46
Total	23	62	85

(A) 9 (B) 11 (C) 21
(D) 37 (E) 46

4. The circles are in a regular rectangular pattern. Some circles are hidden by the card. What fraction of the circles is hidden?



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$
(D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{18}$

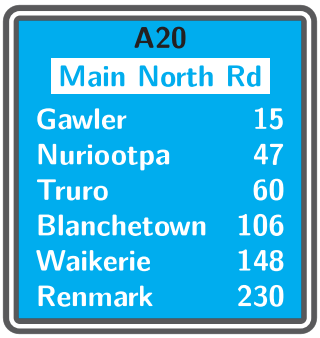
5. Which one of the following is the largest number?

(A) 4.05 (B) 4.45 (C) 4.5
(D) 4.045 (E) 4.54

6. What is 25% of $\frac{1}{2}$?

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$
(D) 1 (E) 2

7. We're driving from Elizabeth to Renmark, and as we leave we see this sign.
We want to stop at a town for lunch and a break, approximately halfway to Renmark.
Which town is the best place to stop?



(A) Gawler (B) Nuriootpa (C) Truro
(D) Blanchetown (E) Waikerie

8. This letter F is first rotated by 90° clockwise and then reflected in a horizontal line. It will now look like this.

(A)  (B)  (C) 
(D)  (E) 

9. Edith wrote down the whole numbers from 1 to 20 on a piece of paper. How many times did she write the digit 1?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

10. Danny divided a whole number P by another whole number Q on his calculator and got the answer 3.125.

Later, Danny forgot the two whole numbers, but he knew that both were under 30. The value of Q is

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 25

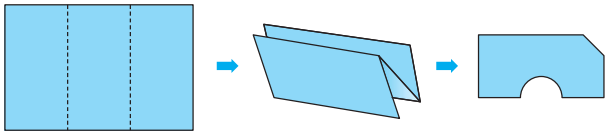
Questions 11 to 20, 4 marks each

11. Every row and every column of this 3×3 square must contain each of the numbers 1, 2 and 3. What is the value of N + M?

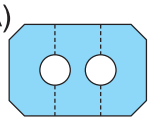
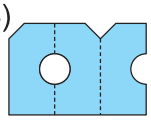
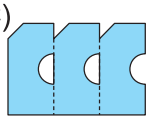
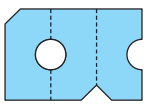
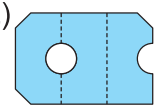
1		
	2	N
		M

(A)2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

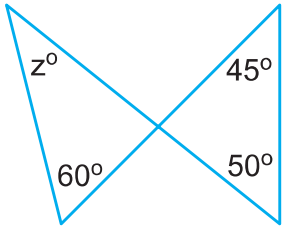
12. A piece of paper is folded in three, then a semi-circular cut and a straight cut are made, as shown in the diagram.



When the paper is unfolded, what does it look like?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

13. What is the value of z?



(A) 30 (B) 35 (C) 45
(D) 50 (E) 55

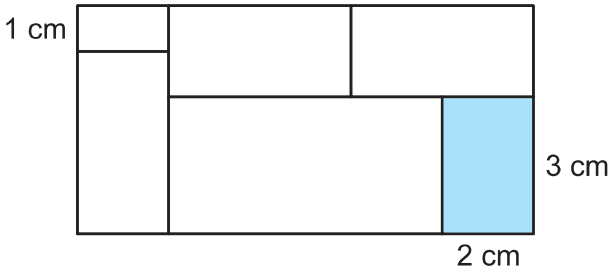
14. $\dfrac{111111111}{111} =$

(A) 11111 (B) 1001001
(C) 10001 (D) 10101 (E) 1001

15. Jill has the same number of brothers as she has sisters. Her brother Jack has twice as many sisters as he has brothers. How many children are in the family?

(A) 4 (B) 5 (C) 7
(D) 9 (E) 11

16. The large rectangle shown has been divided into 6 smaller rectangles. The shaded rectangle in the bottom-right corner has dimensions of 2 cm $\times$ 3 cm. The remaining five rectangles all have the long side equal to twice the short side. The smallest of these has a width of 1 cm.



