NĂM THỨ
HAI MƯƠI
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

3/9
200 + 201
NĂM HỌC 2019 - 2020

TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Chuyên mục MỚI!

"DẠY - HỌC CHƯƠNG TRÌNH GIÁO DỤC PHỔ THÔNG MỚI"



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG





DANH MỤC BỘ SÁCH LỚP MỘT

SÁCH HỌC SINH

1. Tiếng Việt 1, tập một
2. Tiếng Việt 1, tập hai
3. Toán 1, tập một
4. Toán 1, tập hai
5. Tự nhiên và Xã hội 1
6. Đạo đức 1
7. Âm nhạc 1
8. Mĩ thuật 1
9. Hoạt động trải nghiệm 1
10. Giáo dục thể chất 1
11. Tiếng Anh 1

SÁCH GIÁO VIÊN

1. Tiếng Việt 1, tập một - SGV
2. Tiếng Việt 1, tập hai - SGV
3. Toán 1 - SGV
4. Tự nhiên và Xã hội 1 - SGV
5. Đạo đức 1 - SGV
6. Âm nhạc 1 - SGV
7. Mĩ thuật 1 - SGV
8. Hoạt động trải nghiệm 1 - SGV
9. Giáo dục thể chất 1 - SGV
10. Tiếng Anh 1 - SGV

Toán tuổi thơ 2 TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
TS. TRẦN QUANG VINH
Phó Tổng biên tập phụ trách tạp chí:
ThS. NGUYỄN NGỌC HÂN
Phó Tổng biên tập tạp chí:
TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

ỦY VIÊN

NGND. VŨ HỮU BÌNH
TS. NGUYỄN MINH ĐỨC
ThS. ĐẶNG HIỆP GIANG
TS. NGUYỄN MINH HÀ
PGS. TS. VŨ ĐÌNH HÒA
ThS. TRẦN QUANG HÙNG
TS. LÊ THỐNG NHẤT
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG
ThS. PHẠM ĐỨC TÀI
NGND. PGS. TS. TÔN THÂN
PGS. TS. LÊ ANH VINH

TÒA SOẠN

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702
Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com
Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com
Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Trị sự - Phát hành:
TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG,
NGUYỄN THỊ HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH
Biên tập - Chế bản: **VŨ THỊ MAI, ĐỖ TRUNG KIÊN**
Mĩ thuật: **TRẦN NGỌC TRƯỜNG**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY

Rừng cười 4
Đánh gì?
Vua Tếu
Đo trí thông minh 5
Hình có ba số nào?
Đỗ Thị Thúy Ngọc
Toán quanh ta 6
Bóng đá
Nguyễn Đức Tấn
Nhìn ra thế giới 8
Đề thi IMC 2019 - Lớp 7
Võ Quốc Bá Cẩn
Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc 10
Thủ phạm vụ cướp ngân hàng
Trần Phương Nam
Compa vui... tính 12
Dựng đường cao thế nào?
Phạm Tuấn Khải
Học ra sao?
Từ một bài toán về hình vuông trong sách giáo khoa 13
Đoàn Quốc Việt
Vẽ thêm hình phụ để giải một số bài toán hình học 15
Đoàn Cát Nhơn
Chữ & chữ số 20
Kì 45
Thái Nhật Phượng
Thách đấu 21
Trận đấu thứ một trăm sáu mươi sáu
Đoàn Cát Nhơn

Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 6 huyện Yên Lạc, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2018 - 2019 22

Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 7 trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2018 - 2019 23

Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 8 Quận 6, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015 - 2016 24

Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT TP. Hồ Chí Minh, năm học 2019 - 2020 25

Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 2018 - 2019 27

Dành cho các nhà toán học nhỏ 29

Sử dụng phương pháp hệ số bất định để dự đoán bất đẳng thức phụ

Trương Quang An

Kết quả Thi giải toán qua thư 32

Giải toán thế nào? 38

Tìm giá trị của biến để giá trị của biểu thức là số nguyên

Phạm Văn Sơn

Eureka! 41

Khai thác một bài toán hình học

Võ Xuân Minh





Sai ở đâu? Sửa cho đúng 43

Phương trình có nghiệm hay không?

Nguyễn Ngọc Hùng

Dạy - Học chương trình giáo dục phổ thông mới - Chương trình 2018

Tìm hiểu chương trình 2018 môn Toán bậc Trung học cơ sở 44

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam với nhiệm vụ đổi mới chương trình và sách giáo khoa giáo dục phổ thông 47

Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ 48

Kì 29

Thái Nhật Phượng

Vào thăm Vườn Anh 49

What am I?

Lê Thị Huệ

Vượt vũ môn 50

Bất đẳng thức và cực trị trong đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên, năm học 2019 - 2020

Nguyễn Đức Tấn

Lịch sử Toán học 55

Sai phân pháp trong cuốn sách toán chữ Hán "Đại thành toán học chỉ minh"

Tạ Duy Phượng, Phạm Vũ Lộc, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết

Thì thầm... Thì thầm thôi... 62

Thi giải toán qua thư 63

Minh họa bìa 1: *Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông*



Problem 8(200+201). Find the natural number n such that $2^{13} + 2^{10} + 2^n$ is a perfect square of an integer.

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH

GV. Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội

Các bạn hãy giải bài toán trên bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé! Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

Kết quả

Problem 6 (197+198).

We have

$$2v^2 - tu = \sqrt{32}v - 20$$

$$\Leftrightarrow 2v^2 - 4\sqrt{2}v + 20 = tu$$

$$\Leftrightarrow 2v^2 - 4\sqrt{2}v + 20 = \left(\frac{t+u}{2}\right)^2 - \left(\frac{t-u}{2}\right)^2. \ (*)$$

Because $t + u = 8$ then

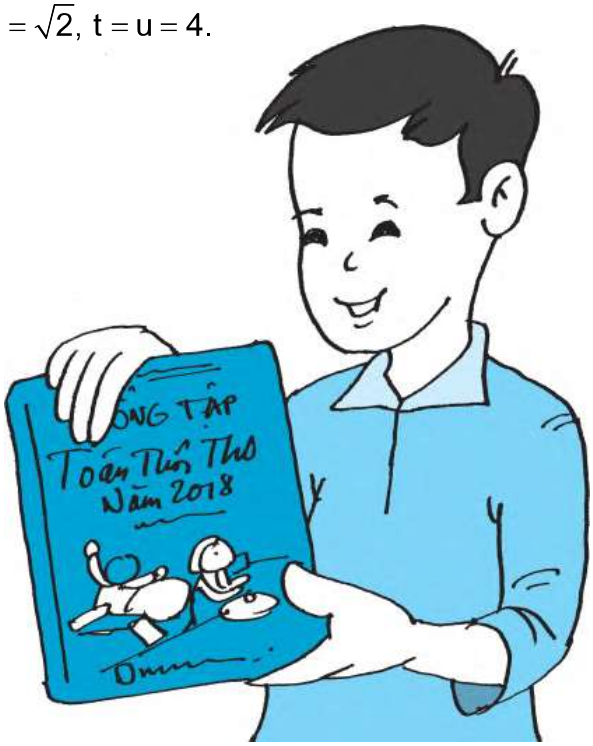
$$\left(\frac{t+u}{2}\right)^2 - \left(\frac{t-u}{2}\right)^2 = 16 - \left(\frac{t-u}{2}\right)^2$$

Then:

$$(*) \Leftrightarrow 2v^2 - 4\sqrt{2}v + 20 = 16 - \left(\frac{t-u}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(v-\sqrt{2})^2 + \left(\frac{t-u}{2}\right)^2 = 0.$$

Because t, u and v are real numbers, then $v = \sqrt{2}$, $t = u = 4$.





Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng: *Phạm Việt Anh*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Võ Trần Ngọc Hữu*, 8/1, THCS Lý Tự Trọng, Tiên Kỳ, Tiên Phước, **Quảng Nam**; *Nguyễn Minh Vương*, 9A5, THCS Cầu Giấy, Q. Quận Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Phạm Thanh Nga*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

ĐỖ ĐỨC THÀNH

BẠN ĐỌC CÓ THỂ ĐẶT MUA TẠP CHÍ CẢ NĂM HỌC TẠI CÁC BƯU CỤC CỦA VNPT TRÊN CẢ NƯỚC VỚI MÃ ĐẶT CÁC ẤN PHẨM NHƯ SAU: Tạp chí Toán Tuổi thơ 1: **C169**; Tạp chí Toán Tuổi thơ 2: **C169.1**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2018: **C169.2**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2018: **C169.3**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2017: **C169.4**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2017: **C169.5**.

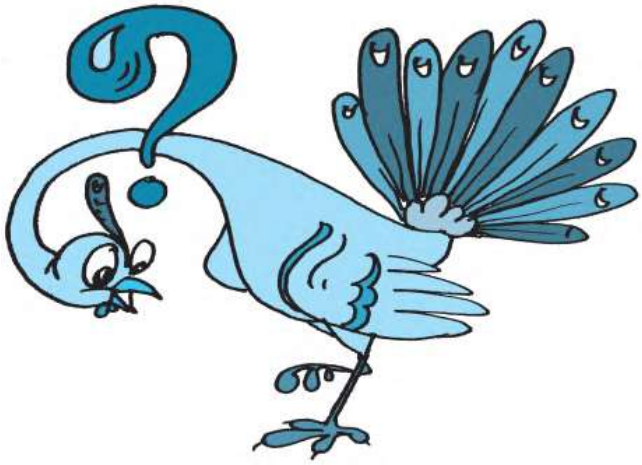
Rùng Cười

Kì này Đánh gì?

Đánh gì trầm bổng âm thanh
Đánh gì quăng lưới biển xanh tháng ngày
Đánh gì đồ vật sáng ngay
Đánh gì không khéo mặt mày xưng lên
Đánh gì bảo vệ chủ quyền
Đánh gì tật xấu bạc tiền dễ trôi
Đánh gì tiếc ngẩn ngơ ngồi
Đánh gì chiếu tướng để rồi ăn quân
Đánh gì phải tập nhún chân
Đánh gì trên má thêm phần đẹp ra
Đánh gì bát vỡ giữa nhà
Đánh gì không đỡ được là người ăn
Chọn từ hơi chút khó khăn
Mong trò giải đố thật hăng keo này!

VUA TẾU





Kết quả **(TTT2 số 197+198)**

Công gì?

Công viên đi dạo, ngắm hoa
Công chúa con của vua cha một thời
Công bằng không để thiệt người
Công việc mà nếu ai lười không xong
Công an trang bị cả còng
Công nhân giai cấp tiền phong nước mình
Công trình xây dựng tài tình
Công tắc bật điện lung linh ánh đèn
Công đường giải quyết việc liền
Công thần làm ít đòi quyền lợi to
Công dân bỏ phiếu tự do
Công khai không giấu quanh co điều gì
Công ơn cần phải nhớ ghi
Công tâm mọi việc không vì lợi riêng.

HONG HA

Nhận xét. Vua Tếu rất vui mừng khi nhận được rất nhiều câu trả lời của các thần dân trên cả nước gửi về. Kì này chỉ có bốn thần dân được Vua Tếu ban thưởng: *Trần Tuấn Bình*, 6E, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Huyền Thư*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Cao Đại Việt*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Dương Hà Phương*, 7C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**.

VUA TẾU

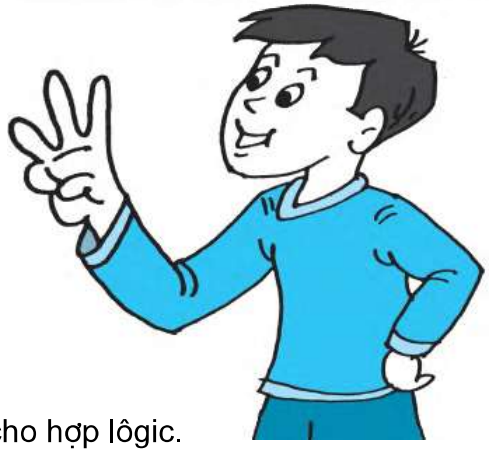


Kì này

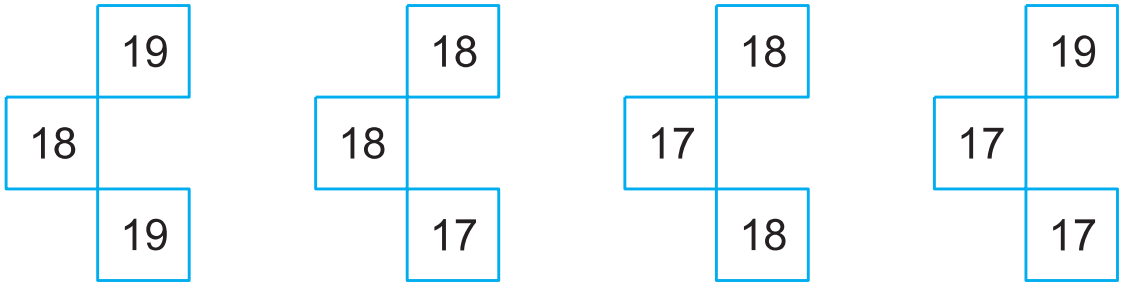
HÌNH CÓ BA SỐ NÀO?

Cho một bảng số như sau:

20	22	19	21
17	19	16	?
19	21	?	20
16	18	15	?



Hãy chọn đáp án đúng để điền vào các dấu chấm hỏi (?) cho hợp lôgic.



ĐỖ THỊ THÚY NGỌC

Phó Trưởng phòng Giáo dục Trung học, Sở GD&ĐT Ninh Bình

(Sưu tầm và giới thiệu)

Kết quả

THIẾU HÌNH NÀO? (TTT2 số 197+198)

Đáp án. Trên mỗi hàng ngang, mỗi cột dọc ta thấy tổng số chấm tròn tô màu là 5 và tổng số chấm tròn trắng là 4. Do đó hình cần điền vào chỗ trống là hình **A**.

Nhận xét. Quy luật kì này khá dễ nên nhiều bạn tham gia gửi bài và hầu hết các bạn đều chọn đúng đáp án A. Một số bạn diễn đạt chưa rõ ràng, một số bạn chỉ xét quy luật theo hàng hoặc theo cột.

HONG HA®

Xin trao thưởng cho các bạn: *Nguyễn Thế Sơn*, 9A1, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Phạm Thanh Nga*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Tất Quân*, *Nguyễn Kim Mạnh*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Đinh Xuân Linh*, 8A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Các bạn sau được tuyên dương: *Nguyễn Quỳnh Anh*, 9C, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; *Thân Lan Phương*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Lê Đức Anh*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Đoàn Nguyên Vũ*, 6B; *Ninh Việt Mỹ*, 6E, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Trần Gia Huy*, 8C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Đặng Quang Huy*, 8G, *Lê Huy Thành*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

NGUYỄN XUÂN BÌNH



BÓNG ĐÁ

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

1. Các kiến thức cần nhớ

- Thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt nghĩa là hai đội bất kì thi đấu với nhau đúng một trận.
- Theo cách tính điểm hiện nay, sau mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không được điểm và nếu hai đội hòa nhau thì mỗi đội cùng được 1 điểm.
- Kết thúc giải mà không có trận nào hòa thì số điểm của mỗi đội là số chia hết cho 3.
- Có n đội bóng đá ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), thi đấu vòng tròn một lượt thì số trận đấu là $\frac{n(n-1)}{2}$ trận. Tổng số điểm của các đội khi kết thúc giải đạt giá trị lớn nhất là $\frac{3n(n-1)}{2}$ và đạt giá trị nhỏ nhất là $n(n-1)$.
- Có n đội bóng đá ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) thi đấu vòng tròn một lượt. Khi giải đấu đang diễn ra nếu có một đội đã thi đấu $n-1$ trận thì các đội còn lại có số trận đã thi đấu ít nhất là 1 trận và nếu có một đội chưa thi đấu thì các đội còn lại có số trận đã thi đấu nhiều nhất là $n-2$ trận.
- Kết thúc giải khi liệt kê số trận thua, thắng hòa của các đội thì tổng số trận thắng bằng tổng số trận thua, số trận hòa là một số chẵn.

2. Các bài toán minh họa

Bài toán 1. Trong một giải bóng đá có n đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt. Đội thắng được 3 điểm, đội thua không được điểm, đội hòa được 1 điểm. Kết thúc giải, người ta nhận ra rằng số trận thắng - thua gấp đôi số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 96. Tìm n.

Hướng dẫn. Gọi số trận hòa là x ($x \in \mathbb{N}^*$), số trận thắng - thua là 2x.
Tổng số điểm của các trận hòa là 2x.
Tổng số điểm của các trận thắng, thua là $3.2x = 6x$.
Theo đầu bài ta có phương trình
$2x + 6x = 96 \Leftrightarrow 8x = 96 \Leftrightarrow x = 12$.
Số trận hòa là 12.
Số trận thắng thua là $2.12 = 24$.
Tổng số trận đấu là $12 + 24 = 36$.
Do đó ta có phương trình $\frac{n(n-1)}{2} = 36$.
$\Leftrightarrow n(n-1) = 36.2 \Leftrightarrow n(n-1) = 9.8 \Leftrightarrow n = 9$.

Bài toán 2. Trong một bảng thi đấu bóng đá có bốn đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt. Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm, đội thua không được điểm. Kết thúc cuộc thi, kết quả của bảng như sau:
- Tổng số điểm của cả 4 đội là 16.
- Đội nhất bảng là đội duy nhất được 6 điểm.

Hỏi kết quả trận đấu giữa đội nhì bảng và đội cuối bảng? Biết rằng nếu hai đội có số điểm bằng nhau thì xét theo hiệu số bàn thắng thua và trường hợp này nếu vẫn chưa quyết định được thì bốc thăm để xếp thứ hạng.

Hướng dẫn. Tổng số trận đấu là: $\frac{4.3}{2} = 6$.
Gọi số trận hòa là x ($x \in \mathbb{N}^*$).
Số trận thắng, thua là $6 - x$.
Ta có phương trình $2x + 3(6 - x) = 16$.
$\Leftrightarrow 2x + 18 - 3x = 16 \Leftrightarrow x = 2$.
Số trận hòa là 2, số trận thua là $6 - 2 = 4$.
Gọi bốn đội bóng của bảng đó là A, B, C, D và A là đội đầu bảng được 6 điểm.
Vậy A thắng 2 trận và thua 1 trận.
Không mất tính tổng quát, giả sử A thắng C, D và thua B. Kết quả của ba trận còn lại phải là 2 trận hòa và 1 trận thắng - thua.
Xảy ra 2 trường hợp:
a) B hòa C và D, C thắng D (hoặc D thắng C). Khi đó B được $3 + 1 + 1 = 5$ (điểm), C được $3 + 1 = 4$ (điểm), D được 1 điểm (hoặc D được 4 điểm, C được 1 điểm).
b) B thua C (hoặc D) và hòa D (hoặc C), C hòa D. Khi đó B được $3 + 1 = 4$ (điểm), C được $3 + 1 = 4$ (điểm) (hoặc D được $3 + 1 = 4$ (điểm)), còn D được 2 điểm (hoặc C được 2 điểm).
Cả hai trường hợp đều cho kết quả trận đấu giữa đội nhì bảng và đội cuối bảng là hòa.

Bài toán 3. Trong một giải bóng đá có N đội tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai đội bất kì gặp nhau đúng một trận). Sau mỗi trận đấu đội thắng được 3 điểm, đội thua không được điểm nào, còn nếu trận đấu có kết quả hòa thì mỗi đội cùng được 1 điểm. Các đội xếp hạng được dựa theo tổng điểm. Trong trường hợp một số đội có tổng điểm bằng nhau thì các đội này được xếp hạng theo chỉ số phụ. Kết thúc giải người ta nhận thấy rằng không có trận nào kết thúc với tỉ số hòa, các đội xếp nhất, nhì, ba có tổng số điểm lần lượt là 15, 12, 12 và tất cả các đội xếp tiếp theo có tổng số điểm đôi một khác nhau.

a) Chứng minh rằng $N \geq 7$.

b) Tìm N và tổng số điểm của mỗi đội tham gia.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường PTNK-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2002-2003)

Hướng dẫn. a) Đội xếp nhất có 15 điểm nên đội đó phải thi đấu ít nhất với 5 đội khác.

Do đó $N \geq 5 + 1 = 6$.

Nếu $N = 6$ thì đội xếp nhất thắng 5 đội còn lại, đội xếp nhì 12 điểm nên thắng 4 đội (trừ đội xếp nhất). Đội xếp thứ ba thua đội xếp thứ nhất và thứ nhì nên số điểm tối đa là

$3.3 = 9$ (điểm). Theo đề bài đội xếp ba 12 điểm (vô lí). Vậy $N \geq 7$.

b) Các đội còn lại có số điểm không lớn hơn 12. Vì không có trận đấu nào hòa nên số điểm các đội phải chia hết cho 3.

Suy ra số điểm các điểm còn lại có thể là: 0; 3; 6; 9; 12. Nên $N \leq 5 + 3 = 8$.

Ta có $7 \leq N \leq 8$. Do đó $N = 7$ hoặc $N = 8$.

Xét $N = 8$. Số trận đấu là $\frac{8.7}{2} = 28$ (trận).

Tổng số điểm 8 đội đạt phải là 3.28 là số chẵn.

Thực tế là $0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 12 + 12 + 15$ là số lẻ (mâu thuẫn).

Vậy $N \neq 8$.

- Xét $N = 7$. Số trận đấu là $\frac{7.6}{2} = 21$ (trận).

Tổng số điểm 7 đội đạt phải là $3.21 = 63$ (điểm).

Tổng số điểm của các đội còn lại là:

$63 - (12 + 12 + 15) = 24$ (điểm).

Mà $24 = 0 + 3 + 9 + 12$.

Số 24 biểu diễn thành tổng bốn số chia hết cho 3 và khác nhau chỉ duy nhất là cách biểu diễn trên.

Vậy tổng số điểm các đội còn lại lần lượt là: 0; 3; 9; 12 điểm.

Bài toán 4. Trong một giải bóng đá có 12 đội tham dự, thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kì thi đấu với nhau đúng một trận).

a) Chứng minh rằng sau 4 vòng đấu (mỗi đội thi đấu đúng 4 trận) luôn tìm được ba đội bóng đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu các đội đã thi đấu 5 trận?

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán tỉnh Hưng Yên năm học 2012-2013)

Hướng dẫn. a) Có 12 đội thi đấu, mỗi đội thi đấu đúng 4 trận nên tìm được hai đội chưa thi đấu với nhau, gọi hai đội đó là A và B.

Xét các đội A, B mỗi đội thi đấu đúng bốn trận, với 10 đội còn lại có ít nhất 2 đội chưa đấu với A và B. Gọi một trong hai đội đó là C. Ta có A, B, C đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định trên không còn đúng nếu mỗi đội thi đấu đúng 5 trận. Chẳng hạn chúng ta chia 12 đội thành hai nhóm, mỗi nhóm 6 đội, các đội trong mỗi nhóm đôi một đã thi đấu với nhau. Như vậy 12 đội này mỗi đội đã thi đấu đúng 5 trận. Xét ba đội tùy ý luôn có hai đội bóng ở cùng một nhóm. Như vậy với ba đội bóng bất kì có ít nhất hai đội đã thi đấu với nhau.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Trong một giải bóng đá, có bốn đội thi đấu vòng tròn 1 lượt. Kết thúc giải, người ta thấy có ba đội đạt được tổng số điểm lần lượt là 6 điểm, 5 điểm, 1 điểm. Hãy cho biết đội còn lại có tổng số điểm là bao nhiêu và giải thích tại sao?

Bài 2. Trong một giải bóng đá, có 10 đội thi đấu, các đội cùng số điểm sẽ được xếp hạng theo các chỉ số phụ nào đó.

a) Gọi A là một đội bóng tham dự giải, hỏi đội bóng A có thể đạt được những điểm số nào?

b) Giả sử đội bóng A được xếp thứ nhì khi kết thúc giải. Tìm số điểm tối đa, số điểm tối thiểu mà đội bóng A có thể đạt được.

Bài 3. Có 10 đội bóng đá thi đấu vòng tròn một lượt. Theo cách tính điểm hiện nay thì tổng điểm các đội là 91 điểm. Hỏi đội vô địch được bao nhiêu điểm?

ĐỀ THI IMC 2019 - LỚP 7

VÕ QUỐC BÁ CẨN
Trường Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, Hà Nội
(Sưu tầm và dịch)

Phần I. Chọn đúng án đúng *(mỗi câu hỏi được 5 điểm, tổng điểm là 40)*

1. Cho 6 tia OA, OB, OC, OD, OE, OF xuất phát từ đỉnh O và $\widehat{AOB} = 100^\circ$, OF là tia phân giác của $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOE} = \widehat{DOE}$, $\widehat{EOF} = 140^\circ$.

Tính số đo $\widehat{COD}$.

A. 20°; B. 30°; C. 40°; D. 60°.

2. Biết rằng trên một trục số, vị trí của ba điểm phân biệt A, B và C lần lượt là các số thực a, b, c. Nếu $|a-b|+|a-c|=|b-c|$ thì điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

A. Điểm A; B. Điểm B; C. Điểm C;
D. Không thể xác định được.

3. Hai xe ô tô A và B cùng bắt đầu xuất phát từ hai địa điểm cách nhau c km. Nếu chúng đi cùng về một hướng thì xe A sẽ vượt qua xe B sau m tiếng. Nếu hai xe di chuyển về phía nhau, thì chúng sẽ gặp nhau sau n tiếng. Khi hai xe A và B cùng rời một nơi vào cùng một lúc, thì sau 1 tiếng, tỉ lệ độ dài quãng đường đã đi được của xe A so với xe B là bao nhiêu?

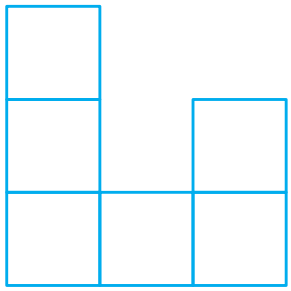
A. $\frac{m}{n}$; B. $\frac{n}{m}$; C. $\frac{m+n}{m-n}$; D. $\frac{m-n}{m+n}$.

4. Cho $a+b+c=0$, $abc<0$. Tính giá trị của biểu thức

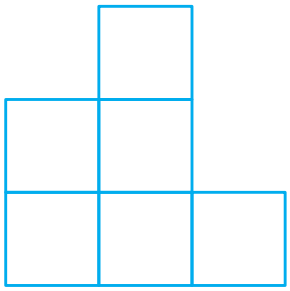
$$\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{|c|}{c}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|abc|}{abc}.$$

A. 7; B. 1; C. –1; D. –7.

5. Hình khối được tạo nên bởi các khối hình lập phương đơn vị, trong đó hình ảnh theo góc nhìn thẳng (nhìn từ trên xuống) và hình ảnh theo góc nhìn nghiêng (nhìn từ trái qua phải) được vẽ như trong hình dưới đây. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu khối lập phương đơn vị có thể được sử dụng để xếp được hình khối này?



(Góc nhìn thẳng)



(Góc nhìn nghiêng)

A. 12; B. 14; C. 15; D. 16.

6. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường thẳng đối xứng với đường thẳng $y=2x+1$ qua gốc tọa độ?

A. $y=2x-1$; B. $y=-2x+1$;

C. $y=-\frac{1}{2}x+1$; D. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

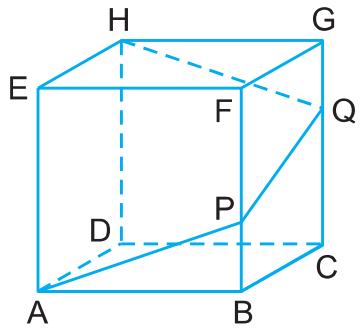
7. Nghiệm của hệ phương trình ẩn x và y: $\begin{cases}2x+3y=k\\x-2y=1\end{cases}$ là $\begin{cases}x=m\\y=n\end{cases}$, trong đó m và n là nghịch đảo của nhau. Tính giá trị của k.

A. $\frac{11}{2}$ hoặc –5; B. $\frac{11}{2}$;

C. –5; D. $-\frac{11}{2}$ hoặc 5.

8. Cho hình vẽ, ta có một khối hộp lập phương làm bằng giấy ABCD.EFGH (mặt trên và mặt dưới), hai điểm P, Q lần lượt nằm trên các cạnh FB và GC và FP = 2PB, $GQ=\frac{1}{2}QC$. Nếu hình lập phương được cắt và được mở ra theo đường gấp AP – PQ – QH, thì hình nhận được được là hình gì?

A. hình lục giác; B. hình bình hành;
C. hai tam giác vuông;
D. một tam giác vuông và một hình thang vuông.



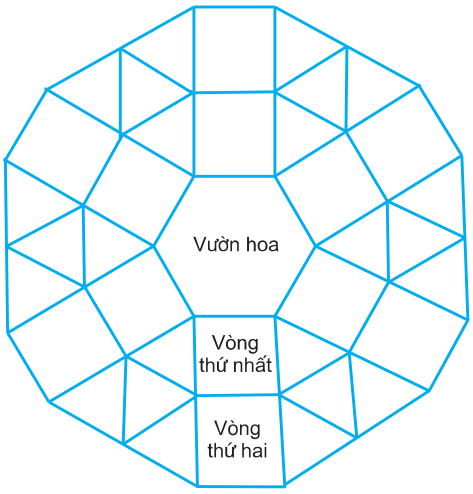
Phần II. Điền đáp số *(mỗi câu hỏi được 5 điểm, tổng điểm là 40)*

9. Biết rằng phần nằm chính giữa của hình chữ nhật lớn trong hình là một hình vuông cạnh 1 đơn vị và xung quanh là bốn hình chữ nhật nhỏ có chiều dài và chiều rộng tỉ lệ với 2 : 1, tính diện tích của hình chữ nhật lớn.

