NĂM THỨ
HAI MƯƠI
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

7/9
194
NĂM HỌC 2018 - 2019

TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2019
TỔ CHỨC TẠI TP. ĐÀ NẴNG TỪ 8 - 10/6/2019



TIN TỨC - HOẠT ĐỘNG - GẶP GỠ

Ngày 28/2/2019, đoàn công tác của Tạp chí Toán Tuổi thơ đã có buổi làm việc với Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Đà Nẵng, đơn vị đăng cai cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc 2019. Về phía Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Đà Nẵng có bà Lê Thị Bích Thuận, Phó Giám đốc phụ trách; ông Đặng Hùng, Chánh Văn phòng; ông Nguyễn Anh Quân, Trưởng phòng Kế hoạch Tài chính; ông Võ Trung Minh, Phó Trưởng phòng Giáo dục Tiểu học, ... Ông Nguyễn Ngọc Hân, Phó Tổng biên tập phụ trách Tạp chí Toán Tuổi thơ đã giới thiệu về cuộc thi từ năm 2005 đến năm 2018 và những điểm mới của cuộc thi năm 2019. Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ là một sân chơi để các em học sinh, các thầy cô giáo được giao lưu, học hỏi và cùng tiến bộ. Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Đà Nẵng cùng đoàn công tác của Tạp chí đã trao đổi để phối hợp tổ chức thật tốt sự kiện này. Cuộc thi năm nay dự kiến được tổ chức từ ngày 8/6/2019 đến ngày 10/6/2019 tại trường THCS-THPT Nguyễn Khuyến, TP. Đà Nẵng.



Các cán bộ Tạp chí và Ban Giám hiệu trường THCS-THPT Nguyễn Khuyến



Các đại biểu dự cuộc họp

CUỘC THI TÌM KIẾM TÀI NĂNG TOÁN HỌC QUỐC TẾ ITMC 2019

TỔ CHỨC TẠI THÁI LAN

Cuộc thi Tìm kiếm tài năng Toán học Quốc tế ITMC 2019 được tổ chức tại Thái Lan từ ngày 8/2/2019 đến ngày 12/2/2019. Năm nay, cuộc thi có các thí sinh của 7 quốc gia và vùng lãnh thổ tham dự là: Indonesia, Philippines, Đài Loan, Bangladesh, Thái Lan, Cam pu chia và Việt Nam với 9 cấp độ từ lớp 2 đến lớp 11. Đoàn Việt Nam tham dự vòng 2, ITMC 2019 với 52 thí sinh xuất sắc (được tuyển chọn qua vòng 1 từ gần 3000 thí sinh). Kết quả đoàn Việt Nam đoạt 2 Huy chương Vàng, 15 Huy chương Bạc, 23 Huy chương Đồng và 7 giải Khuyến khích. Hai thí sinh đoạt Huy chương Vàng là: Trần Minh Đức, lớp 7, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Q. Cầu Giấy; Nguyễn Duy Khôi, lớp 7, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm, Hà Nội.



Ông Lê Ngọc Quang, Phó Giám đốc Sở GD-ĐT Hà Nội và các thầy cô giáo, các em học sinh đoạt giải

Toán tuổi thơ 2 TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
TS. TRẦN QUANG VINH
Phó Tổng biên tập phụ trách tạp chí:
ThS. NGUYỄN NGỌC HÂN
Phó Tổng biên tập tạp chí:
TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

ỦY VIÊN

NGND. VŨ HỮU BÌNH
TS. NGUYỄN MINH ĐỨC
ThS. ĐẶNG HIỆP GIANG
TS. NGUYỄN MINH HÀ
PGS. TS. VŨ ĐÌNH HÒA
ThS. TRẦN QUANG HÙNG
TS. LÊ THỐNG NHẤT
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG
ThS. PHẠM ĐỨC TÀI
NGND. PGS. TS. TÔN THÂN
PGS. TS. LÊ ANH VINH

TÒA SOẠN

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702
Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com
Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com
Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Trị sự - Phát hành:
TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG,
NGUYỄN THỊ HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH
Biên tập - Chế bản: **VŨ THỊ MAI, ĐỖ TRUNG KIÊN**
Mĩ thuật: **TRẦN NGỌC TRƯỜNG**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY

Giải toán thế nào? Tr 2
Một số bài toán hay liên quan đến tỉ lệ thức
Lê Quốc Hán

Rừng cười Tr 4
Bán gì?
Vua Tếu

Đo trí thông minh Tr 5
Điền hình còn thiếu!
Đỗ Thị Thúy Ngọc

Eureka Tr 7
Sử dụng phần bù của hình để giải một số bài toán hình học
Đoàn Quang Vụ

