NĂM THỨ
HAI MƯƠI
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

8/9
195
NĂM HỌC 2018 - 2019

TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP BẰNG CÁCH SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP GHÉP HÌNH



TIN TỨC - HOẠT ĐỘNG - GẶP GỠ

* Ngày 14/3 - 15/3/2019, thành phố Lào Cai đã tổ chức Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ năm 2019. Năm nay có 310 thí sinh đến từ các trường Tiểu học và Trung học cơ sở trên địa bàn TP. Lào Cai, các huyện trong tỉnh Lào Cai và TP. Yên Bái, Yên Bái. Các thí sinh được chia thành 36 đội tham gia đầy đủ ba phần thi: Cá nhân, Tiếp sức Toán và Du lịch Toán học. Kết quả: Ban tổ chức trao 21 giải đồng đội và 155 giải cá nhân cho các thí sinh tham gia dự thi.







Vòng chung khảo Kì thi Toán học Trưng Vương mở rộng lần thứ nhất năm 2019

* Ngày 16/3/2019, trong khuôn khổ Ngày hội STEM lần thứ IV năm 2019, trường THCS Trưng Vương đã tổ chức Vòng chung khảo Kì thi Toán học Trưng Vương mở rộng (TVOMC) lần thứ nhất năm 2019 nhằm tìm kiếm và nuôi dưỡng những học sinh tài năng, đặc biệt là các em học sinh có năng khiếu toán học ở các trường Tiểu học và Trung học cơ sở. Kì thi đã góp phần thúc đẩy phong trào học toán, toán Tiếng Anh trong các nhà trường. Có hai vòng thi cá nhân và thi đồng đội, đề bài của tất cả các vòng thi là toán bằng tiếng Anh. Trong lúc các thí sinh tham gia thi, các thầy cô giáo lãnh đội có một buổi sinh hoạt chuyên đề về dạy toán bằng tiếng Anh rất sôi nổi và hiệu quả. Ban Tổ chức đã trao 7 giải Nhất, 13 giải Nhì, 32 giải Ba ở phần thi Cá nhân; 3 giải Nhất, 2 giải Nhì và 6 giải Ba ở phần thi Đồng đội.

PV. TTT

Toán tuổi thơ 2 TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
TS. TRẦN QUANG VINH
Phó Tổng biên tập phụ trách tạp chí:
ThS. NGUYỄN NGỌC HÂN
Phó Tổng biên tập tạp chí:
TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

ỦY VIÊN

NGND. VŨ HỮU BÌNH
TS. NGUYỄN MINH ĐỨC
ThS. ĐẶNG HIỆP GIANG
TS. NGUYỄN MINH HÀ
PGS. TS. VŨ ĐÌNH HÒA
ThS. TRẦN QUANG HÙNG
TS. LÊ THỐNG NHẤT
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG
ThS. PHẠM ĐỨC TÀI
NGND. PGS. TS. TÔN THÂN
PGS. TS. LÊ ANH VINH

TÒA SOẠN

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702
Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com
Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com
Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Trị sự - Phát hành:
TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG,
NGUYỄN THỊ HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH
Biên tập - Chế bản: **VŨ THỊ MAI, ĐỖ TRUNG KIÊN**
Mĩ thuật: **TRẦN NGỌC TRƯỜNG**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY

Giải toán thế nào? Tr 2
Một số dạng toán về tính tổng dãy số viết theo quy luật
Hà Văn Nhân

Rừng cười Tr 4
Nhà gì?
Vua Tếu

Đo trí thông minh Tr 5
Hình nào thích hợp?
Đỗ Thị Thúy Ngọc

Giải toán học Anh Tr 6
Relationships within triangles
Trịnh Hoài Dương

Nhìn ra thế giới Tr 8
Lời giải đề thi Toán Balkan (JBMO) 2017
Đỗ Đức Thành

Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc Tr 10
Ai đã tặng bút cho bạn Đức?
Trần Phương Nam

Vượt vũ môn Tr 12
Giải một số bài toán hình học tổ hợp bằng cách sử dụng phương pháp ghép hình
Phan Duy Nghĩa

Compa vui... tính Tr 15
Có đồng quy không?
Phạm Tuấn Khải

Dành cho các nhà toán học nhỏ Tr 22
Từ một số bài toán quen thuộc đến bài toán thi VMO năm 2019 (Tiếp theo kì trước)
Nguyễn Đăng Khoa

Minh họa bìa 1: *Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông*



MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ TÍNH TỔNG DÃY SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT

HÀ VĂN NHÂN

GV. THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa

Bài viết này giới thiệu một số dạng toán tính tổng các số hạng của dãy số viết theo quy luật. Qua bài viết này các bạn học sinh sẽ dễ dàng giải các dạng toán tương tự.

Dạng 1. Tính tổng các số hạng của dãy số cách đều

Bài toán 1. Tính tổng A = 1 + 2 + 3 + ... + 99.

Lời giải. Ngoài cách nhóm các số hạng của tổng để được các nhóm hai số có tổng bằng nhau, ta có thể giải bài toán trên bằng cách nhân cả hai vế với 2 sau đó nhóm các cặp số hạng có tổng bằng nhau.

Ta có 2A = 2(1 + 2 + 3 + ... + 99)

= (1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + ... (50 + 50)

= 100 + 100 + 100 + ... + 100 (có 99 số hạng 100)

= 100.99.

Do đó A = 100.99 : 2 = 4950.

Nhận xét. *Với số tự nhiên n lớn hơn 1 thì*

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Bài toán 2. Tính tổng B = 1 + 3 + 5 + ... + 99.

Lời giải. Số số hạng của B là

(99 – 1) : 2 + 1 = 50 (số hạng).

Ta có 2B = 2(1 + 3 + 5 + ... + 99)

= (1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + ... + (49 + 51)

= 100 + 100 + 100 + ... + 100

= 50.100 = 5000.

Suy ra B = 5000 : 2 = 2500.

Dạng 2. Tính tổng các số hạng của dãy số viết theo quy luật mà mỗi số hạng là tích của các số tự nhiên liên tiếp

Bài toán 3. Tính tổng

C = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 98.99.

Phân tích. *Ta thấy mỗi số hạng của tổng là tích của hai số tự nhiên liên tiếp, để tính tổng trên ta nhân cả hai vế với 2 + 1 = 3, sau đó viết 3 = 4 – 1 = 5 – 2 = 6 – 3 = ... để xuất hiện các số hạng đối nhau.*

Lời giải. Ta có

3C = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + ... + 98.99.3

= 1.2.3 + 2.3.(4 – 1) + 3.4.(5 – 2) + ... + 98.99.(100 – 97)

= 1.2.3 + 2.3.4 – 1.2.3 + 3.4.5 – 2.3.4 + ... + 98.99.100 – 97.98.99

= 98.99.100.

Suy ra C = 98.99.100 : 3 = 98.33.100 = 323400.

Nhận xét. *Với số tự nhiên n > 1 thì ta có*

$$1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Bài toán 4. Tính tổng

C = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 98.99.100.

Phân tích. *Ta thấy mỗi số hạng của tổng là tích của ba số tự nhiên liên tiếp, để tính tổng trên ta nhân cả hai vế với 3 + 1 = 4, sau đó viết 4 = 5 – 1 = 6 – 2 = 7 – 3 = ... để xuất hiện các số hạng đối nhau.*

Lời giải. Ta có

4D = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + ... + 98.99.100.4

= 1.2.3.4 + 2.3.4.(5 – 1) + 3.4.5.(6 – 2) + ... + 98.99.100.(101 – 97)

= 1.2.3.4 + 2.3.4.5 – 1.2.3.4 + 3.4.5.6 – 2.3.4.5 + ... + 98.99.100.101 – 97.98.99.100

= 98.99.100.101.

Suy ra D = 98.99.100.101 : 4

= 98.99.25.101 = 24497550.

Nhận xét. *Phương pháp còn có thể áp dụng tính tổng các bình phương của các số tự nhiên liên tiếp.*

Bài toán 5. Tính tổng

$E = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 99^2$.

Hướng dẫn. Ta có

$E = 1.(2 - 1) + 2.(3 - 1) + 3.(4 - 1) + ... + 99.(100 - 1)$

$= 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 99.100 - (1 + 2 + 3 + ... + 99)$.

Từ đó áp dụng các bài toán trên để tính giá trị của E.

Dạng 3. Tính tổng các số hạng của dãy phân số đặc biệt

Ở dạng toán này ta thường tách các phân số thành hiệu các phân số khác để làm xuất hiện các số hạng đối nhau.

Bài toán 6. Tính tổng

$$F = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{50.51}.$$

Lời giải. Ta có

$$F = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

$$= 1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}.$$

Nhận xét. *Với các số tự nhiên n, k khác 0 thì*

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \quad \frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 7. Tính tổng

$$G = \frac{12}{2.9} + \frac{12}{9.16} + \frac{12}{16.23} + ... + \frac{12}{65.72}.$$

Lời giải. Ta có

$$G = \frac{12}{7}\left(\frac{7}{2.9} + \frac{7}{9.16} + \frac{7}{16.23} + ... + \frac{7}{65.72}\right)$$

$$= \frac{12}{7}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{65} - \frac{1}{72}\right)$$

$$= \frac{12}{7}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{72}\right) = \frac{12}{7}.\frac{35}{72} = \frac{5}{6}.$$

Bài toán 8. Tính tổng

$$H = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{50.51.52}.$$

Phân tích. *Với số tự nhiên n khác 0 ta có*

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \ (*)$$

Lời giải. Áp dụng đẳng thức (*) ta có

$$2H = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + ... + \frac{2}{50.51.52}$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{50.51} - \frac{1}{51.52}$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{51.52} = \frac{1325}{2652}.$$

Suy ra $H = \frac{1325}{2652} : 2 = \frac{1325}{2652}.\frac{1}{2} = \frac{1325}{5304}$.

Bài toán 9. Tính tổng

$$M = \frac{17}{1.3.5} + \frac{17}{3.5.7} + \frac{17}{5.7.9} + ... + \frac{17}{49.51.53}.$$

Phân tích. *Với số tự nhiên n khác 0 ta có*

$$\frac{4}{n(n+2)(n+4)} = \frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)}. \ (**)$$

Lời giải. Áp dụng đẳng thức (**) ta có

$$M = \frac{17}{4}.\left(\frac{4}{1.3.5} + \frac{4}{3.5.7} + \frac{4}{5.7.9} + ... + \frac{4}{49.51.53}\right)$$

$$= \frac{17}{4}.\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} + ... + \frac{1}{49.51} - \frac{1}{51.53}\right)$$

$$= \frac{17}{4}.\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{51.53}\right) = \frac{17}{4}.\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{51.53}\right)$$

$$= \frac{17}{4}.\frac{900}{2703} = \frac{75}{53}.$$

Bài tập tự luyện

Bài 1. Tính tổng

a) $A = 1 + 4 + 7 + ... + 1000$.

b) $B = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 50.51$.

c) $C = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + ... + 50.51.52.53$.

d) $D = 1.4 + 2.5 + 3.6 + ... + 50.53$.

Bài 2. Tính tổng

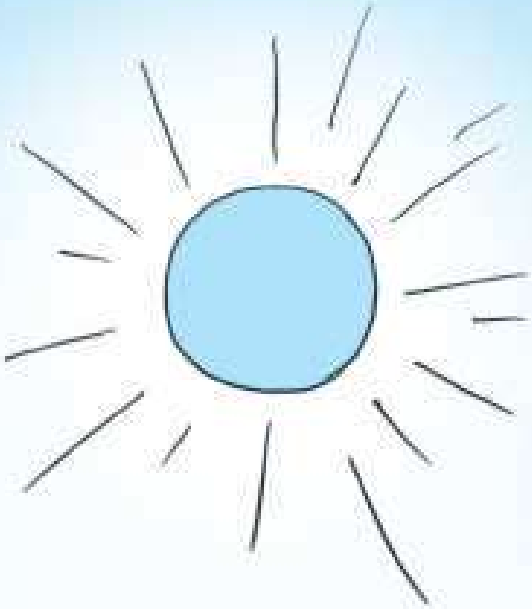
a) $A = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + ... + \frac{1}{70.71}$;

b) $B = \frac{7}{2.4} + \frac{7}{4.6} + \frac{7}{6.8} + ... + \frac{7}{2016.2018}$;

c) $C = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + + \frac{1}{4.5.6} + ... + \frac{1}{30.31.32}$;

d) $D = \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{4.6.8} + + \frac{1}{6.8.10} + ... + \frac{1}{30.32.34}$.

Vui cười



Kì này Nhà gì?

Nhà gì dạy học là nghề
Nhà gì soi cả bốn bề lạ sao
Nhà gì giữa sóng biển gào
Nhà gì thì có chức cao và quyền
Nhà gì mua lại bán liền
Nhà gì hành khách đợi lên được tầu
Nhà gì viết truyện làm đầu
Nhà gì ăn hỏi đón dâu về nhà
Nhà gì chuông đánh ngân nga
Nhà gì niệm Phật, thường là ăn chay
Nhà gì có bệnh cứu ngay
Nhà gì thì giữ đêm ngày vật xưa
Nhà gì tin tức nhanh đưa
Nhà gì nghệ sĩ say sưa diễn hoài
Nhà gì vần điệu thành bài
Nhà gì đồng ruộng miệt mài bón chăm
Nhà gì vào uống, vào ăn
Nhà gì thì có nhiều căn, nhiều tầng
Nhà gì thì đẩy trăm cân
Nhà gì thì sẽ được nâng cup vàng
Nhà gì hội họp buôn làng
Nhà gì chỉ để chứa hàng ai ơi
Nhà gì tiền gửi sinh lời
Nhà gì thì dạy bé thời ấu thơ
Nhà gì gỗ, lá đơn sơ
Nhà gì nằm ở thủ đô Hoa Kỳ
Bao nhà bạn kể đúng đi
Ai giỏi, Vua Tếu tức thì thưởng luôn!

VUA TẾU



Kết quả **(TTT2 số 192+193)**

Cầu gì?

Cầu Nhật Tân nhớ làng hoa
Cầu Long Biên thuở trước qua sông Hồng
Cầu nguyện muốn có từ không
Cầu cạnh nhờ vả tây đông việc mình
Cầu nối giúp việc liên minh
Cầu dao ngắt điện gia đình được ngay
Cầu treo cáp tựa cổ tay
Cầu thang nối giữa tầng này, tầng kia
Cầu vồng bảy sắc ngàn tia
Cầu hôn hai họ cùng chia tin mừng
Cầu tự mong đẻ con cưng
Cầu Rồng phun lửa sáng trưng sông Hàn
Cầu thị nhận lỗi đã làm
Cầu truyền hình thấy rõ ràng mấy nơi
Rất đông các bạn trả lời
Trẫm xin ban thưởng ba người giải hay.