What is the total area of the original large rectangle, in square centimetres?

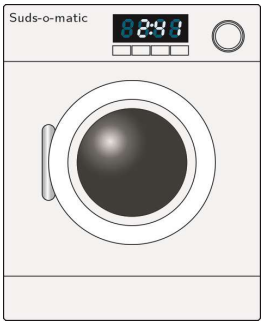
(A) 42 (B) 44 (C) 50
(D) 56 (E) 70

17. In my dance class, 14 students are taller than Bob, and 12 are shorter than Alice. Four students are both shorter than Alice and taller than Bob. How many students are in my dance class?

(A) 22 (B) 24 (C) 26
(D) 28 (E) 30

18. My washing machine has a digital display. It counts down the time remaining until the end of the wash, although sometimes I confuse the time remaining with the actual time.

At 1.05pm yesterday the washing machine displayed 2:41, namely 2 hours and 41 minutes remaining.



When did the washing machine's countdown display happen to agree with the actual time?

(A) 2.41pm (B) 3.46pm (C) 2.23pm
(D) 1.36pm (E) 1.53pm

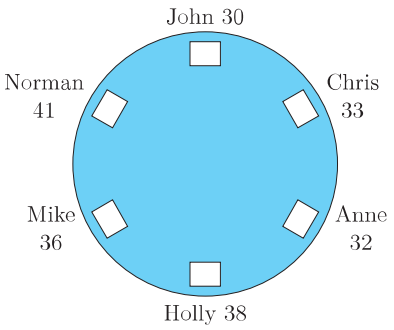
19. A seven-digit number is in the form 20AMC19, with all digits different. It is divisible by 9.

What is the value of A + M + C?

(A) 6 (B) 9 (C) 12
(D) 15 (E) 18

20. John, Chris, Anne, Holly, Mike and Norman are seated around a round table, each with a card with a number on it in front of them. Each person can see the numbers in front of their two neighbours, and says the sum of these two numbers.

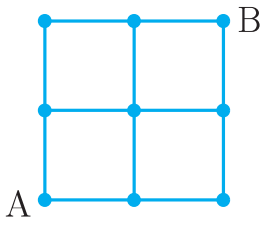
John says 30, Chris says 33, Anne says 32, Holly says 38, Mike says 36 and Norman says 41. What number does Holly have in front of her?



(A) 17 (B) 18 (C) 19
(D) 23 (E) 37

Questions 21 to 25, 5 marks each

21. On this simple system of roads, how many ways are there to get from A to B without visiting any of the 9 intersections more than once?



(A) 8 (B) 10 (C) 12
(D) 14 (E) 16

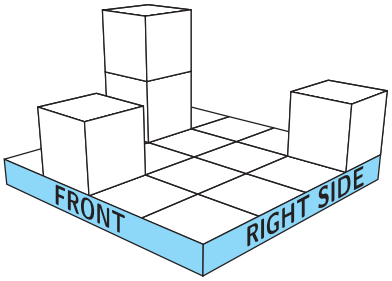
22. The average time for a class of 30 mathematics students to travel to school is 21 minutes.

The boys' average is 25 minutes and the girls' average is 19 minutes. How many boys are in the class?

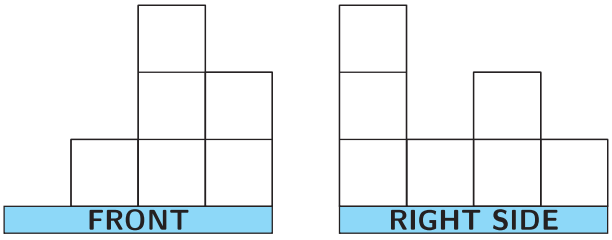
(A) 10 (B) 12 (C) 14
(D) 15 (E) 18

23. A 4 cm × 4 cm board can have 1 cm^3 cubes placed on it as shown.

The board is cleared, then a number of these cubes are placed on the grid. The front and right side views are shown.



What is the maximum number of cubes there could be on the board?