10. Bắt đầu từ 100, trừ đi một nửa, sau đó trừ đi $\frac{1}{3}$ phần còn lại, sau đó lại trừ đi $\frac{1}{4}$ phần còn lại, cứ như vậy cho đến khi $\frac{1}{100}$ phần còn lại được trừ đi. Hỏi kết quả cuối cùng là bao nhiêu?

11. Rút gọn $1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{\cfrac{1}{5}-4}}}$.

12. Một mảnh đất trồng hoa hình lục giác đều được lát bởi các viên gạch hình tam giác đều và hình vuông như trong hình, hỏi đến vòng thứ tư tính từ trong ra ngoài thì ta cần tất cả bao nhiêu viên gạch?



13. Tìm giá trị của x để biểu thức $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2019|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

14. Tính và để kết quả dưới dạng phân số tối giản của

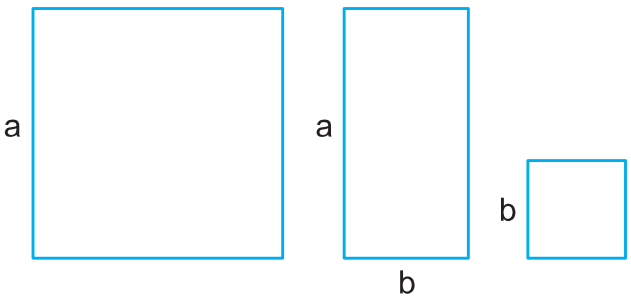
$$1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\frac{31}{32}+\frac{63}{64}+\frac{127}{128}+\frac{255}{256}$$
$$+\frac{511}{512}+\frac{1023}{1024}+\frac{2047}{2048}.$$

15. Nếu với mọi giá trị của 2 số thực a, b, $\begin{cases} x = x_o \\ y = y_o \end{cases}$ luôn là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $(a-b)x-(a+b)y=a+b$, thì giá trị của tổng $x_o + y_o$ là bao nhiêu?

16. Khi $x \neq 0$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{2|x|-3x}{|2x-|5x||}$ là bao nhiêu?

Phần III. Tự luận *(mỗi câu được 10 điểm, tổng điểm là 20)*

17. Biểu thức $(2a + 3b)(3a + b) = 6a^2 + 3b^2 + 11ab$ có thể được biểu diễn như việc xếp 6 hình vuông có cạnh bằng a đơn vị, 3 hình vuông có cạnh là b đơn vị, 11 hình chữ nhật có chiều dài a đơn vị và chiều rộng b đơn vị thành một hình chữ nhật lớn với chiều dài và chiều rộng lần lượt là $3a + b$ đơn vị và $2a + 3b$ đơn vị. Hãy tạo nên (vẽ hình) một hình chữ nhật lớn thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.



18. Giải phương trình $[2x]+[3x]=8x-\frac{7}{2}$, trong đó $[x]$ là kí hiệu số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x.



THỦ PHẠM
VỤ CƯỚP NGÂN HÀNG



TRẦN PHƯƠNG NAM *(ghi lại)*

Lần này đến chơi với thám tử Sê Lốc Cốc, tôi chủ động đề nghị: "Có vụ cướp nào mà tên cướp cao chạy xa bay nhưng sau khi điều tra vẫn bắt được hắn không?"

Thám tử nhìn tôi cười:

- Có chứ! Mình kể cho cậu nghe nhưng cũng thử xem cậu có thể phá được vụ án này không nhé.

Vẫn giọng như mọi khi, Sê Lốc Cốc kể:

Chiều hôm ấy, chi nhánh ngân hàng ở thị trấn X bị một tên cướp đeo mặt nạ giấu mặt bất ngờ đột nhập. Sau khi uy hiếp bảo vệ và nhân viên bởi một khẩu súng thì hắn đã dễ dàng yêu cầu mở két để ôm đi toàn bộ số tiền trong đó. Ra khỏi cửa, hắn lên ngay xe máy phóng đi trong khi tất cả mọi người trong chi nhánh chưa kịp hoàn hồn.

Cảnh sát trưởng thị trấn đến thẩm vấn những người có mặt khi ấy và nhận định có 4 kẻ khả nghi chính là công dân trong thị trấn.

Ông lập tức cho gọi 4 kẻ khả nghi tới để xét hỏi. Có khá nhiều câu hỏi đặt ra cho 4 kẻ khả nghi. Tuy nhiên các chứng cớ ngoại phạm đều có vẻ như là hợp lí. Tất nhiên, không có căn cứ nào để khẳng định ai là thủ phạm.

Ông ta than vãn với mình và có ý nhờ mình giúp. Mình đề nghị cho xem các biên bản thẩm vấn. Tất nhiên là ông ta chuyển cho mình đầy đủ các biên bản.

Mình để ý tới các câu trả lời của 4 người đó với câu hỏi:

- Thời điểm xảy ra vụ cướp anh đang ở đâu?

Sau đây là các câu trả lời mà mình sẽ đọc cho cậu nghe:

***Richard:** Lúc ấy, tôi và vợ tôi đi thăm một người bạn ốm ở bệnh viện. Tất nhiên vợ tôi không phải là người làm chứng tin cậy cho các ông. Nhưng có thể thấy tôi và vợ tôi qua camera giám sát ở phòng bệnh nhân.*

John: *Lúc ấy tôi đang xem hoa quỳnh nở. Tôi còn chụp ảnh bên bông hoa để làm kỉ niệm. Tôi có bằng chứng là tấm ảnh này với thời gian chụp còn lưu trên ảnh. Thời gian này trùng với thời gian vụ cướp xảy ra.*

Roger: *Lúc ấy tôi đang ở nhà còn vợ tôi cùng các con đi vắng. Không có ai làm chứng cho tôi việc này. Nhưng sự thật là như vậy. Tôi không hiểu sao các ông lại nghi tôi là thủ phạm. Hay là hình vóc của tôi giống tên cướp?*

Henry: *Lúc ấy tôi đang say rượu, đứng lên còn chẳng được huống hồ còn đi cướp? Tôi có tật xấu là hay uống rượu và hay say. Nhưng cướp thì chắc chắn là không! Tài chính nhà tôi thừa cho tôi uống rượu rồi!*

Nào! Bây giờ thì cậu có thể tìm ra kẻ nói dối và đó chính là yếu tố mà sau đó cảnh sát tiếp tục thêm chứng cứ để hắn nhận tội.

Tôi thực sự lúng túng và yêu cầu cho xem lại lời khai của 4 kẻ khả nghi. Đọc đi đọc lại vẫn thấy khó mà biết ai nói dối.

Còn các bạn từng mê Sê Lốc Cốc liệu có "sánh ngang" thám tử trong vụ này không?



Kết quả **(TTT2 số 197+198)**

AI LÀM VỠ LỌ HOA?

Vì thầy Giang là giáo viên dạy Tiếng Anh nên "mật mã" thầy viết trên bảng chắc chắn liên quan đến bảng chữ cái Tiếng Anh. Chẳng hạn S + 1 tức là chữ cái đứng liền sau chữ S trong bảng chữ cái, chính là chữ T.

Tương tự như vậy Q + 1 là R; T + 1 là U; M + 1 là N; F + 1 là G.

Ghép các chữ cái đó lại ta được chữ TRUNG, nghĩa là bạn Trung là người làm vỡ lọ hoa. Điều thú vị ở đây là thầy Giang là người rất hóm hỉnh và thông minh khi tạo ra "mật mã", đồng thời thầy cũng tế nhị vì không muốn nhắc tới tên bạn Trung trước mặt cả lớp, nhằm tránh cho bạn Trung cảm thấy xấu hổ.

HONG HA®

Nhận xét. Thám tử Sê Lốc Cốc rất vui vì kì này có rất nhiều bạn tham gia "phá án". Các "thám tử" của TTT muốn chứng minh một điều rằng "mã số" của thầy Giang không làm khó được họ. Thế mới biết khả năng suy luận, phán đoán của các "thám tử nhí" cũng rất đáng nể. Phần quà của Sê Lốc Cốc xin được gửi tới các bạn sau: *Phạm Thị Ngọc Huyền*, 8E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Kim Tùng Quân*, 9D5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Lưu Thùy Dương*, 8A3, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, **Nam Định**; *Nguyễn Hoàng Long*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Phạm Ngọc Trinh*, 9B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.

Các "thám tử nhí" sau cũng rất đáng khen: *Đặng Tiến Minh*, 6A4, THCS Ngô Sĩ Liên, Hoàn Kiếm, **Hà Nội**; *Bùi Bá Minh Đức*, 6A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; *Hoàng Thị Yến Linh*, 9A, *Nguyễn Quỳnh Anh*, 9C, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Đỗ Thị Hiền Nga*, 8A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Hoàng Minh Vũ*, 7D, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**; *Trần Thị Hoàng Mai*, 6B, THCS Hà Huy Tập, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; *Lê Thị Diệu Thúy*, 9A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Thám tử Sê Lốc Cốc



Kì này DỰNG ĐƯỜNG CAO THẾ NÀO?

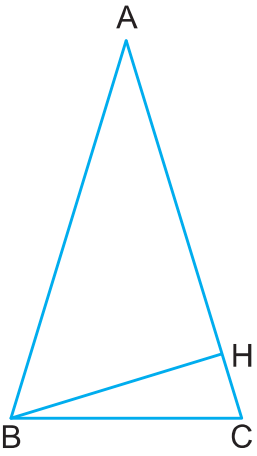
Bài toán. Cho ΔABC có $\widehat{A} > 90^o$, trong tờ giấy chỉ có cạnh BC, tia Bx và tia Cy (tia Bx trùng với tia BA, tia Cy trùng với tia CA), điểm A nằm ngoài tờ giấy. Chỉ sử dụng thước thẳng và compa, hãy dựng điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên cạnh BC.

PHẠM TUẤN KHẢI *(Hà Nội)*

Đính chính. *Do sơ suất, tòa soạn đã ghi nhầm tên tác giả của bài toán kì trước. Bài toán "Tam giác cân đặc biệt" đăng trên TTT2 số 197 + 198 của tác giả Thái Nhật Phượng (GV. THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa). Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.*

Kết quả **(TTT2 số 197+198)**

TAM GIÁC CÂN ĐẶC BIỆT



Đặt $AB = AC = x$, $BC = y$.

✻ **Bài toán thuận.** Vì $\widehat{A} = 30^\circ$ cho nên

$$BH = \frac{x}{2},\ AH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow CH = x - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x(2-\sqrt{3})}{2}.$$

Áp dụng định lí Pythagoras vào ΔBCH ta có

$$y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{(2-\sqrt{3})^2x^2}{4} = (2-\sqrt{3})x^2.$$

Do đó $y = x\sqrt{2-\sqrt{3}} = x\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra

$$AB - BC\sqrt{2} = x - \frac{x(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} = x(2-\sqrt{3}) = 2CH.$$

✻ **Bài toán đảo.** Nếu có $AB - BC\sqrt{2} = 2CH$ thì $AB > BC$, từ đó suy ra $\widehat{A}$ không lớn hơn 60^o.

Vì $AB^2 - AH^2 = BC^2 - CH^2\ (= BH^2)$ nên

$$x^2 - \left(\frac{x+y\sqrt{2}}{2}\right)^2 = y^2 - \left(\frac{x-y\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \sqrt{2}yx - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})x}{2}\right)\left(y + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})x}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})x}{2}.$$

Thay x, y vào đẳng thức $AB - BC\sqrt{2} = 2CH$, ta có $BH^2 = y^2 - CH^2$

$$= \left(\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})x}{2}.\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{x}{2}.$$

Tam giác ABH vuông tại H có $BH = \dfrac{AB}{2}$ nên $\widehat{A} = 30^o$.

Nhận xét. Các bạn sau được thưởng kì này: *Nguyễn Minh Vương,* 9A5, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Phạm Việt Anh,* 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Lê Thị Diệu Thúy,* 9A, THCS Bình Định, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

VŨ ĐÌNH HÒA



TỪ MỘT BÀI TOÁN VỀ HÌNH VUÔNG TRONG SÁCH GIÁO KHOA

ĐOÀN QUỐC VIỆT
GV. THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, Hải Phòng

Bài viết này sẽ khai thác một bài toán hình học trong sách giáo khoa lớp 9. Trước hết ta xét bài toán sau:

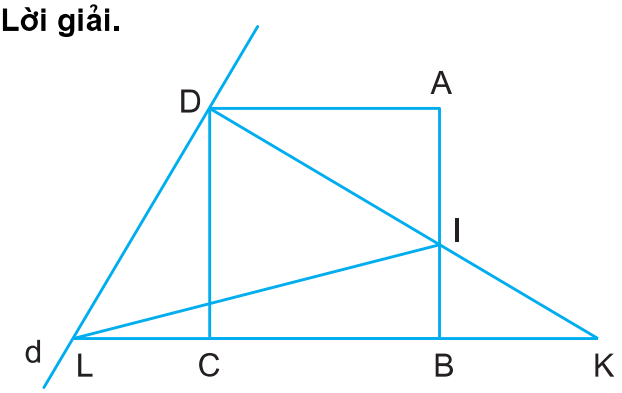
Bài toán 1. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và CB cắt nhau tại K. Kẻ đường thẳng d qua D vuông góc với DI. Đường thẳng d cắt BC tại L. Chứng minh rằng

a) Tam giác DIL là một tam giác cân.

b) Tổng $\frac{1}{DI^2}+\frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh BC.

(Bài 9, SGK toán 9 tập 1 trang 70)

Lời giải.



a) Xét hai tam giác ADI và tam giác CDL có

$\widehat{DAI}=\widehat{DCL}(=90^o); AD=CD; \widehat{ADI}=\widehat{CDL}$

(cùng phụ với $\widehat{CDI}$).

Suy ra $\Delta ADI=\Delta CDL$ (g.c.g).

Do đó DI = DL.

Suy ra ΔDIL cân tại D.

b) Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác DLK vuông tại D ta có

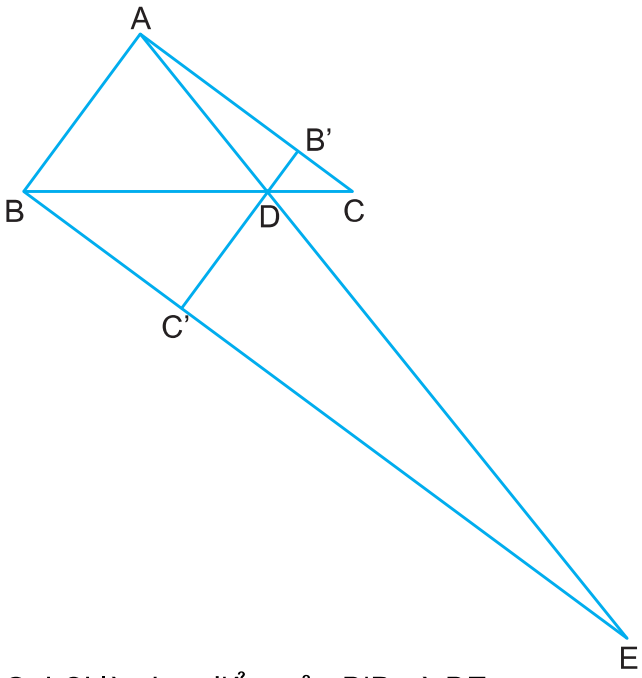
$$\frac{1}{DI^2}+\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{DL^2}+\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{DC^2}.$$

Vậy $\frac{1}{DI^2}+\frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh BC.

Nhận xét. *Điểm C và điểm D có vai trò như nhau nên nếu kẻ đường thẳng d đi qua C ta cũng được hệ thức tương tự. Từ đó ta có bài toán sau:*

Bài toán 2. Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB = a). Trên cạnh AC lấy điểm B' sao cho AB' = AB. Từ B' kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại D. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD tại E. Chứng minh rằng $\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{BC^2}$.

Lời giải.



Gọi C' là giao điểm của B'D và BE.

Ta có tứ giác ABC'B' là hình vuông cạnh a.

Theo bài toán 1 thì

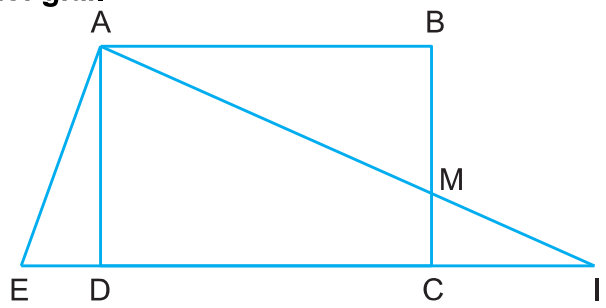
$$\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{a^2}; \frac{1}{BD^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Suy ra $\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{BC^2}$.

Nhận xét. *Trong bài toán 1 nếu thay hình vuông ABCD bằng hình chữ nhật thì ta có bài toán sau:*

Bài toán 3. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = k.AD (k là số dương cho trước). Qua A kẻ đường thẳng d bất kì cắt BC tại M và cắt CD tại I. Chứng minh rằng $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{(k.AI)^2}$ không đổi khi đường thẳng d thay đổi đi qua A.

Lời giải.



Kẻ AE vuông góc với AM (E ∈ DC).

Ta dễ dàng chứng minh $\Delta ABM \backsim \Delta ADE$ (g.g).

Suy ra $\frac{AM}{AE}=\frac{AB}{AD}=k \Rightarrow AM=k.AE.$

Do đó

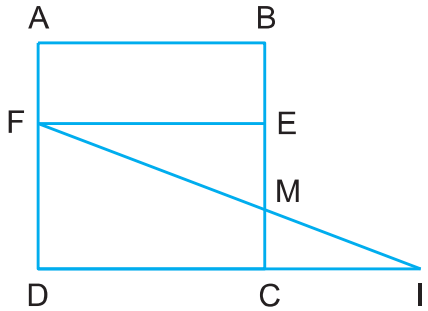
$$\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{(k.AI)^2}=\frac{1}{(k.AE)^2}+\frac{1}{(k.AI)^2}=\frac{1}{k^2.AD^2}.$$

Vậy $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{(k.AI)^2}$ không đổi.

Nhận xét. *Trong bài toán 1 nếu đường thẳng d bất kì, không đi qua đỉnh của hình vuông và cắt hai cạnh và phần kéo dài hai cạnh còn lại của hình vuông thì ta có bài toán sau:*

Bài toán 4. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên đoạn AD lấy điểm F sao cho AD = k.FD (k là số dương cho trước, k > 1). Từ F kẻ đường thẳng d bất kì cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại I. Chứng minh rằng $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(k.FI)^2}$ không đổi khi đường thẳng d thay đổi đi qua F.

Lời giải. Kẻ FE ⊥ BC (E ∈ BC) thì tứ giác CDFE là hình chữ nhật.



Theo bài toán 3 ta có

$$\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(k.FI)^2}=\frac{1}{k^2.FD^2}=\frac{1}{k^2.\left(\frac{a}{k}\right)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

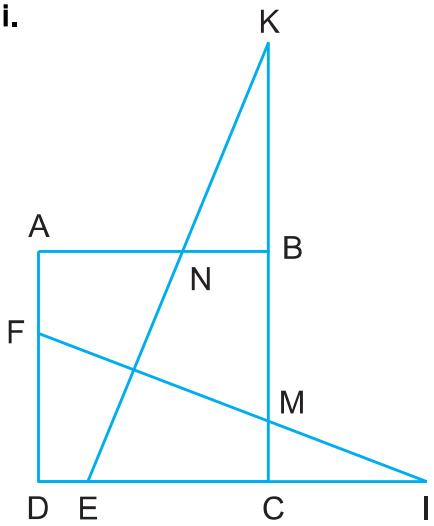
Vậy $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(k.FI)^2}$ không đổi khi đường thẳng d thay đổi đi qua F.

Nhận xét. *Từ bài toán 4 ta có bài toán sau:*

Bài toán 5. Cho hình vuông ABCD cạnh a không đổi. Trên hai cạnh CD và DA lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $EC=\frac{a}{m}; FD=\frac{a}{n}$ (m, n là các số cho trước lớn hơn 1). Từ F kẻ đường thẳng bất kì cắt BC tại M và cắt CD tại I. Từ E kẻ đường thẳng bất kì cắt AB tại N và cắt BC tại K. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{EN^2}+\frac{1}{(m.EK)^2}.$$

Lời giải.



Theo bài toán 4 ta có

$$\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{a^2}; \frac{1}{EN^2}+\frac{1}{(m.EK)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Suy ra $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{EN^2}+\frac{1}{(m.EK)^2}.$

Các bạn hãy tiếp tục khai thác để được các bài toán hay nhé.



VẼ THÊM HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

ĐOÀN CÁT NHƠN *(Phòng GD - ĐT An Nhơn, Bình Định)*

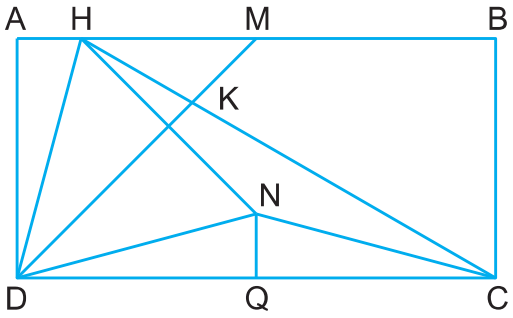
Chúng ta thường gặp các bài toán hình học phải vẽ thêm đường phụ để giải. Bài viết này sẽ đưa ra một số bài toán hình học mà cần vẽ thêm hình phụ để giải.

1. Vẽ hình phụ là tam giác

a. Vẽ hình phụ là tam giác đều

Bài toán 1. (Lớp 7) Cho hình chữ nhật ABCD với AB = 2AD, M là trung điểm của AB. Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho $\widehat{ADH} = 15^o$. DM cắt CH tại K. So sánh độ dài hai đoạn thẳng DH và DK.

Lời giải.



Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng DH có chứa C, vẽ tam giác đều DHN. Gọi Q là trung điểm của DC.

Ta có $\Delta ADH = \Delta QDN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{NQD} = \widehat{DAH} = 90^o$.

$\Rightarrow \Delta NDQ = \Delta NCQ$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NCQ} = \widehat{NDQ} = 15^o$

$\Rightarrow \widehat{DNC} = 150^o \Rightarrow \widehat{HNC} = 150^o$

$\Rightarrow \Delta HNC = \Delta DNC$ (c.g.c) $\Rightarrow CH = CD$

$\Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{HDC} = 75^o$.

Mà $\widehat{HDK} = 45^o - 15^o = 30^o \Rightarrow \widehat{HKD} = 75^o$.

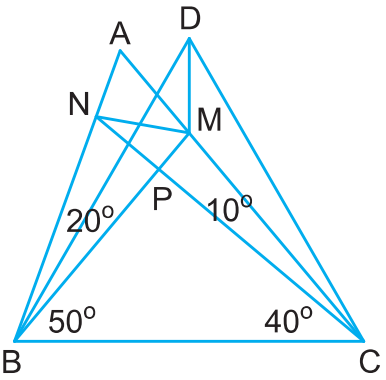
Do đó $\widehat{HKD} = \widehat{DHK}$.

Suy ra tam giác DHK cân tại D.

Do đó DH = DK.

Bài toán 2. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 70^o$, $\widehat{ACB} = 50^o$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = 20^o$. Trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = 10^o$. Gọi P là giao điểm của BM và CN. Chứng minh rằng MN = 2PM.

Lời giải.



Dựng tam giác đều BCD.

Ta chứng minh được $\Delta DMB = \Delta DMC$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{MDB} = \widehat{MDC} = 30^o$.

Ta lại có $\Delta CMN = \Delta CMD$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{MDC} = 30^o$.

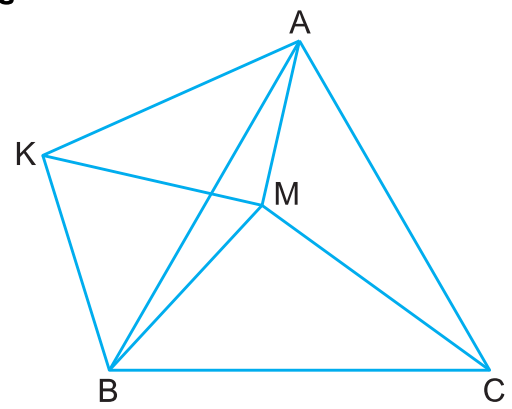
Xét ΔMPN vuông tại P có $\widehat{MNP} = 30^o$.

Suy ra MN = 2MP.



Bài toán 3. Cho điểm M nằm bên trong tam giác đều ABC sao cho MA : MB : MC = 3 : 4 : 5. Tính số đo $\widehat{AMB}$.

Lời giải.



Dựng tam giác đều BKM sao cho K thuộc nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C.

Ta có $\Delta ABK = \Delta CBM$ (c.g.c) nên KA = CM.

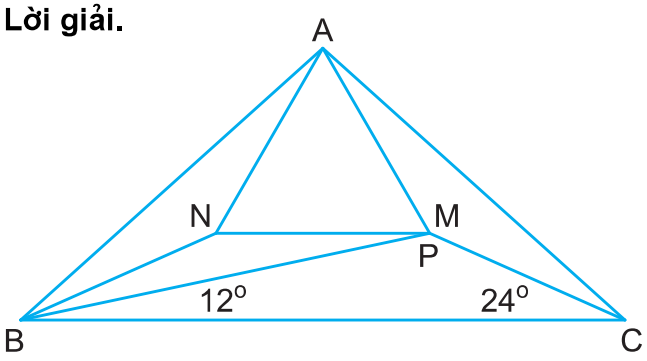
Theo định lí Pythagoras đảo ta có $\widehat{AMK} = 90^o$.

Do đó $\widehat{AMB} = 150^o$.

b. Vẽ hình phụ là tam giác cân, tam giác vuông cân

Bài toán 4. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 96^o$. Lấy điểm M trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBC} = 12^o; \widehat{MCB} = 24^o$. Chứng minh rằng MA = MC.

Lời giải.



Bên trong tam giác ABC dựng các tam giác ABN, ACP thứ tự cân tại N, P và có góc ở đáy bằng 18°.

Ta sẽ chứng minh P trùng với M.

Vì tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 96^o$ nên $\widehat{ACB} = 42^o \Rightarrow \widehat{BCP} = \widehat{BCM}$.

Do đó tia CP trùng với tia CM. (1)

Vì $\Delta ABN = \Delta ACP$ (g.c.g) nên AN = AP.

Mà $\widehat{NAP} = 60^o$ nên ΔNAP là tam giác đều.

Suy ra NP = NA = AP = NB.

Ta lại có NP // BC nên

$\widehat{PBC} = \widehat{NPB} = \widehat{NBP} = 12^o$.

Suy ra tia BP trùng với tia BM. (2)

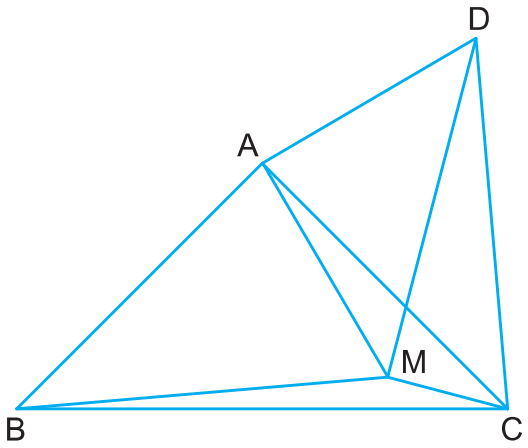
Từ (1) và (2) suy ra P ≡ M.

Vậy MA = MC.

Bài toán 5. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Lấy M nằm trong tam giác sao cho MA = 2 cm; MB = 3 cm và $\widehat{AMC} = 135^o$. Tính độ dài đoạn thẳng MC.

✻ **Phân tích.** *Theo đề bài ta có* $\widehat{AMC} = 135^o = 45^o + 90^o$ *nên ta nghĩ đến việc dựng tam giác vuông cân.*

Lời giải. Dựng tam giác AMD vuông cân tại A sao cho điểm D thuộc nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm M.



Ta có $\Delta ADC = \Delta AMB$ (c.g.c).

Suy ra DC = MB = 3 cm và $\widehat{DMC} = 90^o$.

Áp dụng định lí Pythagoras vào tam giác AMD, CMD ta có

$MD^2 = AM^2 + AD^2 = 2AM^2 = 2.2^2 = 8$ (cm)

$\Rightarrow MC^2 = CD^2 - MD^2 = 3^2 - 8 = 1$ (cm)

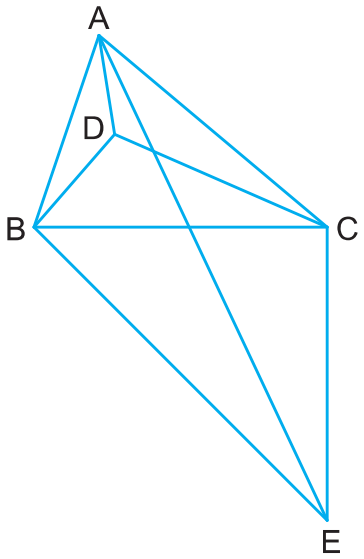
$\Rightarrow$ MC = 1 cm.



Nhận xét. *Theo bài toán 5 ta có MA : MB : MC = 2 : 3 : 1. Từ đó ta có bài toán đảo sau: "Cho tam giác ABC vuông cân tại B. Lấy M nằm trong tam giác sao cho MA : MB : MC = 1 : 2 : 3. Tính số đo* $\widehat{AMB}$*."*

Bài toán 6. (Lớp 8) Cho tam giác ABC. Giả sử tồn tại điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^o$ và AC.BD = AD.BC. Chứng minh rằng $\frac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$.

Lời giải. Về phía ngoài tam giác ABC dựng tam giác BCE vuông cân tại C.



Theo đề bài ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^o$ và AC.BD = AD.BC. Suy ra

$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^o = \widehat{ACE}$; $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{CE}$.