HONG HA

Nhận xét. Vua Tếu rất vui mừng khi nhận được rất nhiều câu trả lời của các bạn khắp nơi trên cả nước gửi về. Nhưng chỉ có ba cá nhân sau trả lời đúng được Vua Tếu ban thưởng: *Phan Quang Triết*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Hà Minh Ngọc*, 6A, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ, **Phú Thọ**; *Nguyễn Phương Linh*, 7E, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**.

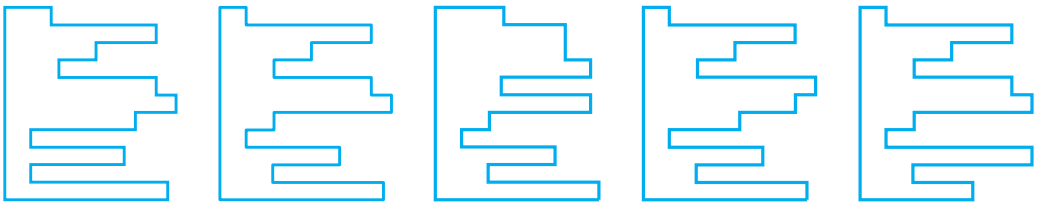
VUA TẾU



Kì này HÌNH NÀO THÍCH HỢP?



Hãy chọn hình phù hợp để ghép với hình trên ta được một hình vuông (không lật ngược hình).



ĐỖ THỊ THÚY NGỌC
Phó Trưởng phòng Giáo dục Trung học, Sở GD&ĐT Ninh Bình
(Sưu tầm và giới thiệu)

Kết quả HÌNH NÀO KHÁC? (TTT2 số 192+193)

Đáp án. Hình B.

Giải thích. Các hình A, C, D, E thực chất chỉ là một hình, được xoay một góc nào đó. Nói cách khác, các hình A, C, D, E là giống hệt nhau, còn hình B khác các hình này.

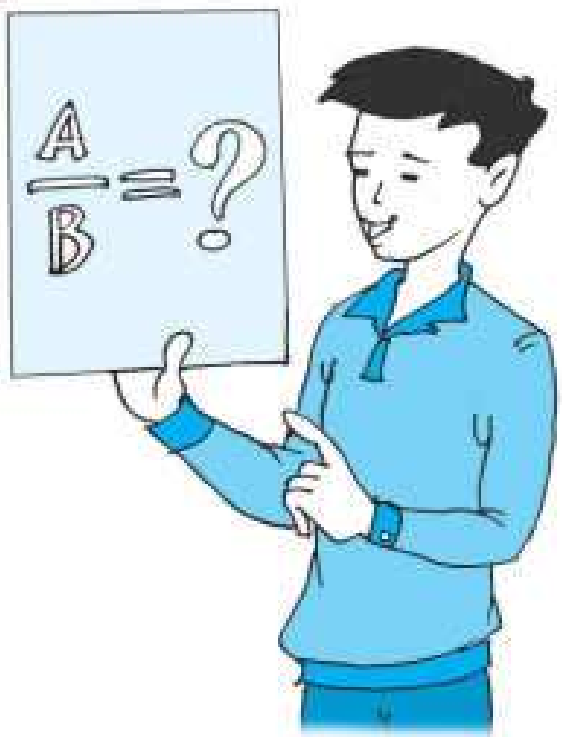
Nhận xét. Hầu hết các bạn đều chọn đúng đáp án nhưng diễn đạt còn thiếu chính xác, chưa nêu được điểm khác nhau đặc trưng của hình B với các hình còn lại.

HONG HA

Xin trao thưởng cho các bạn: *Vũ Đức Đạt*, 6C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Minh Thái*, 6D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Quản Xuân Trường*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Phan Đại Hoàng*, 6D, THCS Hưng Bình, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Bảo Hoàng*, 9/2, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

Các bạn sau được tuyên dương: *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Thân Lan Phương*, 8C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Quách Thùy Dung*, 8A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Nguyễn Diệu Hằng*, 9/2, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Lê Minh Trí*, 8A1, THCS Phường Bình Định, TX. An Nhơn, **Bình Định**; *Nguyễn Minh Hải*, 6C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội.**

NGUYỄN XUÂN BÌNH





RELATIONSHIPS WITHIN TRIANGLES

TRỊNH HOÀI DƯƠNG
GV. THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội
HOÀNG ANH QUÂN
Cử nhân tài năng toán, Đại học KHTN Hà Nội

1. Key words

Median	Đường trung tuyến
Altitude	Đường cao
Perpendicular bisector	Đường trung trực
Internal angle bisector	Đường phân giác trong
External angle bisector	Đường phân giác ngoài
Concurrent (adj)	Đồng quy
Concurrency (n)	Sự đồng quy
Centroid	Trọng tâm
Orthocenter	Trực tâm
Circumcenter	Tâm đường tròn ngoại tiếp
Incenter	Tâm đường tròn nội tiếp
Excenter	Tâm đường tròn bàng tiếp

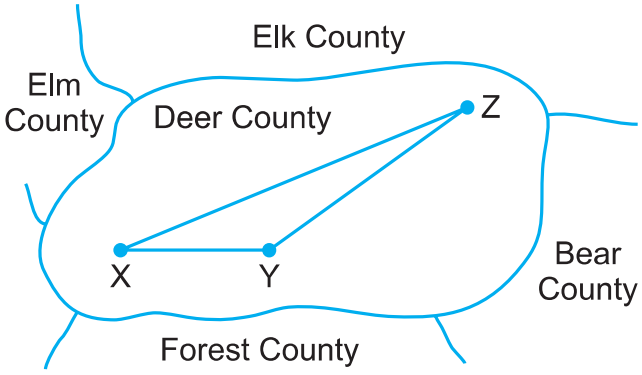
2. Properties

Lines of a triangle	Point of concurrency
3 medians	Centroid
3 altitudes	Orthocenter
3 perpendicular bisectors	Circumcenter
3 internal angle bisectors	Incenter
1 internal angle bisector and 2 external angle bisectors	Excenter

1) The centroid divides each of the medians in the ratio 2:1.
2) The longer segment connects the centroid to the vertex and the other connects the centroid to the opposite midpoint of the triangle.
3) The incenter and excenter are equidistant to all sides of a triangle.
4) The circumcenter is equidistant to all vertices of a triangle.
5) If a point is on the bisector of an angle, then it is equidistant from the two sides of the angle.
6) (Triangle inequality) For any triangle, the sum of the lengths of any two sides must be greater than the length of the remaining side.
7) (Relate side length and angle measure) If one side of a triangle is longer than another side, then the angle opposite the longer side is larger than the angle opposite the shorter side.
The converse is also true: If one angle of a triangle is larger than another angle, then the side opposite the larger angle is longer than the side opposite the smaller angle.

3. Homework

Problem 1. A committee has decided to build a park in Deer County. The committee agreed that the park should be equidistant from the three largest cities in the county, which are labeled X, Y, Z in the diagram. Explain why this may not be the best place to build the park. Use a sketch to support your answer.



Problem 2. Given an isosceles triangle ABC. Denote by H the feet of the altitude from A. Let O be the intersection of the line AH and the perpendicular bisector of AC. Let E; F be any two points lying on the sides AB; AC, respectively, such that AE = CF.

a) Prove that the point O is the circumcenter of the triangle ABC.

b) Prove that $\angle OCF = \frac{1}{2}\angle BAC$ and $\Delta OAE = \Delta OCF$.

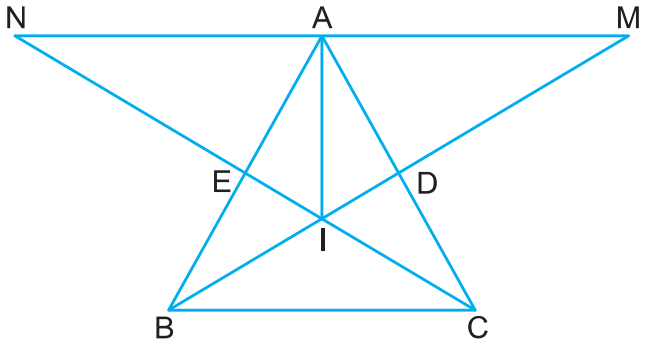
c) Let ABC be an arbitrary acute triangle. Denote by Ax the angle bisector of angle BAC and let d be the perpendicular bisector of the segment AC; denote by O the intersection of Ax and d. Let M and N be points on segments AB and AC such that AM = CN. Prove that the line MN contains the point O.

Các bạn hãy viết lời giải bài toán trên bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé!

Kết quả **(TTT2 số 192+193)**

CONGRUENT TRIANGLES

Problem 1.



a) From the information provided in the question, it is evident that AE = EB = AD = DC. Considering triangle BDC and CEB, we have:

$$\begin{cases} DC = BE \\ \angle DCB = \angle EBC \\ BC \text{ in common} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta BDC = \Delta CEB$ (S.A.S).

Thus, BD = CE.

b) Considering two triangles ABD and ACE, we have

$$\begin{cases} AD = AE \\ BD = CE \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACE (S.S.S).$$

So, $\angle ABD = \angle ACE$

$\Rightarrow \angle IBC = \angle ICB$ (As $\angle ABC = \angle ACB$).

Thus, triangle IBC is an isosceles triangle, it implies that IB = IC.

Considering two triangles AIB and AIC, we have

$$\begin{cases} AB = AC \\ IB = IC \\ \text{common side AI} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta AIB = \Delta AIC (S.S.S) \Rightarrow \angle BAI = \angle CAI.$

As a result, AI is the bisector of angle BAC.

c) Considering two triangles AEN and BEC, we have:

$$\begin{cases} EN = EC \\ \angle NEA = \angle CEB \\ EA = EB \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta AEN = \Delta BEC (S.A.S)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle NAE = \angle CBE \\ AN = BC. \end{cases}$$

It implies that AN is parallel to BC as they are alternate interior triangles.

Similarly, it is straightforward to prove that AM is parallel to BC and AM = BC.

Hence, AM = AN and A, M, N are collinear.

Consequently, A is the midpoint of MN.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau đã đưa ra lời giải và đáp số chính xác nên được thưởng kì này: *Dương Thu Hằng*, 7C, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thị Hoài An*, 7B, THCS Đặng Thanh Mai, TP. Vinh; *Lê Thiệp Sang*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Lê Minh Trí*, 8A1, THCS Phường Bình Định, TX. An Nhơn, **Bình Định**; *Trần Gia Huy*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

ĐỖ ĐỨC THÀNH



HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI TOÁN BALKAN (JBMO) 2017

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH
GV. Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội
(Sưu tầm và dịch)

(Đề đăng trên TTT2 số 194)

Bài 1. Trong 6 số phải có 2 số là bội của 3 nhân với nhau vì nếu không 2 trong 3 số hạng trong đẳng thức sẽ là bội của 3 nhưng số thứ ba lại không.

Gọi n và n + 3 là hai số chia hết cho 3 và 2 trong 4 số còn lại khi chia cho 3 sẽ dư 1, hai số cuối cùng khi chia cho 3 thì dư 2.

Do đó hai tích còn lại chia cho 3 dư 1 hoặc 2 (vì 1.1 = 1; 2.2 = 4; 1.2 = 2).

Suy ra số hạng n(n + 3) phải nằm phía bên phải của đẳng thức.

Khi xét đến tính chẵn lẻ, ta sẽ có 3 số là số lẻ và 3 số là số chẵn.

Một trong hai số n hoặc n + 3 là số chẵn và số còn lại là số lẻ, vậy nên chỉ có 2 trong các số còn lại là số lẻ.

Vì n(n + 3) là số chẵn nên hai số lẻ còn lại phải xuất hiện trong các số hạng khác.

Ta có các trường hợp sau:

✻ **TH1.** Sáu số có dạng:

$n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$.

Tích của hai số trong vế phải phải lớn hơn n(n + 3), vậy nên chỉ có một khả năng duy nhất đó là:

$(n-2)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+2)$.

Suy ra $n=3$ và ta có $1.2+3.6=4.5$.

✻ **TH2.** Sáu số có dạng:

$n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4$.

Do (n + 4)(n – 1) + n(n + 3) = (n + 1)(n + 2) không có nghiệm vậy nên n + 4 phải ở bên vế phải cùng với một số có khác tính chẵn lẻ n – 1 hoặc n + 1.

• Với $(n+2)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+4)$.

Suy ra $n=3$.

Vậy ta có $2.5+3.6=4.7$.

• Với $(n+2)(n+1)+n(n+3)=(n-1)(n+4)$,

không có nghiệm.

✻ **TH3.** Sáu số có dạng:

$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$.

Ta có các khả năng sau:

• Với $(n+1)(n+2)+n(n+3)=(n+4)(n+5)$.

Suy ra $n=6$ và ta có $7.8+6.9=10.11$.

• Với (n + 2)(n + 5) + n(n + 3) = (n + 1)(n + 4) (vô nghiệm).

• Với $(n+1)(n+4)+n(n+3)=(n+2)(n+5)$.

Suy ra $n=2$ (không chia hết cho 3).

Vậy bài toán có 3 nghiệm: 1.2 + 3.6 = 4.5, 2.5 + 3.6 = 4.7, 7.8 + 6.9 = 10.11.

Bài 2. Do x, y, z là các số nguyên dương khác nhau nên bất đẳng thức có tính đối xứng, không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $x \ge y+1 \ge z+2$.

Vậy ta xét hai trường hợp sau:

✻ **TH1.** $y \ge z+2$. Vì $x \ge y+1 \ge z+3$ nên suy ra

$$\begin{cases}(x-y)^2 \ge 1\\(y-z)^2 \ge 4\\(x-z)^2 \ge 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2 \ge 2xy+1\\y^2+z^2 \ge 2yz+4\\x^2+z^2 \ge 2xz+9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} zx^2 + zy^2 \geq 2xyz + z \\ xy^2 + xz^2 \geq 2xyz + 4x \\ yx^2 + yz^2 \geq 2xyz + 9y \end{cases}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$

$\geq 6xyz + 4x + 9y + z$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx - 2)$

$\geq 9xyz + 2x + 7y - z.$

Do $x \geq z + 3$ nên ta có $2x + 7y - z \geq 0.$

Suy ra đpcm.