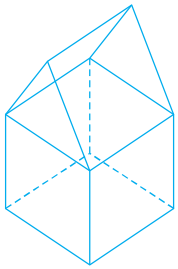
(A) 10 (B) 11 (C) 16
(D) 17 (E) 18

24. Three athletes Andy, Bob and Chase took part in a 100-metre race, each running at a constant speed. Andy won the race in 10 seconds.

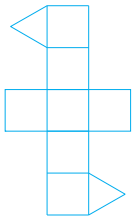
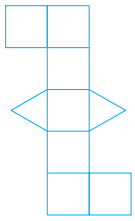
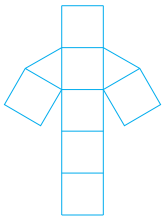
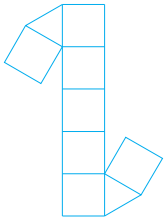
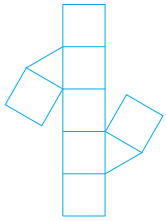
When Andy crossed the finish line, Bob was 10 metres behind. When Bob crossed the finish line, Chase was 10 metres behind Bob.
When Andy crossed the finish line, how far behind was Chase?

(A) 21m (B) 20m (C) 19m
(D) 18m (E) 17m

25. Seven squares and two equilateral triangles, all with the same side lengths, are used to form the 3-dimensional "house shape" shown.

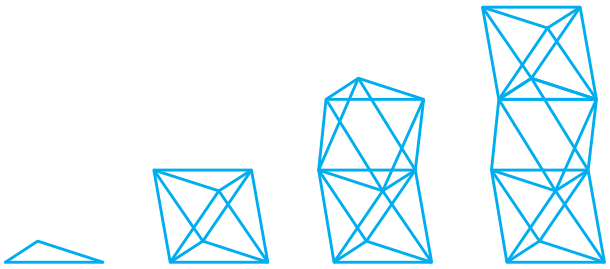


Which of the following diagrams does *not* show a net which can be created by cutting along some of the edges and folding the shape flat?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

For questions 26 to 30, shade the answer as an integer from 0 to 999 in the space provided on the answer sheet.
Questions 26-30 are worth 6, 7, 8, 9 and 10 marks, respectively.

26. A tower is built from exactly 2019 equal rods. Starting with 3 rods as a triangular base, more rods are added to form a regular octahedron with this base as one of its faces. The top face is then the base of the next octahedron. The diagram shows the construction of the first three octahedra. How many octahedra are in the tower when it is finished?



27. A positive whole number is called *stable* if at least one of its digits has the same value as its position in the number. For example, 78247 is stable because a 4 appears in the 4^{th} position. How many stable 3-digit numbers are there?

28. When I divide an integer by 15, the remainder is an integer from 0 to 14. When I divide an integer by 27, the remainder is an integer from 0 to 26.
For instance, if the integer is 100 then the remainders are 10 and 19, which are different.
How many integers from 1 to 1000 leave the same remainders after division by 15 and after division by 27?

29. In a list of numbers, an *odd-sum triple* is a group of three numbers in a row that add to an odd number. For instance, if we write the numbers from 1 to 6 in this order,

6 4 2 1 3 5

then there are exactly two odd-sum triples: (4, 2, 1) and (1, 3, 5).
What is the greatest number of odd-sum triples that can be made by writing the numbers from 1 to 1000 in some order?

30. The Leader of Zip decrees that the digit 0, since it represents nothing, will no longer be used in any counting number. Only counting numbers without 0 digits are allowed.
So the counting numbers in Zip begin 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, ..., where the tenth counting number is 11.
When you write out the first one thousand allowable counting numbers in Zip, what are the last three digits of the final number?

Thì thầm... Thì thầm thôi...

Tuổi hồng... xin cứ tuổi hồng
Chuyện gì quá sớm... xin không trả lời

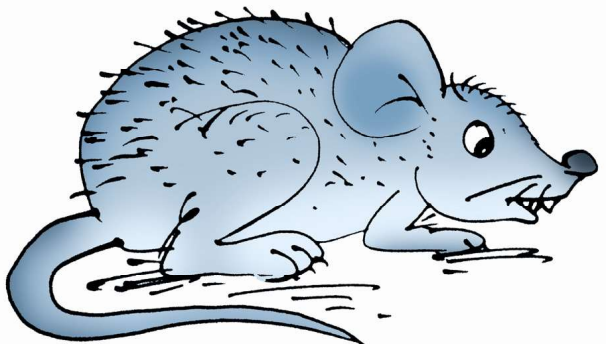


Hỏi: Anh ơi! Năm nay là năm Tý. Anh có thể cho một câu đố về Chuột không?