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ACE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ADC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow AB.DC = AD.BE = \sqrt{2}AD.BC$

$\Rightarrow \frac{AB.CD}{AC.BD} = \frac{AB.CD}{AD.BC} = \sqrt{2}$.

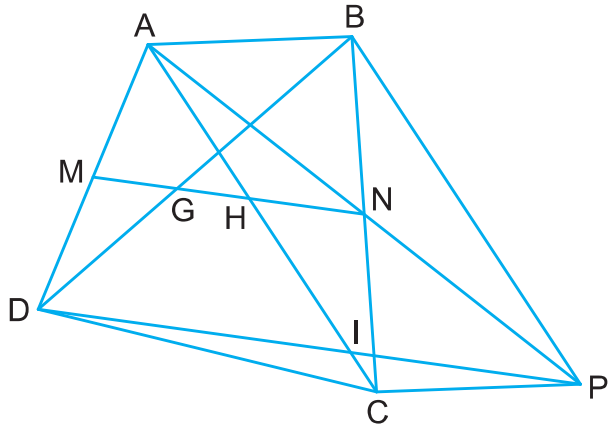
2. Vẽ hình phụ là tứ giác

a. Vẽ hình phụ là hình bình hành

Bài toán 7. (Lớp 8) Cho tứ giác ABCD có AC = BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Gọi H và G lần lượt là giao điểm của MN với AC và BD. Chứng minh rằng $\widehat{AHM} = \widehat{BGN}$.

✻ **Phân tích.** Từ giả thiết AC = BD ta nghĩ đến việc vẽ thêm hình bình hành để tạo thành tam giác cân có cạnh bên bằng BD.

Lời giải.



Vẽ hình bình hành ACPB, do N là trung điểm của BC nên N cũng là trung điểm của AP và BP // AC.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác ADP nên MN // DP.

Gọi I là giao điểm của DP và AC.

Ta có $\widehat{AHM} = \widehat{AID} = \widehat{BPD}$. (1)

Theo giả thiết ta có BD = AC.

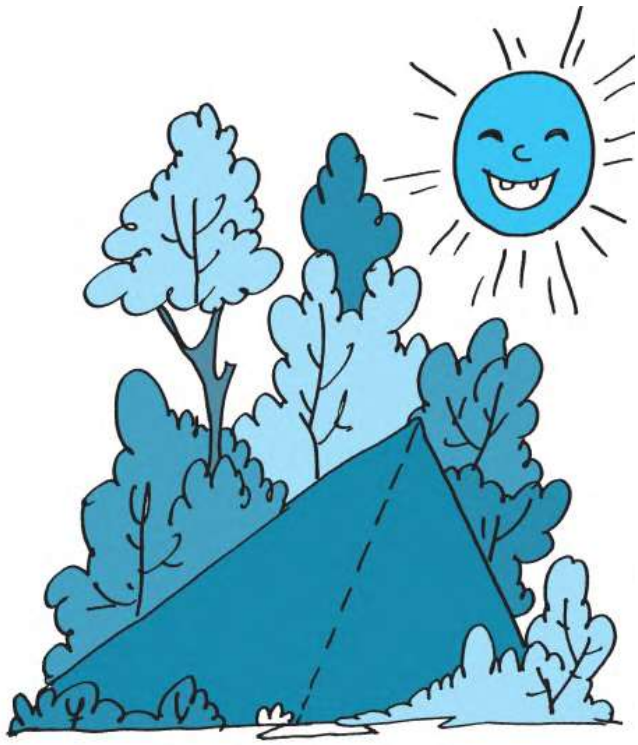
Suy ra BP = BD = AC.

Do đó tam giác BDP cân tại B.

Từ đó suy ra $\widehat{BDP} = \widehat{BPD}$. (2)

Ta lại có $\widehat{BDP} = \widehat{BGN}$. (3)

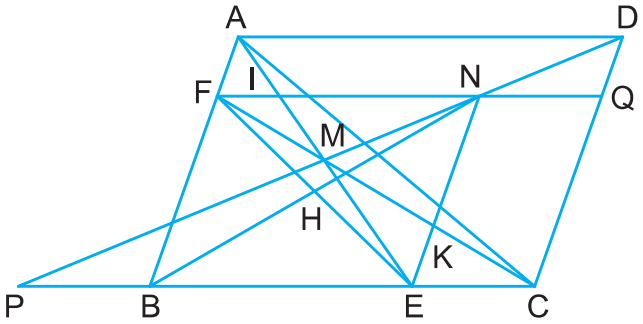
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{AHM} = \widehat{BGN}$.



Bài toán 8. (Lớp 8) Cho tam giác ABC và điểm M nằm bên trong tam giác. AM cắt BC tại E, CM cắt AB tại F. Gọi N là điểm đối xứng của B qua trung điểm của EF. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động bên trong tam giác ABC.

✻ **Phân tích.** Ta vẽ hai vị trí khác nhau của M trong tam giác ABC là M_1 và M_2 và tìm được hai điểm N tương ứng là N_1 và N_2. Gọi D là giao điểm của M_1N_1 và M_2N_2. Ta dự đoán điểm cố định là D và ABCD là hình bình hành.

Lời giải. Vẽ hình bình hành ABCD.



Gọi I là giao điểm của AE và FN; K là giao điểm của CF và EN; H, P lần lượt là giao điểm của DN với EF và BC.

Ta có BENF là hình bình hành nên BF // EN và FN // BE.

Theo hệ quả của định lí Thales ta có

$$\frac{IF}{IN}=\frac{AF}{EN};\frac{KN}{KE}=\frac{FN}{EC};\frac{HE}{HF}=\frac{PE}{FN}. \quad (1)$$

Ta lại có $\frac{PE}{NE}=\frac{NQ}{DQ}=\frac{EC}{FA}\Rightarrow PE=\frac{NE.EC}{FA}.$

$$\Rightarrow \frac{PE}{FN}=\frac{NE.EC}{FN.FA}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{IF}{IN}.\frac{KN}{KE}.\frac{HE}{HF}=\frac{AF}{EN}.\frac{FN}{EC}.\frac{PE}{FN}=\frac{AF}{EN}.\frac{FN}{EC}.\frac{NE.EC}{FN.FA}=1.$$

Theo định lí Ceva thì NH, FK và EI đồng quy.

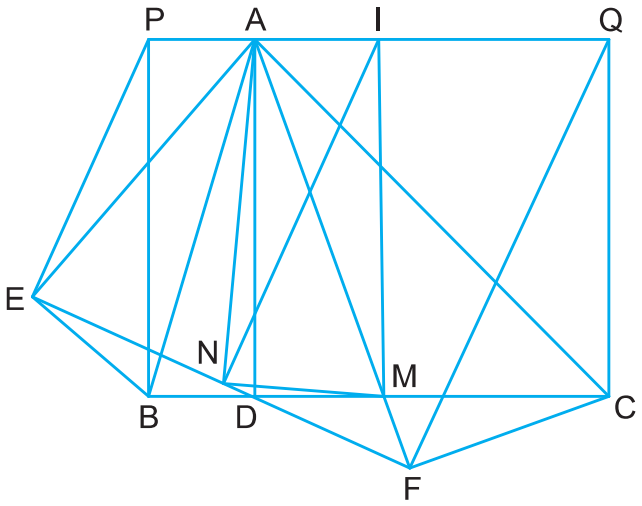
Suy ra D, N, M thẳng hàng.

Vậy MN luôn đi qua điểm D cố định khi M di động trong tam giác ABC.

b. Vẽ hình phụ là hình chữ nhật

Bài toán 9. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có đường cao AD. Gọi E, F là hai điểm trên đường thẳng d đi qua D sao cho $\widehat{AEB}=\widehat{AFC}=90^o$. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của BC, EF. Chứng minh rằng $\widehat{ANM}=90^o$.

Lời giải. Dựng các hình chữ nhật ADBP, ADCQ. Gọi I là trung điểm của PQ.



Ta có $\widehat{AEB}=90^o$ nên năm điểm A, P, E, B, D cùng nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ADBP.

Suy ra $\widehat{AEP}=\widehat{BED}$ (vì PA = BD).

Do đó $\widehat{PEF}=90^o$.

Tương tự $\widehat{QFE}=90^o$.

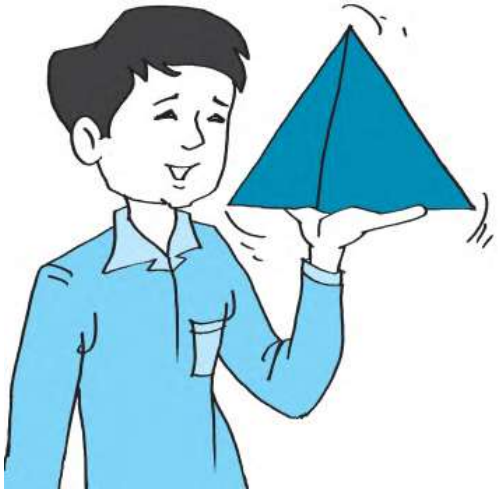
Suy ra PE // NI // QF.

Do đó $\widehat{NIM}=\widehat{FQC}=\widehat{FDC}$ (vì năm điểm A, Q, C, F, D cùng thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật AQCD).

Do đó $\widehat{NIM}+\widehat{NDM}=\widehat{CDF}+\widehat{NDM}=180^o$.

Vậy năm điểm A, N, D, M, I cùng nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật AIMD.

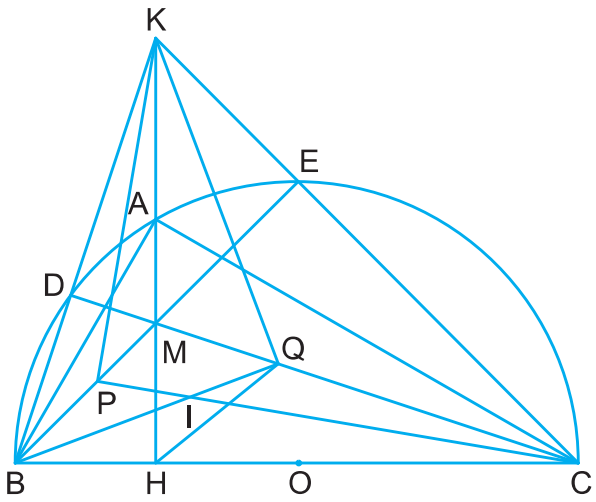
Do đó $\widehat{ANM}=90^o$.



3. Vẽ thêm đường tròn

Bài toán 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, M là điểm thuộc AH. Trên các đoạn thẳng BM và CM thứ tự lấy các điểm P, Q sao cho CP = CA và BQ = BA. Gọi I là giao điểm của CP và BQ. Chứng minh rằng IP = IQ.

Lời giải.



Vẽ nửa đường tròn (O) đường kính BC ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi giao điểm của đường tròn (O) với BP, CQ lần lượt là E, D. Gọi K là giao điểm của BD và CE.

Ta có $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^o$.

Suy ra M là trực tâm của ΔKBC.

Từ đó suy ra K, A, H thẳng hàng.

Ta lại có $BQ^2 = BA^2 = BH.BC \Rightarrow \dfrac{BQ}{BC} = \dfrac{BH}{BQ}$.

Do đó $\Delta BQH \backsim \Delta BCQ$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BQH} = \widehat{BCQ} = \widehat{BKH}$.

Do đó tứ giác BHQK nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BQK} = \widehat{BHK} = 90^o$.

Từ đó ta có $KQ^2 = KD.KB$.

Chứng minh tương tự ta được $KP^2 = KE.KC$.

Vì tứ giác BDEC nội tiếp nên

$KD.KB = KE.KC$.

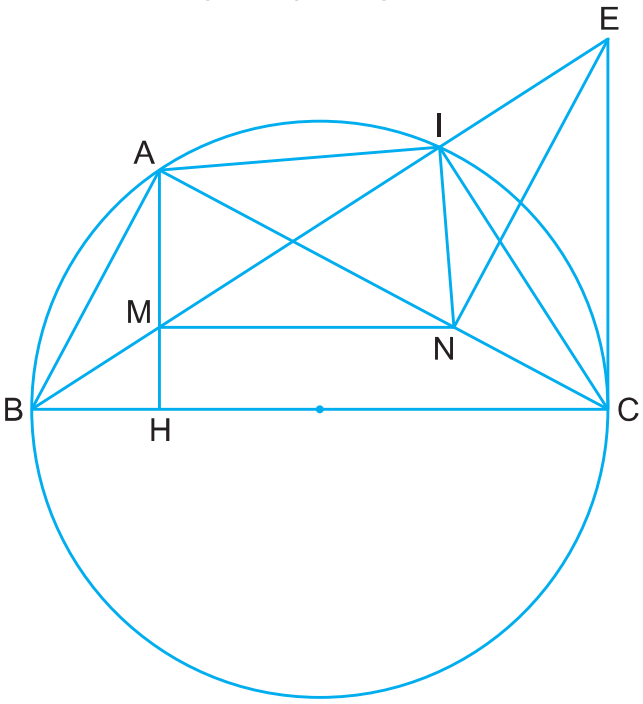
Suy ra KP = KQ.

Từ đó ta chứng minh được $\Delta KPI = \Delta KQI$.

Suy ra IP = IQ.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Trên AH; AC lần lượt lấy các điểm M; N sao cho MN // BC. Đường thẳng vuông góc với AC tại N cắt đường thẳng BM tại E. Chứng minh rằng BC ⊥ CE.

Lời giải. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng BE tại I.



Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{ACB} = \widehat{AIB}$.

Suy ra tứ giác AINM nội tiếp.

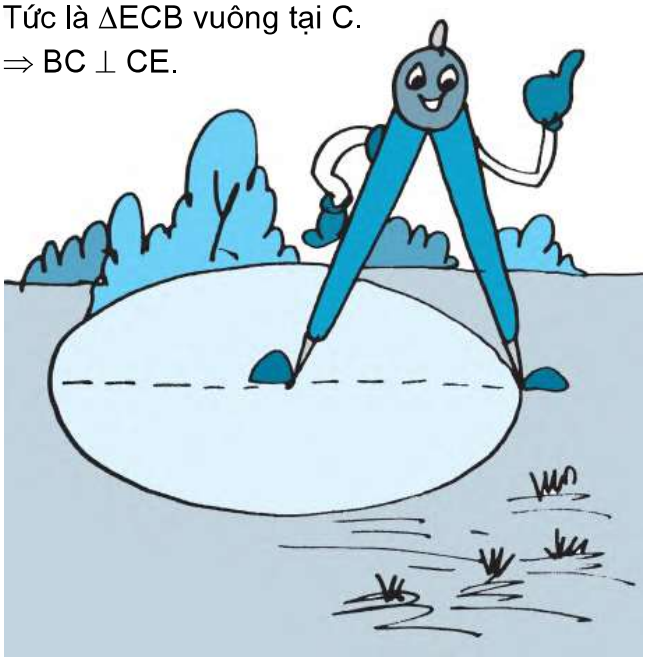
Do đó $\widehat{AIN} = \widehat{AMN} = 90^o$.

Mặt khác tứ giác CNIE nội tiếp nên $\widehat{NCE} = \widehat{NIM}$.

Suy ra $\widehat{NCE} + \widehat{ACB} = \widehat{NIM} + \widehat{MIA} = \widehat{AIN} = 90^o$.

Tức là ΔECB vuông tại C.

$\Rightarrow BC \perp CE$.



Chữ & Chữ số

Kì này KÌ 45

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số, biết các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau.

$$\overline{\text{THO}} \times \overline{\text{VAN}} = 99999.$$

THÁI NHẬT PHƯỢNG *(Khánh Hòa)*

Kết quả KÌ 43 (TTT2 số 197+198)

Lời giải. Ta có

$\overline{\text{DE}} \times \overline{\text{ME}} = \overline{\text{TTT}} = \text{T} \times 111 = \text{T} \times 3 \times 37.$

Vậy 37 phải là ước của $\overline{\text{DE}}$ hoặc $\overline{\text{ME}}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử 37 là ước của $\overline{\text{ME}}$.

Suy ra $\overline{\text{ME}} = 37$ hoặc $\overline{\text{ME}} = 74$.

✻ Nếu $\overline{\text{ME}} = 74$ thì

$\overline{\text{DE}} \times \overline{\text{ME}} \geq 14 \times 74 = 1036 > 999 \geq \overline{\text{TTT}}$ (Loại).

Vậy chỉ có thể $\overline{\text{ME}} = 37$.

Mặt khác

$\overline{\text{TTT}} = \overline{\text{DE}} \times \overline{\text{ME}} = (10\text{D} + \text{E})(10\text{M} + \text{E})$

$= 100\text{D} \times \text{M} + 10\text{E}(\text{D} + \text{M}) + \text{E}^2.$

Do đó T chính là chữ số tận cùng của E^2.

Vì $\text{E} = 7$ nên $\text{T} = 9$.

Suy ra $\overline{\text{DE}} \times \overline{\text{ME}} = \overline{\text{D7}} \times 37 = 999.$

Vậy $\text{D} = 2$.

Đáp số:

- $\text{D} = 2,\ \text{M} = 3,\ \text{E} = 7,\ \text{T} = 9.$

Ta có $\overline{\text{DE}} \times \overline{\text{ME}} = 27 \times 37 = 999 = \overline{\text{TTT}}.$

- $\text{D} = 3,\ \text{M} = 2,\ \text{E} = 7,\ \text{T} = 9.$

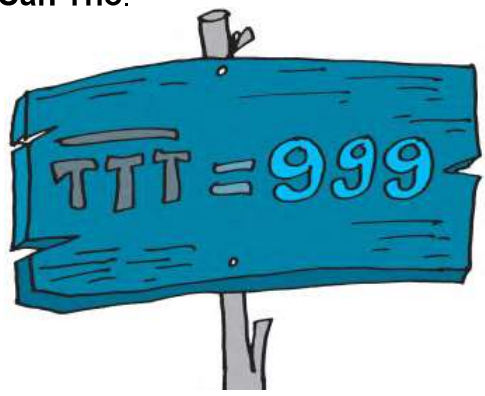
Ta có $\overline{\text{DE}} \times \overline{\text{ME}} = 37 \times 27 = 999 = \overline{\text{TTT}}.$

HONG HA

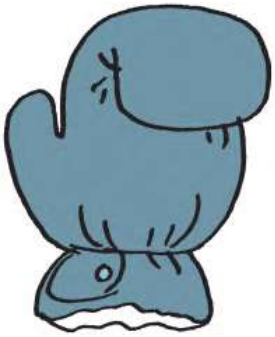
Nhận xét. Các bạn sau đây giải đúng và được thưởng kì này: *Hoàng Đình Đức*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Phạm Thị Ngọc Huyền*, 8E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Lã Gia Hưng*, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**; *Trần Ngọc Hữu*, 9/1, THCS Lý Tự Trọng, Tiên Phước, **Quảng Nam**; *Nguyễn Trung Kiên*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

Các bạn sau được khen: *Đặng Quang Huy*, 8G; *Đinh Xuân Linh*, 9A; *Nguyễn Thị Phương Nhi*, 6C; *Trần Hoàng Bách*, 9G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Tất Quân*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Hoàng Long*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Phạm Thanh Nga*, 9A3; *Trần Như Quỳnh*, 9A3; *Đỗ Ngọc Tiến*, *Nguyễn Tiến Dũng*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Hoàng Minh Vũ*, 7D, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Minh Vương*, 9A5, THCS Cầu Giấy, Cầu Giấy; *Lê Mai Anh*, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh; *Nguyễn Triết Khoa*, *Bùi Đàm Quân*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Trung Yên, **Hà Nội**; *Đoàn Minh Đức*; *Võ Thị Minh Huyền*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Hồng Nam*, 7A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Hồ Trúc Uyên*, 6A3, THCS Thốt Nốt, 6A3, TP. Cần Thơ, **Cần Thơ**.

TTT



THÁCH ĐẤU



TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM SÁU MƯƠI SÁU

Người thách đấu: *Đoàn Cát Nhơn*, GV. THCS Bình Định, TX. An Nhơn, **Bình Định**.

Bài toán thách đấu: Cho tam giác ABC vuông tại A có AB < AC. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi I và J theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ cắt các cạnh AB, AC thứ tự tại D, E. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại K. Gọi O là trung điểm của DE. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK đi qua trung điểm của IJ.

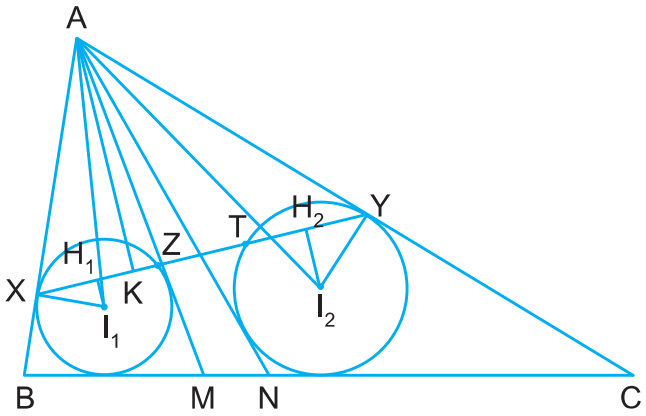
Thời hạn: Trước ngày 08.12.2019 theo dấu bưu điện.

Kết quả

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM SÁU MƯƠI TƯ (TTT2 số 197+198)

Đề bài. Cho tam giác ABC. Gọi M, N là các điểm thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$. Gọi đường tròn nội tiếp của các tam giác ABM và ACN lần lượt là (I_1) và (I_2). Gọi X là tiếp điểm của (I_1) với AB và Y là tiếp điểm của (I_2) với AC. Gọi Z, T thứ tự là giao điểm thứ hai của XY với (I_1), (I_2). Chứng minh rằng XZ = YT.

Lời giải.



Gọi K, H_1, H_2 theo thứ tự là hình chiếu của A, I_1, I_2 trên XY.

Ta có

$\widehat{XH_1I_1} = \widehat{AXI_1} = 90^\circ = \widehat{AYI_2} = \widehat{YH_2I_2}$.

$\widehat{XI_1H_1} = 90^\circ - \widehat{I_1XH_1} = 90^\circ - \widehat{I_1XK} = \widehat{AXK}$;

$\widehat{YI_2H_2} = 90^\circ - \widehat{I_2YH_2} = 90^\circ - \widehat{I_2YK} = \widehat{AYK}$.

Kết hợp với $AK \perp XY$, suy ra

$\Delta XI_1H_1 \backsim \Delta AXK$ (g.g); (1)

$\Delta YI_2H_2 \backsim \Delta AYK$ (g.g). (2)

Ta lại có $\widehat{XAI_1} = \frac{1}{2}\widehat{MAB} = \frac{1}{2}\widehat{NAC} = \widehat{YAI_2}$ và

$\widehat{AXI_1} = 90^\circ = \widehat{AYI_2}$.

Do đó $\Delta AXI_1 \backsim \Delta AYI_2$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

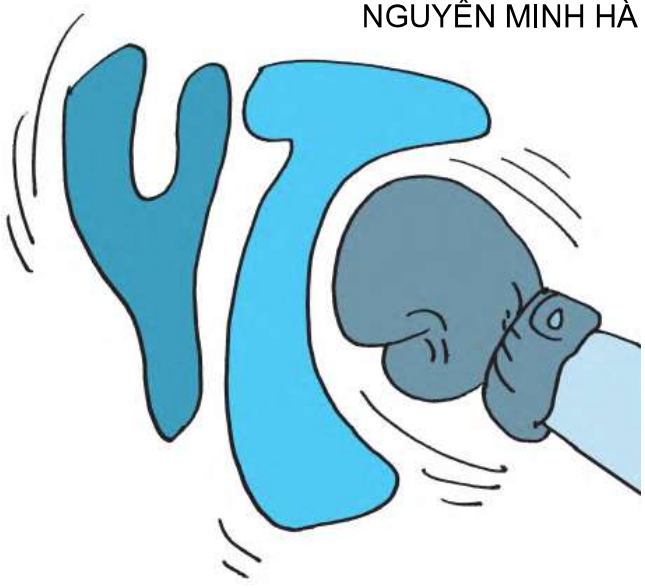
$$\frac{XZ}{YT} = \frac{2XH_1}{2YH_2} = \frac{XH_1}{AK}.\frac{AK}{YH_2}$$

$$= \frac{XI_1}{AX}.\frac{AY}{YI_2} = \frac{XI_1}{AX}.\frac{AX}{XI_1} = 1.$$

Vậy XZ = YT.

Nhận xét. Không có võ sĩ nào đăng quang trong trận đấu này. Phần thưởng xin gác lại kì sau.

NGUYỄN MINH HÀ



ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 6 HUYỆN YÊN LẠC, TỈNH VĨNH PHÚC

Năm học 2018 - 2019

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. Thực hiện phép tính $A = \left(\frac{1}{2}.0,75\right).\left(0,25 - \frac{2}{5}\right) : \left(\frac{5}{9} - 1\frac{1}{12}\right)$.

Bài 2. Cho p là số nguyên tố, biết $p + 2$ và $p + 4$ cũng là số nguyên tố. Tính $p^3 + 2019$.

Bài 3. Tìm số tự nhiên a, biết rằng khi chia 39 cho a thì dư 4, còn khi chia 48 cho a thì dư 6.

Bài 4. Tìm số tự nhiên n, biết n có 20 ước và khi phân tích thành thừa số nguyên tố thì có dạng $n = 2^x3^y$ trong đó $x + y = 7$ và x, y là các số nguyên dương.

Bài 5. Cho sáu số tự nhiên khác nhau có tổng bằng 50. Chứng minh rằng trong sáu số đó tồn tại ba số có tổng lớn hơn hoặc bằng 30.

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB và một điểm M nằm ngoài đường thẳng AB. Gọi C là một điểm thuộc đường thẳng AB. Tính số đo $\widehat{AMC}$, biết $\widehat{AMB} = 90^o, \widehat{BMC} = 30^o$.

Bài 7. Cho 2018 điểm thuộc đường thẳng a và một điểm nằm ngoài đường thẳng ấy. Có bao nhiêu tam giác có các đỉnh là ba trong 2019 điểm trên?

Bài 8. Tìm các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $ab + b - a! = 1$;

ii) $cb + c - b! = 1$;

iii) $a^2 - 2b^2 + 2a - 4b = 2$.

Bài 9. Nhà toán học De Morgan sinh năm 1806 và mất năm 1871. Khi được hỏi tuổi, ông đã trả lời: Tôi x tuổi vào năm x^2. Hỏi năm x^2 đó ông bao nhiêu tuổi?

Bài 10. Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $5x - 2y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 3|x| + 5|y|$.



ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 7

TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA, TP. HỒ CHÍ MINH

Năm học 2018 - 2019

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 90 phút



Bài 1. *(2,5 điểm)*

a) Tính $P = 4^{25}.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)...\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{101}\right)$.

b) Tìm x, y, z biết: $\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}\\ xy+yz+zx-31=0.\end{cases}$

Bài 2. *(1 điểm)*

Cho B = –9 – 99 – 999 – ... – 999...9 (Số hạng cuối cùng có 2018 chữ số 9).

Sau khi thực hiện phép tính, chữ số 1 xuất hiện bao nhiêu lần trong B?

Bài 3. *(2 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có AB < AC và BD là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ (D ∈ AC). Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = BA, vẽ DF là tia phân giác của $\widehat{EDC}$ (F ∈ BC). Kẻ FH ⊥ AC tại H.

a) Chứng minh AB + HF = BF.

b) Trên tia đối của tia AB lấy điểm I sao cho AI = FH. Chứng minh rằng BD ⊥ IF.

Bài 4. *(1,5 điểm)*

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^o$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, ta vẽ AD ⊥ AB và AD = AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B, ta vẽ AE ⊥ AC và AE = AC. Kẻ AH ⊥ ED (H ∈ ED). Tia AH cắt BC tại M. Chứng minh M là trung điểm của BC.

Bài 5. *(1,5 điểm)*

Người ta xây dựng một tòa tháp gồm tầng trệt và 9 tầng tháp tại một ngôi chùa. Theo cấu trúc, diện tích của mặt sàn tòa tháp 1 bằng nửa diện tích mặt sàn tầng trệt và diện tích của mặt sàn tòa tháp ở trên bằng nửa diện tích mặt sàn tòa tháp bên dưới. Biết diện tích sàn của tầng đỉnh tháp là 2,25 m^2 và để cho đồng bộ nên cùng lát loại gạch hoa có kích thước 30 × 30 cm. Hãy tính số tiền mua gạch hoa để lát nền, biết giá mỗi viên gạch hoa là 9000 đồng.

Bài 6. *(1,5 điểm)*

Bạn An vào cửa hàng văn phòng phẩm mua 4 quyển vở với giá 10 000 đồng/quyển và 3 chiếc bút với giá 5000 đồng/cây. Bạn đưa cho nhân viên thu ngân là 200 000 đồng. Người này gửi lại cho bạn 11 tờ giấy bạc loại 20 000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi bạn An đã nhận được bao nhiêu tờ giấy bạc mỗi loại?

ĐẶT MUA TẠP CHÍ CẢ NĂM HỌC TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC
MÃ ẤN PHẨM: C 169.1

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8 QUẬN 6, TP. HỒ CHÍ MINH

Năm học 2015 - 2016

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. *(1,5 điểm)*

Chứng minh $\left(x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right)=(x^2+x+1)(x^2-x+1);\ (x\neq\pm1).$

Bài 2. *(1,5 điểm)*

Giải phương trình: $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$.

Bài 3. *(2 điểm)*

Cho a, b là hai số dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2+\frac{2015(a-b)^2}{a^2+4028ab+b^2}+\frac{2016(a-b)^2}{a^2+4030ab+b^2}.$$

Bài 4. *(2 điểm)*

Cho hình chữ nhật ABCD. Qua B kẻ hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau. Đường thẳng d_1 cắt cạnh AD tại K, đường thẳng d_2 cắt tia DC tại L. Gọi F là giao điểm của KL và AC. Chứng minh BF vuông góc với KL.