✻ **TH2.** $y = z + 1$. Vì $x \geq y + 1 = z + 2$ nên suy ra $x \geq z + 2$, ta thế $y = z + 1$ vào trong bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$(x + z + 1 + z)(x(z + 1) + (z + 1)z + zx - 2)$

$\geq 9x(z + 1)z$

$\Leftrightarrow (x + 2z + 1)(z^2 + 2zx + z + x - 2)$

$- 9x(z + 1)z \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - z - 2)(x - z + 1)(2z + 1) \geq 0.$

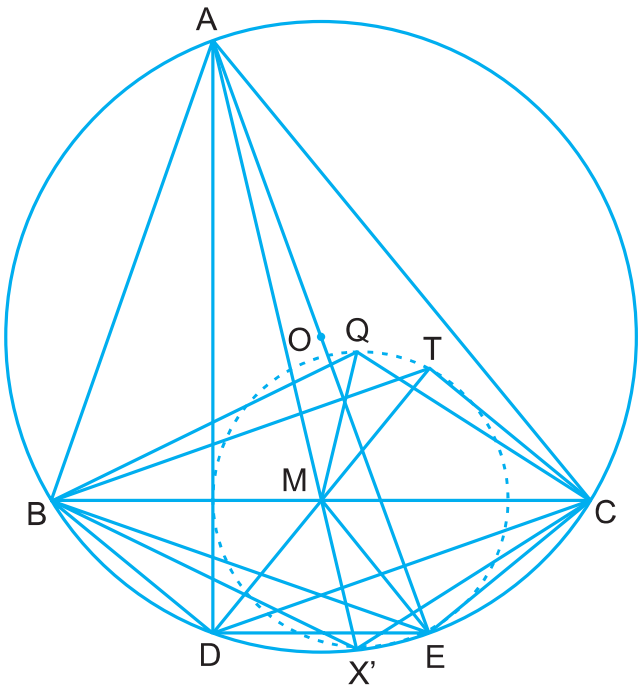
Bất đẳng thức luôn đúng do $x \geq z + 2$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = z + 2$.

Tức là $(x, y, z) = (k + 2, k + 1, k)$ và các hoán vị với mọi số nguyên dương k.



Bài 3. Gọi X' là điểm đối xứng với Q qua đường thẳng BC.



Vì $\widehat{CBA} = \widehat{CQM} = \widehat{CX'M}$, $\widehat{BCA} = \widehat{BQM} = \widehat{BX'M}$

nên $\widehat{BX'C} = \widehat{BX'M} + \widehat{CX'M}$

$= \widehat{CBA} + \widehat{BCA} = 180^o - \widehat{BAC}.$

Ta có $X' \in \Gamma$ và bởi $\widehat{AX'B} = \widehat{ACB} = \widehat{MX'B}$, nên ta có 3 điểm A, M, X' thẳng hàng.

Ta lại có

$\widehat{DCB} = \widehat{DAB} = 90^o - \widehat{ABC} = \widehat{OAC} = \widehat{EAC} = \widehat{EBC}.$

Vậy DBCE là một hình thang cân.

Vì tứ giác BDCT là hình bình hành nên ta có MT = MD, ba điểm M, D, T thẳng hàng và BD = CT.

Vì tứ giác BDEC là hình thang cân nên ta có BD = CE và ME = MD.

Suy ra

$\widehat{BTC} = \widehat{BDC} = \widehat{BEC}$, CE = BD = CT, ME = MT.

Do đó E và T đối xứng với nhau qua đường thẳng BC và hai điểm Q và X' cũng đối xứng với nhau qua đường thẳng BC nên tứ giác QX'ET là hình thang cân.

Suy ra 4 điểm Q, X', E, T cùng nằm trên một đường tròn.

Vì $X' \in \Gamma$ nên ta có $X \equiv X'$.

Vậy 3 điểm A, M và X thẳng hàng.



AI ĐÃ TẶNG BÚT CHO BẠN ĐỨC?

TRẦN PHƯƠNG NAM

(Ghi theo câu chuyện của thám tử Sê Lốc Cốc)

Như thường lệ, tôi lại hẹn thám tử Sê Lốc Cốc đi uống cà phê với hi vọng biết thêm một vụ phá án của thám tử để cùng chia sẻ với bạn đọc của Toán Tuổi thơ 2.

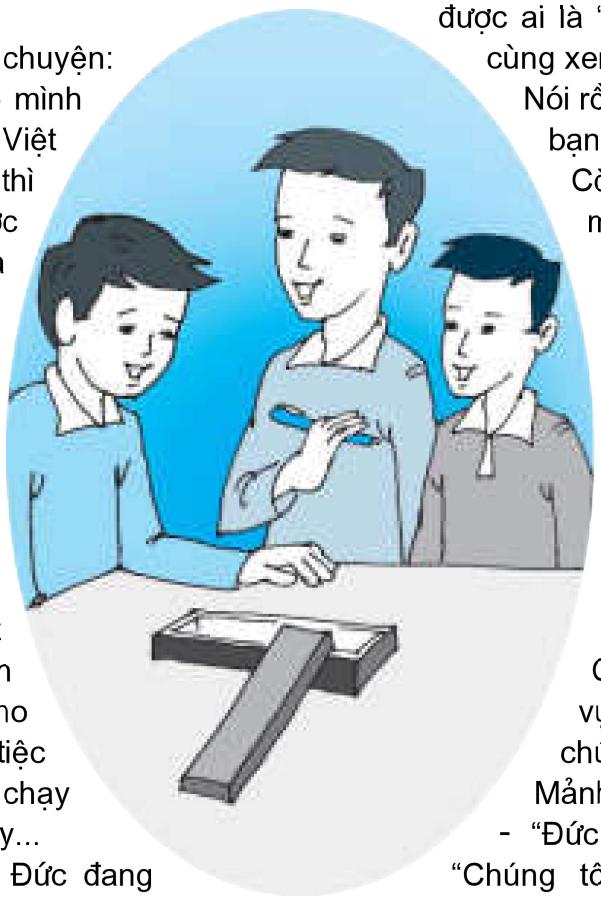
Lần này thám tử cười vui vẻ bảo tôi:

- Đây không phải là một vụ án mà chỉ là một câu chuyện vui vẻ nhưng cũng phải tư duy thì mới biết được "thủ phạm" của món quà sinh nhật.

Sê Lốc Cốc đã kể lại câu chuyện:

Hôm đó, không hiểu sao mình lại đến một quán ăn ở Việt Nam. Ngồi được một lúc thì thấy bốn người cùng bước vào. Qua câu chuyện của họ thì biết rằng các bạn ấy rủ nhau tới đây nhân ngày sinh nhật của Đức. Mình cũng không để ý nhiều tới câu chuyện của các bạn ấy. Chỉ tới khi bạn Đức bất ngờ nói to:

- Ôi! Ai đã để chiếc bút tuyệt vời có khắc tên mình làm món quà sinh nhật cho mình đây? Khi vào bàn tiệc mình có thấy đâu... vừa chạy ra ngoài trở vào thì lại thấy...



Mình nhìn sang thì thấy Đức đang đưa cho các bạn của mình xem chiếc bút rất đẹp. Một trong ba người bạn hay là... nhân viên của quán ăn đã để chiếc bút này vào mặt bàn ăn trong khi Đức vừa chạy ra ngoài?

Một bạn chợt phát hiện ra mình, tươi cười:

- Kìa... chào thám tử Sê Lốc Cốc... Bạn Đức có thể nhờ thám tử "khám phá" vụ này để biết được ai là người đã đặt chiếc bút này tặng bạn.

Mình bèn bước tới chiếc bàn ăn của các bạn và đề nghị:

- Chắc chắn 3 bạn biết rõ ai là người tặng chiếc bút này cho Đức. Bây giờ 3 bạn hãy ghi vào giấy cho mình 3 điều, trong đó có 2 điều nói thật và 1 điều nói dối thì mình sẽ suy được ai là "thủ phạm"! Chúng ta sẽ cùng xem các điều này.

Nói rồi mình đưa cho 3 bạn mỗi bạn một mảnh giấy để ghi. Còn mình quay lại bàn của mình tiếp tục ăn.

Như một cuộc chơi vui vẻ, lần lượt mọi người thực hiện đề nghị của mình. Khi đó mình mới quay lại cầm 3 mảnh giấy đọc:

Mảnh thứ nhất có kí tên An:

- "Tôi không tặng Đức". "Tôi ngồi bên cạnh Chung". "Nhân viên phục vụ đang đưa đồ ăn lên cho chúng tôi".

Mảnh thứ hai có kí tên Bình:

- "Đức ngồi đối diện với tôi". "Chúng tôi đang chờ nhân viên phục vụ đưa đồ ăn". "Nhân viên phục vụ không tặng Đức".

Mảnh thứ ba có kí tên Chung:

- "Bình không tặng Đức". "Chính nhân viên phục vụ tặng Đức". "Người tặng ở giữa chúng tôi".

Thực ra mình mới chỉ biết ngay một sự thật "Nhân viên phục vụ đang đưa đồ ăn lên cho chúng tôi". Nhưng với những điều khác thì phải bằng việc "động não". Chỉ mất 3 phút mình nói ngay tên của "thủ phạm" làm các bạn phục lăn.

Câu chuyện của thám tử Sê Lốc Cốc đã hết rồi. Các bạn thử suy luận để tìm ra kết quả có giống thám tử đã được các bạn "phục lăn" không nhé! Toán Tuổi thơ sẽ tặng quà tới các bạn có lập luận chuẩn nhất!



Kết quả **(TTT2 số 192+193)**

VỤ ÁN LIÊN QUAN TỚI SỐ TÀI KHOẢN 2018 + 1

Các bạn có thể nhận ra quy luật của mã số của số tài khoản từ các phép tính cộng "lạ" được đề cập đến trong bức thư của ngài thị trưởng.

Ta thấy rằng ở phép tính đầu tiên 9 + 8 = 17, 9 – 8 = 1, 9 . 8 = 72, ghép các số này sẽ thành số 17172 ở kết quả của phép tính cộng 9 + 8. Tương tự ta cũng thấy ở phép tính thứ hai rằng 7 + 5 = 12, 7 – 5 = 2, 7 . 5 = 35 và ta thấy ghép lại các số trên ta cũng ra được kết quả của phép tính lạ "7 + 5" là 12235.

Và đến phép tính thứ ba, ta có thể khẳng định cho những nhận định trên một cách chắc chắn 20 + 19 = 39, 20 – 19 = 1, 20. 19 = 380, ghép các kết quả trên lại ta được con số ở kết quả là 391380.

Như vậy cũng bằng lập luận tương tự chúng ta sẽ có kết quả số tài khoản ngân hàng là kết quả phép tính "2018 + 1" chính là ghép lại của kết quả ba phép tính lần lượt là 2018 + 1 = 2019, 2018 – 1 = 2017, 2018 . 1 = 2018.

Do đó số tài khoản ngân hàng sẽ là 201920172018.

Như vậy bằng suy luận trên, chúng ta sẽ có thể lấy được số tiền đã bị mất.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn thám tử nhỏ sau đã có lập luận chặt chẽ, và có trình bày sạch đẹp được thưởng kì này: *Lê Thị Khánh Hằng*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Phương Linh*, 7A1, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Thu Lan*, 7A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Lê Hiền Anh*, 8A5, THCS Cầu Giấy, Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**.

Các bạn "thám tử" sau được khen: *Đặng Anh Quế*, 8A5, THCS Cầu Giấy, Đống Đa, **Hà Nội**; *Phạm Hồng Ngọc*, 7E; *Đỗ Thế Anh*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Quang Minh*, 8C, THCS Lê Văn Thịnh, Khoái Khô, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Trần Đức Huy*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

NGUYỄN DUY KHƯƠNG





GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP BẰNG CÁCH SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP GHÉP HÌNH

ThS. PHAN DUY NGHĨA
Phòng Giáo dục Phổ thông, Sở GD - ĐT Hà Tĩnh

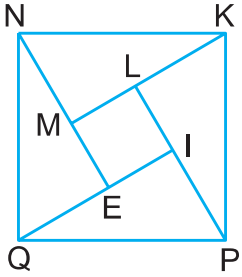
Trong một số đề thi vào lớp 10 THPT, thi chọn học sinh giỏi các năm gần đây xuất hiện một số bài toán hình học tổ hợp mà khi giải chỉ cần sử dụng các kiến thức về ghép hình ở Tiểu học. Sau đây chúng ta sẽ xét một số bài toán minh họa.

Bài toán 1. Cạnh huyền của một tam giác vuông có độ dài 17 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 7 cm. Tính diện tích hình tam giác vuông đó.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT năm học 2018-2019, TP. Đà Nẵng)

Phân tích. *Bài toán yêu cầu tính diện tích của hình tam giác vuông biết độ dài cạnh huyền và hiệu độ dài các cạnh góc vuông nên ta nghĩ đến việc ghép bốn hình tam giác vuông bằng hình tam giác vuông đã cho để tạo thành hai hình vuông. Khi đó tổng diện tích bốn hình tam giác vuông bằng hiệu diện tích hai hình vuông.*

Lời giải.



Ta ghép bốn hình tam giác vuông bằng hình tam giác vuông đã cho để được hai hình vuông NKPQ và MLIE như hình vẽ.

Diện tích hình vuông NKPQ là

$17 \times 17 = 289$ (cm^2).

Vì hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 7 cm nên độ dài cạnh hình vuông MLIE là 7 cm.

Diện tích hình vuông MLIE là

$7 \times 7 = 49$ (cm^2).

Vậy diện tích của tam giác vuông đã cho là

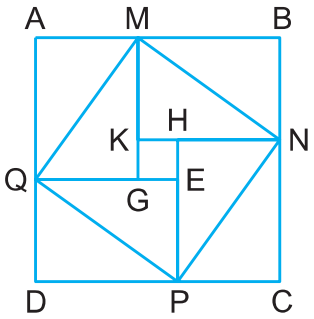
$(289 - 49) : 4 = 60$ (cm^2).

Bài toán 2. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 m và độ dài đường chéo bằng 10 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó theo đơn vị mét.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT năm học 2018-2019, TP. Hà Nội)

Phân tích. *Đề bài cho hình chữ nhật biết chu vi, từ đó ta tìm được tổng chiều dài chiều rộng nên ta có thể sử dụng phương pháp ghép hình. Ta ghép bốn hình chữ nhật bằng hình chữ nhật đã cho để tạo thành hai hình vuông. Khi đó tổng diện tích bốn hình chữ nhật bằng hiệu diện tích hai hình vuông.*

Lời giải.