PHAN T.
(Lớp 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Đáp:

Con gì chỉ thích rúc, chui
Là loài gặm nhấm quen mùi thức ăn
Bắt nó cũng rất khó khăn
Dùng bẫy, dùng bả để giăng góc nhà.



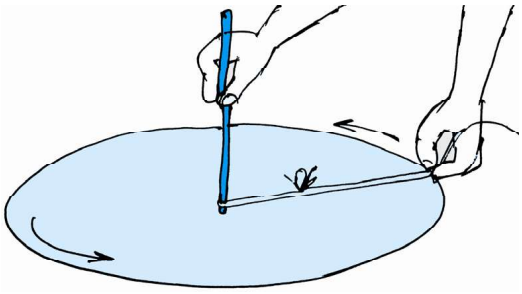
Hỏi: Những ngày Tết, anh có thích lì xì không?

ĐOÀN N.
(Lớp 6B, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, Nam Định)

Đáp:

Trăm năm trong cõi người ta
Anh cũng thích nhận món quà đầu Xuân
Ít nhiều, điều đó không cần
Chỉ cần chia sẻ tình thân với mình.



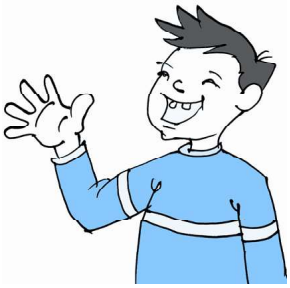


Hỏi: Nếu cho một sợi dây để khoanh một hình trên đất thì để diện tích hình lớn nhất, em sẽ nên tạo nên một hình gì?

NGUYỄN T.
(Lớp 9D5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, Hải Phòng)

Đáp:

Đã có định lí tài tình
Diện tích lớn nhất là hình tròn thôi!
Chứng minh thì quá sức rồi…
So hình vuông thử, em ngồi giải luôn.



Hỏi: Trong những ngày Tết ai cũng muốn vui nhưng lỡ có chuyện làm em buồn thì sao?

NGÔ N.
(Lớp 6/1, THCS Thành phố Bến Tre, Bến Tre)

Đáp:

Tuổi thơ trong trắng tâm hồn
Giữ sao đừng có nỗi buồn nhé em!
Vui buồn đôi lúc đan xen
Hãy chia sẻ với bạn quen thân nào…

ANH PHÓ GỠ XƯA



CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(204+205). Chứng minh rằng số các chữ số viết trong hệ thập phân của hai số 2015^{2017} và $2015^{2017}+5^{2017}$ là bằng nhau.

NGUYỄN NGỌC HÙNG
(Trường THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài 2(204+205). Một cửa hàng có n túi kẹo, các túi có khối lượng bằng nhau. Chọn tất cả các cặp gồm 2 túi, tính tổng khối lượng của chúng ta được 45 kg. Còn khi chọn tất cả các nhóm gồm 3 túi, tính tổng khối lượng của chúng ta được 180 kg. Hỏi cửa hàng đó có tất cả bao nhiêu túi kẹo.

TRẦN QUANG VINH
(Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Bài 3(204+205). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=45^o$. Chứng minh rằng

$$AB+AC<\frac{8}{3}BC.$$

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(3/29E, đường Đà Nẵng, Q. Ngô Quyền, Hải Phòng)

Bài 4(204+205). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=10^o$, AB = 3 cm và AC = 4 cm. Trên cạnh BC kéo dài, lấy điểm G sao cho $\widehat{CAG}=10^o$. Trên cạnh CB kéo dài, lấy điểm D sao $\widehat{BAD}=20^o$. Trên hai tia AG và AD, lấy các điểm E, F. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng BE + EF + FC.