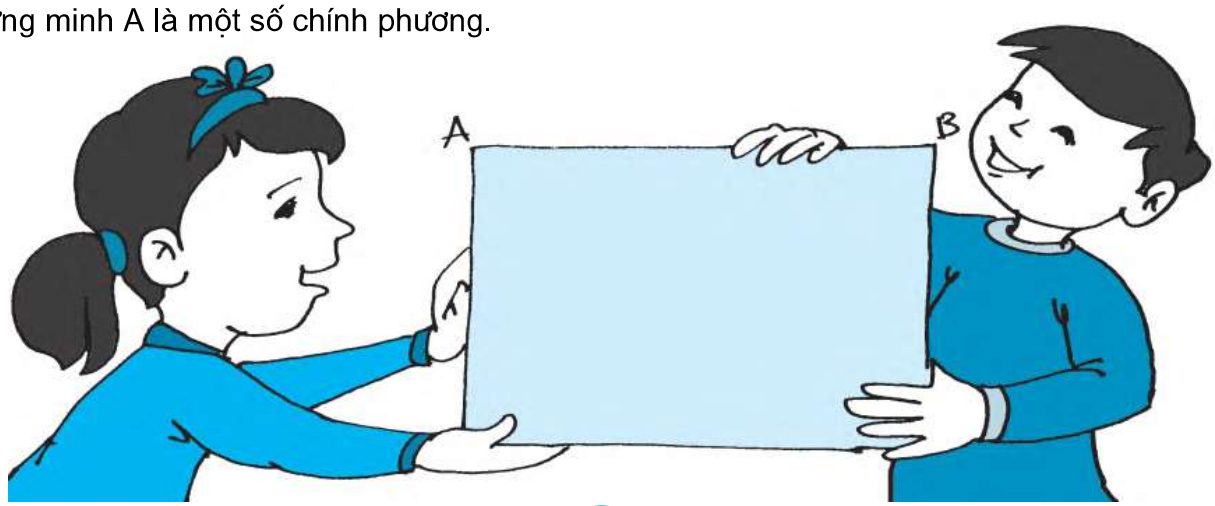
Bài 5. *(2 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại B. Trên tia AB lấy điểm D sao cho AD = 3AB. Đường thẳng qua D vuông góc với CD cắt đường thẳng qua A vuông góc với AC tại E. Chứng minh EBD là tam giác cân.

Bài 6. *(1 điểm)*

Cho $A=(a+b)(a+2b)(a+2015b)(a+2016b)+1007^2b^4$ với $a, b\in\mathbb{Z}$.

Chứng minh A là một số chính phương.



ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT TP. HỒ CHÍ MINH

Năm học 2019-2020

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút



Bài 1. *(1,5 điểm)*

Cho parabol (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = x - 4$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Bài 2. *(1 điểm)*

Cho phương trình: $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có 2 nghiệm là x_1; x_2.

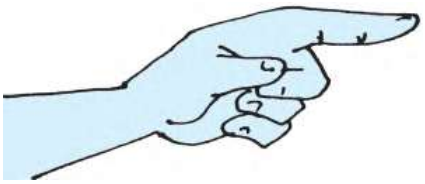
Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x_1 - 1}{x_2 + 1} + \frac{x_2 - 1}{x_1 + 1}$.

Bài 3. *(0,75 điểm)*

Quy tắc sau đây cho ta biết được ngày n, tháng t, năm 2019 là ngày thứ mấy trong tuần. Đầu tiên, ta tính giá trị của biểu thức T = n + H, ở đây H được xác định bởi bảng sau:

Tháng t	8	2; 3; 11	6	9; 12	4; 7	1; 10	5
H	–3	–2	–1	0	1	2	3

Sau đó, lấy T chia cho 7 ta được số dư r ($0 \le r \le 6$).





Nếu r = 0 thì ngày đó là ngày Thứ Bảy.

Nếu r = 1 thì ngày đó là ngày Chủ Nhật.

Nếu r = 2 thì ngày đó là ngày Thứ Hai.

Nếu r = 3 thì ngày đó là ngày Thứ Ba.

...

Nếu r = 6 thì ngày đó là ngày Thứ Sáu.

Ví dụ: Ngày 31/12/2019 có n = 31; t = 12; H = 0 $\Rightarrow$ T = 31 + 0 = 31; số 31 chia cho 7 có số dư là 3, nên ngày đó là thứ Ba.

a) Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định các ngày 02/9/2019 và 20/11/2019 là thứ mấy?

b) Bạn Hằng tổ chức sinh nhật của mình trong tháng 10/2019. Hỏi sinh nhật của bạn Hằng là ngày mấy? Biết rằng ngày sinh nhật của Hằng là một bội số của 3 và là Thứ Hai.

Bài 4. *(0,75 điểm)*

Tại bề mặt đại dương, áp suất nước bằng áp suất khí quyển và là 1 atm (atmosphere). Bên trong dưới mặt nước, áp suất nước tăng thêm 1 atm cho mỗi 10 mét sâu xuống. Biết rằng mối liên hệ giữa áp suất y (atm) và độ sâu x (m) dưới mặt nước là một hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$.

a) Xác định các hệ số a và b.

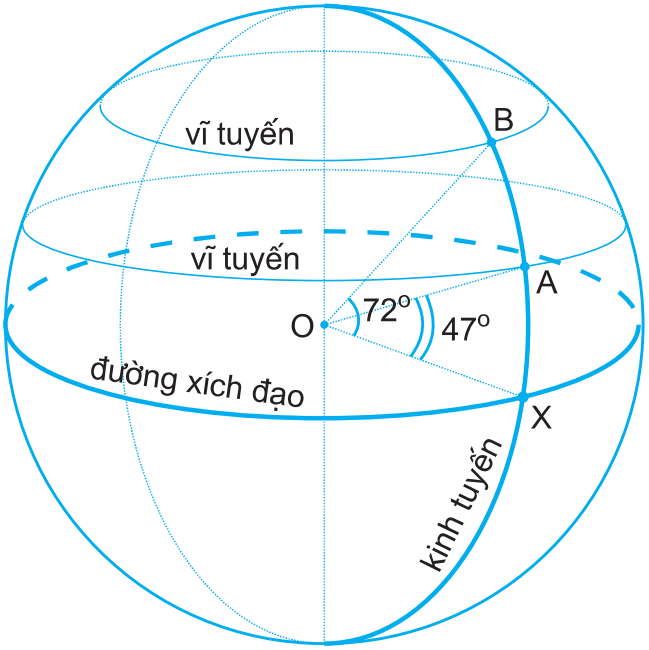
b) Một người thợ lặn đang ở độ sâu bao nhiêu nếu người ấy chịu một áp suất là 2,85 atm?

Bài 5. *(1 điểm)*

Một nhóm gồm 31 bạn học sinh tổ chức một chuyến đi du lịch (chi phí chuyến đi được chia đều cho mỗi bạn tham gia). Sau khi đã hợp đồng xong, vào giờ chót có 3 bạn bận việc đột xuất không đi được nên họ không đóng tiền. Cả nhóm thống nhất mỗi bạn còn lại sẽ đóng thêm 18 000 đồng so với dự kiến ban đầu để bù lại cho 3 bạn không tham gia. Hỏi tổng chi phí chuyến đi là bao nhiêu?

Bài 6. *(1 điểm)*

Cuối năm học, các bạn lớp 9A chia làm hai nhóm, mỗi nhóm chọn một khu vườn sinh thái ở Bắc bán cầu để tham quan. Khi mở hệ thống định vị GPS, họ phát hiện một sự trùng hợp khá thú vị là hai vị trí mà hai nhóm chọn đều nằm trên cùng một kinh tuyến và lần lượt ở các vĩ tuyến 47° và 72°.



a) Tính khoảng cách (làm tròn đến hàng trăm) giữa hai vị trí đó, biết rằng kinh tuyến là một cung nối liền hai cực của Trái Đất và có độ dài khoảng 20 000 km.

b) Tính (làm tròn đến hàng trăm) độ dài bán kính và đường xích đạo của Trái Đất. Từ kết quả của bán kính (đã làm tròn), hãy tính thể tích của Trái Đất, biết rằng Trái Đất có dạng hình cầu và thể tích của hình cầu được tính theo công thức $V = \frac{4}{3}.3,14.R^3$ với R là bán kính hình cầu.

Bài 7. *(1 điểm)*

Bạn Dũng trung bình tiêu thụ 15 ca-lo cho mỗi phút bơi và 10 ca-lo cho mỗi phút chạy bộ. Hôm nay, Dũng mất 1,5 giờ cho cả hai hoạt động trên và tiêu thụ hết 1200 ca-lo. Hỏi hôm nay, bạn Dũng mất bao nhiêu thời gian cho mỗi hoạt động?

Bài 8. *(3 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt BC và (O) lần lượt tại F và K (K ≠ A). Gọi L là hình chiếu của D lên AB.

a) Chứng minh rằng tứ giác BEDC nội tiếp và $BD^2 = BL.BA$.

b) Gọi J là giao điểm của KD và (O), (J ≠ K). Chứng minh $\overset{\frown}{BJK} = \overset{\frown}{BDE}$.

c) Gọi I là giao điểm của BJ và ED. Chứng minh tứ giác ALIJ nội tiếp và I là trung điểm của ED.



HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI
CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TP. HỒ CHÍ MINH

Năm học: 2018 - 2019

Môn thi: Toán

(Đề đăng trên TTT2 số 199)

Bài 1. Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0, 2x \neq -y$.

Ta có

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2x+y} \Rightarrow 2y(2x+y)-x(2x+y)=xy$$

$$\Rightarrow 4xy+2y^2-2x^2-xy=xy$$

$$\Rightarrow 2x^2-2xy-2y^2=0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}-1-\frac{y}{x}=0 \Rightarrow \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1.$$

Do đó $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+2$

$$=1^2+2=1+2=3.$$

Bài 2. $P=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$$=(c-2)^2-2(2c^2-3c+1)$$

$$=c^2-4c+4-4c^2+6c-2=-3c^2+2c+2$$

$$=-3\left(c^2-\frac{2}{3}c+\frac{1}{9}\right)+\frac{7}{3}=-3\left(c-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{3}\leq\frac{7}{3}.$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow c-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{3}$.

Khi đó $a+b=-\frac{5}{3}, ab=\frac{2}{9}$

$$\Leftrightarrow a=\frac{-5+\sqrt{17}}{6}, b=\frac{-5-\sqrt{17}}{6} \text{ hoặc}$$

$$a=\frac{-5-\sqrt{17}}{6}, b=\frac{-5+\sqrt{17}}{6}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{3}$.

Bài 3. Đổi 5 phút $=\frac{1}{12}$ giờ.

Gọi vận tốc của An là x (km/h)

(Điều kiện $x > 0$).

Vận tốc của Bình là $x : 1{,}5=\frac{2}{3}x$ (km/h).

Vận tốc của Cường là $x:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}x$ (km/h).

Quãng đường An và Cường, An và Bình đi để gặp nhau là $39-x.\frac{1}{12}=39-\frac{1}{12}x$ (km).

Thời gian đi để An và Cường gặp nhau tại C là:

$$\left(39-\frac{1}{12}x\right):\left(x+\frac{4}{3}x\right)=\frac{3}{7x}\left(39-\frac{1}{12}x\right) \text{ (giờ).}$$

Thời gian đi để An và Bình gặp nhau tại D là:

$$\left(39-\frac{1}{12}x\right):\left(x+\frac{2}{3}x\right)=\frac{3}{5x}\left(39-\frac{1}{12}x\right) \text{ (giờ).}$$

Thời gian An đi từ C đến D là $6:x=\frac{6}{x}$ (giờ).

Theo đầu bài ta có phương trình

$$\frac{3}{5x}\left(39-\frac{1}{12}x\right)-\frac{3}{7x}\left(39-\frac{1}{12}x\right)=\frac{6}{x}$$

$$\Leftrightarrow 39-\frac{1}{12}x=35 \Leftrightarrow \frac{1}{12}x=4 \Leftrightarrow x=48$$

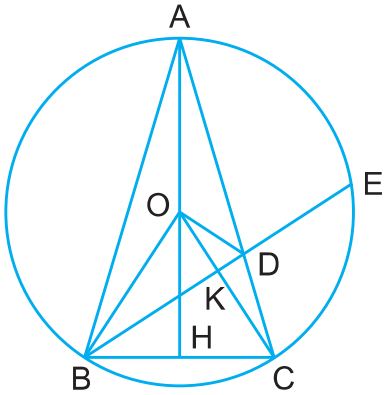
(nhận).

Vận tốc của An là 48 (km/h).

Vận tốc của Bình là $\frac{2}{3}.48=32$ (km/h).

Vận tốc của Cường là $\frac{4}{3}.48=64$ (km/h).

Bài 4.



Gọi K là giao điểm của BE và OC, H là giao điểm của AO và BC.

Ta có $AH \perp BC$, $BH = CH = \dfrac{BC}{2} = 2$.

$BK = EK = \dfrac{BE}{2}$.

Tam giác HAB vuông tại H nên

$AH^2 + BH^2 = AB^2$.

Do đó

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}$ (cm).

Tam giác HOB vuông tại H có

$OB^2 = OH^2 + BH^2$.

Do đó $R^2 = (2\sqrt{15} - R)^2 + 2^2$

$\Rightarrow 4\sqrt{15}R = 64 \Rightarrow R = \dfrac{16\sqrt{15}}{15}$ (cm).

Ta có OA = OC (= R) nên ΔOAC cân tại O.

Suy ra $\widehat{CAH} = \widehat{KCD}$.

Mà $\widehat{CAH} + \widehat{BCD} = \widehat{KCD} + \widehat{BDC}$ $(= 90^\circ)$ nên

$\widehat{BCD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \Delta BDC$ cân tại B.

$\Rightarrow BD = BC = 4$ cm.

Xét ΔCKB và ΔCHO có

chung $\widehat{KCB}$, $\widehat{CKB} = \widehat{CHO}$ $(= 90^\circ)$.

Do đó $\Delta CKB \backsim \Delta CHO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CK}{CH} = \dfrac{CB}{CO}$

$\Rightarrow CK = \dfrac{CH.CB}{CO} = \dfrac{2.4}{\dfrac{16\sqrt{15}}{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ (cm).

Vì ΔKBC vuông tại K nên $BK^2 + CK^2 = BC^2$.

Do đó

$BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = \sqrt{4^2 - \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \dfrac{7}{2}$ (cm).

Ta có BE = 7 (cm).

Do vậy DE = BE – BD = 7 – 4 = 3 (cm).

Và $KD = BD - BK = 4 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}$ (cm).

Ta lại có OK = OC – CK

$= \dfrac{16\sqrt{15}}{15} - \dfrac{\sqrt{15}}{2} = \dfrac{17\sqrt{15}}{30}$ (cm).

Xét ΔKDO vuông tại K có $OD^2 = OK^2 + KD^2$.

Suy ra $OD = \sqrt{OK^2 + KD^2}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{17\sqrt{15}}{30}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{285}}{15}$ (cm).

Bài 5. a) Thể tích hộp phô mai và cũng chính là thể tích 8 miếng phô mai là

$\left(\dfrac{12,2}{2}\right)^2.\pi.2,4$ (cm^3).

Thể tích 1 miếng phô mai là

$\left(\dfrac{12,2}{2}\right)^2.\pi.2,4 : 8 \approx 35,1$ (cm^3).

b) Diện tích mặt bề ngoài của 1 miếng phô mai là

$\pi.12,2.2,4 : 8 = \dfrac{183\pi}{50}$ (cm^2).

Diện tích hai mặt đáy của 1 miếng phô mai là

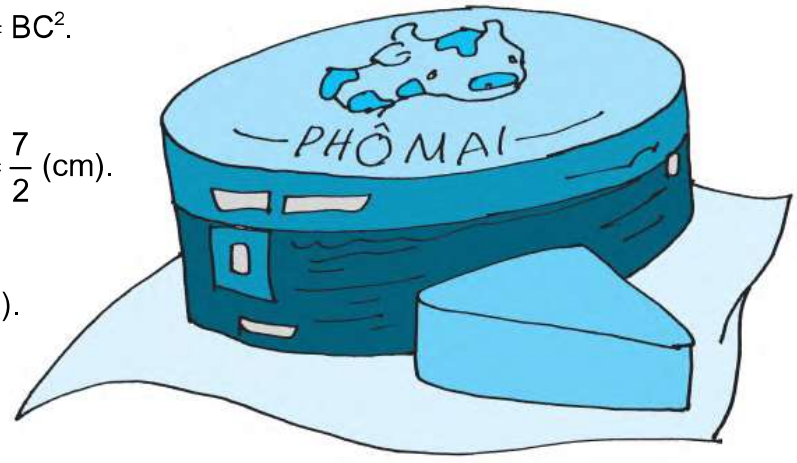
$\left(\pi.\left(\dfrac{12.2}{2}\right)^2 : 8\right).2 = \dfrac{3721\pi}{400}$ (cm^2).

Diện tích hai mặt bên của 1 miếng phô mai là

$\left(\dfrac{12,2}{2}.2,4\right).2 = \dfrac{732}{25}$ (cm^2).

Diện tích giấy gói được sử dụng cho 1 miếng phô mai là

$\dfrac{183\pi}{50} + \dfrac{3721\pi}{400} + \dfrac{732}{25} \approx 70,0$ (cm^2).



SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH ĐỂ DỰ ĐOÁN BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ

TRƯƠNG QUANG AN (*GV. THCS Nghĩa Thắng, Nghĩa Tư, Quảng Ngãi*)

Trong một số bài toán chứng minh bất đẳng thức có điều kiện, nếu chúng ta biết dự đoán và chứng minh các bất đẳng thức phụ thì sẽ giúp dễ dàng tìm được lời giải của bài toán. Phương pháp chung để giải các bài toán đó là:

✻ ***Bước 1.*** *Dự đoán đẳng thức xảy ra và bất đẳng thức phụ. Thường sau khi dùng bất đẳng thức phụ thì ta sẽ sử dụng được giả thiết với các bất đẳng thức có điều kiện.*

✻ ***Bước 2.*** *Chứng minh bất đẳng thức phụ đó.*

✻ ***Bước 3.*** *Áp dụng bất đẳng thức phụ vào chứng minh bài toán.*

Sau đây là một số bài toán minh họa:

Bài toán 1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=2(a+b+c)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

✻ **Phân tích.** Dự đoán P đạt giá trị nhỏ nhất là 9 khi $a=b=c=1$.

Để sử dụng được giả thiết của bài toán thì ta dự đoán bất đẳng thức phụ có dạng:

$$2a+\frac{1}{a}\ge ma^2+n. \ (1)$$

$$2b+\frac{1}{b}\ge mb^2+n. \ (2)$$

$$2c+\frac{1}{c}\ge mc^2+n. \ (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2) và (3) ta được

$$P\ge m(a^2+b^2+c^2)+3n=3m+3n.$$

Do đó ta có thể chọn $3m+3n=9$ hay $n=3-m$.

Tiếp tục tìm m sao cho với $x>0$ thì

$$2x+\frac{1}{x}\ge mx^2+3-m$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{1}{x}\ge m(x-1)(x+1)+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x+1}{x}\ge m(x-1)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2x-1}{x}-m(x+1)\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[2x-1-mx(x+1)]\ge 0.$$

Ta sẽ tìm m sao cho đa thức $f(x)=2x-1-mx(x+1)$ có nhân tử là $x-1$, tức là $f(1)=2.1-1-m.1.(1+1)=0$.

Suy ra $m=\frac{1}{2}$.

Ta dự đoán bất đẳng thức phụ là

$$2a+\frac{1}{a}\ge\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{2}.$$

Lời giải. Vì $a^2+b^2+c^2=3$ nên $|a|\le\sqrt{3}<2$.

Ta sẽ chứng minh $2a+\frac{1}{a}\ge\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{2}$. (5)

Thật vậy (5) $\Leftrightarrow a^3-4a^2+5a-2\le 0$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(a-2)\le 0. \ (*)$$

Ta thấy (*) luôn đúng vì $|a|\le\sqrt{3}<2$.

Suy ra (5) đúng.

Chứng minh tương tự ta được

$$2b+\frac{1}{b}\ge\frac{1}{2}b^2+\frac{5}{2}. \ (6)$$

$$2c+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{2}c^2+\frac{5}{2}. \ (7)$$

Cộng vế với vế của (5), (6) và (7) ta được

$$P \ge \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+3.\frac{5}{2}=\frac{1}{2}.3+\frac{15}{2}=9.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy $P_{min}=9$ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 2. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$Q=\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\ge 7.$$

✻ **Phân tích**. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi (a; b; c) = (1; 0; 0) và các hoán vị.

Để sử dụng được giả thiết ta dự đoán bất đẳng thức phụ là

$$\sqrt{5a+4}\ge ma+n. \quad (1)$$

Dựa vào dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=1$, $b=c=0$ và các hoán vị. Ta thấy (1) đúng khi $a=1$ và $a=0$.

Ta lần lượt thay $a=0$ và $a=1$ vào (1) ta được $m=1$ và $n=2$.

Ta có bất đẳng thức phụ là $\sqrt{5a+4}\ge a+2$.

Lời giải. Vì a, b, c không âm và $a+b+c=1$ nên $0\le a\le 1$.

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{5a+4}\ge a+2$. (2)

Thật vậy

$$(2)\Leftrightarrow 5a+4\ge a^2+4a+4$$

$$\Leftrightarrow a^2-a\le 0\Leftrightarrow a(a-1)\le 0. \quad (3)$$

Vì $0\le a\le 1$ nên (3) luôn đúng.

Suy ra (2) luôn đúng.

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{5b+4}\ge b+2. \quad (4)$$

$$\sqrt{5c+4}\ge c+2. \quad (5)$$

Cộng vế với vế của (2), (4) và (5) ta được

$$Q\ge a+b+c+2+2+2=7.$$

Đẳng thức xảy ra khi (a; b; c) = (1; 0; 0) và các hoán vị.

Bài toán 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$R=\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1.$$

✻ **Phân tích.** Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Từ $a+b+c=3$, suy ra

$$R=\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}$$

$$=\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}.$$

Dự đoán bất đẳng thức phụ

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le ma+n.$$

Làm tương tự bài toán 1 ta được

$$R\le m(a+b+c)+3n=3m+3n.$$

Do đó ta có thể chọn $3m+3n=1$, suy ra $n=\frac{1}{3}-m$.

Ta tiếp tục tìm m sao cho với $a>0$ thì

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le ma+\frac{1}{3}-m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2-a+3}-\frac{1}{3}\le m(a-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-(a^2-a+3)}{3(a^2-a+3)}\le m(a-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a(a-1)}{3(a^2-a+3)}\le m(a-1).$$

$$\Leftrightarrow (a-1)\left(m+\frac{a}{3(a^2-a+3)}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)[3m(a^2-a+3)+a]\ge 0.$$

Ta tìm m để đa thức $g(a)=3m(a^2-a+3)+a$ có nhân tử là $x-1$. Tức là đa thức g(a) có nghiệm $a=1$. Suy ra $g(1)=3m(1^2-1+3)+1=0$. Từ đó $m=-\frac{1}{9}\Rightarrow n=\frac{4}{9}$.

Ta có bất đẳng thức phụ là

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le -\frac{1}{9}a+\frac{4}{9}.$$

Lời giải. Vì a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$ nên $0<a<3$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a^2-a+3}\le -\frac{1}{9}a+\frac{4}{9}$. (2)

Thật vậy $(2)\Leftrightarrow a^3-5a^2+7a-3\le 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(a-3)\le 0$. (3)

Ta thấy (3) luôn đúng vì $0<a<3$.

Suy ra (2) đúng.

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{1}{b^2-b+3}\le -\frac{1}{9}b+\frac{4}{9}. \quad (4)$$

$$\frac{1}{c^2-c+3}\le -\frac{1}{9}c+\frac{4}{9}. \quad (5)$$

Cộng vế với vế của (2), (4) và (5) ta được

$$R\le -\frac{1}{9}(a+b+c)+3.\frac{4}{9}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài toán 4. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$S=\frac{x(y+z)}{x^2+(y+z)^2}+\frac{y(z+x)}{y^2+(z+x)^2}+\frac{z(x+y)}{z^2+(x+y)^2}\le\frac{6}{5}.$$

✻ **Phân tích.** Vì $x+y+z=3$ nên

$$S=\frac{x(y+z)}{x^2+(y+z)^2}+\frac{y(z+x)}{y^2+(z+x)^2}+\frac{z(x+y)}{z^2+(x+y)^2}\le\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}+\frac{y(3-y)}{y^2+(3-y)^2}+\frac{z(3-z)}{z^2+(3-z)^2}\le\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9}+\frac{y(3-y)}{2y^2-6y+9}+\frac{z(3-z)}{2z^2-6z+9}\le\frac{6}{5}.$$

Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Dự đoán bất đẳng thức phụ

$$\frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9}\le mx+n. \quad (1)$$

Làm tương tự bài toán 1 ta có

$S\le m.3+3n.$

Do đó ta có thể chọn

$$\frac{6}{5}=3(m+n)\Rightarrow n=\frac{2}{5}-m.$$

Thay vào (1) ta được

$$\frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9}\le mx+\frac{2}{5}-m$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9x^2+27x-18}{5(2x^2-6x+9)}\le m(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(m+\frac{9(x-2)}{5(2x^2-6x+9)}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[5m(2x^2-6x+9)+9x-18\right]\ge 0.$$

Ta tìm m để đa thức $h(x)=5m(2x^2-6x+9)+9x-18$ có nhân tử là $x-1$. Tức là đa thức h(x) có nghiệm là $x=1$.

Suy ra $h(1)=5m(2.1^2-6.1+9)+9.1-18=0$.

Từ đó $m=\frac{9}{25}\Rightarrow n=\frac{1}{25}$.

Khi đó bất đẳng thức phụ là

$$\frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9}\le\frac{9}{25}x+\frac{1}{25}.$$

Lời giải. Vì x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$ nên $0<x<3$.

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9}\le\frac{9}{25}x+\frac{1}{25}. \quad (3)$$

Thật vậy

$$(3)\Leftrightarrow 18x^3-27x^2+9\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1)^2(2x+1)\ge 0. \quad (4)$$

Vì $0<x<3$ nên (4) luôn đúng.

Suy ra (3) đúng.

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{y(3-y)}{2y^2-6y+9}\le\frac{9}{25}y+\frac{1}{25}. \quad (5)$$

$$\frac{z(3-z)}{2z^2-6z+9}\le\frac{9}{25}z+\frac{1}{25}. \quad (6)$$

Cộng vế với vế của (3), (5) và (6) ta được

$$S=\frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9}+\frac{y(3-y)}{y^2-6y+9}+\frac{z(3-z)}{2z^2-6z+9}$$

$$\le\frac{9}{25}(x+y+z)+3.\frac{1}{25}=\frac{6}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài tập vận dụng

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{x^2}{x^2+(y+z)^2}+\frac{y^2}{y^2+(z+x)^2}+\frac{z^2}{z^2+(x+y)^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(197+198). Có tồn tại hay không một dãy gồm 2019 số tự nhiên liên tiếp mà các số đó đều là hợp số?

Lời giải. Xét 2019 số tự nhiên liên tiếp a_1; a_2; a_3; ...; a_{2019}. Trong đó

$a_k = 1.2.3.4....2020 + (k+1)$, với k = 1, 2, 3, ..., 2019.

Ta có a_k chia hết cho (k + 1) và $a_k > (k + 1)$, nên a_k là hợp số với mọi k = 1, 2, 3, ..., 2019.

Vậy tồn tại 2019 số tự nhiên liên tiếp mà không có số nào trong các số đó là số nguyên tố.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay trong chương trình số học lớp 6 và không khó nên nhiều em tham gia giải và giải đúng.

Đặc biệt có em *Bùi Đàm Quân*, 7C1, THCS Archimedes Academy chứng minh được tổng quát: Các số có dạng n! + m với m, n là số tự nhiên và $n \geq m > 1$ là hợp số. Do đó ta có thể thay số 2019 ở đề bài bằng số tự nhiên n tùy ý.

Các bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Thị Phương Linh*, *Nguyễn Thị Lệ*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Lê Văn Hải Phú*, *Tăng Thế Đạt*, *Nguyễn Sỹ Bách*, *Nguyễn Tất Quân*, *Nguyễn Kim Mạnh*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Gia Bảo*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; Bùi Đàm Quân, Vũ Nam Đức Trung, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Vũ Hữu Thanh Thảo*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

PHÙNG KIM DUNG



Bài 2(197+198). Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $7a^2 - 1$ chia hết cho 7ab – 1. Tính giá trị của biểu thức $M = a^{2019} - b^{2019}$.

Lời giải. Do $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên $7a^2 - 1$; $7ab - 1$ là các số nguyên dương.

Ta có

$(7a^2 - 1) \vdots (7ab - 1)$

$\Rightarrow 7a^2 - 1 \geq 7ab - 1 \Rightarrow 7a^2 \geq 7ab$

$\Rightarrow a \geq b.$

Ta lại có

$(7a^2 - 1) \vdots (7ab - 1)$

$\Rightarrow \left[7a^2 - 1 - (7ab - 1)\right] \vdots (7ab - 1)$

$\Rightarrow 7a(a - b) \vdots (7ab - 1).$ (1)

Giả sử

$$(7a; 7ab - 1) = d \Rightarrow \begin{cases} 7a \vdots d \\ 7ab - 1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7ab \vdots d \\ 7ab - 1 \vdots d \end{cases}$$

$\Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow (7a; 7ab - 1) = 1.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $(a - b) \vdots (7ab - 1)$.

Nếu $a > b$ thì $a - b \geq 7ab - 1.$ (3)

Ta có $b > 1 \Rightarrow -b < -1$.