Nửa chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là

$28 : 2 = 14$ (m).

Ta ghép bốn hình chữ nhật bằng hình chữ nhật đã cho tạo thành hai hình vuông ABCD và KHEG như hình vẽ. Khi đó độ dài cạnh hình vuông ABCD là 14 m.

Diện tích hình vuông ABCD là

$14 \times 14 = 196$ (cm^2).

Diện tích hình vuông MNPQ là

$10 \times 10 = 100$ (cm^2).

Ta có $S_{AMQ} = S_{MGQ} = S_{MBN} = S_{MKN} = S_{NCP} = S_{NHP} = S_{QDP} = S_{EQP}$ nên

$S_{MGQ} + S_{MKN} + S_{NHP} + S_{EQP}$

$= 196 - 100 = 96$ (m^2).

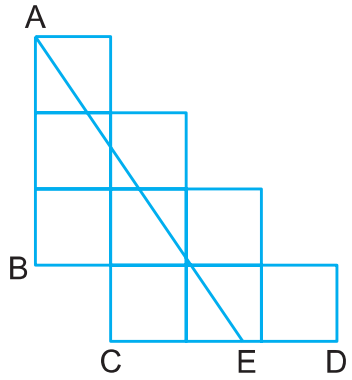
Diện tích hình vuông KHEG là

$100 - 96 = 4$ (m^2).

Suy ra hình vuông KHEG có độ dài cạnh là 2 m (vì $4 = 2^2$).

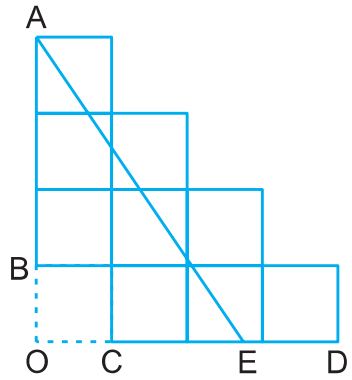
Do đó mảnh đất hình chữ nhật đã cho có hiệu chiều dài và chiều rộng là 2 m.
Chiều dài mảnh đất đó là
$(14 + 2) : 2 = 8$ (m).
Chiều rộng mảnh đất đó là
$8 - 2 = 6$ (m).

Bài toán 3. Hình vẽ sau gồm 9 hình vuông giống hệt nhau, mỗi hình vuông có diện tích 4 cm^2. Các điểm A, B, C, D là đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên đoạn thẳng CD sao cho AE chia 9 hình vuông thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn thẳng CE.



(Đề thi chọn HSG lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm học 2017-2018)

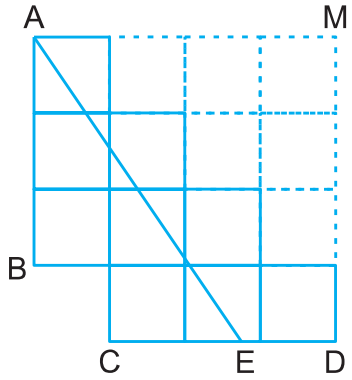
Lời giải. Cách 1. *Ghép thêm 1 hình vuông.*
Ta ghép thêm 1 hình vuông giống với 9 hình vuông đã cho như hình 1.



Hình 1

Vì diện tích mỗi hình vuông đã cho là 4 cm^2 và $4 = 2 \times 2$ nên độ dài cạnh mỗi hình vuông nhỏ là 2 cm.
Từ đó ta có OC = 2 cm.
Do đó $AO = 2 \times 4 = 8$ (cm).
Vì AE chia 9 hình vuông đã cho thành hai phần có diện tích bằng nhau nên diện tích của hình tam giác AOE là
$4 \times 9 : 2 + 4 = 22$ (cm^2).
Độ dài đoạn thẳng OE là
$22 \times 2 : 8 = 5{,}5$ (cm).
Độ dài đoạn thẳng CE là
$5{,}5 - 2 = 3{,}5$ (cm).

Cách 2. *Ghép thêm 6 hình vuông nhỏ.*
Ta ghép thêm 6 hình vuông giống hệt nhau và giống với 9 hình vuông đã cho để được hình thang AMDE như hình 2.

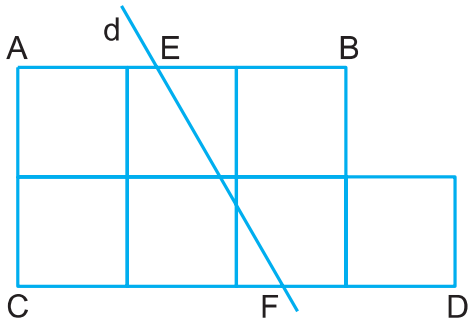


Hình 2

Độ dài đoạn thẳng CD là $2 \times 3 = 6$ (cm).
Độ dài đáy lớn AM là $2 \times 4 = 8$ (cm).
Chiều cao MD là $2 \times 4 = 8$ (cm).
Diện tích hình thang AMDE là
$4 \times 9 : 2 + 4 \times 6 = 42$ (cm^2).
Suy ra $ED + 8 = 42 \times 2 : 8 = 10{,}5$ (cm).
Độ dài đoạn thẳng ED là
$10{,}5 - 8 = 2{,}5$ (cm).
Độ dài đoạn thẳng CE là
$6 - 2{,}5 = 3{,}5$ (cm).

Bây giờ xin mời các bạn hãy thử sức mình với bài toán sau.

Bài toán 4. Trong hình vẽ dưới đây, đường thẳng d chia hình vẽ được tạo bởi 7 hình vuông bằng nhau thành hai phần có diện tích bằng nhau. Đường thẳng d cắt AB và CD lần lượt tại E và F. Biết tổng độ dài của CF và AE là 91 cm. Tính diện tích của mỗi hình vuông đơn lẻ.



Chữ & Chữ số

Kì này KÌ 41

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số. Các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau.



$$\begin{array}{r} XUAN \\ +\quad XUA \\ \quad\quad XU \\ \quad\quad\quad X \\ \hline 4321 \end{array}$$



TẠ THẬP *(TP. Hồ Chí Minh)*

Kết quả KÌ 39 (TTT2 số 192+193)

XUANKYHOI là số gồm 9 chữ số khác nhau và khác 0. Do đó tổng **X** + **U** + **A** + **N** + **K** + **Y** + **H** + **O** + **I** = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 chia hết cho 9.

Vậy **XUANKYHOI** là số gồm 9 chữ số khác nhau và chia hết cho 9.

Mặt khác, số $\underbrace{5555\ldots555}_{\text{2019 chữ số 5}}$ gồm 2019 chữ số 5 có tổng các chữ số là $2019 \times 5 = 10095$ không chia hết cho 9 nên $\underbrace{5555\ldots555}_{\text{2019 chữ số 5}}$ cũng không chia hết cho 9. Do đó $\underbrace{5555\ldots555}_{\text{2019 chữ số 5}}$ không thể chia hết cho **XUANKYHOI.**

Vậy không tồn tại số **XUANKYHOI** nào thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

HONG HA

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng, được thưởng kì này: *Trần Huy Hoàng*, 8B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

TTT



TỪ MỘT SỐ BÀI TOÁN...

(Tiếp theo trang 23)

Chứng minh tương tự ta có

$K' \in (AST)$; $K' \in (BTR) \Rightarrow K \equiv K'$ (bởi theo bài toán 7 thì cách xác định điểm K là duy nhất).

Ta gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Áp dụng bài toán 1 và bài toán 5 ta có I, G, J thẳng hàng và H, G, O thẳng hàng và ta có

$$\frac{GJ}{GI} = \frac{GH}{GO} = 2 \Rightarrow HJ \,//\, OI;\ HJ = 2OI = IK.$$

Từ đó suy ra tứ giác HIKJ là hình bình hành.

Bình luận. *Bài toán này khá lạ và khó đối với các thí sinh dự thi, đặc biệt là khi trong phòng thi chỉ có công cụ vẽ hình bằng tay nhưng thực chất là xoay quanh các tính chất cơ bản của đường tròn nội tiếp, đường tròn bàng tiếp, điểm Nagel,... Dưới con mắt của các bạn học sinh THPT sau khi đọc lời giải bằng Vecto, phép vị tự,... thì thấy khá ngắn gọn nhưng với các bạn học sinh THCS đọc lời giải trên thì chắc hẳn các bạn thấy từ rất nhiều bài toán nhỏ để đi đến bài toán thi VMO 2019. Bài viết này không nhằm khuyến khích các bạn giải các bài toán khó dành cho bậc THPT mà mục đích của bài viết này là giúp các bạn biết thêm các tính chất, các bổ đề hay trong hình học qua đó giúp các bạn học sinh có thêm niềm đam mê khi giải toán, để trong tương lai không xa các bạn sẽ trở thành các học sinh giỏi môn Toán.*



Kì này CÓ ĐỒNG QUY KHÔNG?

Bài toán. Hồng vẽ tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD, CE và I là trung điểm của BC.

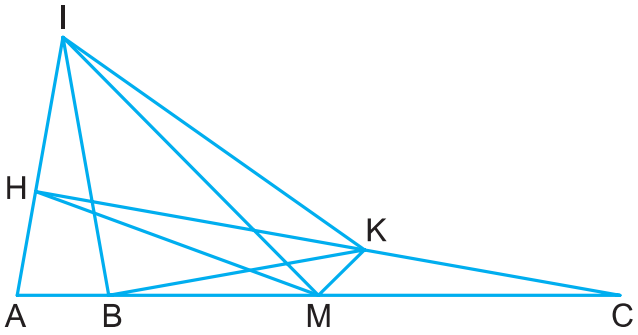
Hồng hỏi Hà: Ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AED, BEI, CID có đồng quy không? Vì sao?

Bạn hãy giúp Hà trả lời câu hỏi đó nhé.

PHẠM TUẤN KHẢI *(Hà Nội)*

Kết quả **(TTT2 số 192+193)**

QUA MẤY ĐIỂM CỐ ĐỊNH?



Gọi M là trung điểm của AC (Không mất tính tổng quát giả sử B thuộc đoạn thẳng AM).

Gọi H là giao điểm của KC với IA.

Ta có $\widehat{HKB} = \widehat{HIB}$ (vì cùng bù với góc BKC) nên tứ giác HIKB nội tiếp.

Ta có tam giác BKC cân tại K nên

$$\widehat{KBC} = 90^\circ - \frac{\widehat{BKC}}{2} = \frac{\widehat{AIB}}{2}.$$

Do đó $\widehat{CHI} = \widehat{IBK} = 180^\circ - \widehat{ABI} - \widehat{KBC} = 90^\circ$.

Suy ra tam giác AHC vuông tại H.

Trong tam giác vuông AHC có đường trung tuyến HM ứng với cạnh huyền AC nên ta có

$$HM = \frac{AC}{2} = MA.$$

Do đó tam giác HMA cân tại M.

Để ý rằng tam giác AIB và tam giác HMA là các tam giác cân và có góc ở đáy chung là góc IAC kết hợp với tứ giác HIKB nội tiếp ta có $\widehat{AIB} = \widehat{HMA} = \widehat{HKB}$.

Suy ra tứ giác BHKM nội tiếp.

Vậy 5 điểm I, H, B, M, K cùng nằm trên đường tròn đường kính IK.

Suy ra đường tròn (IBK) luôn đi qua điểm cố định M là trung điểm của AC.

Nhận xét. Không có bạn nào giải đúng bài toán này.

VŨ ĐÌNH HÒA



BẠN ĐỌC CÓ THỂ ĐẶT MUA TẠP CHÍ CẢ NĂM HỌC TẠI CÁC BƯU CỤC CỦA VNPT TRÊN CẢ NƯỚC VỚI MÃ ĐẶT CÁC ẤN PHẨM NHƯ SAU: Tạp chí Toán Tuổi thơ 1: **C169**; Tạp chí Toán Tuổi thơ 2: **C169.1**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2018: **C169.2**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2018: **C169.3**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2017: **C169.4**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2017: **C169.5**.

Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(192+193). Kí hiệu S(n) là tổng các chữ số của một số nguyên dương n. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho
S(n). S(n + 1) = 87.

Lời giải. Ta có S(n).S(n + 1) = 87. (*)

$\Rightarrow$ S(n) là ước của 87.

Ta có Ư(87) = {1; 3; 29; 87}.

- Nếu S(n) = 29 thì n $\geq$ 2999 và S(n + 1) = 3.

Với n = 2999 thì n + 1 = 3000

$\Rightarrow$ S(n + 1) = 3 (thỏa mãn (*)).

- Nếu S(n) = 87 thì n > 2999.
- Nếu S(n) = 1 thì S(n + 1) = 87

$\Rightarrow$ n + 1 $\geq$ 2999 $\Rightarrow$ n $\geq$ 2998.

Mà S(2998) = 28 loại vì 28.3 $\neq$ 87.

- Nếu S(n) = 3 thì S(n + 1) = 29

$\Rightarrow$ n + 1 $\geq$ 2999 $\Rightarrow$ n $\geq$ 2998.

Tương tự như trên, ta loại trường hợp này.

Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn đề bài là 2999.

Nhận xét. Đây là một bài toán số học rất hay, nhiều bạn gửi bài giải, một số bạn trình bày chưa chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải tốt: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Tất Quân*; *Nguyễn Sĩ Bách*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Gia Bảo*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên**.

PHÙNG KIM DUNG

Bài 2(192+193). Tìm các cặp số tự nhiên (a; b) thỏa mãn $1000a^2 + b = 1001b^2 + a$.

Lời giải. Từ đề bài ta có

$1000a^2 - 1000b^2 + b - a = b^2$

$\Leftrightarrow 1000(a-b)(a+b) - (a-b) = b^2$

$\Leftrightarrow (a-b)(1000a + 1000b - 1) = b^2.$

Xét a – b = 0 suy ra b = 0 và a = 0.

Xét a – b $\neq$ 0, mà 1000a + 1000b – 1 là số nguyên lẻ khác 0, suy ra b $\neq$ 0.

Gọi ƯCLN (a – b; 1000a + 1000b –1) = d

$\Rightarrow \begin{cases} (a-b) \vdots d \\ (1000a + 1000b - 1) \vdots d \end{cases}$

Vì b^2 = (a – b)(1000a + 1000b – 1).

Suy ra $b^2 \vdots d^2 \Rightarrow b \vdots d$ mà $(a-b) \vdots d$.

Do đó a $\vdots$ d.

Suy ra 1000a +1000b $\vdots$ d $\Rightarrow$ 1 $\vdots$ d hay d = 1.

Do đó a – b và 1000a + 1000b – 1 là các số chính phương khác 0.