VÕ QUỐC BÁ CẨN
(Trường Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, Hà Nội)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

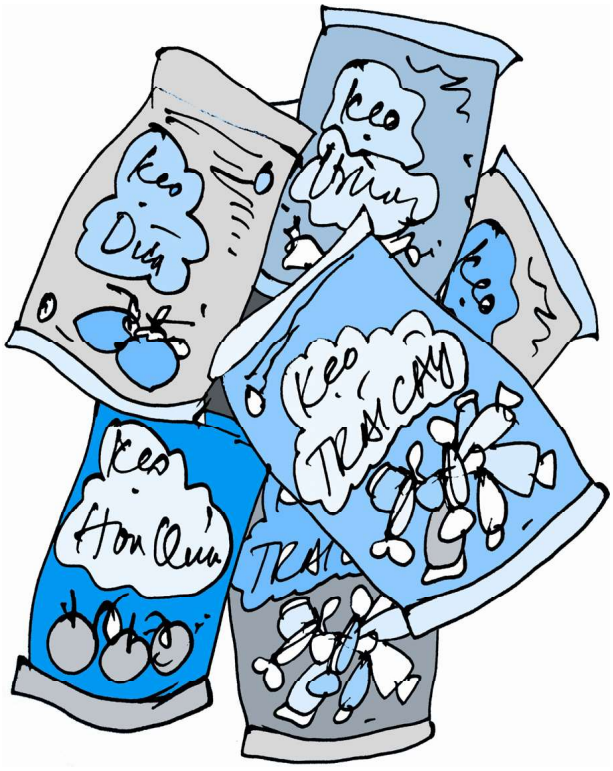
Translated by Thanh Do Duc

1(204+205). Prove that the two numbers 2015^{2017} and $2015^{2017}+5^{2017}$ can be expressed in terms of the same decimal number.

2(204+205). There are n Candy bags of identical mass. If we choose all the sets of 2 bags, the total mass is 45 kg. If we choose all the sets of 3 bags, the total mass is 180 kg. How many Candy bags are there in the store?

3(204+205). Given triangle ABC with $\angle BAC=45^o$. Prove that $AB+AC<\frac{8}{3}BC$.

4(204+205). Given triangle ABC with $\angle BAC=10^o$, AB = 3 cm and AC = 4 cm. Points G and D are on the side BC extended such that $\angle CAG=10^o$ and $\angle BAD=20^o$. Point E and F are on rays AG and AD. Find the minimum value of BE + EF + FC.



CÁC LỚP THCS

Bài 5(204+205). Giải phương trình

$$(x^4-2)\sqrt{x^2-1}=x^4-x^2.$$

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD-ĐT Tam Dương, Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài 6(204+205). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1\le a\le 2$, $1\le b\le 2$, $1\le c\le 2$, và $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a^2+2)^2}+\frac{1}{(b^2+2)^2}+\frac{1}{(c^2+2)^2}\ge\frac{1}{3}.$$

NGUYỄN VĂN NHO

(Trường THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài 7(204+205). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt[4]{\dfrac{x^4+y^4}{2}}\\ 3y=3x^3-3y^2-1.\end{cases}$$

CAO MINH QUANG

(Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài 8(204+205). Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC. Kẻ đường cao AH và đường phân giác AD của tam giác ABC. Gọi M là giao điểm của AO và BC.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{CM}+\dfrac{1}{CH}\ge\dfrac{2}{CD}$.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(Trường THCS Phường Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

5(204+205). Solve the following equation

$$(x^4-2)\sqrt{x^2-1}=x^4-x^2.$$

6(204+205). Given real numbers a, b and c such that $1\le a\le 2$, $1\le b\le 2$, $1\le c\le 2$, and $ab+bc+ca=3abc$. Prove that