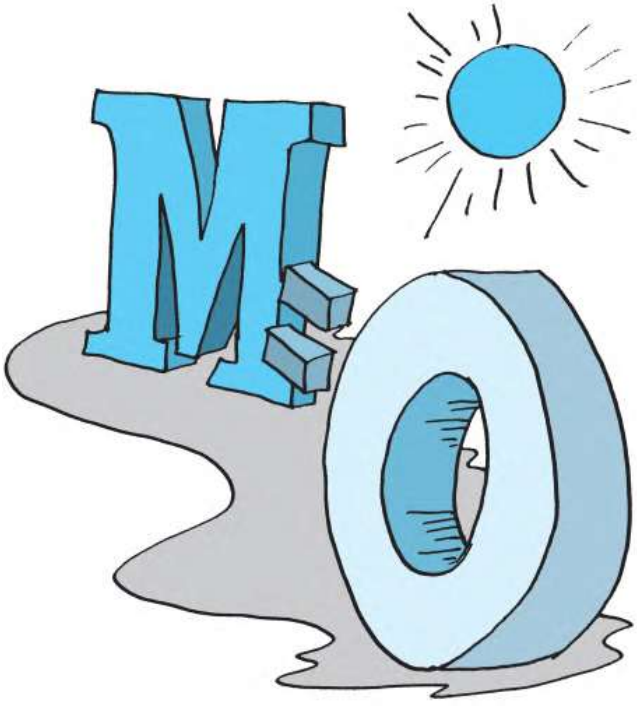
Ta lại có $1 < 7b \Rightarrow a < 7ab$

$\Rightarrow a - b < 7ab - 1$ (mâu thuẫn với (3)).

Do đó $a = b \Rightarrow a^{2019} = b^{2019} \Rightarrow M = 0$.

Nhận xét. Có nhiều bạn tham gia giải bài và có nhiều cách giải hay, các bạn sau có lời giải đúng, sạch đẹp: *Đào Quang Huy*, *Hoàng Thị Giang Quỳnh*, *Nguyễn Đức Anh*, 8A3, *Vũ Minh Đức*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Phọ**; *Nguyễn Triết Khoa*, *Lương Khánh Nhật Minh*, *Phạm Anh Khôi*, *Hàn Thái Dương*, *Lê Đức Mạnh*, *Bùi Đàm Quân*, *Nguyễn Trần Kiên*, *Nghiêm Gia Bảo*, *Vũ Nam Đức Trung*, *Hoàng Anh Khôi*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Tất Quân*, *Võ Ánh Dương*, *Tăng Thế Anh*, *Tăng Thế Đạt*, *Thái Thành Công*, *Nguyễn Sĩ Bách*, *Hoàng Văn Hùng*, *Lê Văn Quang Hiếu*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Gia Bảo*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Tùng Anh*, *Phùng Thu Thủy*, *Nguyễn Gia Huy*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

LÊ ĐỨC THUẬN



Bài 3(197+198). Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^2 + q^2 + r^2 = 6p + 4q + 2r$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra

$(p-3)^2 + (q-2)^2 + (r-1)^2 = 14$.

Suy ra $0 \le (p-3)^2 \le 14, 0 \le (q-2)^2 \le 14,$

$0 \le (r-1)^2 \le 14$ và $(p-3)^2, (q-2)^2, (r-1)^2$ là các số chính phương.

Do đó $(p-3)^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$, $(q-2)^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$, $(r-1)^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$.

Xét các trường hợp ta được các bộ ba số (p; q; r) thỏa mãn là (5; 5; 2) và (2; 5; 3).

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nghiêm Gia Bảo*, *Bùi Đàm Quân*, *Nguyễn Triết Khoa*, *Hoàng Anh Khôi*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Bùi Thị Ngọc Ánh*, *Nguyễn Đức Học*, *Nguyễn Sĩ Bách*, *Lê Văn Quang Hiếu*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Gia Bảo*, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Gia Huy*, 8C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Thị Phương Linh*, 7A1; *Phùng Thu Thủy*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Vũ Minh Đức*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

CAO VĂN DŨNG

Bài 4(197+198). Cho 2019 số nguyên dương không vượt quá 4036. Chứng minh rằng tồn tại hai số x, y trong 2019 số đã cho thỏa mãn x chia hết cho y.

Lời giải. Mỗi số trong 2019 số nguyên dương không vượt quá 4036 đã cho đều viết được dưới dạng $a = 2^k.b$ với $k \in \{0, 1, 2, ..., 10\}$ và $b \in \{1, 3, 5, ..., 4035\} = A$.

Tập hợp A có số phần tử là

$\frac{4035-1}{2} + 1 = 2018$.

Ta thấy có 2019 số nguyên dương mà chỉ có 2018 giá trị của b, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số có giá trị của b bằng nhau.

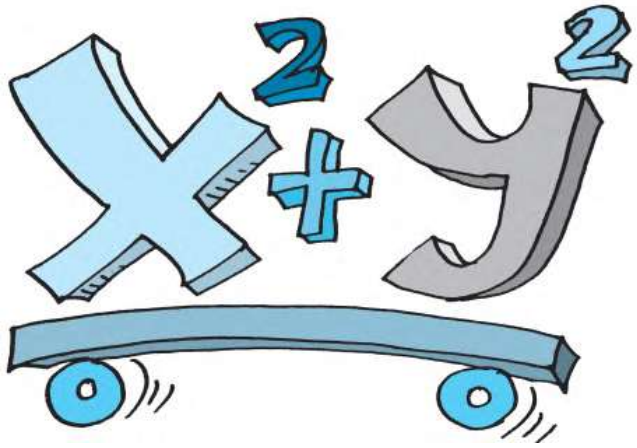
Gọi hai số đó là $x = 2^{\alpha}.b$ và $y = 2^{\beta}.b$ (với $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, ..., 10\}$, $\alpha \geq \beta$).

Khi đó $2^{\alpha} \vdots 2^{\beta} \Rightarrow 2^{\alpha}.b \vdots 2^{\beta}.b$, hay $x \vdots y$.

Suy ra đpcm.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Sĩ Bách*, *Lê Văn Quang Hiếu*, *Nguyễn Tất Quân*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; *Phạm Thị Thu Ngân*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nghiêm Gia Bảo*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

HỒ QUANG VINH



Bài 5(197+198). Có tồn tại hay không các số nguyên dương x, y (x > y) và số nguyên tố p có dạng 8k + 3 ($k \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} = p$?

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y (x > y) và số nguyên tố p dạng 8k + 3 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó dễ thấy $x^2 - y^2$ phải là số chính phương.

Đặt $x^2 - y^2 = z^2$ ($z \in \mathbb{N}^*$), ta có

$$\frac{2y^2 + z^2}{z} = p \Leftrightarrow 2y^2 + z^2 = pz.$$

Đặt (y, z) = d, khi đó tồn tại các số nguyên dương a, b với (a, b) = 1 sao cho y = da và z = db. Phương trình trên có thể viết lại thành $2da^2 + db^2 = pb$.

Suy ra $2da^2$ chia hết cho b. Mà (a, b) = 1 nên ta có 2d chia hết cho b. Suy ra $b = \frac{2d}{k}$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Phương trình trên được viết lại thành $k(2a^2 + b^2) = 2p$.

Vì $2a^2 + b^2 \geq 3$ nên xảy ra các trường hợp sau:

- TH1. k = 1 và $2a^2 + b^2 = 2p$. Trong trường hợp này, ta thấy b = 2d.

Suy ra $2p = 2a^2 + 4d^2 \Leftrightarrow p = a^2 + 2d^2$.

Do p lẻ nên a lẻ, suy ra $a^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Mà $p \equiv 3 \pmod 8$ nên $2d^2 \equiv 2 \pmod 8$, tức là $d^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Vậy d là số lẻ. Từ đây, ta có

$x^2 = y^2 + z^2 = d^2a^2 + 4d^4 \equiv 5 \pmod 8$ (vô lí).

- TH2. k = 2 và $2a^2 + b^2 = p$. Trong trường hợp này, ta thấy b = d.

Suy ra $p = 2a^2 + d^2$.

Chứng minh tương tự TH 1, ta được a và d đều là số lẻ.

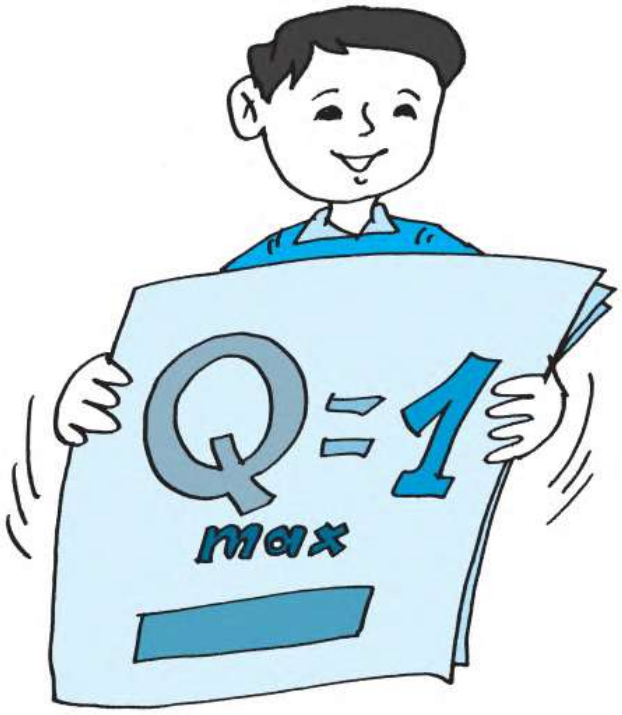
Suy ra $x^2 = y^2 + z^2 = d^2a^2 + 4d^4 \equiv 2 \pmod 8$ (vô lí).

Vậy không tồn tại các số nguyên dương x, y (x > y) và số nguyên tố p thỏa mãn yêu cầu.

Nhận xét. Đa số các bạn tham gia giải đều sử dụng tính chất của số nguyên tố dạng 4*k* + 3: "*Nếu x, y là hai số nguyên thỏa mãn* $x^2 + y^2$ *chia hết cho số nguyên tố p có dạng* 4*k* + 3 *thì cả hai số x, y đều chia hết cho p*". Tuy nhiên, tính chất này vượt quá phạm vi kiến thức chương trình THCS. Đó cũng là lí do vì sao tác giả bài toán yêu cầu "tồn tại hay không số nguyên tố p dạng 8k + 3", mục đích là để có lời giải phù hợp với kiến thức THCS hiện hành.

Các bạn sau có lời giải tốt: *Phạm Việt Anh*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Quang Đạt*, *Trần Thị Yến Khanh*, *Hà Quang Tùng*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

VÕ QUỐC BÁ CẨN



Bài 6(197+198). Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = a + b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$0 = a^2 + b^2 - a - b$

$= (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + a + b - 2$

$= (a-1)^2 + (b-1)^2 + a + b - 2 \ge a + b - 2$

$\Rightarrow 2 \ge a + b.$

Với x, y > 0 thì ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} = \frac{x+y}{xy} - \frac{4}{x+y}$$

$$= \frac{(x+y)^2 - 4xy}{xy(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \ge 0.$$

Suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$.

Do đó

$$Q = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{b+1}\right)$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) \le 2 - \frac{4}{a+1+b+1}$$

$$\le 2 - \frac{4}{2+2} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.

Vậy $Q_{max} = 1$ khi a = b = 1.

Nhận xét. Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản, không quá khó. Các bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Hải Yến Nhi*, *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc; *Phạm Thị Ngọc Huyền*, *Vũ Minh Nguyệt*, 8E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Kim Mạnh*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Phan Khánh An*, 8A; *Ngô Thị An Bình*, 8E; *Nguyễn Duy Khôi Nguyên*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Đào Đoàn Tuấn Anh*, *Phan Dương Đức*, *Dương Bảo Lưu*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Ngô Gia Đức*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 9D5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Lê Duy Anh*, *Nguyễn Trường Minh*, *Nguyễn Bích Đạt*, *Đỗ Hoàng Nhật Nam*, *Nguyễn Minh Phương*, *Nguyễn Lương Vy*, 9C1, THCS Archimedes Academy; *Đặng Vũ Cường*, 9A5, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

NGUYỄN MINH ĐỨC



Bài 7(197+198). Tìm các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3+y^2}+\sqrt{3+z^2}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}$$

$$=2x+2y+2z.$$



Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\sqrt{\frac{3+x^2}{x}}.\sqrt{x}+\sqrt{\frac{3+y^2}{y}}.\sqrt{y}+\sqrt{\frac{3+z^2}{z}}.\sqrt{z}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{3+x^2}{x}+\frac{3+y^2}{y}+\frac{3+z^2}{z}\right)(x+y+z)$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3+y^2}+\sqrt{3+z^2}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}+x+y+z\right)(x+y+z).$$

Kết hợp giả thiết

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=2x+2y+2z \text{ suy ra}$$

$$\left(\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3+y^2}+\sqrt{3+z^2}\right)^2\le 4(x+y+z)^2.$$

Do đó

$$\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3+y^2}+\sqrt{3+z^2}$$

$$\le 2(x+y+z). \quad (1)$$

Theo giả thiết ta có

$$\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3+y^2}+\sqrt{3+z^2}=2x+2y+2z.$$

Do đó xảy ra đẳng thức ở (1), tức là

$$\begin{cases}\dfrac{3+x^2}{x}=\dfrac{3+y^2}{y}=\dfrac{3+z^2}{z}\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}=2x+2y+2z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1.$$

Thử lại thấy bộ số (x, y, z) = (1, 1, 1) thỏa mãn.

Vậy (x, y, z) = (1, 1, 1).

Nhận xét. Có nhiều bạn gửi bài đến tòa soạn. Các bạn sau có lời giải đúng, trình bày tốt: *Phạm Việt Anh*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Kim Mạnh*, 7D, THCS Lý NHật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Trần Thị Yến Khanh*, *Trần Hiền Khanh*, *Trần Như Quỳnh*, *Hà Quang Tùng*, *Nguyễn Minh Châu*, *Hoàng thị Yến Nhi*, *Trần Quang Đạt*, *Triệu Hoàng Ánh Dương*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Đinh Gia Huy*, *Nguyễn Bá Hoàng*, 9E, *Trần Minh Khôi*, *Hán Vũ Long*, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Lê Đăng Quang*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**, *Nguyễn Lương Vy*, 8C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

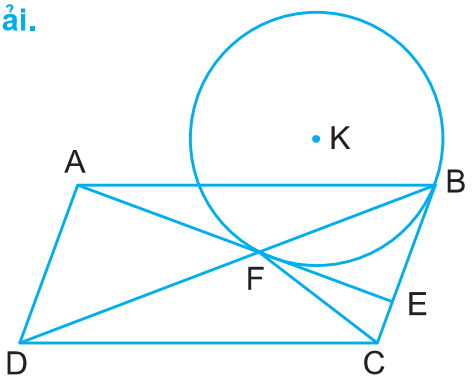
TRỊNH HOÀI DƯƠNG





Bài 8(197+198). Cho hình bình hành ABCD có đường cao AE, biết rằng AE = 2AD và E nằm giữa B và C. Gọi F là giao điểm của AE và BD. Gọi K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc C của tam giác ECF. Chứng minh rằng bán kính đường tròn bàng tiếp trong góc C của tam giác ECF bằng KB.

Lời giải.



Vì tứ giác ABCD là hình bình hành nên AD // BC.

Theo định lí Thales, ta có $\frac{EF}{FA}=\frac{EB}{AD}=\frac{EB}{BC}$.

Do đó $\frac{FA-EF}{FA}=\frac{BC-EB}{BC}=CE:\frac{AE}{2}$

$\Rightarrow 2CE\cdot FA=(FA-FE)(FE+FA)=FA^2-FE^2.$

Từ đó suy ra

$(FA-CE)^2=FA^2+CE^2-2FA\cdot CE$

$=FA^2+(FC^2-FE^2)-(FA^2-FE^2)=FC^2.$

Từ $CE<FC$, ta thu được $FA-CE=FC$ hay $FA=FC+CE$.

Ta lại có

$2BC=AE=AF+FE=(FC+CE)+FE.$

Vậy B là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp trong góc C của tam giác ECF với cạnh CE, nói cách khác KB là bán kính của đường tròn này.

Nhận xét. Hầu hết các bạn trình bày lời giải dài. Sau đây là các bạn giải đúng: *Triệu Hoàng Ánh Dương*, *Nguyễn Minh Châu*, *Hà Quang Tùng*, *Trần Thị Yến Khanh*, 9A3, THCS Lâm Thao; *Nguyễn Bá Hoàng*, 9E; *Trần Minh Khôi*, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

TRẦN QUANG HÙNG



ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Vũ Minh Đức, 7A3; *Nguyễn Đức Anh*, 8A3,THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Phọ**; *Bùi Đàm Quân*, 7C1, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Phạm Thị Thu Ngân*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 9D5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Gia Bảo*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Bùi Thị Ngọc Ánh*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Ngô Gia Đức*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Hữu Thanh Thảo*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**; *Phùng Thu Thủy*, 6A2; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.



TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC LÀ SỐ NGUYÊN

PHẠM VĂN SƠN

GV. THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, Phú Thọ

Bài toán tìm giá trị nguyên của biến để giá trị của biểu thức thức là số nguyên xuất hiện nhiều trong các kì thi học sinh giỏi lớp 9 và thi vào lớp 10. Bài viết này chúng tôi muốn đưa ra một số phương pháp để giải dạng toán này.

1. Phương pháp tách ra phần nguyên

Bài toán 1. Cho biểu thức

$$P=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2-x}.$$

Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của P là số nguyên.

Lời giải. ĐKXĐ $x\neq 0, x\neq 1$.

Chia đa thức ở tử thức cho đa thức ở mẫu thức ta được

$$P=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2-x}=x+3+\frac{2}{x^2-x}.$$

Do x là số nguyên nên $x+3$ là số nguyên.

Giá trị của P là số nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x^2-x}\in\mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow x^2-x$ là ước của 2. (1)

Do $x^2-x=x(x-1)$ là số nguyên chẵn nên

(1) $\Leftrightarrow x^2-x\in\{\pm 2\}$.

Xét các trường hợp và giải ra ta được

$x\in\{-1;2\}$.

Bài toán 2. Cho biểu thức

$$P=\frac{x^3-2x^2+7x-7}{x^2+3}.$$

Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của P là số nguyên.

Lời giải. Chia đa thức ở tử thức cho đa thức ở mẫu thức ta được

$$P=\frac{x^3-2x^2+7x-7}{x^2+3}=x-2+\frac{4x-1}{x^2+3}.$$

Vì x là số nguyên nên $x-2$ là số nguyên. Để giá trị của P là số nguyên thì

$(4x-1)\vdots(x^2+3)$

$\Rightarrow (4x-1)(4x+1)\vdots(x^2+3)$

$\Rightarrow 16x^2-1\vdots(x^2+3)$

$\Rightarrow 16(x^2+3)-49\vdots(x^2+3)$

Mà $16(x^2+3)\vdots(x^2+3)$.

Suy ra $49\vdots(x^2+3)$.

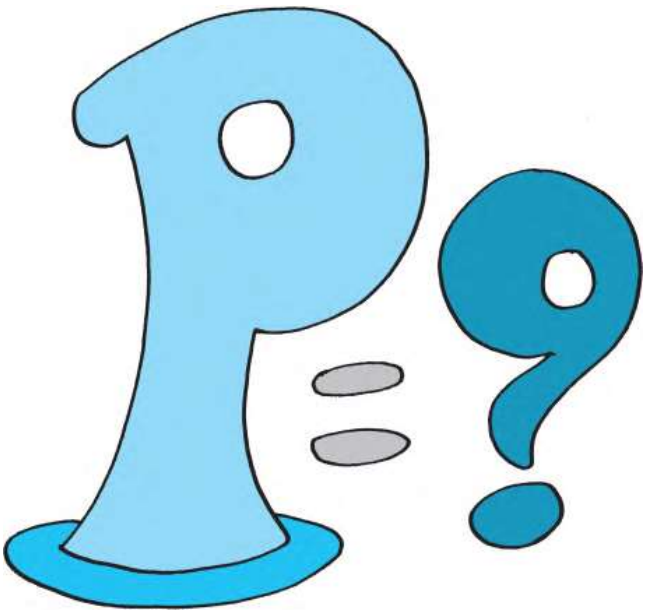
Mặt khác $x^2+3\geq 3$.

Suy ra $x^2+3=7$ hoặc $x^2+3=49$.

Xét các trường hợp ta được $x\in\{\pm 2\}$.

Thử lại thỏa mãn.

Vậy $x\in\{\pm 2\}$.



2. Phương pháp kẹp

Bài toán 3. Cho biểu thức

$$P=\frac{2}{3x+2\sqrt{x}+1}.$$

Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của P là số nguyên.

Lời giải. ĐKXĐ: $x\ge 0$.

Vì $x\ge 0$ nên $3x+2\sqrt{x}+1>0\Rightarrow P>0$.

Mặt khác $3x+2\sqrt{x}+1\ge 1\Rightarrow P\le 2$.

Suy ra $0<P\le 2$.

Vì P là số nguyên nên $P=1$ hoặc $P=2$.

Xét các trường hợp chỉ có $x=0$ thỏa mãn.

Nhận xét. *Bài toán trên có thể sửa đề bài thành tìm số thực x để giá trị của biểu thức P là số nguyên, khi đó có thêm* $x=\frac{1}{9}$ *thỏa mãn.*

Bài toán 4. Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

Tìm số thực x để giá trị của biểu thức P là số nguyên.

Lời giải. Cách 1. ĐKXĐ $x\ge 0$.

Ta có $P=\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}=1+\frac{5}{\sqrt{x}+3}>1$.

Mà $x\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+3\ge 3\Rightarrow P=1+\frac{5}{\sqrt{x}+3}\le\frac{8}{3}$.

Suy ra $1<P\le\frac{8}{3}<3$.

Mà P là số nguyên nên $P=2$.

Suy ra $x=4$ (thỏa mãn).

Vậy $x=4$.

Cách 2. ĐKXĐ $x\ge 0$.

Giả sử tồn tại x để P là số nguyên.

Ta có $P=\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}\Rightarrow P(\sqrt{x}+3)=\sqrt{x}+8$

$\Rightarrow \sqrt{x}(P-1)=8-3P$. (1)

✻ Nếu $P=1$, thay vào (1) không thỏa mãn.

✻ Nếu $P\ne 1$ thì từ (1) suy ra

$\frac{8-3P}{P-1}=\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow 1<P\le\frac{8}{3}$.

Mà P là số nguyên nên $P=2$.

Vậy $x=4$.

Bài toán 5. Cho biểu thức

$$P=\frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2+3}.$$

Tìm số thực x để giá trị của P là số nguyên.

Lời giải. ĐKXĐ $x\ge 0$.

✻ Nếu $x=0$ thì $P=0$ (thỏa mãn).

✻ Nếu $x>0$, ta có

$$P=\frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2+3}=\frac{3\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}=\frac{3}{\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-2}.$$

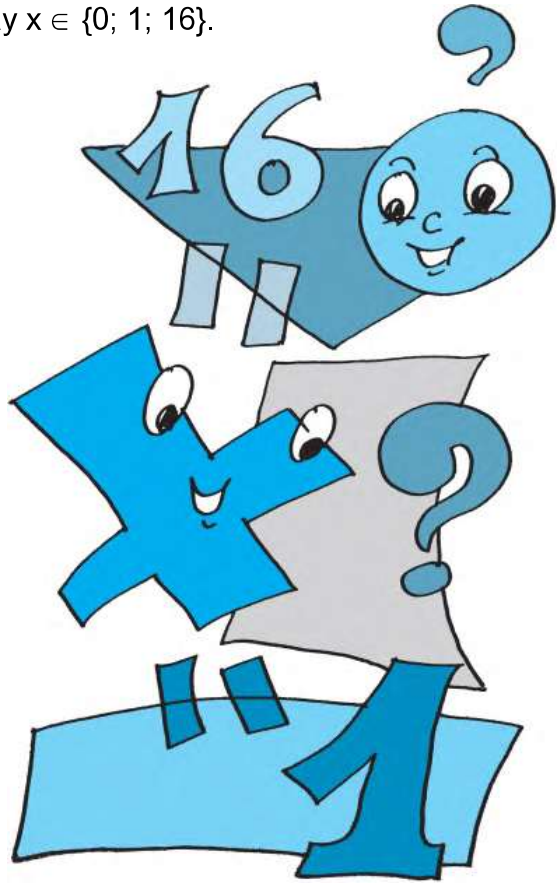
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với hai số dương ta có

$$\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-2\ge 2.\sqrt{\sqrt{x}.\frac{4}{\sqrt{x}}}-2=2\Rightarrow 0<P\le\frac{3}{2}.$$

Mà P là số nguyên nên $P=1$.

Suy ra $x=1$ hoặc $x=16$.

Vậy $x\in\{0;1;16\}$.



3. Phương pháp sử dụng tính chất của số vô tỉ, số hữu tỉ

Bài toán 6. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5}$.

Tìm số thực x để giá trị của biểu thức A là số nguyên.

Lời giải. ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 25$.

Ta có $A = \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5} = 1 + \dfrac{10}{\sqrt{x}-5}$.

$\ast$ Nếu $\sqrt{x}$ là số vô tỉ thì $\dfrac{10}{\sqrt{x}-5}$ là số vô tỉ.

Suy ra A là số vô tỉ (loại).

Do đó để A nguyên thì $\sqrt{x}$ là số hữu tỉ.

Đặt $\sqrt{x} = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$ là số nguyên dương và $(p, q) = 1$, $p \neq 5q$.

Khi đó $A = \dfrac{p+5q}{p-5q} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{p+5q}{p-5q} = k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $p(1-k) = -5q(k+1)$.

Do p, q là số nguyên dương nên

$(1-k)(k+1) \leq 0$.

Suy ra $k > 1$ hoặc $k \leq -1$ (vì $k \neq 1$).

Ta thấy $x = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = \left[\dfrac{5(k+1)}{k-1}\right]^2 \neq 25$.

Mặt khác $x = 0 = \left[\dfrac{5(-1+1)}{-1-1}\right]^2$.

Vậy $x = \left[\dfrac{5(k+1)}{k-1}\right]^2$ với $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ và $k \neq 1$.

Bài toán 7. Cho biểu thức $B = \dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$.

Tìm số hữu tỉ x để giá trị của P là số nguyên.

Lời giải. ĐKXĐ $x > 4$.

Nếu $\sqrt{x-4}$ là số vô tỉ thì $B = \dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$ là số vô tỉ (loại).

Do đó $\sqrt{x-4}$ là số hữu tỉ.

Đặt $\sqrt{x-4} = \dfrac{p}{q}$, với p, q là các số nguyên dương và $(p, q) = 1$.

Suy ra $x = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2 + 4$.

Khi đó

$B = \dfrac{2p^2+8q^2}{pq} = k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2p^2 + 8q^2 = kpq : q \Rightarrow 2p^2 : q \Rightarrow 2 : q$.

(vì $(p, q) = 1$ nên $(p^2, q) = 1$).

Tương tự ta có

$\Rightarrow 2p^2 + 8q^2 = kpq : p \Rightarrow 8q^2 : p \Rightarrow 8 : p$.

(vì $(p, q) = 1$ nên $(p, q^2) = 1$).

Ta có q là ước dương của 2, p là ước dương của 8, $(p, q) = 1$ nên ta có bảng giá trị sau:

q	1	1	1	1	2
p	1	2	4	8	1
x	5	8	20	68	$\dfrac{17}{4}$
B	10	8	10	17	17

Vậy $x \in \left\{5; 8; 20; 68; \dfrac{17}{4}\right\}$.

Bài tập vận dụng

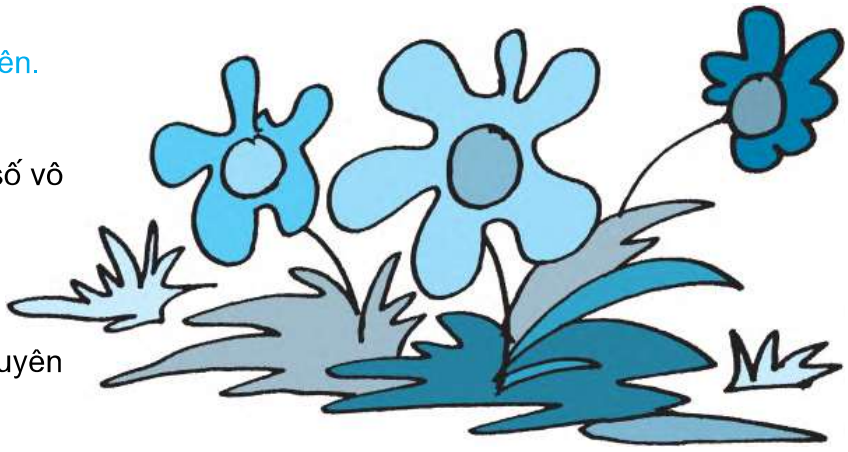
Bài 1. Tìm số nguyên x để giá trị biểu thức sau là số nguyên

a) $A = \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$;

b) $B = \dfrac{4x^3+2x^2+9x+7}{2x^2+3}$.

Bài 2. Cho biểu thức $E = \dfrac{8\sqrt{x}+16}{x+4\sqrt{x}+5}$.

Tìm số thực x để giá trị của E là số nguyên.



KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

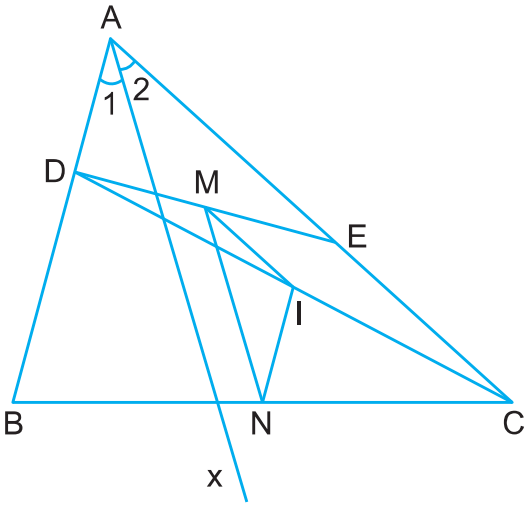
VÕ XUÂN MINH

GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa

Trong một số sách tham khảo toán hình học có bài toán nâng cao sau đây:

Bài toán 1. Cho tam giác ABC (AB < AC). Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho BD = CE (D và E không trùng với A). Gọi M và N thứ tự là trung điểm của DE và BC. Chứng minh rằng MN song song với tia phân giác của góc BAC.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của CD.

Ta có IN và IM thứ tự là đường trung bình của các tam giác BCD và CDE nên

$IN \,//\, BD,\ IN = \dfrac{BD}{2}$ và $IM \,//\, CE,\ IM = \dfrac{CE}{2}$.

Mà BD = CE nên suy ra IN = IM.

Do đó tam giác IMN cân tại I.

Suy ra $\widehat{IMN} = \widehat{INM}$.

Vẽ Ax // MN.

Ta có $\widehat{xAB} = \widehat{INM} = \widehat{IMN} = \widehat{xAC}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song đều nhọn)

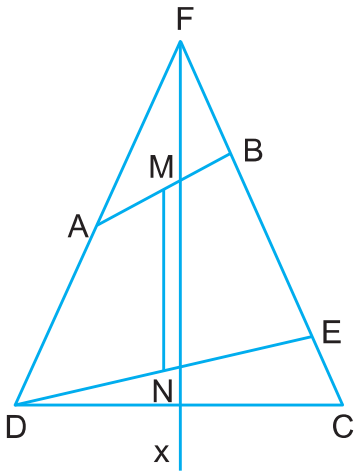
Suy ra Ax là tia phân giác của góc BAC.

Suy ra đpcm.

Sau đây là một số bài toán có sử dụng kết quả của bài toán 1.

Bài toán 2. Cho tứ giác ABCD có AD < BC và $\hat{C} = \hat{D}$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = AD. Gọi M và N thứ tự là trung điểm của AB và DE. Chứng minh rằng MN ⊥ DC.

Lời giải.



✻ Nếu $\hat{C} = \hat{D} = 90^o$ thì MN // AD // BC.

Suy ra MN ⊥ DC.

✻ Nếu $\hat{C} = \hat{D} \neq 90^o$ thì AD không song song với BC. Gọi F là giao điểm của AD và BC.

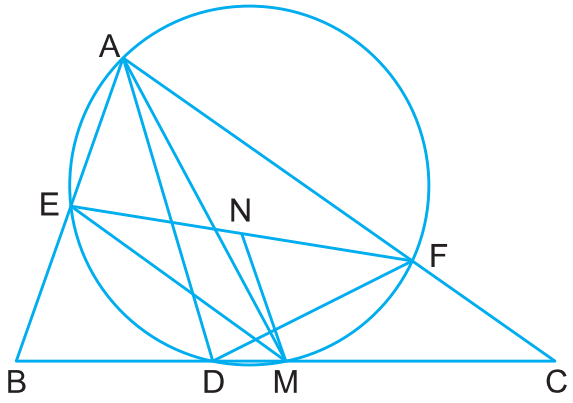
Theo bài toán 1 thì MN song song với tia phân giác Fx của góc DFC.

Theo giả thiết $\hat{C} = \hat{D}$ nên ΔCDF cân tại F.

Suy ra Fx ⊥ DC, từ đó suy ra MN ⊥ DC.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC (AB ≠ AC) có đường phân giác AD và đường trung tuyến AM. Đường tròn ngoại tiếp ΔADM cắt AB và AC thứ tự tại E và F khác A. Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng MN // AD.

Lời giải.



Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BME}$ nên ΔBEM ∽ ΔBDA (g.g).

Suy ra $\dfrac{BE}{BM} = \dfrac{BD}{BA}$. (1)

Ta lại có $\widehat{BAM} = \widehat{CMF}$, suy ra

$\Delta CFD \backsim \Delta CMA$ (g.g), từ đó $\frac{CF}{CM} = \frac{CD}{CA}$. (2)

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có $\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$. (3)

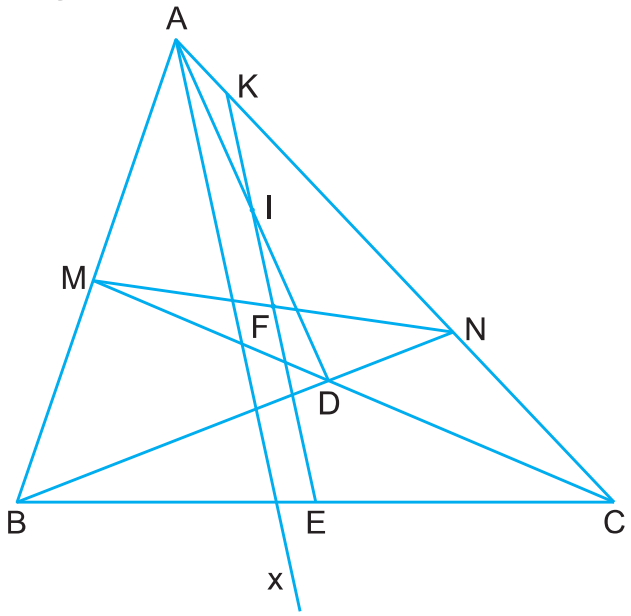
Theo đề bài ta có BM = CM. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra BE = CF.

Theo bài toán 1 thì MN // AD.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có AB < AC, hai điểm M, N lần lượt di động trên hai cạnh AB, AC sao cho BM = CN. Gọi E và F thứ tự là trung điểm của BC và MN. Đường thẳng EF cắt AC tại K. Chứng minh rằng điểm K cố định.

Lời giải.



Gọi tia Ax là tia phân giác của góc BAC.

Theo bài toán 1 thì EF // Ax.

Mà tia Ax cố định và điểm E cố định nên đường thẳng EK cố định.

Mà K thuộc AC, suy ra điểm K cố định.

Bài toán 5. Dựng tam giác ABC biết AC – AB = n, $\widehat{A} = \alpha$ và độ dài đường trung tuyến AM bằng m.

Lời giải. ✻ **Phân tích.** Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu đề bài.

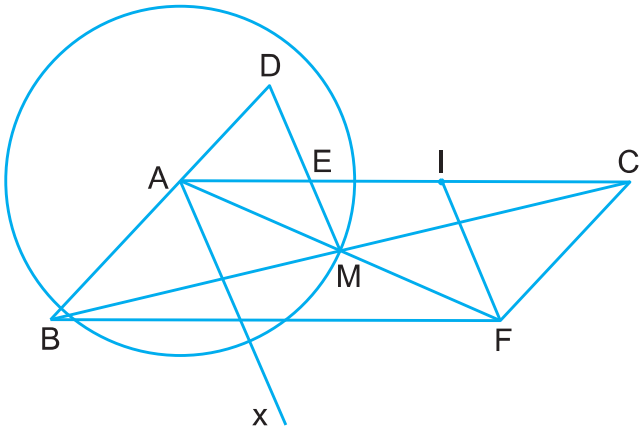
Gọi F là điểm đối xứng với A qua M. Khi đó tứ giác ACFB là hình bình hành.

Trên cạnh AC lấy điểm I sao cho AI = n. Gọi E là trung điểm của AI, gọi D là điểm thuộc tia đối của tia AB sao cho AD = AE.

Ta có $\widehat{DAE} = 180^o - \alpha$ và $AD = AE = \frac{n}{2}$.

Ta chứng minh được FI // DM và FI // Ax, từ đó ta có ba điểm D, E, M thẳng hàng.

Trước hết ta dựng được tam giác ADE, sau đó dựng điểm M, điểm B, điểm C.



✻ **Cách dựng.**

- Dựng tam giác ADE sao cho $\widehat{DAE} = 180^o - \alpha$, $AD = AE = \frac{n}{2}$.
- Dựng đường tròn (A, m) cắt đường thẳng DE tại M.
- Dựng điểm F đối xứng với A qua M.
- Dựng điểm B là giao điểm của đường thẳng qua F song song với AE và tia đối của tia AD.
- Dựng điểm C là giao điểm của đường thẳng qua F song song với AB và đường thẳng AE.

✻ **Chứng minh.** Theo cách dựng ta có $\widehat{BAC} = \alpha$, AM = m, tứ giác ABFC là hình bình hành. Mà MA = MF nên MB = MC.

Trên cạnh AC lấy điểm I sao cho CI = AB.

Gọi E' là trung điểm của AI thì ta chứng minh được ME' song song với tia Ax là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Mặt khác $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BAx}$.

Suy ra ME // Ax $\Rightarrow$ E' $\equiv$ E.

Từ đó AC – AB = AI = 2AE = n.

Do đó tam giác ABC là tam giác cần dựng.

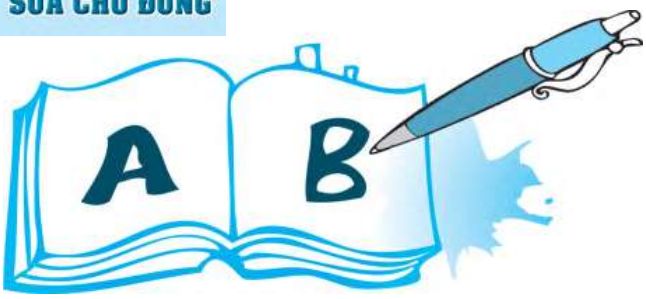
Phần biện luận xin dành cho bạn đọc.

Các bạn hãy tìm các hướng khai thác khác của bài toán 1 nhé.



PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM HAY KHÔNG?

NGUYỄN NGỌC HÙNG
GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh



Bài toán. Giải phương trình

$$\sqrt{-x^3-2015x^2+4033x-2017}+\sqrt{x+2016}=\sqrt{2017}.$$

Một học sinh đã giải như sau:

ĐKXĐ $\begin{cases}-x^3-2015x^2+4033x-2017\ge 0\\ x+2016\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+2015x^2-4033x+2017\le 0\\ x+2016\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2(x+2017)\le 0\\ x+2016\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -2017\\ x\ge -2016.\end{cases}$

Từ ĐKXĐ ta có phương trình vô nghiệm.

Các bạn hãy nhận xét xem lời giải trên có chỗ nào chưa ổn? Bạn hãy sửa lại cho đúng nhé!

Kết quả **(TTT2 số 197+198)**

LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

Lời giải sai lầm ở chỗ

- Chưa chỉ ra được A luôn lớn hơn 11.
- $8.(-1)^n \equiv 8 \pmod{11}$ đồng dư thức này chỉ đúng khi n là số chẵn mà trong lời giải chưa có lập luận nào chứng tỏ điều này.

Sửa lại. • Với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ ta có: $A = 2^{3^{4n+1}} + 3 > 2^3 + 3 = 11$.

Do đó A luôn lớn hơn 11 với mọi số tự nhiên n.

• Từ $3^{4n+1} = 5k + 3$ ($k \in \mathbb{N}^*$) suy ra k là số chẵn. Do đó $8.(-1)^k \equiv 8 \pmod{11}$.

HONG HA

Nhận xét. Đây là bài toán cần lập luận rất chặt chẽ, chính xác. Đã có nhiều học sinh tham gia sửa và hầu hết đều phát hiện điểm sai cơ bản, nhưng một số bạn không đưa ra được cách sửa đúng hoặc không phát hiện hết lỗi sai, thiếu, không chỉ ra điều kiện số A luôn lớn hơn 11 với mọi n là số nguyên dương, mới dừng ở việc chỉ ra A chia hết cho 11 và đưa ra kết luận nên không đủ chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải tốt, đầy đủ và chặt chẽ được thưởng kì này: *Nguyễn Thanh Tuấn*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Minh Vương*, 9A5, THCS Cầu Giấy, Q Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Phạm Thanh Nga*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

Các bạn sau phát hiện và sửa đúng, tuy nhiên còn thiếu việc chỉ ra A lớn hơn hoặc bằng 11: *Hoàng Đình Đức*, 8C; *Nguyễn Kim Mạnh*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Trần Chí Đạt*, 8G; *Bùi Hà Linh*, 9D; *Nguyễn Lê Hưng*, 9D; *Ngô Thị An Bình*, 8E; *Phan Hữu Cường*, 7B; *Đinh Xuân Linh*, 8A; *Phạm Việt Anh*, 9D; *Phan Quang Triết*, 7B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3; *Lê Công Nam*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Trần Như Quỳnh*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Hoàng Minh Vũ*, 7D, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.

Các bạn sau chỉ nêu được phần sai của lời giải mà chưa đưa ra lời giải đúng: *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Đặng Quang Huy*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Thế Sơn*, 9A1, THCS Vĩnh Yên, Vĩnh Yên; *Nguyễn Lê Đức Anh*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**.

VI MẠNH TƯỜNG

TÌM HIỂU CHƯƠNG TRÌNH 2018
MÔN TOÁN BẬC TRUNG HỌC CƠ SỞ

1. Mục tiêu bậc trung học cơ sở

Môn Toán bậc trung học cơ sở nhằm giúp học sinh đạt các mục tiêu chủ yếu sau:

a) Góp phần hình thành và phát triển năng lực toán học với yêu cầu cần đạt: nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề, thực hiện được việc lập luận hợp lí khi giải quyết vấn đề, chứng minh được mệnh đề toán học không quá phức tạp; sử dụng được các mô hình toán học (công thức toán học, phương trình đại số, hình biểu diễn,...) để mô tả tình huống xuất hiện trong một số bài toán thực tiễn không quá phức tạp; sử dụng được ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường để biểu đạt các nội dung toán học cũng như thể hiện chứng cứ, cách thức và kết quả lập luận; trình bày được ý tưởng và cách sử dụng công cụ, phương tiện học toán để thực hiện một nhiệm vụ học tập hoặc để diễn tả những lập luận, chứng minh toán học.

b) Có những kiến thức và kĩ năng toán học cơ bản về:

- Số và Đại số: Hệ thống số (từ số tự nhiên đến số thực); tính toán và sử dụng công cụ tính toán; ngôn ngữ và kí hiệu đại số; biến đổi biểu thức đại số, phương trình, hệ phương trình, bất phương trình; sử dụng ngôn ngữ hàm số để mô tả (mô hình hoá) một số quá trình và hiện tượng trong thực tiễn.
- Hình học và Đo lường: Nội dung Hình học và Đo lường ở bậc học này bao gồm Hình học trực quan và Hình học phẳng. Hình học trực quan tiếp tục cung cấp ngôn ngữ, kí hiệu, mô tả (ở mức độ trực quan) những đối tượng của thực tiễn (hình phẳng, hình khối); tạo lập một số mô hình hình học thông dụng; tính toán một số yếu tố hình học; phát triển trí tưởng tượng không gian; giải quyết một số vấn đề thực tiễn đơn giản gắn với Hình học và Đo lường. Hình học phẳng cung cấp những kiến thức và kĩ năng (ở mức độ suy luận logic) về các quan hệ hình học và một số hình phẳng thông dụng (điểm, đường thẳng, tia, đoạn thẳng, góc, hai đường thẳng song song, tam giác, tứ giác, đường tròn).
- Thống kê và Xác suất: Thu thập, phân loại, biểu diễn, phân tích và xử lí dữ liệu thống kê; phân tích dữ liệu thống kê thông qua tần số, tần số tương đối; nhận biết một số quy luật thống kê đơn giản trong thực tiễn; sử dụng thống kê để hiểu các khái niệm cơ bản về xác suất thực nghiệm của một biến cố và xác suất của một biến cố; nhận biết ý nghĩa của xác suất trong thực tiễn.

c) Góp phần giúp học sinh có những hiểu biết ban đầu về các ngành nghề gắn với môn Toán; có ý thức hướng nghiệp dựa trên năng lực và sở thích, điều kiện và hoàn cảnh của bản thân; định hướng phân luồng sau trung học cơ sở (tiếp tục học lên, học nghề hoặc tham gia vào cuộc sống lao động).

2. Phát triển các thành phần năng lực

a) Năng lực tư duy và lập luận toán học thể hiện qua việc:

- Thực hiện được các thao tác tư duy như: so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hoá, khái quát hoá, tương tự; quy nạp, diễn dịch. Cụ thể: Thực hiện được các thao tác tư duy, đặc biệt biết quan sát, giải thích được sự tương đồng và khác biệt trong nhiều tình huống và thể hiện được kết quả của việc quan sát.
- Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí trước khi kết luận. Cụ thể: Thực hiện được việc lập luận hợp lí khi giải quyết vấn đề.
- Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học. Cụ thể: Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề. Chứng minh được mệnh đề toán học không quá phức tạp.

b) Năng lực mô hình hoá toán học thể hiện qua việc:

- Xác định được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, bảng biểu, đồ thị,...) cho tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn. Cụ thể: Sử dụng được các mô hình toán học (gồm công thức toán học, sơ đồ, bảng biểu, hình vẽ, phương trình, hình biểu diễn,...) để mô tả tình huống xuất hiện trong một số bài toán thực tiễn không quá phức tạp.
- Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập.
- Thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tế và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp. Cụ thể: Thể hiện được lời giải toán học vào ngữ cảnh thực tiễn và làm quen với việc kiểm chứng tính đúng đắn của lời giải.

c) Năng lực giải quyết vấn đề toán học thể hiện qua việc:

- Nhận biết, phát hiện được vấn đề cần giải quyết bằng toán học. Cụ thể: Phát hiện được vấn đề cần giải quyết.
- Lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề. Cụ thể: Xác định được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề.
- Sử dụng được các kiến thức, kĩ năng toán học tương thích (bao gồm các công cụ và thuật toán) để giải quyết vấn đề đặt ra.
- Đánh giá được giải pháp đề ra và khái quát hoá được cho vấn đề tương tự. Cụ thể: Giải thích được giải pháp đã thực hiện.

d) Năng lực giao tiếp toán học thể hiện qua việc:

- Nghe hiểu, đọc hiểu và ghi chép được các thông tin toán học cần thiết được trình bày dưới dạng văn bản toán học hay do người khác nói hoặc viết ra. Từ đó phân tích, lựa chọn, trích xuất được các thông tin toán học cần thiết từ văn bản (ở dạng văn bản nói hoặc viết).
- Trình bày, diễn đạt (nói hoặc viết) được các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học trong sự tương tác với người khác (với yêu cầu thích hợp về sự đầy đủ, chính xác). Cụ thể: Thực hiện được việc trình bày, diễn đạt, nêu câu hỏi, thảo luận, tranh luận các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học trong sự tương tác với người khác (ở mức tương đối đầy đủ, chính xác).
- Sử dụng được hiệu quả ngôn ngữ toán học (chữ số, chữ cái, kí hiệu, biểu đồ, đồ thị, các liên kết logic,...) kết hợp với ngôn ngữ thông thường hoặc động tác hình thể khi trình bày, giải thích và đánh giá các ý tưởng toán học trong sự tương tác (thảo luận, tranh luận) với người khác. Cụ thể: Sử dụng được ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường để biểu đạt các nội dung toán học cũng như thể hiện chứng cứ, cách thức và kết quả lập luận.
- Thể hiện được sự tự tin khi trình bày, diễn đạt, nêu câu hỏi, thảo luận, tranh luận các

nội dung, ý tưởng liên quan đến toán học trong một số tình huống không quá phức tạp.

e) Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán thể hiện qua việc:

- Nhận biết được tên gọi, tác dụng, quy cách sử dụng, cách thức bảo quản các đồ dùng, phương tiện trực quan thông thường (mô hình hình học phẳng và không gian, thước đo góc, thước cuộn, tranh ảnh, biểu đồ,...), phương tiện khoa học công nghệ (đặc biệt là phương tiện sử dụng công nghệ thông tin), phục vụ cho việc học Toán.
- Sử dụng được các công cụ, phương tiện học toán, đặc biệt là phương tiện khoa học công nghệ để tìm tòi, khám phá và giải quyết vấn đề toán học (phù hợp với đặc điểm nhận thức lứa tuổi). Cụ thể: Trình bày được cách sử dụng công cụ, phương tiện học Toán để thực hiện nhiệm vụ học tập hoặc để diễn tả những lập luận, chứng minh toán học. Sử dụng được máy tính cầm tay, một số phần mềm tin học và phương tiện công nghệ hỗ trợ học tập.
- Nhận biết được các ưu điểm, hạn chế của những công cụ, phương tiện hỗ trợ để có cách sử dụng hợp lí.

3. Phân bố các mạch nội dung kiến thức

⁕ Lớp 6:

- **Số học:** Số tự nhiên, Số nguyên, Số hữu tỉ (phân số, số thập phân), Ước lượng và làm tròn số, Tỉ số, Tỉ số phần trăm, Tỉ lệ thức và dãy tỉ số bằng nhau.
- **Đại số:** Lũy thừa, mũ và lôgarit.
- **Hình học và đo lường:** Hình phẳng và hình khối trong thực tiễn, Các hình hình học cơ bản (điểm, đường thẳng, đoạn thẳng), Góc, Tam giác, Độ dài, Số đo góc, Diện tích.
- **Thống kê và xác suất:** Một số yếu tố thống kê, Một số yếu tố xác suất.
- **Hoạt động thực hành trải nghiệm.**

⁕ Lớp 7:

- **Số học:** Số hữu tỉ, Số thực, Ước lượng và làm tròn số, Tỉ số, Tỉ số phần trăm,Tỉ lệ thức và dãy tỉ số bằng nhau.
- **Đại số:** Biểu thức đại số, luỹ thừa, mũ và lôgarit.
- **Hình học và đo lường:** Hình phẳng và hình khối trong thực tiễn, Góc, Tam giác, Tứ giác, Diện tích, Dung tích, Thể tích.
- **Thống kê và xác suất:** Một số yếu tố thống kê, Một số yếu tố xác suất.
- **Hoạt động thực hành trải nghiệm.**

⁕ Lớp 8:

- **Số học:** Số thực.
- **Đại số:** Biểu thức đại số, Hàm số và đồ thị, Phương trình, Hệ phương trình.
- **Hình học và đo lường:** Hình phẳng và hình khối trong thực tiễn, Tam giác, Tứ giác, Độ dài, Diện tích, Dung tích, Thể tích.
- **Thống kê và xác suất:** Một số yếu tố thống kê, Một số yếu tố xác suất.
- **Hoạt động thực hành trải nghiệm.**

⁕ Lớp 9:

- **Số học:** Số thực.
- **Đại số:** Hàm số và đồ thị, Phương trình, Hệ phương trình, Bất phương trình, Hệ bất phương trình, Lượng giác
- **Hình học và đo lường:** Hình phẳng và hình khối trong thực tiễn, Tam giác, Tứ giác, Đa giác đều, Hình tròn, Đường tròn, Hệ thức lượng trong tam giác, Độ dài, Số đo góc, Diện tích, Dung tích, Thể tích.
- **Thống kê và xác suất:** Một số yếu tố thống kê, Một số yếu tố xác suất.
- **Hoạt động thực hành trải nghiệm.**

(Mời xem tiếp số sau về các yêu cầu cụ thể giảng dạy cho từng lớp)

TTT

Nguồn: Bộ Giáo dục và Đào tạo

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM VỚI NHIỆM VỤ ĐỔI MỚI CHƯƠNG TRÌNH VÀ SÁCH GIÁO KHOA GIÁO DỤC PHỔ THÔNG

Vừa qua, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã tổ chức hội thảo *"Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam với nhiệm vụ đổi mới chương trình và sách giáo khoa giáo dục phổ thông"* với sự tham gia của các chuyên gia trong nước và quốc tế về chương trình, sách giáo khoa (SGK); một số Tổng chủ biên, Chủ biên đại diện cho các bộ sách giáo khoa của NXBGDVN.

Hội thảo được tổ chức tại Hà Nội, TP. Hồ Chí Minh và Kiên Giang, có sự tham dự của đại diện các thầy cô giáo, các nhà quản lí giáo dục, cơ quan quản lí nhà nước tại các tỉnh, thành trên toàn quốc.



Ông Nguyễn Đức Thái, Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGDVN

Tại Hội thảo, các chuyên gia đã trình bày tham luận: "*Sách giáo khoa theo định hướng phát triển năng lực: nhìn từ kinh nghiệm quốc tế*", "*Từ chương trình giáo dục phổ thông 2018 đến sách giáo khoa mới của NXBGDVN*", cùng các tham luận về định hướng, mục tiêu và phương pháp biên soạn một số cuốn SGK lớp 1 được NXBGDVN tổ chức thực hiện theo chương trình giáo dục phổ thông mới.

Các cuốn SGK do NXBGDVN biên soạn đã cụ thể hóa mục tiêu giáo dục trọng tâm là chuyển từ chú trọng truyền thụ kiến thức sang giúp học sinh hình thành, phát triển toàn diện phẩm chất và năng lực.

Bên cạnh SGK giấy, NXBGDVN còn xây dựng đồng bộ SGK điện tử, các tư liệu, tài nguyên số để hỗ trợ giảng dạy dành cho giáo viên, đồng thời cung ứng đầy đủ, đồng bộ thiết bị và học liệu giáo dục hỗ trợ việc dạy và học hiệu quả.

Phát biểu tại Hội thảo, TS. Phạm Văn Cường - Giám đốc Sở GD&ĐT Phú Yên cho biết: "Qua phần trình bày của các chuyên gia về 4 bộ SGK của NXBGDVN cho thấy, sách của NXBGDVN đáp ứng tốt về kiến thức, cấu trúc, nội dung và đặc biệt định hướng được phương pháp dạy học sao cho phát triển được năng lực phẩm chất của học sinh".

Đại diện lãnh đạo các Sở GD&ĐT mong muốn NXBGDVN sớm có kế hoạch và chương trình cụ thể nhằm hướng dẫn, hỗ trợ việc sử dụng các bộ SGK mới.

Trong thời gian tới, NXBGDVN sẽ tổ chức các đợt tập huấn, đào tạo đội ngũ giáo viên thuộc các Sở GD&ĐT sử dụng SGK để triển khai chương trình giáo dục phổ thông mới một cách sát hợp và hiệu quả, dưới hình thức hội thảo chuyên đề và đào tạo trực tuyến.



Các đại biểu đang tìm hiểu các bộ SGK mới của NXBGDVN

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

THÁI NHẬT PHƯỢNG

Kì 29

CLB1. Solve for the integer roots of the following equation $y^2(x^2-1)=2x(x-y)$.

CLB2. Prove that $A=(x-1)^2+2x^2+3(x+1)^2+4(x+2)^2$ can always be expressed in terms of the sum of 2 perfect squares with any integer x.

CLB3. Show that

$$x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)\ge\frac{3}{4}(x-y)^2.$$

CLB4. Find the two real numbers x and y such that $x^2+y^2=x^3+y^3=1$.

CLB5. Given triangle ABC where BC is fixed. Points D and E are the midpoints of AB and AC. Construct DI, EK perpendicular to and intersecting BC at I, K respectively. Determine the position of A such that DK is perpendicular to EI.

ĐỖ ĐỨC THÀNH *(dịch)*

Kết quả Kì 27 (TTT2 số 197+198)

CLB1. Do p là số nguyên tố có tận cùng là 1 nên $p>3$ và p không chia hết cho 3.

Suy ra $p^2\equiv 1\ (\text{mod } 3)$

$\Rightarrow 4036081-p^2\equiv 4036080\equiv 0\ (\text{mod } 3)$.

CLB2. Ta có

$$(2x-3)(6x^2+5x+1)=(3x+1)(10x^2-17x+3)$$
$$\Leftrightarrow (2x-3)(3x+1)(3x-2)=0.$$

Suy ra $S=\left\{\frac{3}{2};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\}$.

CLB3. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có $8=\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\ge\frac{(1+3)^2}{x+y}\Rightarrow x+y\ge 2$.

Ta lại có

$$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=8\Leftrightarrow 8xy=y+9x\Leftrightarrow 8x(y-1)=x+y$$

$$\Rightarrow 8M=x+y\ge 2\Rightarrow M\ge\frac{1}{4}.$$

Vậy $M_{min}=\frac{1}{4}$ khi $x=\frac{1}{2}$ và $y=\frac{3}{2}$.

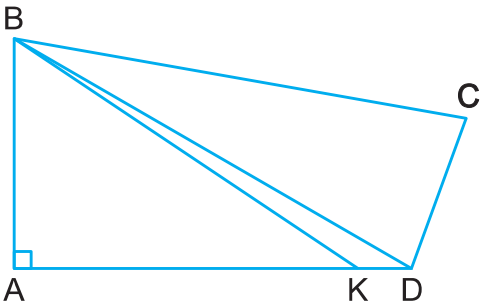
CLB4. Ta có

$$P=\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}-\frac{x}{y}.\frac{y}{z}-\frac{y}{z}.\frac{z}{x}-\frac{z}{x}.\frac{x}{y}\right)-3\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}$$

$$=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+3=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2$$

$$-2\left(\frac{x}{y}.\frac{y}{z}+\frac{y}{z}.\frac{z}{x}+\frac{z}{x}.\frac{x}{y}\right)+3=1+3=4.$$

CLB5.



Trên tia AD lấy điểm K sao cho BK = 2AB thì BK = BC và có tam giác ABK là nửa tam giác đều.

Khi đó có $\widehat{ABK}=60^\circ\Rightarrow\widehat{CBK}=20^\circ$.

Do BK = BC nên tam giác BCK cân tại B.

Do đó $\widehat{BCK}=\frac{180^\circ-\widehat{CBK}}{2}=80^\circ=\widehat{BCD}$.

Suy ra $D\equiv K\Rightarrow BC=BD$.