Nhìn ra thế giới Tr 9
Kì thi Toán Balkan (JBMO) 2017
Đỗ Đức Thành

Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc Tr 10
Vụ án mất bức tranh quý
Trần Phương Nam

Vượt vũ môn Tr 12
Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để giải hệ phương trình
Trịnh Phong Quang

Compa vui... tính Tr 15
Có chắc hay không?
Phạm Tuấn Khải

Dành cho các nhà toán học nhỏ Tr 22
Từ một số bài toán quen thuộc đến bài toán thi VMO năm 2019
Nguyễn Đăng Khoa

Minh họa bìa 1: *Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông*



MỘT SỐ BÀI TOÁN HAY LIÊN QUAN ĐẾN TỈ LỆ THỨC

PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN
GV. Khoa Toán Đại học Vinh

Tỉ lệ thức và dãy tỉ số bằng nhau là các vấn đề học sinh được học ở lớp 7. Tuy nhiên các bài tập trong sách giáo khoa và sách bài tập khá đơn giản. Trong bài viết này, chúng tôi xin trình bày một số phương pháp thường dùng để giải các bài toán hay thuộc nội dung này.

1. Sử dụng định nghĩa của tỉ số

Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk;\ c=dk.$

Bài toán 1. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{ab}{cd}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$ (với giả thiết các mẫu thức khác 0).

Lời giải. Đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk;\ c=dk.$

Do đó

$$\frac{ab}{cd}=\frac{bk.b}{dk.d}=\frac{b^2}{d^2};$$

$$\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{b^2k^2-b^2}{d^2k^2-d^2}=\frac{b^2(k^2-1)}{d^2(k^2-1)}=\frac{b^2}{d^2}.$$

Suy ra $\frac{ab}{cd}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}.$

Bài toán 2. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\frac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}$ là số hữu tỉ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Bắc Ninh năm học 2013 - 2014).

Lời giải. Đặt $\frac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}=\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$, $(m,n)=1$.

Suy ra $nx-my=(mz-ny)\sqrt{2013}.$

- Nếu $mz\neq ny$ thì $\sqrt{2013}=\frac{nx-my}{mz-ny}$ là số hữu tỉ (vô lí).

$\Rightarrow nx-my=mz-ny=0$

$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{m}{n}=\frac{y}{z}\Rightarrow xz=y^2.$

Kết hợp với

$x^2+y^2+z^2=(x+z)^2-y^2$

$=(x+z-y)(x+z+y).$

Mà $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

Kết hợp với $x+z+y>1$ ta được $x+z-y=1$

và $x^2+y^2+z^2=x+y+z$.

Vậy $x=y=z=1.$

2. Sử dụng tính chất của tỉ lệ thức

Ta có $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc\ (b,d\neq 0).$

Bài toán 3. Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}$. Chứng minh rằng x^2-y^2 chia hết cho 40.

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN Hà Nội năm học 2016 - 2017).

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $3x^2-2y^2=1.$

Từ đó suy ra $3x^2-2y^2\equiv 1\ (\text{mod } 8);$

$3x^2-2y^2\equiv 1\ (\text{mod } 5).$

Chú ý rằng

$x^2 \equiv 0,\ 1,\ 4 \pmod 8;\ y^2 \equiv 0,\ 1,\ 4 \pmod 8.$

Do đó $3x^2 - 2y^2 \equiv 0,\ 6,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2 \pmod 8.$

Suy ra

$3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod 8 \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 8.$

Do đó $x^2 - y^2 \vdots 8$.

Ta lại có

$x^2 \equiv 0,\ 1,\ 4 \pmod 5;\ y^2 \equiv 0,\ 1,\ 4 \pmod 5.$

Suy ra

$3x^2 - 2y^2 \equiv 0,\ 3,\ 2,\ 1 \pmod 5.$

Do đó

$3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 5.$

Suy ra $x^2 - y^2 \vdots 5$.

Vì $(8, 5) = 1;\ 8 \times 5 = 40$ nên $x^2 - y^2 \vdots 40$.

Bài toán 4. Tìm các chữ số a, b, c đôi một khác nhau và khác 0 thỏa mãn $\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}} = \frac{b}{c}$.

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Quốc học Huế năm học 2010 -2011).

Lời giải. Ta có $\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}} = \frac{b}{c}$, suy ra

$b(a - c) = 10c(a - b) \Rightarrow b(a - c) \vdots 5.$

Do đó $b = 5$ hoặc $a - c = \pm 5$.

• Xét $b = 5$. Ta có

$$a - c = 2c(a - 5) \Rightarrow 2c = 1 + \frac{9}{2a - 9}.$$

Từ đó suy ra $2a - 9$ là ước của 9.

Suy ra $2a - 9 \in \{9;\ 3;\ 1;\ -1;\ -3\}$.