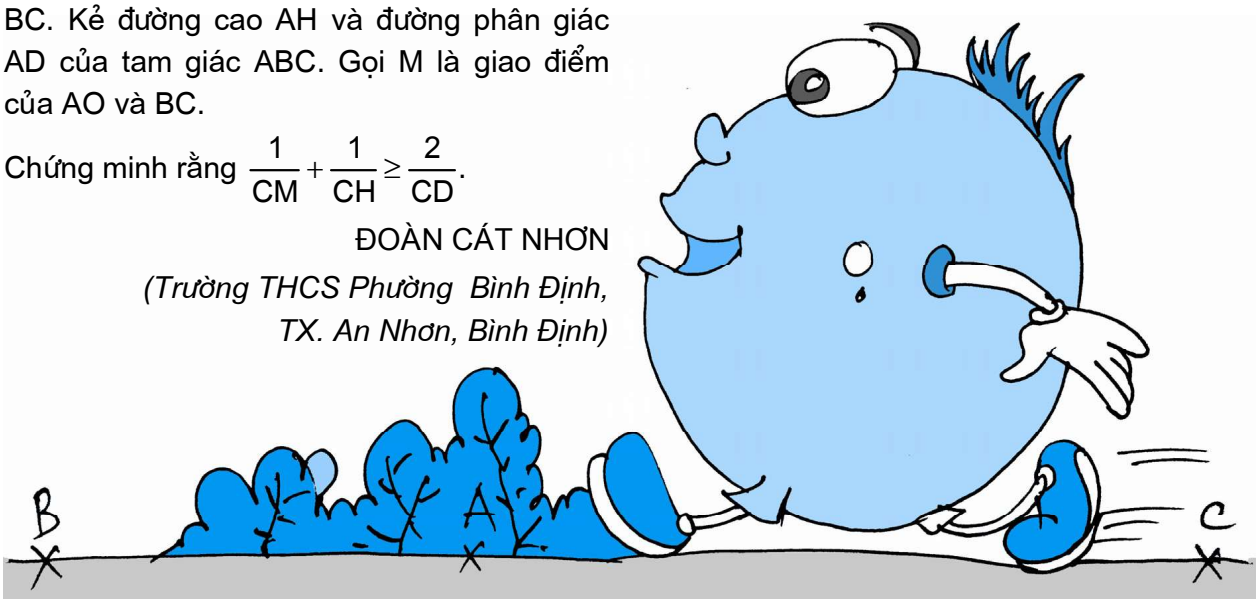
$$\frac{1}{(a^2+2)^2}+\frac{1}{(b^2+2)^2}+\frac{1}{(c^2+2)^2}\ge\frac{1}{3}.$$

7(204+205). Solve the following system of equations

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt[4]{\dfrac{x^4+y^4}{2}}\\ 3y=3x^3-3y^2-1.\end{cases}$$

8(204+205). Given circle (O), chord BC is fixed. Point A moves along the major arc BC. Draw the altitude AH and bisector AD of triangle ABC. Let M be the intersection point of AO and BC.

Prove that $\dfrac{1}{CM}+\dfrac{1}{CH}\ge\dfrac{2}{CD}$.



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÙNG HỌC ĐỂ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
CÙNG HỌC ĐỂ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC



DANH MỤC BỘ SÁCH LỚP MỘT

SÁCH HỌC SINH

1. Tiếng Việt 1, tập một
2. Tiếng Việt 1, tập hai
3. Toán 1, tập một
4. Toán 1, tập hai
5. Tự nhiên và Xã hội 1
6. Đạo đức 1
7. Âm nhạc 1
8. Mĩ thuật 1
9. Hoạt động trải nghiệm 1
10. Giáo dục thể chất 1