Vậy tam giác BCD cân tại B.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt và được thưởng kì này: *Lê Thị Thu Thủy*, 9A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Ngô Thị An Bình*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Phạm Thanh Nga*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Minh Vương*, 9A5, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

THIỀU QUANG TÙNG



Kì này WHAT AM I?

LÊ THỊ HUỆ
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam

Dưới đây là định nghĩa của các từ bắt đầu bằng chữ cái H. Các em hãy tìm xem những từ nào được định nghĩa nhé.

	Words that start with h
1. The organ that pumps blood	?
2. A great person; someone people admire	?
3. Opposite of low	?
4. The study of past events	?
5. A country known for its tulips	?
6. A patty of chopped beef	?
7. An allergy to grasses and weeds	?
8. Balls of ice that fall from the sky	?
9. A 17-syllable Japanese poem	?
10. Not whole	?

Kết quả Ô chữ CÁC LOẠI NHẠC CỤ

(TTT2 số 197+198)

Những loại nhạc cụ có trong ô chữ là:

❇ VIOLIN - Đàn violin (đàn vĩ cầm)
❇ PIANO - Đàn piano
❇ SAXOPHONE - Kèn xắc xô (thuộc bộ kèn trong dàn nhạc giao hưởng)
❇ GUITAR - Đàn guitar
❇ ORGAN - Đàn organ
❇ TRUMPET - Kèn trompet (là nhạc cụ có âm thanh cao nhất trong bộ đồng)
❇ DRUM - Trống
❇ CELLO - Trung hồ cầm hoặc Vi ô lông xen
❇ GONG - Cồng chiêng
❇ FLUTE - Sáo

HONG HA

Nhận xét. Tòa soạn nhận được rất nhiều bài giải của các bạn gửi về. Các bạn sau được thưởng kì này: *Mai Thị Thu Lan*, 6E, THCS Nguyễn, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Lê Phương Anh*, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**; *Đỗ Ngọc Hải*, *Đỗ Khánh Linh*, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Dương Bảo Lưu*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Phan Khánh An*, 8A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

LÊ THỊ HUỆ



BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM HỌC 2019 - 2020

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Bất đẳng thức và cực trị đại số là vấn đề hay và khó, thường gặp trong các kì thi chọn học sinh giỏi lớp 9 và thi vào lớp 10 chuyên toán THPT. Bài viết này chúng tôi xin được giới thiệu cùng bạn đọc một số bài toán bất đẳng thức và cực trị đại số qua kì thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán năm học 2019 - 2020.

Bài toán 1. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{yz}{x^2(y+z)} + \frac{zx}{y^2(z+x)} + \frac{xy}{z^2(x+y)} \geq xy + yz + zx.$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên toán, tỉnh Bình Thuận)

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta có

$$\frac{yz}{x^2(y+z)} + \frac{y+z}{4yz} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{x^2(y+z)}.\frac{y+z}{4yz}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{yz}{x^2(y+z)} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{zx}{y^2(z+x)} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{y}. \quad (2)$$

$$\frac{xy}{z^2(x+y)} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq \frac{1}{z}. \quad (3)$$

Cộng vế với vế (1); (2); (3) ta được

$$\frac{yz}{x^2(y+z)} + \frac{zx}{y^2(z+x)} + \frac{xy}{z^2(x+y)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$= xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = xy + yz + zx.$$

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{a^2+1} \geq 2.$$

(Đề thi vào 10 chuyên toán, tỉnh Phú Yên)

Lời giải. Áp dụng các bất đẳng thức quen thuộc

$x^2 + y^2 \geq 2xy$; $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Ta có

$$\left(a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{a^2+1}\right)^2$$

$$= a^2(b^2+1) + b^2(c^2+1) + c^2(a^2+1) +$$

$$2\left(ab\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} + bc\sqrt{(c^2+1)(a^2+1)}\right.$$

$$\left. + ca\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)}\right)$$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 +$$

$$2\left(ab\sqrt{b^2c^2+b^2+c^2+1} + bc\sqrt{c^2a^2+c^2+a^2+1}\right.$$

$$\left. + ca\sqrt{b^2a^2+b^2+a^2+1}\right)$$

$$\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 +$$

$$2\left(ab\sqrt{b^2c^2+2bc+1} + bc\sqrt{c^2a^2+2ca+1}\right.$$

$$\left. + ca\sqrt{b^2a^2+2ab+1}\right)$$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 +$$

$$2[ab(bc+1) + bc(ca+1) + ca(ab+1)]$$

$$= (ab+bc+ca)^2 + (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)$$

$$\geq (ab+bc+ca)^2 + 3(ab+bc+ca) = 1^2 + 3.1 = 4.$$

Do đó $a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{a^2+1} \geq 2$.

Đẳng xảy ra khi $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện a + b + c = 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = a^2 + b^2 + c^2$.

(Đề thi vào 10 chuyên toán, tỉnh Lâm Đồng)

Lời giải. Ta có

$$\left(a-\frac{10}{3}\right)^2+\left(b-\frac{10}{3}\right)^2+\left(c-\frac{10}{3}\right)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{20}{3}(a+b+c)-\frac{100}{3}$$

$$=\frac{20}{3}.10-\frac{100}{3}=\frac{100}{3}.$$

Do đó $M=a^2+b^2+c^2\ge\frac{100}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{10}{3}$.

Bài toán 4. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $|a|\le 1;|b|\le 1;|c|\le 1$; $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $a^{2018}+b^{20119}+c^{2020}\le 2$.

(Đề thi vào 10 chuyên toán, tỉnh Quảng Ninh)

Lời giải. Ta có $|a|\le 1;|b|\le 1;|c|\le 1$.

Suy ra

$(a+1)(b+1)(c+1)+(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0$

$\Leftrightarrow -2(ab+bc+ca)\le 2$.

Do đó

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\le 2$.

Mặt khác theo giả thiết thì $|a|\le 1;|b|\le 1;|c|\le 1$.

Suy ra $a^{2018}\le a^2;\ b^{2019}\le b^2;c^{2020}\le c^2$.

Do đó

$a^{2018}+b^{20119}+c^{2020}\le a^2+b^2+c^2\le 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=0;\ b=1;\ c=-1$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng

$(x+y+z)^3+9xyz\ge 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$, với x, y, z là các số thực không âm.

(Đề thi vào 10 chuyên toán, tỉnh Tây Ninh)

Lời giải. Do vai trò x, y, z như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$.

Ta có

$(x+y+z)^3+9xyz$

$\ge 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz-x^2y-x^2z$

$-y^2x-y^2z-z^2x-z^2y\ge 0$

$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)$

$+z(z-x)(z-y)\ge 0$

$\Leftrightarrow z(z-x)(z-y)+(x-y)[x(x-z)-y(y-z)]\ge 0$.

(luôn đúng do $x\ge y\ge z\ge 0$).

Suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ hoặc hai trong ba số bằng nhau, số còn lại bằng 0.

Bài toán 6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}+\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}$$

$$+\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}.$$

(Đề thi vào 10 chuyên toán, tỉnh Quảng Nam)

Lời giải. Áp dụng các bất đẳng thức

$x^2+y^2\ge 2xy$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, với $x>0$, $y>0$

ta có

$$P=\frac{a^2+b^2+2a+6}{ab+a+4}+\frac{b^2+c^2+2b+6}{bc+b+4}$$

$$+\frac{c^2+a^2+2c+6}{ca+c+4}$$

$$\ge\frac{2ab+2a+6}{ab+a+4}+\frac{2bc+2b+6}{bc+b+4}+\frac{2ca+2c+6}{ca+c+4}$$

$$=6-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{(ab+a+1)+3}+\frac{4}{(bc+b+1)+3}\right.$$

$$\left.+\frac{4}{(ca+c+1)+3}\right]\ge 6-\frac{1}{2}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{ca+c+1}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=6-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\right)+1\right]$$

$$=6-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{1+ab+a}+\frac{ab}{a+1+ab}\right)+1\right]$$

$$=6-\frac{1}{2}(1+1)=6-1=5.$$

Vậy $P_{min}=5$ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Từ giả thiết $abc=1$, ta chứng minh được $\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$.

Hơn nữa, ta cũng dự đoán P đạt giá trị nhỏ

nhất là 5 khi a = b = c = 1 từ đó giúp ta có được lời giải.

Bài toán 7. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2019xyz. Chứng minh rằng

$$T=\frac{x^2+1+\sqrt{2019x^2+1}}{x}+\frac{y^2+1+\sqrt{2019y^2+1}}{y}+\frac{z^2+1+\sqrt{2019z^2+1}}{z}\le 2019.2020\,xyz.$$

(Đề thi vào 10 chuyên toán, tỉnh Nam Định)

Lời giải. Ta có x + y + z = 2019xyz

$$\Rightarrow 2019x^2=\frac{x^2+xy+xz}{yz}.$$

Do đó $2019x^2+1=\frac{x^2+xy+yz+zx}{yz}$

$$=\frac{(x+y)(x+z)}{yz}=\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{z}+1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1+\sqrt{2019x^2+1}}{x}$$

$$\le \frac{x^2+1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+1+\frac{x}{z}+1\right)}{x}$$

$$=x+\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \quad (1)$$

Tương tự ta có

$$\frac{y^2+1+\sqrt{2019y^2+1}}{y}\le y+\frac{2}{y}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right); \quad (2)$$

$$\frac{z^2+1+\sqrt{2019z^2+1}}{z}\le z+\frac{2}{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right). \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$T=\frac{x^2+1+\sqrt{2019x^2+1}}{x}+\frac{y^2+1+\sqrt{2019y^2+1}}{y}+\frac{z^2+1+\sqrt{2019z^2+1}}{z}\le x+y+z+3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Mặt khác $3(xy+yz+zx)\le (x+y+z)^2$.

Suy ra

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{3(xy+yz+zx)}{xyz}$$

$$=\frac{2019.3(xy+yz+zx)}{2019xyz}$$

$$\le \frac{2019(x+y+z)^2}{x+y+z}=2019(x+y+z).$$

Do đó $T\le 2020(x+y+z)=2020.2019xyz$.

Nhận xét. Từ giả thiết x + y + z = 2019xyz. Suy ra

$$\sqrt{2019x^2+1}=\sqrt{\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{z}+1\right)}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+1\right)$$

Kết hợp với $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$ giúp ta có lời giải.

Bài toán 8. Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn [0; 2] thỏa mãn điều kiện x + y + z = 3.

a) Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2<6$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

(Đề thi vào 10 chuyên toán, TP. Hồ Chí Minh)

Lời giải. a) Ta có x, y, z ∈ [0; 2]

$$\Rightarrow x(2-x)+y(2-y)+z(2-z)\ge 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 2(x+y+z)\le 2.3=6.$$

Đẳng thức xảy ra khi x, y, z ∈ {0; 2} và x + y + z = 3 (không thỏa mãn).

Suy ra $x^2+y^2+z^2<6$.

b) Ta có x, y, z ∈ [0; 2]

$$\Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z)+xyz\ge 0$$

$$\Rightarrow 8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)\ge 0$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)-4=2.3-4=2$$

$$\Rightarrow P=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]$$

$$=3\left[3^2-3(xy+yz+zx)\right]\le 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi (x; y; z) = (0; 1; 2) và các hoán vị.

Nhận xét. *Lời giải bài toán trên đã áp dụng hằng đẳng thức* $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

Bài toán 9. Cho a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $a^4 - 4a = b^4 - 4b$.

a) Chứng minh rằng $0 < a + b < 2$.

b) Biết rằng $a^4 - 4a = b^4 - 4b = k > 0$.

Chứng minh rằng $-\sqrt{k} < ab < 0$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán, trường PTNK-ĐHQG Hồ Chí Minh)

Lời giải. a) Ta có

$a^4 - 4a = b^4 - 4b \Rightarrow 0 = a^4 - b^4 - 4a + 4b$

$= (a-b)\left[(a+b)(a^2+b^2) - 4\right]$.

Vì $a \neq b$ nên $(a+b)(a^2+b^2) = 4$.

Ta lại có $a + b > 0$ và $a^2 + b^2 > \dfrac{(a+b)^2}{2}$

$\Rightarrow 4 = (a+b)(a^2+b^2) > \dfrac{(a+b)^3}{2}$

$\Rightarrow (a+b)^3 < 8 \Rightarrow 0 < a + b < 2$.

b) Theo chứng minh trên ta có

$a^4 - 4a = b^4 - 4b = k$

$\Rightarrow a^4 + b^4 - 4(a+b) = 2k$

$\Leftrightarrow a^4 + b^4 - (a+b)^2(a^2+b^2) = 2k$

$\Leftrightarrow -ab(a^2 + ab + b^2) = k$

$\Leftrightarrow -ab\left[\left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2\right] = k$.

Mà $k > 0, \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2 > 0 \Rightarrow ab < 0$.

Ta có $(a+b)^2 > 0 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 > -ab$.

Mà $ab < 0 \Rightarrow -ab(a^2 + ab + b^2) > a^2b^2$

$\Rightarrow k > a^2b^2 \Rightarrow \sqrt{k} > |ab| = -ab$

$\Rightarrow -\sqrt{k} < ab < 0$.

Bài toán 10. Cho các số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = xy(x-2)(y+6) + 13x^2 + 4y^2 - 26x + 24y + 46$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội)

Lời giải. Đặt $a = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$,

$b = (y+3)^2 = y^2 + 6y + 9$.

Ta có $a \geq 0$ và $b \geq 0$.

Suy ra $P = (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 13(x^2 - 2x + 1)$

$+ 4(y^2 + 6y + 9) - 3$

$= (a-1)(b-9) + 13a + 4b - 3$

$= ab + 4a + 3b + 6 \geq 6$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = -3$.

Vậy $P_{min} = 6$ khi $x = 1$ và $y = -3$.

Bài toán 11. Với x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN ĐHQG Hà Nội)

Lời giải. Đặt $t = x + y$, ta có

$xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{t^2}{4}$.

Do đó $1 \leq 4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y$

$= 4(x+y)^2 + 9xy + 5(x+y) \leq 4t^2 + \dfrac{9t^2}{4} + 5t$

$\Rightarrow \dfrac{25}{4}t^2 + 5t \geq 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}t + 1\right)^2 \geq 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{2}t + 1 \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow t \geq \dfrac{2}{5}(\sqrt{2} - 1)$.

$\Rightarrow P = 17(x+y)^2 - 18xy \geq 17t^2 - 18.\dfrac{t^2}{4} = \dfrac{25}{2}t^2$

$\geq \dfrac{25}{2}\left[\dfrac{2}{5}(\sqrt{2} - 1)\right]^2 = 6 - 4\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 6 - 4\sqrt{2}$ khi

$x = y = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{5}$.

Nhận xét. Từ ý tưởng đặt $t = x + y$ ta có được $xy \leq \dfrac{t^2}{4}$, từ đó kết hợp với giả thiết ta có $t \geq \dfrac{2}{5}(\sqrt{2} - 1)$, từ đó có được $P \geq 6 - 4\sqrt{2}$.

Bài toán 12. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}.$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu)

Lời giải. Ta sẽ chứng minh

$$A=\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge \frac{1}{4}(a+5b+2) \text{ với } a,b>0. \quad (1)$$

Thật vậy

$$A=\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}(a+5b+2)$$

$$\Leftrightarrow a^2-ab+3b^2+1\ge\frac{1}{16}(a+5b+2)^2$$

$\Leftrightarrow 13(a-b)^2+10(b-1)^2+2(a-1)^2\ge 0$ (luôn đúng). Suy ra (1) luôn đúng.

Kết hợp với $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ (với $x,y>0$).

Ta có

$$P\le\frac{4}{a+5b+2}+\frac{4}{b+5c+2}+\frac{4}{c+5a+2}$$

$$\le\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{c+a+2}+\frac{1}{4a}$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3}{8}\le\frac{3}{8}.3+\frac{3}{8}=\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy $P_{max}=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Bình luận: Chìa khóa của bài toán là bất đẳng thức $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}(a+5b+2)$ với mọi $a,b>0$.

Bài toán 13. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện

$2(x^3+y^3)+6xy(x+y-2)=(x+y)^2(xy+4)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán, tỉnh Tiền Giang)

Lời giải. Đặt $s=x+y$, $p=xy$ $(s,p>0)$.

Ta có $T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+1\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s^2-2p}{p}+1\right)=\frac{s^2-p}{2p}$$

$$\Rightarrow 2pT=s^2-p\Rightarrow p=\frac{s^2}{2T+1}.$$

Mặt khác

$$2(x^3+y^3)+6xy(x+y-2)=(x+y)^2(xy+4)$$

$$\Leftrightarrow 2(s^3-3sp)+6p(s-2)=s^2(p+4)$$

$$\Leftrightarrow 2s^3-12p=s^2(p+4)$$

$$\Leftrightarrow 2s^3-12.\frac{s^2}{2T+1}=s^2\left(\frac{s^2}{2T+1}+4\right)$$

$$\Leftrightarrow s^2-2(2T+1)s+8T+16=0. \quad (*)$$

Phương trình (*) là phương trình bậc hai ẩn s có nghiệm khi

$$\Delta'=(2T+1)^2-8T-16\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4T^2-4T-15\ge 0\Leftrightarrow(2T-1)^2\ge 16$$

$$\Rightarrow 2T-1\ge 4\Leftrightarrow T\ge\frac{5}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $s=6$ và $p=6$.

Từ đó tìm được

$$(x;y)=(3+\sqrt{3};3-\sqrt{3});\ (3-\sqrt{3};3+\sqrt{3}).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{5}{2}$ khi chẳng hạn $(x;y)=(3+\sqrt{3};3-\sqrt{3})$.

Nhận xét. Ý tưởng của lời giải trên là đặt ẩn phụ, sau đó tìm điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để suy ra $T\ge\frac{5}{2}$.



SAI PHÂN PHÁP TRONG CUỐN SÁCH TOÁN CHỮ HÁN "ĐẠI THÀNH TOÁN HỌC CHỈ MINH"

TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học)*
PHẠM VŨ LỘC *(Trung tâm Vũ trụ Việt Nam)*
ĐOÀN THỊ LỆ *(Đại học Thanh Hoa, Đài Loan)*
CUNG THỊ KIM THÀNH, PHAN THỊ ÁNH TUYẾT

Bài viết này xin giới thiệu các bài toán sai phân (chia không đều) trong cuốn sách chữ Hán "Đại thành toán học chỉ minh" của Phạm Gia Kỷ.

1. Nhập đề

Toán sai phân là bài toán chia một đại lượng N (tiền) thành n phần (n người) không đều nhau, tức là người thứ k nhận được n_k phần sao cho $\sum_{k=1}^{n} n_k = N$, là bài toán thường gặp trong cuộc sống ngày xưa (chia lương bổng cho quan lại với các cấp bậc khác nhau, chia lãi trong buôn bán, cấp phát lương thực cho quân đội, phân loại đóng thuế,...), do đó thông thạo dạng toán này là một yêu cầu bắt buộc trong các kì thi toán Việt Nam thế kỉ từ thế kỷ XV đến thế kỷ XIX. Cũng vì vậy mà nó được trình bày trong khá nhiều sách toán chữ Hán và chữ Nôm. Tuy nhiên, mỗi tác giả có những đóng góp riêng trong phân loại và phát triển dạng toán này.

Toán sai phân trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* [3] đã được giới thiệu trong [1]. Bài viết này giới thiệu dạng *toán sai phân* trong *Đại thành toán học chỉ minh* [2].

Đại thành toán học chỉ minh (xem [2]) do Phạm Gia Kỷ viết, là một trong ba cuốn sách đỉnh cao của toán học Việt Nam đầu thế kỉ XIX.

Trong bài viết, chúng tôi trích dẫn theo số trang a - b (lẻ - chẵn) của sách Hán Nôm. Thí dụ, trang 20b là trang chẵn của trang 20 trong [2].

Để bài viết dễ đọc, chúng tôi kết hợp phân loại theo [2] với phân loại theo dạng toán hiện đại (số học, phương trình, phương trình vô định,...).

Bài viết sử dụng một số đơn vị sau:

✻ **Đơn vị đong:** 1 thạch = 10 đấu, 1 đấu = 10 thăng.

✻ **Đơn vị tiền:** 1 quan = 10 mạch; 1 mạch = 60 văn (60 tiền); 1 lạng = 10 tiền = 100 phân = 1000 li; 1 li = 10 hào; 1 hào = 10 ti = 100 hốt = 1000 vi.

2. Sai phân trong Đại thành toán học chỉ minh

✻ Dạng 1. Toán số học

Bài 1.1. (trang 20a-20b) Người anh xuất vốn 25 lạng 4 tiền, em xuất vốn 16 lạng 6 tiền, tổng vốn 42 lạng. Buôn bán sinh lãi được 12 lạng 6 tiền. Hỏi anh và em mỗi người được lãi bao nhiêu?

Giải. Mỗi lạng lãi 12,6 : 42 = 0,3 lạng = 3 tiền.

Vậy người anh lãi: $25{,}4 \times 0{,}3 = 7{,}62$ lạng.

Người em lãi: $16{,}6 \times 0{,}3 = 4{,}98$ lạng.

Bài 1.2. (trang 20b) Trương và Lý góp vốn mua gừng. Trương mua 3842 cân, Lý mua 2638 cân, tổng cộng 6480 cân. Tổng bạc phải trả là 54 lạng 4 tiền 3 phân 2 li. Hỏi mỗi người chịu bao nhiêu?

Giải. 54 lạng 4 tiền 3 phân 2 li = 54432 li.

Một cân gừng giá: $54432 : 6480 = 8{,}4$ (8 li 4 hào).

Vậy Trương góp 32 lạng 2 tiền 7 phân 2 li 8 hào. Lý góp 22 lạng 1 tiền 5 phân 9 li 2 hào.

Bài 1.3. (trang 21a) Bốn người Giáp, Ất, Bính, Đinh góp vốn kinh doanh. Giáp xuất 35 lạng, Ất 28 lạng, Bính 42 lạng, Đinh 65 lạng, tổng 170 lạng. Cuối năm được lãi 76 lạng 5 tiền. Hỏi mỗi người lãi bao nhiêu?

Giải. Một lạng lãi 765 : 170 = 4,5 tiền. Giáp lãi 15 lạng 7 tiền 5 phân; Ất lãi 12 lạng 6 tiền; Bính lãi 18 lạng 9 tiền; Đinh lãi 29 lạng 2 tiền 5 phân.

Bài 1.4. (trang 21a-21b) Nay có bốn người Nguyên, Hanh, Lợi, Trinh cùng đi buôn. Nguyên vào tháng Giêng xuất bạc vốn 50 lạng. Hanh vào tháng Tư xuất 60 lạng. Lợi

vào tháng Sáu xuất 80 lạng. Trinh vào tháng Tám xuất 90 lạng, tổng 280 lạng. Cuối năm được lãi 53 lạng 7 tiền 5 phân. Hỏi lãi mỗi người bao nhiêu?

Giải. Tính theo tháng: Nguyên xuất 50 lạng vào tháng giêng thì cả năm (12 tháng) góp 600 phần; Hanh xuất 60 lạng vào tháng tư thì góp (9 tháng) $60 \times 9 = 540$ phần; Lợi vào tháng 6 góp (7 tháng) $80 \times 7 = 560$ phần; Trinh vào tháng 8 góp (5 tháng) $90 \times 5 = 450$ phần.

Tổng cộng $600 + 540 + 560 + 450 = 2150$ phần.

Mỗi phần lãi: 5375 phân : 2150 = 2,5 phân.

Vậy Nguyên lãi 15 lạng; Hanh lãi 13 lạng 5 tiền; Lợi lãi 14 lạng; Trinh lãi 11 lạng 2 tiền 5 phân.

Bài 1.5. (trang 22b) Nay có 42840 quân (lính). Trên cấp 3 thạch 3 đấu gạo cho 4 người, 8 thạch đậu cho 7 người, 6 thạch 7 đấu mạch cho 9 người. Hỏi được bao nhiêu mỗi thứ?

Giải. Một quân được 3,3 : 4 = 0,825 thạch gạo, 8 : 7 thạch đậu, 6,7 : 9 thạch mạch.

Vậy 42840 quân được $42840 \times 0{,}825 = 35343$ thạch gạo; 48960 thạch đậu và 31892 thạch mạch.

Bài 1.6. (trang 23a) Nay có tiền 55 quan 6 mạch 48 văn, lệnh bốn người lãnh nhận: Giáp nhận 7 phần, ất 5 phần, Bính 3 phần, Đinh 1 phần. Hỏi mỗi người nhận bao nhiêu?

Giải. Đổi: 55 quan 6 mạch 48 văn = 33408 văn.

Tổng số phần là: $7 + 5 + 3 + 1 = 16$ phần.

Vậy mỗi phần được: 33408 : 16 = 2088 văn.

Đáp: Giáp được 24 quan 3 mạch 36 văn; Ất được 17 quan 4 mạch; Bính được 10 quan 34 mạch 24 văn; Đinh được 3 quan 4 mạch 48 văn.

Bài 1.7. (trang 23a–23b) Lệnh ba hạng hộ dân nộp tô 130 thạch 8 đấu 8 thăng gạo. Hạng trên 35 hộ, mỗi hộ nộp 5 phần; hạng giữa 50 hộ, mỗi hộ nộp 3 phần; hạng dưới 84 hộ, mỗi hộ 1 phần. Hỏi mỗi hộ và mỗi hạng hộ nộp bao nhiêu gạo?

Giải. Số phần nộp là:

$35 \times 5 + 50 \times 3 + 84 \times 1 = 409$ phần.

Vậy mỗi xuất phải nộp: 13088 : 409 = 32 thăng, cũng là số gạo mỗi hộ hạng dưới phải nộp.

Tổng số gạo hạng dưới phải nộp 26 thạch 8 đấu 8 thăng. Mỗi hộ hạng giữa phải nộp 9 đấu 6 thăng, tổng hạng giữa phải nộp 48 thạch; Mỗi hộ hạng trên phải nộp 1 thạch 6 đấu, tổng hạng trên phải nộp 56 thạch.

Bài 1.8. (trang 24a) Nay có 570 lạng, mua hai hạng vải the và vải thô. Cần 1 phần the, 2 phần vải thô. The mỗi tấm giá 2 lạng 2 tiền, vải mỗi tấm 2 lạng 7 tiền. Cộng lại mỗi hạng giá bao nhiêu?

Giải. Giá tiền một xuất (gồm một tấm the, hai tấm vải) là: $2{,}2 + 2{,}7 \times 2 = 7{,}6$ lạng.

Vậy 570 lạng mua được 570 : 7,6 = 75 xuất. Nghĩa là mua được 75 tấm vải the hết $75 \times 2{,}2 = 165$ lạng. Và mua được 150 tấm vải hết $150 \times 2{,}7 = 405$ lạng.

Bài 1.9. (trang 24a-24b) Nay có tiền 207 lạng 5 tiền 4 phân, mua gạo, mạch, đậu ba loại. Cần gạo 1 phần, mạch 2 phần, đậu 3 phần. Gạo mỗi đấu giá 8 phân 6 li, mạch mỗi đấu giá 6 phân 5 li, đậu mỗi đấu giá 4 phân 8 li. Hỏi số lượng và tổng số tiền mỗi loại là bao nhiêu?

Giải. Tiền một xuất (một đấu gạo, hai đấu mạch và ba đấu đậu) là:

$8{,}6 + 6{,}5 \times 2 + 4{,}8 \times 3 = 36$ phân.

Vậy 207 lạng 5 tiền 4 phân mua được 20754 : 36 = 576,5 xuất, cũng là số gạo mua được (57 thạch 6 đấu 5 thăng).

Đáp: Số tiền mua gạo hết 49 lạng 5 tiền 7 phân 9 li. Số mạch mua được là $576{,}5 \times 2 = 1153$ đấu mất 74 lạng 9 tiền 4 phân 5 li. Số đậu mua được là 1729,5 đấu hết 83 lạng 1 phân 6 li.

Bài 1.10. (trang 24b–25a) Có 242 quan 1 mạch 18 văn chia cho ba loại người nhận. Loại Giáp 13 người, mỗi người nhận 9 phần; Ất 15 người, mỗi người nhận 7 phần; Bính 17 người, mỗi người nhận 5 phần. Hỏi ba loại mỗi loại bao nhiêu, mỗi người bao nhiêu, còn dư bao nhiêu?

Giải. Đổi 242 quan 1 mạch 18 văn = 145278 văn. Số phần là:

$13 \times 9 + 15 \times 7 + 17 \times 5 = 307$ phần.

Mỗi phần là 145278 : 307 = 473 văn thừa 67 văn.

Mỗi người loại Giáp được chia 7 quan 57 văn.

Tổng tiền loại Giáp nhận được 922 mạch 21 văn.

Mỗi người loại Ất được chia 55 mạch 11 văn.

Tổng tiền loại Ất nhận được 827 mạch 45 văn.
Mỗi người loại Bính được chia 39 mạch 25 văn.
Tổng tiền loại Bính nhận được 670 mạch 5 văn.
Còn dư 67 văn = 1 mạch 7 văn.

Bài 1.11. (trang 25a-25b) Nay có vàng 240 cân, chia đều có khác nhau: hương hỏa 3 phần, trưởng nam 6 phần, con trai 24 người mỗi người 4 phần, con gái 5 người mỗi người 3 phần. Mỗi người nhận bao nhiêu?

Giải. 1 cân = 16 lạng. Đổi 240 cân = 3840 lạng.
Số phần là: $3+6+24\times4+5\times3=120$ phần.
Mỗi xuất được chia: 3840 : 120 = 32 lạng = 2 cân.
Vậy số vàng hương hỏa là 6 cân. Con trưởng được nhận 12 cân. Mỗi người con trai được nhận 8 cân; Tổng số vàng các con trai (trừ con trưởng) nhận là 192 cân. Mỗi người con gái được là 6 cân; Tổng số vàng con gái nhận được là 30 cân.