Đặt $1000a + 1000b - 1 = m^2$ (với $m \in \mathbb{N}^*$).

Ta biết rằng m^2 chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1, mà 1000a + 1000b – 1 chia cho 4 dư 3 (vô lí) .

Vậy a = b = 0 thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Đây là bài toán không quá khó, có nhiều bạn tham gia giải bài. Đa phần các bạn đều có lời giải tốt, một số bạn lập luận chưa chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải tốt: *Trần Cao Bảo Châu*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuật, **Đắk Lắk**; *Phạm Minh Châu*, *Lê Đức Anh*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Lê Xuân Thịnh*, 6B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Trần Đức Huy*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

CAO VĂN DŨNG

Bài 3(192+193). Trong hộp có 219 viên bi, hai bạn Hồng và Hà cùng chơi trò chơi bốc bi. Mỗi người đến lượt mình được bốc một số lượng viên bi là lũy thừa với số mũ tự nhiên của 2 (2^0; 2^1; 2^2; ...). Ai bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hồng là người bốc bi trước. Hãy chỉ ra cách chơi giúp Hồng thắng cuộc và với số lượt bốc bi là ít nhất.

Lời giải. Ta có nhận xét

$2^n \equiv 1 \pmod 3$, $\forall n$ chẵn, $2^n \equiv 2 \pmod 3$, $\forall n$ lẻ.

Mà $219 \vdots 3$ nên mỗi lần Hồng bốc trước 2^k viên bi, Hà chỉ cần bốc 2^p viên bi với k, p khác tính chẵn lẻ thì số bi còn lại luôn chia hết cho 3. Do đó Hồng không thể là người bốc bi cuối cùng.

Vậy không có cách chơi giúp Hồng luôn thắng.

Nhận xét. Câu hỏi bài toán đưa ra khiến khá nhiều bạn bối rối nên có một số bạn có lời giải sai. Các bạn sau đây có lời giải xuất sắc: *Lê Văn Quang Hiếu*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Võ Thị Minh Huyền*, *Phạm Ngọc Huỳnh*, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

BÙI MẠNH TÙNG

Bài 4(192+193). Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác ABC tam giác APB đều và tam giác ACE cân tại E sao cho $\widehat{CEA} = 120^\circ$. Dựng tam giác BCD cân tại D sao cho $\widehat{BDC} = 120^\circ$ và A, D cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC. Dựng tam giác DEF cân tại D sao cho $\widehat{EDF} = 120^\circ$ và F, B cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng DE. Chứng minh rằng PF = CE.

Lời giải. Về phía ngoài ΔABC dựng tam giác đều ACQ, tam giác RBC cân tại R sao cho $\widehat{BRC} = 120^\circ$. Khi đó do DB = DC, RB = RC nên DR là đường trung trực của BC.

Suy ra $\widehat{BDR} = \frac{1}{2}\widehat{BDC} = 60^\circ$.

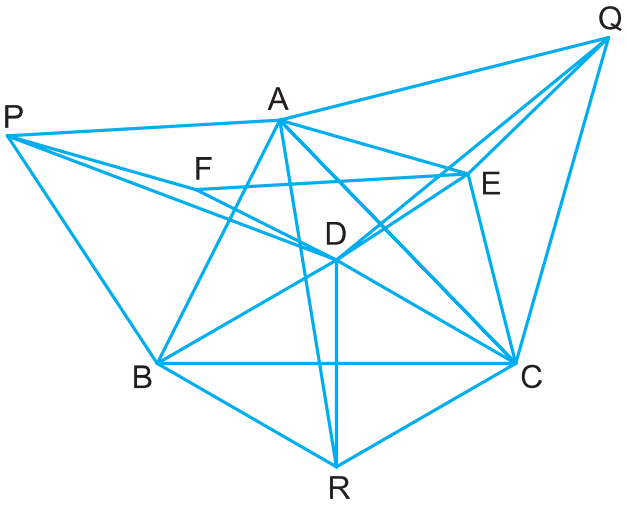
Ta lại có $\widehat{DBR} = \widehat{DBC} + \widehat{RBC} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ dẫn đến ΔBDR đều (Vì BD = BR).

Kết hợp với BP = BA, $\widehat{PBD} = \widehat{ABR}$ ta có $\Delta BPD = \Delta BAR$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ DP = RA và $\widehat{BDP} = \widehat{BRA}$. (1)

Tương tự ta có $\Delta CRA = \Delta CDQ$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ DQ = RA và $\widehat{QDC} = \widehat{ARC}$. (2)



Từ (1) và (2) suy ra DP = DQ = AR và

$\widehat{PDQ} = 360^\circ - \widehat{BDC} - (\widehat{PDB} + \widehat{QDC})$

$= 360^\circ - \widehat{BDC} - \widehat{BRC}$

$= 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$.

Từ đó ΔDPQ cân tại D và $\widehat{PDQ} = 120^\circ$. Kết hợp với giả thiết ΔDEF cân tại D ta có $\widehat{EDF} = 120^\circ$.

Từ đó $\Delta DFP = \Delta DEQ$ (c.g.c) $\Rightarrow$ EQ = FP.

Dễ thấy EQ = EC nên PF = CE.

Nhận xét. Rất tiếc không có bạn nào giải đúng bài này.

HỒ QUANG VINH

Bài 5(192+193). Tìm nghiệm (x, y) thỏa mãn $x < 0, y > 0$ của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - y^3 + 2xy + 2xy^2 = 3 \\ x^2 - y^3 + xy = 1. \end{cases}$$

Lời giải. Giả sử $x < 0$, $y > 0$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - y^3 + 2xy + 2xy^2 = 3 \\ x^2 - y^3 + xy = 1. \end{cases} \quad (I)$$

Từ hệ phương trình ta có

$0 = (2x^2 - y^3 + 2xy + 2xy^2) - 3(x^2 - y^3 + xy)$

$= 2x^2 - y^3 + 2xy + 2xy^2 - 3x^2 + 3y^3 - 3xy$

$= (2y^3 + 2xy^2) - (x^2 + xy)$

$= 2y^2(x + y) - x(x + y) = (2y^2 - x)(x + y).$

Suy ra $x + y = 0$ (Vì $x < 0$ nên $2y^2 - x > 0$).

Do đó $x = -y$.

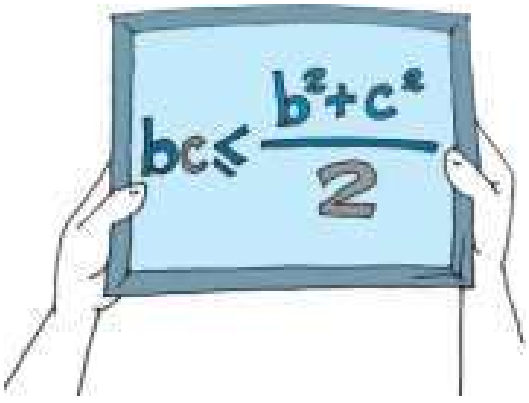
$\Rightarrow 1 = x^2 - y^3 + xy = y^2 - y^3 - y^2 = -y^3$

$\Rightarrow y = -1$ (Mâu thuẫn với $y > 0$).

Vậy hệ phương trình (I) không có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x < 0$, $y > 0$.

Nhận xét. Bài toán trên thuộc phần đầu trong ứng dụng của phân tích thành nhân tử trong giải hệ phương trình, là bài toán đơn giản. Các bạn học sinh lớp 7, lớp 8 sau có lời giải đúng: *Nguyễn Phạm Thanh Nga*, *Trần Như Quỳnh*, 8A3, THCS Lâm Thao; *Trần Minh Khôi*, *Vũ Long*, *Lương Minh Hiếu*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Phạm Thị Ngọc Huyền*, 7E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 8C5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Võ Thành Nam*, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Trần Phương Mai*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.

NGUYỄN MINH ĐỨC



Bài 6(192+193). Cho các số thực a, b, c khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - bc}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2a^2 + 3b^2} \geq 0.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$M = \frac{2a^2 - 2bc}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} + \frac{2b^2 - 2ca}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} + \frac{2c^2 - 2ab}{c^2 + 2a^2 + 3b^2} \geq 0. \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\frac{2a^2 - 2bc}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \geq \frac{2a^2 - (b^2 + c^2)}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} = \frac{b^2 + 2c^2 + 3a^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} - 1.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\frac{2b^2 - 2ca}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} \geq \frac{c^2 + 2a^2 + 3b^2}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} - 1; \quad (2)$$

$$\frac{2c^2 - 2ab}{c^2 + 2a^2 + 3b^2} \geq \frac{a^2 + 2b^2 + 3c^2}{c^2 + 2a^2 + 3b^2} - 1. \quad (3)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) và sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$M \geq \frac{b^2 + 2c^2 + 3a^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} + \frac{c^2 + 2a^2 + 3b^2}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} + \frac{a^2 + 2b^2 + 3c^2}{c^2 + 2a^2 + 3b^2} - 3$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2 + 2c^2 + 3a^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \cdot \frac{c^2 + 2a^2 + 3b^2}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} \cdot \frac{a^2 + 2b^2 + 3c^2}{c^2 + 2a^2 + 3b^2}} - 3 = 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Do tất cả các đại lượng đều liên quan đến a^2, b^2, c^2, ngoại trừ bc, ca, ab nên ý tưởng tự nhiên ở đây là sử dụng bất đẳng thức AM - GM để đánh giá

$$bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2}, \quad ca \leq \frac{c^2 + a^2}{2}, \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

nhằm đưa các đại lượng về cùng dạng, tạo điều kiện thuận lợi cho các phép biến đổi đánh giá tiếp theo. Ý tưởng này thường được sử dụng trong các đề thi học sinh giỏi, tuyển

sinh vào lớp 10 THPT chuyên, điển hình có bài toán sau: *Cho các số thực dương* a, b, c *thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2+c^2=3$. *Chứng minh rằng* $\frac{a}{3-bc}+\frac{b}{3-ca}+\frac{c}{3-ab}\le\frac{3}{2}$.

Đây là một câu trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội năm 2017.

Xin tuyên dương bạn *Nguyễn Anh Thư* (lớp 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**) là học sinh lớp 6 duy nhất tham gia giải và có lời giải đúng. Ngoài bạn *Thư*, các bạn sau cũng có lời giải tốt: *Đinh Mai Chi*, *Nguyễn Bích Đạt*, *Trần Hằng Linh*, 8C1, THCS Archimedes Academy, Cầu Giấy, *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội**; *Nguyễn Hưng Phát*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trần Đức An*, *Nguyễn Cảnh Mạnh*, *Lê Hải Phong*, *Lê Văn Quang Trung*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Hoàng Thị Yến Chi*, *Nguyễn Phạm Thanh Nga*, 8A3, *Hà Minh Nhật*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Hán Vũ Long*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

VÕ QUỐC BÁ CẨN



Bài 7(192+193). Có bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số mà trong biểu diễn thập phân của nó không có mặt chữ số nào trong các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 và 6?

Lời giải. Vì trong biểu diễn thập phân của số đó không có mặt chữ số nào trong các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 và 6 nên chỉ có mặt các chữ số 0, 7, 8, 9. Do chữ số đầu tiên phải khác 0 nên chỉ có 3 cách chọn là 7, 8 hoặc 9. Tám vị trí còn lại, mỗi vị trí có 4 cách chọn nên tất cả có $3.4.4.4.4.4.4.4.4 = 3.4^8 = 196608$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Có nhiều bạn gửi bài đến tòa soạn, hầu hết các bạn có lời giải đúng.

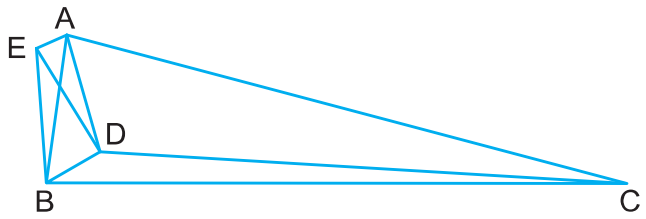
Các bạn sau có lời giải đúng, trình bày tốt: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 8A5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Phạm Bá Bảo Minh*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Hoàng Long*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Gia Bảo*, 6B, *Nguyễn Thị An Bình*, 7E, *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Lê Văn Quang Trung*, *Lê Hải Phong*, *Nguyễn Huy Hoàng*, 9A; *Nguyễn Văn Dương Hùng*, 9B, *Lê Văn Quang Hiếu*, *Nguyễn Đức Học*, *Nguyễn Sĩ Bách*, 6D, THCS Lý NHật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Quang Minh*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Thị Thu Giang*, 8A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2; *Kim Ngọc Yến Nhi*, 9A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Lê Phú Hưng*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; *Lê Đức Anh*, *Dương Nguyên Khánh*, 6A3; *Hà Minh Nhật*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; *Nguyễn Việt Tuệ*, *Nguyễn Bảo Minh*, 7A1, THCS Giảng Võ, Ba Đình; *Nguyễn Trường Minh*, *Đỗ Hoàng Nhật Nam*, *Đồng Khôi Nguyên*, *Nguyễn Minh Phương*, 8C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài 8(192+193). Cho tam giác ABC cân tại C có $\widehat{C} = 15^o$. Giả sử tồn tại điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ADB} = 105^o$ và AD = 2BD.

Chứng minh rằng $\sqrt{5}AD.BC = 2CD.AB$.

Lời giải.



Dựng tam giác AED đồng dạng với tam giác ABC sao cho E và B cùng phía với AD. (1)

Ta dễ dàng chứng minh

$\Delta AEB \backsim \Delta ADC$ (c.g.c). (2)

Từ (2) và giả thiết CA = CB ta suy ra

$CD.AB = BE.AC = BE.BC$. (3)

Cũng từ (1) và giả thiết $\widehat{ACB} = 15^o$, $\widehat{ADB} = 105^o$ ta suy ra $\widehat{ADE} = 15^o$.

Do đó $\widehat{BDE} = 90^o$ hay tam giác DBE vuông.

Theo định lí Pythagoras ta có

$$BE^2 = ED^2 + BD^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= AD^2 + \frac{AD^2}{4} = \frac{5}{4}AD^2.$$

Từ đó suy ra $BE = \frac{\sqrt{5}}{2}AD$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra $CD.AB = \frac{\sqrt{5}}{2}AD.BC$.

Do đó $\sqrt{5}.AD.BC = 2.CD.AB$.