Từ đó $(a, b, c) = (6; 5; 2); (9; 5; 1)$.

• Xét $a - c = 5$. Ta có

$$b = 2c(c + 5 - b) \Rightarrow 2b = 2c + 9 - \frac{9}{2c + 1}.$$

Do đó $2c + 1 \in \{1;\ 3;\ 9\}$.

Suy ra $(a; b; c) = (6; 4; 1); (9; 8; 4)$.

• Xét $a - c = -5$ (Giải tương tự, ta thấy trường hợp này vô nghiệm).

Bài toán 5. Tìm x, y thỏa mãn

$$\frac{1 + 2y}{18} = \frac{1 + 4y}{24} = \frac{1 + 6y}{6x}. \quad (1)$$

Lời giải. Ta có $\frac{1 + 2y}{18} = \frac{1 + 4y}{24}$.

Suy ra $24(1 + 2y) = 18(1 + 4y)$.

Do đó $y = \frac{1}{4}$.

Thay $y = \frac{1}{4}$ vào (1) ta được

$$\frac{1 + 4.\frac{1}{4}}{24} = \frac{1 + 6.\frac{1}{4}}{6x} \Rightarrow x = 5.$$

Vậy $x = 5,\ y = \frac{1}{4}$.

Bài tập vận dụng.

Bài 1. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{(a - b)^4}{(c - d)^4} = \frac{a^4 - b^4}{c^4 - d^4}$, với giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa.

Bài 2. Cho tỉ lệ thức $\frac{a + b}{b + c} = \frac{c + d}{d + a}$. Chứng minh rằng $a = c$ hoặc $a + b + c + d = 0$.

Bài 3. Tìm các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\frac{a - b\sqrt{5}}{b - c\sqrt{5}}$ là số hữu tỉ và $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ ĐẶT MUA TẠP CHÍ CẢ NĂM HỌC TẠI CÁC BƯU CỤC CỦA VNPT TRÊN CẢ NƯỚC VỚI MÃ ĐẶT CÁC ẤN PHẨM NHƯ SAU: Tạp chí Toán Tuổi thơ 1: **C169**; Tạp chí Toán Tuổi thơ 2: **C169.1**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2018: **C169.2**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2018: **C169.3**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 1 năm 2017: **C169.4**; Tổng tập Toán Tuổi thơ 2 năm 2017: **C169.5**.

Rùng cười

Kì này Bán gì?

Bán gì có ở hình tròn
Bán gì mà thắng xơi ngon nhất nhì
Bán gì cấm lửa nhớ ghi
Bán gì xe, gánh cứ đi dọc đường
Bán gì xích đạo chia phương
Bán gì mà khách mua thường muốn may
Bán gì mua uống dễ say
Bán gì không khéo hàng bay mất liền
Bán gì không ở lại đêm
Bán gì tỉ số trở nên ngược đời
Bán gì phản quốc tày trời
Bán gì ba phía biển khơi vỗ về
Bán gì theo đúng đơn kê
Bán gì chị Dậu tái tê nỗi lòng
Ai mà nhanh nhẹn giải xong
Nếu mà đúng cả hẵng mong nhận quà
Nhớ đừng có nghĩ qua loa
Dễ sai lắm đấy! Làm ta rất buồn!

VUA TẾU





Kết quả (TTT2 số 191)

AFF CUP 2018

Trong giải bóng đá AFF Cup 2018, Việt Nam đã thi đấu tổng cộng 8 trận, trong đó giành chiến thắng 6 trận. Thái Lan đã để thua ở trận bán kết. Trận chung kết tại sân vận động Mỹ Đình, Anh Đức đã ghi bàn. Cầu thủ xuất sắc nhất giải là Quang Hải. Thủ môn Văn Lâm đã giúp đội tuyển Việt Nam giữ sạch lưới trong nhiều trận đấu. Có hai cầu thủ gốc Sông Lam. Huấn luyện viên tài tình của đội tuyển Việt Nam là ông Park Hang Seo. Công Phượng thi đấu 7 trận với tổng số 3 bàn thắng. Đây là lần thứ hai đội tuyển quốc gia Việt Nam vô địch giải đấu. Xin chúc mừng thành công của đội tuyển bóng đá quốc gia Việt Nam.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn tham gia trả lời đúng, tuy nhiên Trẫm sẽ chọn ra 5 bạn để trao quà. Các bạn có câu trả lời đúng được nhận quà kì này là: *Võ Thị Minh Huyền*, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thế Sơn*, 8A1, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thị Hoài An*, 7B; *Trần Đức Mạnh*, 7G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

VUA TẾU



Kì này ĐIỀN HÌNH CÒN THIẾU!

Hãy chọn hình thích hợp để điền vào chỗ dấu hỏi chấm cho hợp lôgic.