SÁCH GIÁO VIÊN

1. Tiếng Việt 1 - SGV
2. Toán 1 - SGV
3. Tự nhiên và Xã hội 1 - SGV
4. Đạo đức 1 - SGV
5. Âm nhạc 1 - SGV
6. Mĩ thuật 1 - SGV
7. Hoạt động trải nghiệm 1 - SGV
8. Giáo dục thể chất 1 - SGV
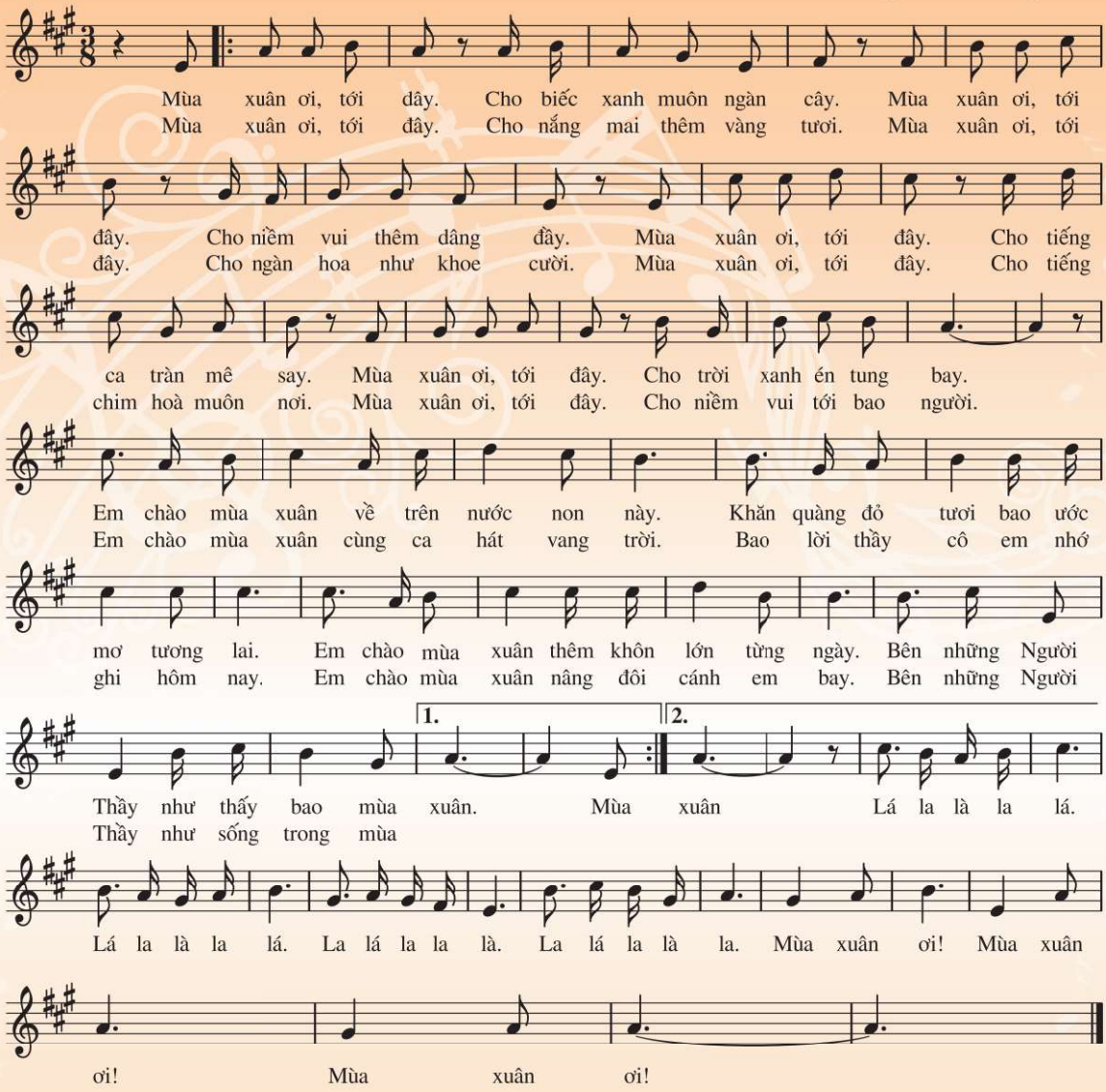


Mùa Xuân ơi!

(Tặng các em tuổi quàng khăn đỏ)

Tươi vui - Tình cảm

Sáng tác: Lê Thống Nhất





Chào các em học sinh!

Viết ca khúc này, thầy muốn tặng tuổi quàng khăn đỏ với lời chúc các em luôn chăm ngoan, học giỏi trong tình yêu thương của mọi người.

Hi vọng các em luôn thấy mùa xuân bên những người thầy dưới mái trường thân yêu.

Thầy Lê Thống Nhất

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.

Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.

Mã số: 8BTT204M20. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 02 năm 2020.

Giá: 20 000 đồng