Nhận xét. *Bài toán này có thể tổng quát hơn như sau và lời giải tương tự.*

Bài toán tổng quát. Cho tam giác ABC có điểm D nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ADB} = 90^\circ + \widehat{ACB}$. Chứng minh rằng

$$CD.AB = \sqrt{1 + \frac{DB^2}{DA^2}}.AD.AC.$$

Khi CB = CA và DA = 2DB, ta thu được bài toán trên.

Các bạn sau có lời giải tốt, ngắn gọn: *Lê Văn Quang Trung*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Đinh Mai Chi*, 8C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**.

TRẦN QUANG HÙNG

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Nguyễn Anh Thư, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 8A5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Trần Cao Bảo Châu*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuật, **Đắk Lắk**; *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên**; *Nguyễn Sĩ Bách*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Gia Bảo*, 6B, THCS Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Lê Đức Anh*, 6A3; *Hà Minh Nhật*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trần Đức Huy*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Đinh Mai Chi*, 8C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**.



TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM SÁU MƯƠI HAI

Người thách đấu: *Nguyễn Khánh Nguyên*, **Hải Phòng**.

Bài toán thách đấu: Cho tam giác ABC có BC < CA < AB. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho BD = CE = BC. Gọi O và K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng OK vuông góc với DE.

Thời hạn: Trước ngày 08.5.2019 theo dấu bưu điện.

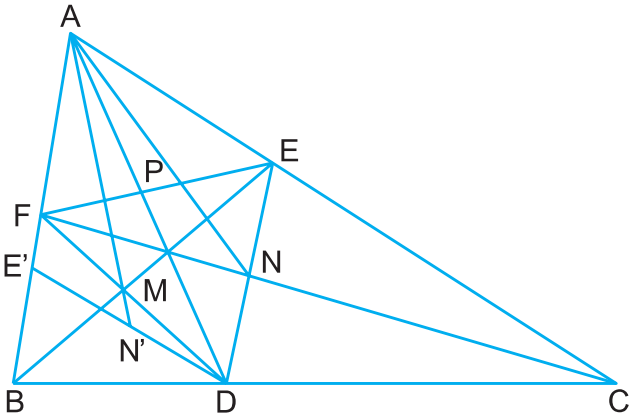
Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM SÁU MƯƠI (TTT2 số 192+193)

Đề bài. Cho tam giác ABC có các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. DF cắt BI tại M, DE cắt CI tại N. Biết rằng AM = AN. Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

Lời giải. *Để chứng minh bài toán ta cần có bổ đề sau:*

Bổ đề. Cho tam giác ABC. Vẽ AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC (D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB). Lấy M, N theo thứ tự là giao điểm của BE với CF và CF với DE. Khi đó $\widehat{DAM}=\widehat{DAN}$.

Chứng minh.



Gọi E', N' theo thứ tự là điểm đối xứng của E, N qua AD; P là giao điểm của AD và EF.

Ta có E' thuộc AB và AE' = AE cũng như N' thuộc E'D và N'D = ND, N'E' = NE.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có

$$\frac{AE}{AF}=\frac{PE}{PF}.$$

Chú ý rằng DP, FN, ME đồng quy, áp dụng định lí Ceva cho tam giác DEF, ta có

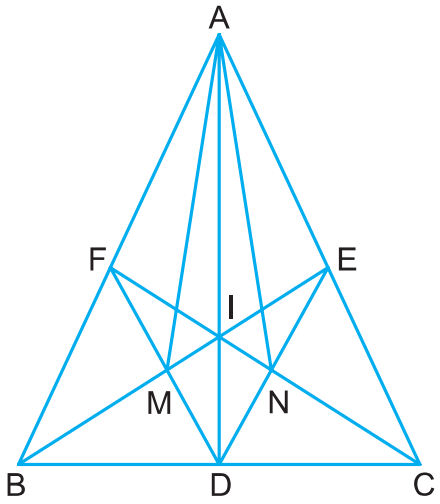
$$\frac{AF}{AE'}.\frac{N'E'}{N'D}.\frac{MD}{MF}=\frac{AF}{AE}.\frac{NE}{ND}.\frac{MD}{MF}=\frac{PF}{PE}.\frac{NE}{ND}.\frac{MD}{MF}=1.$$

Tiếp tục áp dụng định lí Menelaus đảo cho tam giác DFE', thì từ trên ta có A, M, N' thẳng hàng.

Do đó $\widehat{DAM}=\widehat{DAN'}=\widehat{DAN}$.

Trở lại giải bài toán thách đấu.

Theo bổ đề trên ta có $\widehat{MAI}=\widehat{NAI}$.



Kết hợp với AM = AN, suy ra $\Delta AIM=\Delta AIN$.

Do đó ta có $\widehat{AIM}=\widehat{AIN}$.

Suy ra

$$\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}=\widehat{BID}=180^\circ-\widehat{AIM}=180^\circ-\widehat{AIN}$$

$$=\widehat{CID}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}.$$

Do đó $\hat{B}=\hat{C}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A.

Nhận xét. Bài toán này khó. Không có võ sĩ nào đăng quang trong trận đấu này, phần thưởng xin gác lại kì sau.

NGUYỄN MINH HÀ

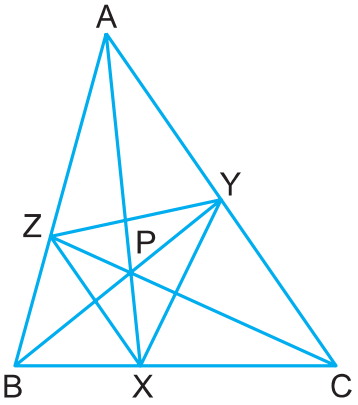
TỪ MỘT SỐ BÀI TOÁN QUEN THUỘC ĐẾN BÀI TOÁN THI VMO NĂM 2019

NGUYỄN ĐĂNG KHOA
GV. THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ

(Tiếp theo TTT2 số 194)

Bài toán 6. Cho tam giác ABC, điểm P nằm trong tam giác. Gọi giao điểm của AP, BP và CP với BC, CA và AB lần lượt là X, Y, Z. Chứng minh rằng $S_{XYZ} \le \frac{1}{4} S_{ABC}$.

Lời giải.



Đặt $\frac{BX}{XC} = a$, $\frac{CY}{YA} = b$, $\frac{AZ}{ZB} = c$.

Theo định lí Ceva cho tam giác ABC ta có $abc = 1$.

Do đó điều cần chứng minh tương đương với

$$\frac{S_{CXY} + S_{AYZ} + S_{BZX}}{S_{ABC}} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{CX.CY}{CB.CA} + \frac{AY.AZ}{AC.AB} + \frac{BZ.BX}{BA.BC} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{(b+1)(a+1)} + \frac{c}{(c+1)(b+1)} + \frac{a}{(a+1)(c+1)} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(c+1) + c(a+1) + a(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca + a + b + c \ge 6. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

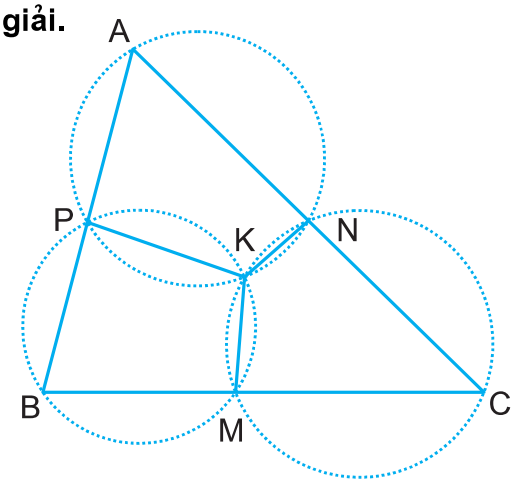
$$ab + bc + ca + a + b + c \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 3\sqrt[3]{abc} = 6 \text{ (vì } abc = 1).$$

Do đó (1) đúng. Suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi P là trọng tâm tam giác ABC.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC, lấy các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác. Chứng minh rằng các đường tròn (ANP), (BPM), (CMN) cùng đi qua một điểm.

Lời giải.



Gọi K là giao điểm thứ hai khác N của hai đường tròn (ANP) và (CMN).

Áp dụng tính chất của tứ giác nội tiếp ta có

$\widehat{BPK} = \widehat{ANK} = \widehat{KMC}$.

Suy ra $\widehat{BPK} + \widehat{KMB} = 180^\circ$.

Do đó K thuộc đường tròn (BPM).

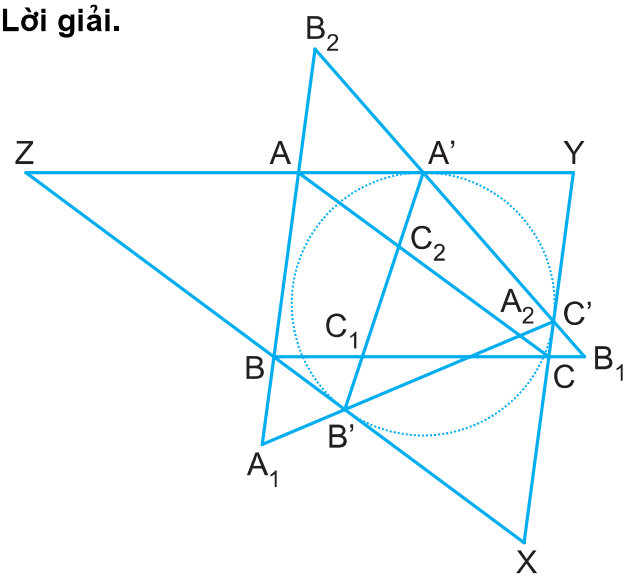
Sau đây là bài toán 4 trong kì thi VMO 2019

Bài toán 8. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I và trực tâm H. Trên các tia AB, AC, BC, BA, CA, CB lần lượt lấy các điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sao cho $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (B_1B_2, C_1C_2); (C_1C_2, A_1A_2);(A_1A_2, B_1B_2).

a) Chứng minh rằng diện tích tam giác A'B'C' không vượt quá diện tích tam giác ABC.

b) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'. Các đường thẳng AJ, BJ, CJ lần lượt cắt BC, CA, AB theo thứ tự tại R, S, T. Gọi K là điểm chung của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AST, BTR, CRS. Giả sử tam giác ABC không cân, chứng minh rằng tứ giác IHJK là hình bình hành.

Lời giải.



Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt A_1A_2 tại B".

Theo định lí Thales ta có

$$\frac{BA_1}{BB"} = \frac{AA_1}{AA_2} = 1 \Rightarrow BA_1 = BB".$$

Mà $BA_1 = BC_1 = BC - AB$ nên tam giác $BB"C_1$ cân tại B và BB" // AC nên ba điểm B", C_1, C_2 thẳng hàng, từ đó ta có B' ≡ B" ⇒ BB' // AC.

Chứng minh tương tự ta có CC' // AB; AA' // BC.

Như vậy ta có ΔXYZ là tam giác *Anti-median* của ΔABC.

Ta có

$$\widehat{A'C_1B_1} = 90^o - \frac{\widehat{ACB}}{2};\ \widehat{A'B_1C_1} = 90^o - \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{B'A'C'} = 90^o - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{AA_2A_1} = \widehat{C'B'X}.$$

Suy ra XZ là tiếp tuyến của đường tròn (A'B'C'). Chứng minh tương tự ta được XY, YZ là các tiếp tuyến của đường tròn (A'B'C'). Suy ra đường tròn (A'B'C') là đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

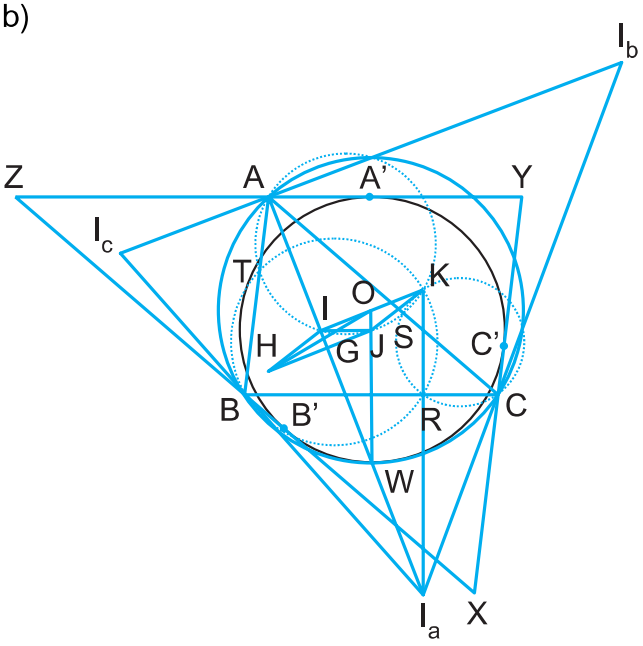
Theo bài toán 2 thì XA', YB', CZ' đồng quy.

Áp dụng bài toán 6 ta thu được

$$S_{ABC} = \frac{S_{XYZ}}{4} \geq S_{A'B'C'}.$$

Vậy diện tích tam giác A'B'C' không vượt quá diện tích tam giác ABC.

b)



Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện góc A, B và C của tam giác ABC.

Ta thấy J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác XYZ nên theo bài toán 4 thì J là điểm Nagel của tam giác ABC, từ đó R, S, T lần lượt là hình chiếu của I_a, I_b, I_c lên các cạnh BC, CA, AB.

Bây giờ ta gọi K' là điểm đối xứng của I qua O và W là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A của đường tròn (O), khi đó W là trung điểm của II_a nên $K'I_a$ vuông góc với BC tại R hay $\widehat{K'RC} = 90^o$.

Tương tự ta có $\widehat{K'SC} = 90^o \Rightarrow K' \in (CRS)$.

(Xem tiếp trang 14)



CÓ GÌ KHÔNG ỔN?

NGUYỄN NGỌC HÙNG
GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh

Bài toán. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \sqrt{4 - x^2}$.

Lời giải. ĐKXĐ: $4 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$.

Ta coi P là tham số của phương trình

$\sqrt{4 - x^2} = P - x$

$\Leftrightarrow 4 - x^2 = P^2 - 2Px + x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2Px + P^2 - 4 = 0$. (1)

Để phương trình (1) có nghiệm thì

$$\Delta' = P^2 - 2(P^2 - 4) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P \ge -2\sqrt{2} & (2) \\ P \le 2\sqrt{2}. & (3) \end{cases}$$

Đẳng thức (2) xảy ra khi

$2x^2 - 2.(-2\sqrt{2})x + (-2\sqrt{2})^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2})^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Đẳng thức (3) xảy ra khi

$2x^2 - 2.2\sqrt{2}x + (2\sqrt{2})^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy MinP $= -2\sqrt{2}$ khi $x = -\sqrt{2}$.