Lời bình. Xã hội ngày xưa, đàn ông nhiều vợ, đông con. Trai, gái, trưởng, thứ phân biệt.

Bài 1.12. (trang 26a-26b) Nay có gạo 273 thạch 6 đấu, lệnh năm hạng người phải nộp. Hạng thứ nhất 6 hộ mỗi hộ 10 phần. Hạng thứ hai 12 hộ mỗi hộ 8 phần. Hạng thứ ba 24 hộ mỗi hộ 6 phần. Hạng thứ tư 38 hộ mỗi hộ 4 phần. Hạng thứ năm 62 hộ mỗi hộ 2 phần. Hỏi mỗi hộ và mỗi hạng nộp bao nhiêu?

Giải. Tổng số phần là:
$6\times10+12\times8+24\times6+38\times4+62\times2=576$ phần.
Vậy một phần phải nộp 2736 : 576 = 4,75 đấu.
Hạng thứ nhất mỗi hộ nộp 4 thạch 7 đấu 5 thăng.
Tổng 28 thạch 5 đấu. Hạng thứ hai mỗi hộ nộp 3 thạch 8 đấu; Tổng 45 thạch 6 đấu. Hạng thứ ba mỗi hộ nộp 2 thạch 8 đấu 5 thăng; Tổng 68 thạch 4 đấu. Hạng thứ tư mỗi hộ phải nộp 1 thạch 9 đấu; Tổng 72 thạch 2 đấu. Hạng thứ năm mỗi hộ nộp 9 đấu 5 thăng; Tổng 58 thạch 9 đấu.

Bài 1.13. (trang 26b-27a) Nay có bạc 37 lạng 9 tiền 2 phân, mua hoàng lạp và bạch lạp có số cân bằng nhau. Hoàng lạp 4 cân giá 5 tiền 3 phân, bạch lạp 1 cân giá bạc 4 tiền 6 phân. Hỏi mỗi loại bao nhiêu?

Giải. Một cân hoàng lạp giá: $5,3:4=1,325$ tiền.
Một cân hoàng lạp và một cân bạch lạp giá:
1,325 + 4,6 = 5,925 tiền.
Số cân hoàng lạp (cũng là số cân bạch lạp) là: 379,2 : 5,925 = 64 cân.
Tổng giá tiền hoàng lạp là 8 lạng 4 tiền 8 phân.
Tổng giá tiền bạch lạp là 29 lạng 4 tiền 4 phân.

Bài 1.14. (trang 27a-27b) Nay có bạc 76 lạng 8 tiền, mua gạo, mạch, đậu, thóc bốn loại số cân bằng nhau. Gạo giá mỗi thạch 8 tiền, mạch 7 tiền, đậu 5 tiền, thóc 4 tiền. Hỏi mua được bao nhiêu thạch mỗi loại, hết bao nhiêu tiền?

Giải. Gạo + mạch + đậu + thóc mỗi loại 1 thạch giá: 8 + 7 + 5 + 4 = 24 tiền.
Mỗi loại mua được $768:24=32$ thạch; Mua gạo hết 25 lạng 6 tiền; Mua mạch hết 22 lạng 4 tiền; Mua đậu hết 16 lạng; Mua thóc hết 12 lạng 8 tiền.

Bài 1.15. (trang 28a) Nay có bạc 2690 lạng, lệnh hai hạng hộ dân nộp theo phép chia bốn sáu. Mỗi loại nộp bao nhiêu?

Giải. Chia theo tỉ lệ 4 : 6 nghĩa là người này nộp 4 phần thì người kia nộp 6 phần.
Tổng số phần hai hạng là 6 + 4 = 10 phần.
Hạng trên phải nộp: $(2690:10)\times6=1614$ lạng.
Hạng dưới phải nộp: $(2690:10)\times4=1076$ lạng.

(Còn nữa)

Tài liệu dẫn

[1] Tạ Duy Phượng, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Ánh Tuyết, *Sai phân pháp* trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, *Tạp chí Toán Tuổi thơ 2 số 183 và số 184*, trang 25-26.

[2] 梁世榮 Phạm Gia Kỷ, 大成算學指明 (Đại thành toán học chỉ minh), Mã số thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm (một bản duy nhất): A.1555.

[3] 阮有慎 Nguyễn Hữu Thận, 意齋算法一得錄 (Ý Trai toán pháp nhất đắc lục), Minh Mệnh 1829. Mã số Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm (ba bản): A.1136/a; A.1336+A.982; Vhv.1184.



INTERNATIONAL TALENT MATHEMATICS CONTEST (ITMC) 2019

GRADE 06

Time allowed: 90 minutes

ThS. THÁI THỊ THANH HOA
Tổ Toán - Tin, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam
(Sưu tầm và giới thiệu)

Part 1: *Questions no. 1 - 12, each correct answer is worth 4 points, 1 point for a blank answer, and 0 point for each incorrect answer*

1. How much is the value of $0.1 \times 0.2 \times 0.3 \times 0.4 \times 0.5$ less than 0.2019?

A. 0.2007; B. 0.2107; C. 0.0217; D. 0.2117; E. 0.0107.

2. Given that 0.2 times A plus A is equal to A plus $\frac{4}{5}$. What is the value of A?

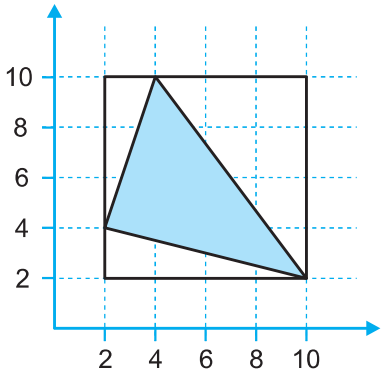
A. $5\frac{1}{4}$; B. 4; C. 3; D. $\frac{4}{5}$; E. $\frac{3}{4}$.

3. Let $A(x) = x + \frac{1}{5}$. For example $A(1) = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ and $A(5) = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$. Determine the value of A(1) + A(2) + A(3) + ... + A(10).

A. $\frac{216}{5}$; B. $\frac{246}{5}$; C. $\frac{276}{5}$; D. 57; E. 66.

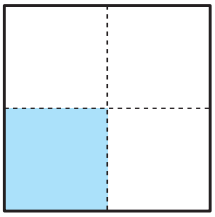
4. In the adjoining figure, what is the area of the shaded region in square unit?

A. 26; B. 18; C. 16; D. 12.5; E. 9.5.



5. Consider the following process.

Step 1: Draw a square then divide into 4 equal parts as shown in the figure, then choose 1 part to paint red color as shown in the figure.



Step 2: Repeat step 1 to the red part and paint yellow color on the chosen part.
Step 3: Repeat step 1 to the yellow part and paint green color on the chosen part.
Step 4: Repeat step 1 to the green part and paint blue color on the chosen part.
What fraction of the whole square is the blue part?

A. $\frac{1}{512}$; B. $\frac{1}{256}$; C. $\frac{1}{128}$; D. $\frac{1}{64}$; E. $\frac{1}{32}$.

6. Given an envelope size 10.8 cm × 16.5 cm.
Fig.1 The envelope is opened to measure its size.
Fig.2 The envelope is closed.

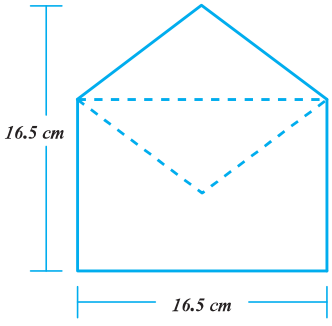
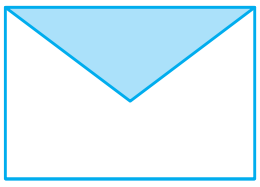


Fig. 1


Fig. 2

What is the area of the unshaded region in Fig. 2 in square of centimeters?

A. 84.15; B. 123.045; C. 130.025; D. 131.175; E. 133.065.

7. A bakery shop has 7 chefs to make 100 pieces of cake within 8 hours.
Today 2 chefs cannot come to work so the remaining chefs have to make 100 pieces of

cake and finish in a hours b minutes. Find a + b.

A. 23; B. 24; C. 25; D. 26; E. 28.

8. Given that N is the least positive integer divided by 4 with the remainder 2, divided by 7 with the remainder 5, and divided by 11 with the remainder 9.

What is the remainder when $4 \times 7 \times 11$ is divided by N?

A. 1; B. 2; C. 7; D. 11; E. 15.

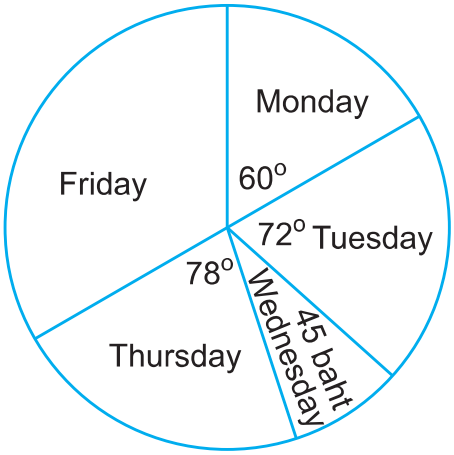
9. Given a pattern of numbers as follows 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, ...

What number is the 77^{th} term?

A. 13; B. 12; C. 11; D. 9; E. 8.

10. A student spent all money 300 baht from Monday to Friday.

The following pie chart shows the representation of daily expenses of the student.



How much money did the student spend on Friday?

A. 80; B. 85; C. 90; D. 92; E. 95.

11. There are 4 bags of number cards. (1 card 1 number)

Bag 1 has cards of number 1 - 10.

Bag 2 has cards of number 12 - 20.

Bag 3 has cards of number 23 - 30.

Bag 4 has cards of number 24 - 35.

All cards in each bag have different numbers.

If student want to draw a number card once at random, which bag should student draw a card that make the highest chance to get a card of an even number?

A. Bag 1; B. Bag 2; C. Bag 3; D. Bag 4;
E. Bag 1 or 2 or 3 or 4.

12. The following table shows the number of students in each grade of a primary school.

Grade	Number of students
1	244
2	253
3	247
4	250
5	a
6	b
Total	c

Let a be the number of students in grade 5, b be the number of students in grade 6, and c be the total number of students. Suppose that the number of students in grade 6 is 2 less than the number of students in grade 5 and the average number of students in each grade is 249. Find a + b + c.

A. 1925; B. 1935; C. 1956;
D. 1994; E. 2019

Part 2: *Questions no. 13 - 24, each correct answer is worth 6 points, 1.5 points for a blank answer, and 0 point for each incorrect answer.*

13. Find the value of 12131415×1918171615.

A. 23,270,135,902,785,295;
B. 23,270,135,902,785,275;
C. 23,270,135,902,785,245;
D. 23,270,135,902,785,235;
E. 23,270,135,902,785,225.

14. The fraction $\frac{1}{4}$ can be converted as a decimal 0.25 where the first digit after the decimal point is 2 and the second digit after the decimal point is 5.

If $\frac{2019}{2562}$ is converted as a decimal, what is the forth digit after the decimal point?

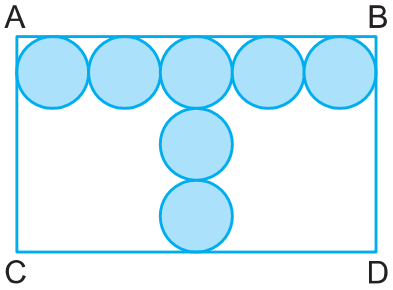
A. 7; B. 5; C. 0; D. 3; E. 8.

15. Uncle George has the number of chickens, ducks, and gooses 50 in total. The number of chickens is 19 greater than the number of ducks.

Each day a chicken gives 3 eggs, a duck gives 2 eggs, and a goose gives 1 egg. Today uncle George can pick 115 eggs in total.

How many ducks does uncle George have?
A. 5; B. 6; C. 7; D. 8; E. 9.

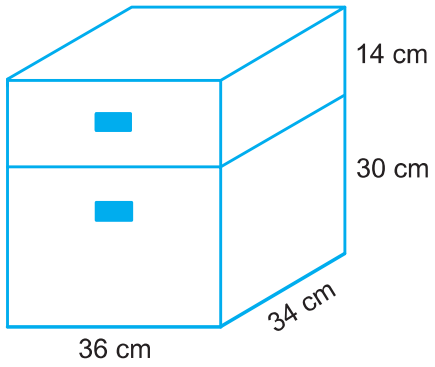
16. In the adjoining figure, ABCD is a rectangle having 7 equal circle inscribed. The circle are tangent as shown in the figure. The radius of each circle is 7 centimeters.



What is the area of the unshaded region in square of centimeters? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

A. 1644; B. 1754; C. 1745;
D. 1,862; E. 1884.

17. Joe has a rectangular 2- story container of size as shown in the adjoining figure. The dimension of 1 notebook is the width 12 cm., the length 17 cm., and 1 cm thickness. The dimension of 1 book is the width 12 cm., the length 17 cm., and 2 cm thickness. Joe wish to keep notebooks in the top story and books in the bottom story.



What are the most possible number of notebooks and books that Joe can keep in the container?
A. 72 notebooks and 84 books;
B. 74 notebooks and 84 books;
C. 76 notebooks and 89 books;
D. 80 notebooks and 92 books;
E. 84 notebooks and 90 books.

18. Quadrilateral ABCD has $\angle ABC = 90°$, $\angle BCD = 150°$ and $AB = BC = CD$. What is the measure of $\angle CDA$?
A. 15°; B. 22.5°; C. 30°; D. 45°; E. 60°.

19. Given a pattern of fractions as follows $\frac{11}{13}; \frac{13}{24}; \frac{15}{56}; \frac{17}{72}; \ldots; \frac{a}{b}$ where $\frac{a}{b}$ is the 15^{th} term. The fraction $\frac{a}{b}$ can be written in term of addition of 2 fractions $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Find the value of $(a + b) - (x + y)$.
A. 220; B. 240; C. 320; D. 380; E. 420.

20. The sum of the length 3% of 14% of 25 kilometers and 5% of 7% of 70 meters is equal to
A. 103,725 millimeters;
B. 104,025 millimeters;
C. 104,135 millimeters;
D. 104,155 millimeters;
E. 105,245 millimeters.

21. A rabbit and a turtle run a race of distance a half kilometer. The running time is started at 7.15 a.m.. While the turtle is running, the rabbit has been still sleeping at the starting point until 8.31 a.m.. Then the rabbit started running with speed 6 kilometers per hour while the turtle is running with speed 300 meters per hour.
At what time can the rabbit catch up the turtle?
A. 9.45 a.m; B. 9.32 a.m; C. 9.21 a.m;
D. 8.50 a.m; E. 8.35 a.m.

22. A teacher wrote numbers 1 to 12 on a board. The teacher asked students to erase the numbers on the board with the condition as follows.
The 1^{st} student erases 1 number that is 1.
The 2^{nd} student erases the next 2 number that are 2 and 3.
The 3^{rd} student erases the next 3 number that are 4, 5, and 6.
The 4^{th} student erases the next 4 number that are 7, 8, 9, and 10.
So there are 2 numbers left to be erased by the 5^{th} student that are 11 and 12.
Suppose that the teacher wrote numbers 1 to 2019 on a board. Then the teacher asks students to erase the numbers similarly as the above steps and so on.
What order is of the last student erasing the numbers and how many numbers are erased?

A. the 61st student and 12 numbers erased;
B. the 63rd student and 1 number erased;
C. the 64th student and 3 numbers erased;
D. the 65th student and 6 numbers erased;
E. the 66th student and 7 numbers erased.

23. There are balls labelled 1 to 40 (1 ball 1 number). The balls labelled 1 to 20 are placed in box 1 and the balls labelled 21 to 40 are placed in box 2.
Draw 1 ball from box 1 and 1 ball from box 2 at random.
Determine the number of ways that the number of the ball from box 2 is divisible by the number of the ball from box 1. For example, 3 is the number of the ball from box 1 and 27 is the number of the ball from box 2, (3, 27) is 1 way.
A. 58; B. 62; C. 64; D. 68; E. 72.

24. There are 4 kinds of bank notes namely 500 baht note, 100 baht note, 50 baht note, and 20 baht note. Kate has some amount of the bank notes consisting of at least one of each kind of the bank notes.
If the total value of money of all her bank notes is 2560 baht, what is the least number of the bank notes that Kate has?
A. 11; B. 12; C. 13; D. 14; E. 15;

Part 3: *Questions no. 25 - 29, each correct answer is worth 7 points, and 0 point for each incorrect or blank answer. In the case that an answer is not integral, students have to put the most nearest integral answer. Students have to answer the last five digits in the case that the answer from calculating is more than 5 digits.*

25. Find the value of $22223 \times 44444 - 22221 \times 44446$.

26. The rectangle ABCD has area 2562 quare centimeters and perimeter p centimeters. Suppose that each side of ABCD is decreased by 1 centimeter. The area of the new rectangle is 2019 square centimeters. Find p.

27. What is the sum of all 3-digit numbers each of which is divisible by 9 and is divided by 10 with a remainder of 4?

28. Given that $\overline{AB}$; $\overline{CD}$; $\overline{EF}$; $\overline{GH}$ and $\overline{IJ}$ represent 2-digit numbers where different letters represent different digits. Suppose that $\overline{AB} - \overline{CD} + \overline{EF} - \overline{GH} + \overline{IJ}$ is an odd number. What is the maximum possible value of $\overline{AB} - \overline{CD} + \overline{EF} - \overline{GH} + \overline{IJ}$?

29. The cost of a box of supplementary food is 60 baht.
A food shop sets the selling price of a box of supplementary food twelve times of its cost. The shop offers a promotion that each customer will get 60% off the selling price. In selling a box of supplementary food, what is the profit?
(Note that baht is the currency of Thailand.)
Bonus Question (Student may or may not give the answer)
A correct answer is worth 20 points. An incorrect answer is deducted 7 points and 0 point for blank answer.
In the case that an answer is not integral, students have to put the most nearest integral answer. Students have to answer the last five digits in the case that the answer from calculating is more than 5 digits.

30. The distance of the straight road from Jack's home to Ann's home is 77 kilometers. Jack departed his home at noon (12:00) forward to Ann's home. When Jack reached Ann's home, he immediately left Ann's home backward to his home. A little while after noon, Ann departed her home forward to Jack's home. Likewise, at once Ann reached Jack's home, she immediately left Jack's home backward to her home. Both Jack and Ann travelled on the straight road without taking a rest on the way. Ann reached her home at time 17:02. On the way, after Ann left her home for 12.5 kilometers to travel to Jack's home, at this moment, two of them passing each other. Then, both of them continued to travel until reaching the home of the other party, then traveling back to their own home. They passing each other again on the way back to their own home at the point 9.5 kilometers far from Ann's home.
At what time did Jack reach his home? (Student must answer in term of 4–digit number. For example, at the time 13:25 the answer is 1325 or at the time 17:54 the answer is 1754)



Hỏi: Em nghe nói chương trình mới bậc THCS có các môn tích hợp. Anh có thể giải thích thật gọn cho em hiểu không?

NGUYỄN THỊ H.
(THCS Kế An, Kế Sách, Sóc Trăng)

Đáp:

Tích hợp cho gọn chương trình
Lịch sử, Địa lí chúng mình ghép nhau
Đỡ trùng chi tiết trước sau
Giảm thời gian lại hiểu mau hơn nhiều.



Hỏi: Em năm nay học lớp 8 thì lên lớp 10 sẽ học sách giáo khoa mới có đúng không anh? Lớp 10 có môn nào mới so với trước không ạ?

TRƯƠNG VĂN T.
(Lớp 8A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ)

Đáp:

Báo tin vui với em yêu
Âm nhạc, Mĩ thuật bao nhiêu tuyệt vời
Hoạt động trải nghiệm, em ơi!
Kinh tế, Pháp luật đồng thời cũng thêm.





Hỏi: Anh ơi! Nghe nói mai kia thi THPT sẽ thi trên máy tính có phải không ạ? Liệu có khó hơn khi thi trên giấy không?

HỒ THỊ D.
(Lớp 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Đáp:

Dự định của Bộ đã lên
Thí điểm từng bước, chưa liền làm ngay
Thi máy cần luyện quen tay
Thành thạo thì sẽ thấy hay thôi mà...



Hỏi: Hình như mai kia, nếu học sinh không thi tốt nghiệp THPT thì vẫn được cấp chứng chỉ hoàn thành chương trình phổ thông và đủ điều kiện để học nghề?

TRẦN VĂN M.
(Lớp 8/2, THCS Lý Tự Trọng, Tiên Kỳ, Tiên Phước, Quảng Nam)

Đáp:

Đề án Bộ mới nêu ra
Còn đang thảo luận thật là kĩ hơn
Mở ra thêm những con đường
Để học sinh dễ chọn phương vào đời!

ANH PHÓ GỠ XƯA



CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(200+201). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn các số 5p + q và pq + 7 đều là số nguyên tố.

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD - ĐT Tam Dương, Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài 2(200+201). Tìm số tự nhiên $\overline{abc}$ thỏa mãn $\overline{abc} = (a+b+c)^3$.

MAI VĂN NĂM

(GV. THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Bài 3(200+201). Cho các số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn $3a+2b+4c+6d \le 24$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+d^2-7a-15b-5c-2d \le 8.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài 4(200+201). Cho hai tam giác ABC và BCD có cạnh BC chung, A và D nằm khác phía đối với đường thẳng BC, biết $\widehat{ABC} = 36^o$; $\widehat{CBD} = 30^o$; $\widehat{BAD} = 81^o$; $\widehat{CAD} = 27^o$. Tính các góc của tam giác ACD.

NGUYỄN BÁ ĐANG

(Hà Nội)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

1(200+201). Find all prime couplets (p,q) such that 5p + q and pq + 7 are also primes.

2(200+201). Find the natural number having the form $\overline{abc}$ such that $\overline{abc} = (a+b+c)^3$.

3(200+201). Given four real non-negative a, b, c and d satisfying 3a + 2b + 4c + 6d ≤ 24. Prove that

$$a^2+b^2+c^2+d^2-7a-15b-5c-2d \le 8.$$

4(200+201). Given two triangles ABC and BCD with BC being the common side, Points A and D are on different sides of line segment BC, where, $\widehat{ABC} = 36^o$; $\widehat{CBD} = 30^o$; $\widehat{BAD} = 81^o$; $\widehat{CAD} = 27^o$. Find the angles of triangle ACD.



CÁC LỚP THCS

Bài 5(200+201). Giải phương trình

$$\sqrt{4x^2+4y^2-8x-12y+113} = 4(\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{3y-y^2}).$$

CAO NGỌC TOẢN

(GV. THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

Bài 6(200+201). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x} \le \frac{1}{4}\left(1+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

NGUYỄN VĂN NHO

(GV. THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài 7(200+201). Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn phương trình

$$(2019x+2020)^2 = y^3+1.$$

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài 8(200+201). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^o$. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ hai tam giác vuông DAB và EAC thỏa mãn $\Delta DAB \backsim \Delta ECA$ và $\widehat{ADB} = \widehat{CEA} = 90^o$. Lấy điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{DB^2}{DA^2}$. Tính $\widehat{DME}$.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV. THCS Phường Bình Định, thị xã An Nhơn, Bình Định)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

5(200+201). Solve the following equation

$$\sqrt{4x^2+4y^2-8x-12y+113} = 4(\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{3y-y^2}).$$

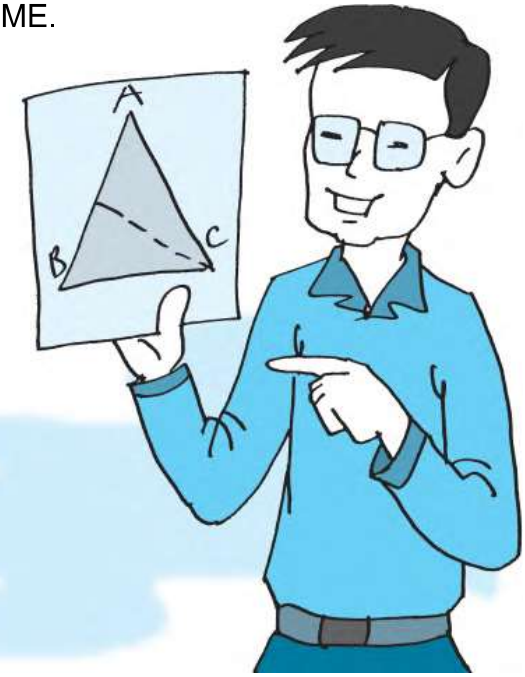
6(200+201). Given three real positive numbers x, y and z such that x + y + z = 1. Prove that

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x} \le \frac{1}{4}\left(1+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

7(200+201). Find the positive integer couplets (x, y) such that

$$(2019x+2020)^2 = y^3+1.$$

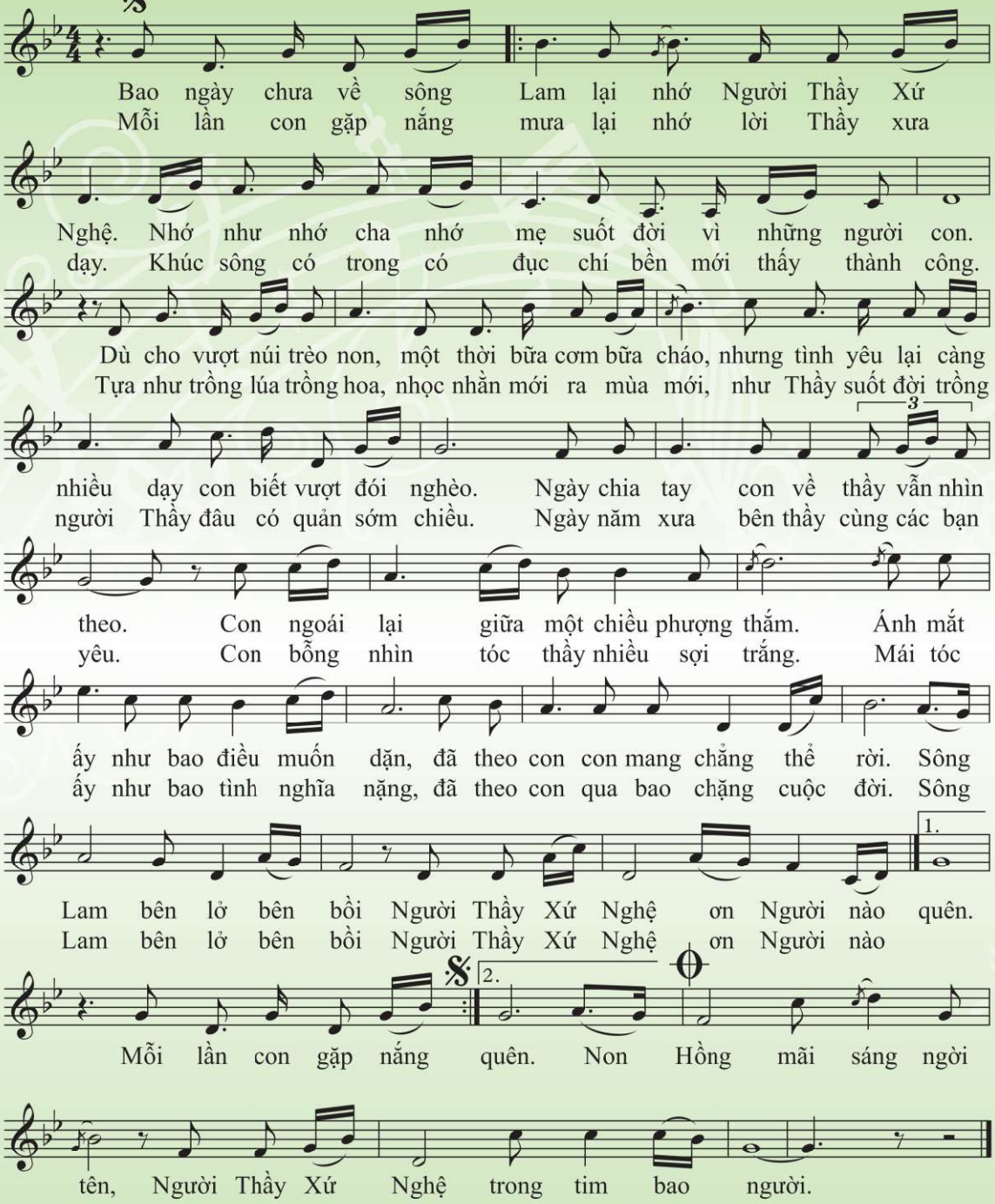
8(200+201). Given triangle ABC, where, $\angle BAC < 90^o$. Construct right-angled triangles DAB and EAC outside triangle ABC satisfying $\Delta DAB \backsim \Delta ECA$ and $\angle ADB = \angle CEA = 90^o$. Point M on BC such that $\frac{MB}{MC} = \frac{DB^2}{DA^2}$. Find $\angle DME$.



Người thầy xứ Nghệ

(Tặng các Thầy Cô với nhiều kỉ niệm một thời)

Tình cảm - Thiết tha — *Nhạc & lời: Lê Thống Nhất*



Đây là ca khúc mà tác giả đã muốn viết từ lâu để ca ngợi và tri ân các thầy cô xứ Nghệ với những tình cảm gắn bó qua nhiều năm tháng học tập, giảng dạy ở trường Đại học Vinh. Cũng chính sự gắn bó với con người và mảnh đất xứ Nghệ mà giai điệu của ca khúc mang chất dân ca quen thuộc của vùng quê núi Hồng, sông Lam. Ca khúc viết dịp đầu Xuân Kỷ Hợi và được NSƯT Ngọc Hà thể hiện đầu tiên. Hi vọng các thế hệ học sinh từng học các thầy cô xứ Nghệ sẽ có thêm một ca khúc thay lời muốn nói với các thầy cô của mình.

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.
Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.
Mã số: 8BTT200M19. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2019.

Giá: 20 000 đồng