MaxP $= 2\sqrt{2}$ khi $x = \sqrt{2}$.

Các bạn có ý kiến gì về lời giải trên không?

Kết quả **(TTT2 số 192+193)**

LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

Lời bàn. Khi xét phương trình (3) vô nghiệm chúng ta đã quên điều kiện $6 - 2m \ne 0$. Vì vậy dẫn đến kết luận sai.

Sau đây ta bổ sung thêm như sau:

Hệ phương trình vô nghiệm khi phương trình (3) vô nghiệm.

Suy ra $\begin{cases} 9 - m^2 = 0 \\ 6 - 2m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$

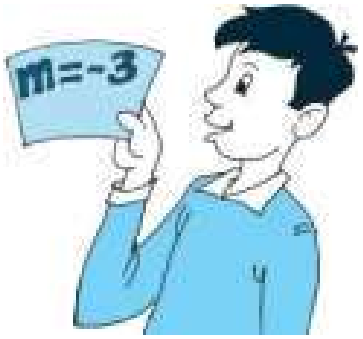
Vậy $m = -3$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

HONG HA

Nhận xét. Đây là bài toán không khó, nhưng phần trình bày cần chặt chẽ. Nhiều học sinh tham gia sửa lời giải và hầu hết đều phát hiện chỗ sai và đưa ra cách giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt, đầy đủ và chặt chẽ: *Nguyễn Thị Thu Giang*, 8A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Thân Lan Phương*, 8C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Hưng Phát*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Hoàng Thắng*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

Các bạn sau được khen: *Nguyễn Tiến Tuân*, *Phan Bá Bảo Minh*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Trung Hoàng*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Phạm Thị Khánh Huyền*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Trần Huy Hoàng*, 8B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**.

VI MẠNH TƯỜNG



THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI THPT CHUYÊN

Môn học: Toán chuyên

Năm học 2019-2020

Thời gian làm bài: 150 phút

Người ra đề: Nguyễn Thanh Giang *(GV. THPT chuyên Hưng Yên)*

Bài 1. *(2,0 điểm)*

1. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2y-x=10m+5 \end{cases}$ có nghiệm (x; y) sao cho $P=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

2. Cho a là một nghiệm dương của phương trình $4x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0$.

Tính $A=\dfrac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$.

Bài 2. *(2,0 điểm)*

1. Năm học 2018-2019 trường THPT chuyên tỉnh H có số học sinh đoạt giải học sinh giỏi Quốc gia là một số tự nhiên có hai chữ số. Hãy tìm số đó, biết số tự nhiên này có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục; nếu viết số tự nhiên đó theo thứ tự ngược lại ta được một số nguyên tố có hai chữ số và nếu đem số này cộng với số ban đầu thì được kết quả là một số chính phương.

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2xy+4x+2y+1>5x^2+2y^2$.

Bài 3. *(2,0 điểm)*

1. Cho parabol (P): $y=-2x^2$ và đường thẳng (d): $y=ax+a-2$. Tìm số nguyên a sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB=\sqrt{5}$.

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+2b+3c\ge 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=a+b+c+\dfrac{3}{4a}+\dfrac{9}{8b}+\dfrac{1}{c}$.

Bài 4. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) có các đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc cạnh AC, E thuộc cạnh BC). Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI và tam giác CDI cắt nhau tại K (K khác I). Gọi M là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng:

1. Các điểm A, E, H, K, D cùng thuộc một đường tròn.

2. A, K, I thẳng hàng.

3. $\widehat{MEC}=\widehat{MKC}$.

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Cho 19 điểm nằm trong hay trên cạnh của một hình lục giác đều cạnh bằng 4 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm trong 19 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI
CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Năm học 2018-2019

Môn thi: Toán

(Đề đăng trên TTT2 số 194)

Bài 1. 1) Điều kiện $x \ge 1$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1} = a \\ \sqrt[3]{2-x} = b \end{cases} (a \ge 0)$.

Suy ra $a^2 + b^3 = 1$.

Ta có hệ $\begin{cases} a + b = 1 \quad (1) \\ a^2 + b^3 = 1. \ (2) \end{cases}$

Thay $a = 1 - b$ vào (2) ta có

$$(1-b)^2 + b^3 = 1 \Leftrightarrow b^3 + b^2 - 2b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \\ b = -2. \end{array}\right.$$

✻ Với $b = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x = 2$ thỏa mãn.

✻ Với $b = 1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = 1$ thỏa mãn.

✻ Với $b = -2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow x = 10$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là:
$x = 1; x = 2; x = 10$.

2) Xét $1 - \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$

$$S = \frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}\cdots\frac{2019.2022}{2019.2020}$$

$$S = \frac{2022}{3.2020} = \frac{337}{1010}.$$

Bài 2. 1) Ta có

$a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab \vdots 9$

$\Rightarrow (a+b)^2 \vdots 3 \Rightarrow (a+b) \vdots 3$. (1)

$\Rightarrow (a+b)^2 \vdots 9 \Rightarrow 3ab \vdots 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots 3 \\ b \vdots 3. \end{array}\right.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a \vdots 3 \\ b \vdots 3. \end{cases}$

2) Nếu $k \ge 3$ thì tích của k số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3 mà $9^n + 11$ không chia hết cho 3 vô lí nên $k = 2$.

Với $k = 2$, ta có

$9^n + 11 = m(m+1) \Leftrightarrow 9^n + 11 = m^2 + m \ (m \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4.9^n = 45$

$\Leftrightarrow (2m + 1 - 2.3^n)(2m + 1 + 2.3^n) = 45.$

Vì $1 \le 2m + 1 - 3^n < 2m + 1 + 3^n$ nên ta có bảng

$2m + 1 - 2.3^n$	1	3	5
$2m + 1 + 2.3^n$	45	15	9
m	11	4	3
3^n	11	3	1
n	Loại	1	0

Vậy $n = 1; k = 2$ và $n = 0; k = 2$.

Bài 3. 1) Xét tổng

$$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{4-z}\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{4-x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{4-y}\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{4-z}\right).$$

Ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{4-x} \ge \dfrac{4}{x+4-x} = 1$

Tương tự $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{4-y} \ge 1; \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{4-z} \ge 1$

Suy ra $P \ge 3$.

Nếu cả ba số $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{4-y}; \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{4-z}; \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{4-x}$ đều nhỏ hơn 1 thì $P < 3$ vô lí.

Vậy trong ba số $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{4-y}; \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{4-z}; \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

2) Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$

$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) + 2abc = 1.$

Suy ra $ab + bc + ca - abc = \dfrac{(a+b+c)^2 - 1}{2}$.

Mặt khác ta có $(1-a)(1-b)(1-c)$

$=1-a-b-c+ab+bc+ca-abc.$

Suy ra $ab+bc+ca-abc$

$=(1-a)(1-b)(1-c)-1+(a+b+c).$

Đặt $t=(a+b+c)$, ta có $(1-a)(1-b)(1-c)$

$\le\left(\dfrac{1-a+1-b+1-c}{3}\right)^3=\left(\dfrac{3-t}{3}\right)^3.$

Suy ra

$\dfrac{t^2-1}{2}\le\left(\dfrac{3-t}{3}\right)^3-1+t\Leftrightarrow 2t^3+9t^2-27\le 0$

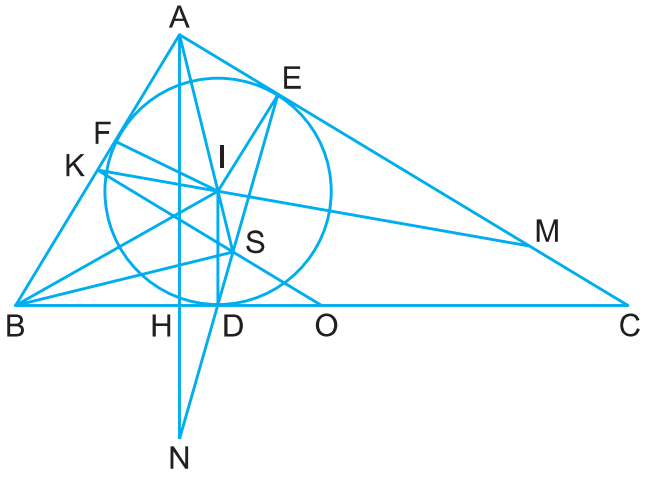
$\Leftrightarrow(2t-3)(t+3)^2\le 0\Rightarrow t\le\dfrac{3}{2}.$

Suy ra

$ab+bc+ca-abc=\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}\le\dfrac{5}{8}.$

Vậy giá trị lớn nhất của $ab+bc+ca-abc$ là $\dfrac{5}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

Bài 4.



1) Ta có $\widehat{AES}=180^o-\widehat{DEC}$

$=180^o-\dfrac{180^o-\hat{C}}{2}=90^o+\dfrac{\hat{C}}{2}.$

Mặt khác ta có $\widehat{AIB}=180^o-\widehat{IAB}-\widehat{IBA}$

$=180^o-\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=90^o+\dfrac{\hat{C}}{2}.$

Suy ra $\widehat{AES}=\widehat{AIB}$.

Xét ΔIAB và ΔEAS có $\widehat{IAB}=\widehat{SAE}=45^o$ và $\widehat{AES}=\widehat{AIB}$. Suy ra $\Delta IAB\backsim\Delta EAS$ (g - g).

2) Vì $\Delta IAB\backsim\Delta EAS\Rightarrow\dfrac{IA}{EA}=\dfrac{AB}{SA}\Rightarrow\dfrac{IA}{AB}=\dfrac{AE}{SA}$

mà $\widehat{IAB}=\widehat{SAE}=45^o$

$\Rightarrow\Delta IAE\backsim\Delta BAS$ (c - g - c).

Vì ΔIAE vuông cân tại E nên ΔABS vuông cân tại S.

Suy ra S nằm trên đường trung trực của AB.

Mà O nằm trên đường trung trực của AB, K là trung điểm của AB.

Vậy K, O, S thẳng hàng.

3) Vì $ID//AN\Rightarrow\dfrac{ID}{AN}=\dfrac{SI}{SA}.$

Vì $KS//AM\Rightarrow\dfrac{IK}{KM}=\dfrac{SI}{SA}.$

Vì $IF//AM\Rightarrow\dfrac{IK}{KM}=\dfrac{FI}{AM}.$

Suy ra $\dfrac{ID}{AN}=\dfrac{FI}{AM}\Rightarrow AM=AN.$

Bài 5. Trước hết để thuận tiện, ta kí hiệu $a_1,a_2,...,a_{100}$ là 100 số nguyên được điền vào các ô trong bảng ô vuông. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1\le a_2\le\cdots\le a_{100}$.

Xét sự dịch chuyển (số bước chuyển nhỏ nhất) từ ô vuông chứa a_1 đến ô vuông chứa a_{100}, (số bước chuyển này nhỏ hơn hoặc bằng 18). Kí hiệu các số gặp trên đường đi là $a_1,b_1,b_2,...,b_k,a_{100}$ trong đó $b_i\in\{a_2,a_3,...,a_{99}\}$ và $k\le 17$ (đường đi này gồm $k+1$ bước).

Ta có $a_{100}-a_1$

$=|a_{100}-b_k+b_k-b_{k-1}+\cdots+b_2-b_1+b_1-a_1|$

$\le|a_{100}-b_k|+|b_k-b_{k-1}|+\cdots+|b_2-b_1|+|b_1-a_1|$

$\Rightarrow a_{100}-a_1\le 1+1+\cdots+1=k+1\le 18.$

(Vì hiệu hai số ở hai ô kề nhau có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1) nghĩa là $a_{100}\le a_1+18$.

Suy ra 100 số $a_1,a_2,...,a_{100}$ chỉ nhận giá trị trong 19 số nguyên liên tiếp a_1, a_1+1, a_1+2, ..., a_1+18. Từ đó theo nguyên tắc Dirichlet, phải có một số xuất hiện ít nhất $\left[\dfrac{100}{19}\right]+1=6$ lần (đpcm).

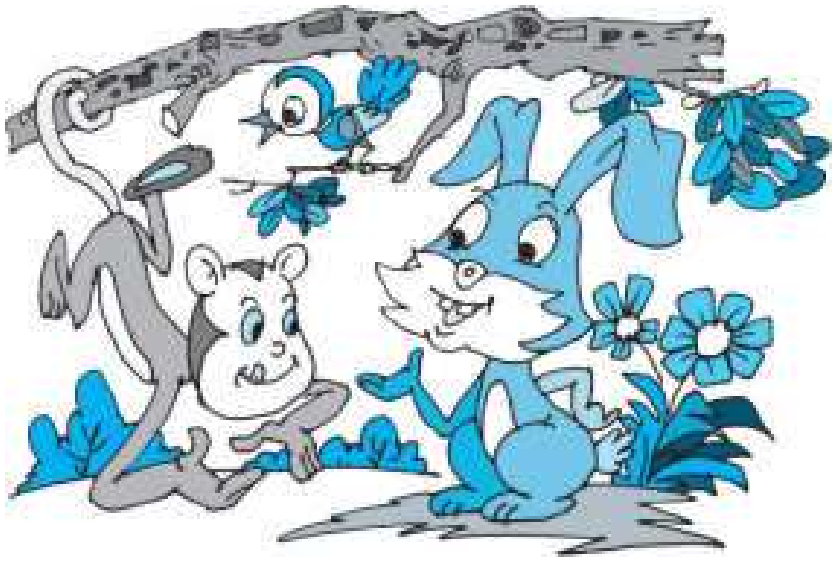


Ô chữ
NÔNG TRẠI

HỒ THỊ THU HƯỜNG
GV. TH Vượng Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh

Hôm nay Hồng và Hà được đi dã ngoại ở Nông Trại Vui Vẻ. Tại đó, các bạn nhìn thấy có rất nhiều con vật, chúng đang ẩn trốn trong các hàng ngang và hàng dọc trong bảng sau, các bạn hãy tìm ra các loài vật đó nhé.

C	G	O	A	T	X	U	H
H	R	A	B	B	I	T	O
I	T	J	L	S	P	B	R
C	U	D	J	H	V	U	S
K	R	Z	Y	E	C	J	E
E	K	C	N	E	P	I	G
N	E	Z	K	P	C	O	W
Y	Y	D	O	N	K	E	Y



Kết quả Ô chữ HOA ĐÀO (TTT2 số 192+193)

Vườn Anh số tháng 3 rực rỡ sắc hương các loài hoa:

- ✻ PETUNIA Hoa dạ yến thảo
  (hoặc PHOENIX: Hoa phượng)
- ✻ GERBERA Hoa đồng tiền
- ✻ DAHLIA Hoa thược dược
- ✻ CAMELLIA Hoa trà
  (hoặc CONFETTI: Hoa giấy)
- ✻ HIBISCUS Hoa dâm bụt
  (hoặc HYACINTH: Hoa dạ hương lan)
- ✻ TUBEROSE Hoa huệ
- ✻ LOTUS Hoa sen
  (hoặc LILAC: Hoa tử đinh hương)
- ✻ ORCHID Hoa phong lan
- ✻ GORSE Hoa kim tước
  (hoặc PANSY: Hoa Păng xê;
  hoặc DAISY: Cúc họa mi)
- ✻ ROSE Hoa hồng
- ✻ PEONY Hoa mẫu đơn
- ✻ JASMINE Hoa nhài
- ✻ PEACHBLOSSOM Hoa đào

HONG HA

Nhận xét. Có rất nhiều bạn tham gia giải ô chữ kì này. Các bạn có tên sau sẽ may mắn nhận được quà tặng: *Nguyễn Phương Linh*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; *Nguyễn Đức Tuấn*, 6C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Lưu Ngọc Khánh*, 6D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Đào Hương Giang*, 7C, THCS TX. Phú Thọ, **Phú Thọ**; *Phạm Thị Minh Anh*, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**. Chúc mừng các bạn.

TRANG ANH

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Kì 25

CLB1. Given 2 non-zero rational numbers a, b satisfying: $a^2 + b^2 = ab(a + b + 1)$.

Prove that: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$ is square of rational number.

CLB2. Given natural numbers x, y satisfying: $2019x^2 + x = 2020y^2 + y$. Prove that $2019(x + y) + 1$ is a square number.

CLB3. Given real numbers a, b satisfying: $a + b \geq 2$. Prove that $a^4 + b^4 \geq a^2 + b^2$.

CLB4. Find the minimum value of the following expression:

$M = |x - 1| + 2|x - 2| + 3|x - 3| + 4|x - 4| + 5|x - 5|$.

CLB5. Given a parallelogram ABCD. The line passing through point C, perpendicular to CD intersects the line passing through point A, perpendicular to BD at E. The line passing through point B, perpendicular to AB intersects the perpendicular bisector of AC at F. Let K be the intersection of EF and BC. Prove that KE = 2KF.

ĐỖ ĐỨC THÀNH *(dịch)*

Kết quả Kì 23 (TTT2 số 192+193)

CLB1. Vì q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

✻ Nếu $q = 3k + 2$ thì $p = 3k + 12 = 3(k + 4) \vdots 3$, mà $p > 3$ nên p là hợp số (loại).

✻ Nếu $q = 3k + 1$ thì $p = 3k + 11$. Do p nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó k chẵn.

$\Rightarrow p + q = 6k + 12 \vdots 12 \Rightarrow p + q = 12m$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

• Nếu m chẵn thì $p + q \vdots 24$ (Ví dụ $p = 17$, $q = 7$ thì $p - q = 10$ và $p + q = 24$ chia hết cho 24).

• Nếu m lẻ thì $m = 2n + 1 \Rightarrow p + q = 24n + 12$ chia cho 24 dư 12 (Ví dụ $p = 47$ và $q = 37$ thì $p - q = 10$ và $p + q = 84$ chia 24 dư 12).

Vậy $p + q$ chia 24 dư 0 hoặc 12.

CLB2. Vì a và b là các số dương nên $a + b > 0$.

Mặt khác,

$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a + b)(a - b)^2 \geq 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

$\Rightarrow 4(a^3 + b^3) \geq a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2) = (a + b)^3$

$\Rightarrow 0 < a + b \leq 1$.

Kết hợp với $a + b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b = 1$.

Vậy có $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^3 + b^3 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ (a + b)^3 - 3ab(a + b) = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

CLB3. $x^4 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 + 4(x + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$.

Vậy phương trình vô nghiệm.

CLB4. Ta có $ab + bc + ca$

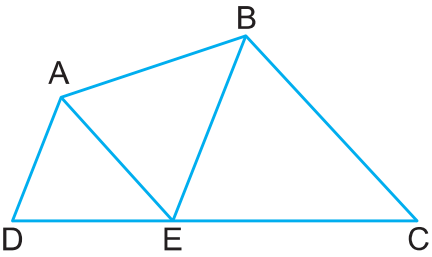
$= \frac{xy^2}{(1 - y)(xy - 1)} + \frac{1}{(xy - 1)(1 - x)} + \frac{x}{(1 - y)(1 - x)}$

$= \frac{xy^2(1 - x) + (1 - y) + x(xy - 1)}{(1 - x)(1 - y)(xy - 1)}$

$= \frac{y(xy - 1) - (x^2y^2 - 1) + x(xy - 1)}{(1 - x)(1 - y)(xy - 1)}$

$= \frac{(xy - 1)(y - xy - 1 + x)}{(1 - x)(1 - y)(xy - 1)} = \frac{(1 - x)(y - 1)}{(1 - x)(1 - y)} = -1$.

CLB5.



Vì AE // BC, BE // AD nên $\frac{S_{BCE}}{S_{ABE}} = \frac{BC}{AE}$ và $\frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \frac{AD}{BE}$.

Ta có $\Delta ADE \backsim \Delta BEC$ (g - g)

$\Rightarrow AD.BC = AE.BE$. Từ đó

$\frac{S_{ADE} + S_{BCE}}{S_{ABE}} = \frac{AD}{BE} + \frac{BC}{AE} \geq 2\sqrt{\frac{AD}{BE}.\frac{BC}{AE}} = 2$

$\Rightarrow S_{ADE} + S_{BCE} \geq 2S_{ABE}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt và được thưởng kì này là: *Kim Ngọc Yến Nhi*, 9A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Hưng Phát*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Ngô Thị An Bình*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Thu Hiền*, 9A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**.

THIỀU QUANG TÙNG



Hỏi: Em có một người bạn rất hay trêu em mà em không muốn mách cô vì ngại. Anh có cách nào giúp em để bạn ấy không nên trêu em và em không muốn dùng "biện pháp" mạnh.

NGUYỄN DUY NGHĨA
(7G, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Đáp:

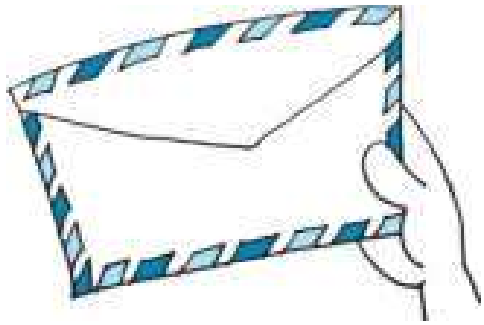
Trêu ai mà để mất lòng
Thì nên ra khỏi cái vòng trêu nhau
Trêu nhau vui chẳng làm đau
Thì nên mãi mãi trước sau vẹn tình.

Hỏi: Anh Phó ơi! Khi gửi bài về Toán Tuổi thơ thì em cần ghi những thông tin gì ạ? Em ghi như ở thư này được không?

NGUYỄN MAI PHƯƠNG
(THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An)

Đáp:

Em quên ghi lớp của mình
Làm anh rất khó xác minh lớp nào
Gửi quà thật khó làm sao
Nguyễn Mai Phương có biết bao nhiêu người?

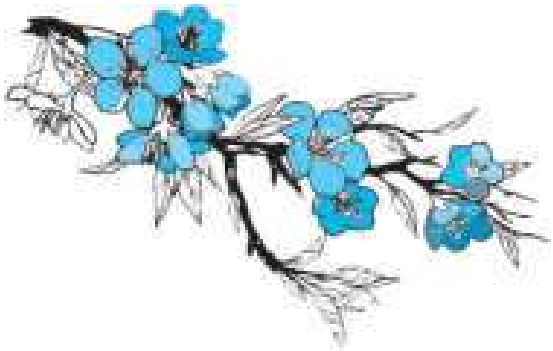


Hỏi: Thưa anh, hoa mai vàng thích hợp thời tiết miền Nam nên hoa nở rất đẹp. Nếu trồng mai ở miền Bắc thì liệu hoa có nở đẹp như ở miền Nam không anh?

NGUYỄN NGỌC HUYỀN ANH
(7D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, Nam Định)

Đáp:

Mai vàng xuân đến đẹp tươi
Miền Nam nóng ấm hoa thời hợp hơn
Miền Bắc giá rét từng cơn
Hoa mai bị lạnh dỗi hờn xấu đi.



Hỏi: Nếu gửi đề toán cho các chuyên mục "Giải Toán qua thư", "Thách đấu" thì gửi có bắt buộc phải gửi kèm lời giải không ạ?

NGUYỄN QUANG M
(9A3, THCS Nguyễn Công Trứ, Ba Đình, Hà Nội)

Đáp:

Nhìn đề thấy thích cực kì
Nhưng không lời giải tức thì khó khăn
Định đăng sẽ rất lăn tăn
Để toà soạn giải chẳng bằng gửi luôn.

Hỏi: Tỉnh em liệu có tham gia Giao lưu Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ năm nay không? Nếu tỉnh không tham gia thì em rất buồn... Ý anh thế nào?

TẠ THỊ NGỌC H
(THCS Hùng Vương, TP. Biên Hoà, Đồng Nai)

Đáp:

Em buồn, anh cũng thấy buồn
Sân chơi bổ ích thổi hồn đam mê
Công văn gửi Sở đã về
Mong Sở hưởng ứng, tràn trề cùng vui.

ANH PHÓ GỠ XƯA



CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(195). Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $5x - 2y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 3|x| + 5|y|$.

BÙI MẠNH TÙNG

(GV. THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm, Hà Nội)

Bài 2(195). Cho các số nguyên a, b, c, d khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$.

Tính giá trị của biểu thức $M = ab + cd$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài 3(195). Tìm các số có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $a = b + c$.

ii) $b(c + 1) = 52 - 4a$.

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV. Đại học Sư phạm Hà Nội)

Bài 4(195). Cho tam giác ABC, gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác. M là trung điểm của AB, biết rằng $\widehat{MIB} = 90^o$.

Chứng minh rằng $AB + AC = 3BC$.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV. THPT chuyên, Đại học Sư phạm Hà Nội)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

1(195). Given two integers x, y satisfying $5x - 2y = 1$. Find the minimum value of the following expression: $T = 3|x| + 5|y|$.

2(195). Given four non-zero integers a, b, c and d satisfying: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$.

Find the value of the expression: $M = ab + cd$.

3(195). Find all the 3-digit numbers in the form $\overline{abc}$ satisfying the following conditions:

i) $a = b + c$.

ii) $b(c + 1) = 52 - 4a$.

4(195). Given triangle ABC, let I be the intersection point of the three internal bisectors of triangle ABC and M be the midpoint of segment AB. It is known that $\angle MIB = 90^o$.

Prove that: $AB + AC = 3BC$.



CÁC LỚP THCS

Bài 5(195). Giải phương trình

$$\frac{3x+1}{2x^2+3x-2}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2+3x}.$$

BÙI HẢI QUANG

(GV. THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

Bài 6(195). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+y^3=(x^2+y^2)\sqrt{x^2-xy+y^2} \\ xy=\sqrt{4x-3}. \end{cases}$$

CAO MINH QUANG

(GV. THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài 7(195). Cho bảng ô vuông cỡ 17×17. Các số 1, 2, 3, …, 17 được điền vào mỗi ô vuông của bảng sao cho mỗi ô vuông chứa đúng một số và mỗi số xuất hiện đúng 17 lần trong bảng. Chứng minh rằng tồn tại một hàng hoặc một cột chứa ít nhất 5 số phân biệt.

NGUYỄN TIẾN LÂM

(GV. THPT chuyên Đại học KHTN Hà Nội)

Bài 8(195). Cho tam giác nhọn ABC có AB < AC. Gọi O là trung điểm của BC, kẻ các đường cao BM và CN của tam giác ABC. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt tia phân giác của $\widehat{MON}$ tại D. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng tứ giác BNDE nội tiếp.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136, Phan Đình Phùng, TP. Nam Định, Nam Định)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

5(195). Solve the following equation:

$$\frac{3x+1}{2x^2+3x-2}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2+3x}.$$

6(195). Solve the following system of equations:

$$\begin{cases} x^3+y^3=(x^2+y^2)\sqrt{x^2-xy+y^2} \\ xy=\sqrt{4x-3}. \end{cases}$$

7(195). Numbers from 1 to 17 are placed in a 17×17 grid so that each cell contains exactly one number and each number occurs exactly 17 times in the grid. Prove that there always exits a row or a column that contains at least 5 distinct numbers.

8(195). Given acute triangle ABC (AB < AC). O is the midpoint of BC, BM and CN are the altitudes of triangle ABC. The bisectors of angle $\angle BAC$ and $\angle MON$ meet each other at D. AD intersects BC at E. Prove that quadrilateral BNDE is inscribed in a circle.s



NGÔI TRƯỜNG THÂN THIỆN

Vui tươi — *Nhạc và lời: Trần Thu Hường*





Nhạc sĩ Trần Thu Hường - Hội viên Hội Nhạc sĩ Việt Nam, Hội viên Hội Văn học - Nghệ thuật tỉnh Lâm Đồng, quê ở tỉnh Quảng Nam, hiện sống và làm việc tại Trường THCS Nguyễn Du, huyện Di Linh, tỉnh Lâm Đồng.

Là một nhạc sĩ đồng thời là một nhà giáo, ngoài công việc giảng dạy âm nhạc, Trần Thu Hường đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để sáng tác âm nhạc ở các thể loại khác nhau đặc biệt là những sáng tác cho tuổi thơ, nhiều tác phẩm đã được trao Giải thưởng của Hội Nhạc sĩ Việt Nam, Hội Văn học Nghệ thuật tỉnh Lâm Đồng... Ngoài ra nhạc sĩ Trần Thu Hường còn tham gia cộng tác trong nhiều chương trình ca nhạc với các Đài Phát thanh và Truyền hình Trung ương cũng như các địa phương... đã xuất bản một số tập ca khúc thiếu nhi như: *Vầng trăng cánh võng, Từ bục giảng yêu thương...*

Ngôi trường thân thiện là một sáng tác của nhạc sĩ Trần Thu Hường viết cho thiếu nhi. Xin trân trọng giới thiệu cùng các em!

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.
Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.
Mã số: 8BTT195M19. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 04 năm 2019.

Giá: 10 000 đồng