A. 
B. 
C. 
D. 

ĐỖ THỊ THÚY NGỌC
Phó Trưởng phòng Giáo dục Trung học, Sở GD&ĐT Ninh Bình
(Sưu tầm và giới thiệu)

Kết quả BẠN CHỌN HÌNH NÀO? (TTT2 số 191)

Quy luật 1. Trong hình vuông lớn nhiều hình trong các ô vuông nhỏ xuất hiện đúng 2 lần, chỉ có 3 hình trong đáp án C mới xuất hiện 1 lần. Vậy ta chọn đáp án C.

Quy luật 2. Trong hình vuông lớn, 4 hình ở góc trên bên phải giống 4 hình ở góc dưới bên trái; 4 hình ở góc trên bên trái giống 4 hình ở góc dưới bên phải. Để có quy luật đó ta phải chọn đáp án C.

Nhận xét. Hầu hết các bạn đều chọn đúng đáp án nhưng diễn đạt chưa rõ ràng và còn thiếu chính xác.

Xin trao thưởng cho các bạn: *Bùi Lê Đình Văn*, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thế Sơn*, 8A1, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**; *Phan Bá Bảo Minh*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Tưởng Hương Thảo*, 8A, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Các bạn sau được tuyên dương: *Trần Nguyễn Phú Quý*, 6C, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ; *Vũ Minh Đức*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Anh Chư*, 6C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Việt Anh*, 7D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Vương Trần Huệ Minh*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

NGUYỄN XUÂN BÌNH





Các bạn hãy giải bài toán sau bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé! Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

Problem 4(194). Mr. Zack tells each of three of his students a non-zero positive integer, Bob, Mark and Joe. No one knows the other's numbers but they all know that the sum of the three numbers is 10.

Bob says: "I'm sure that Mark and Joe have different numbers".

Immediately, Mark says: "Now I think I already know both Bob's number and Joe's number but just not sure which one is which".

What is Mark's number?

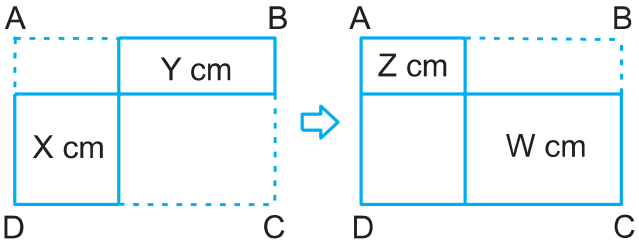
TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH

GV. Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội

Kết quả

Problem 3(191).

By moving the sides, it is straightforward to prove that $X + Y = W + Z$ as follows



Thus,

$$W = (X + Y) - Z = (X + Y) - \frac{(X + Y)}{3} = \frac{2}{3}(X + Y).$$

$$W < 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3}(X + Y) < 6 \Leftrightarrow (X + Y) < 9.$$

As $Z = \dfrac{X + Y}{3}$ is a positive integer, thus, $(X + Y)$ is divisible by 3.

It implies that the value of $(X + Y)$ can only be 3 or 6.

Case 1. $X + Y = 3$, Z must be equal to either X or Y and equals 1.

Case 2. $X + Y = 6$, the only possible solution is: $X = 5, Y = 1, Z = 2, W = 4$.

Answer: $X = 5$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt được thưởng kì này: *Trần Nguyễn Phú Quý*, 6C; *Nguyễn Thế Dũng*, 7C, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ; *Dương Nguyên Khánh*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

ĐỖ ĐỨC THÀNH

KẾT QUẢ KÌ 22...

(Tiếp theo trang 29)

Xét ΔADE và ΔABE có $AD = AB$ (gt), $\widehat{DAE} = \widehat{BAE}$ (vì AE là phân giác của góc A), AE là cạnh chung.

Do đó $\Delta ADE = \Delta ABE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{AEB} = 60^o$.

Tương tự có $\Delta BAE = \Delta BCE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BEA} = 60^o$.

Khi đó ta có $\widehat{AED} + \widehat{AEB} + \widehat{BEC} = 180^o$.

Suy ra C, E, D thẳng hàng.

Do đó $\widehat{BCD} = \widehat{BCE} = \widehat{BAE} = 70^o$.

Ta có tam giác BAC cân tại B nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \dfrac{180^o - \widehat{ABC}}{2} = \dfrac{180^o - 100^o}{2} = 40^o$.

Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCA} = 70^o - 40^o = 30^o$.

Vậy $\widehat{ACD} = 30^o$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt và được thưởng kì này là: Nhóm bạn *Nguyễn Thế Sơn, Nguyễn Thị Thu Hà, Lương Hoàng Anh, Lê Tùng Lâm, Kim Anh Hùng, Nguyễn Trung Kiên*, 8A1, THCS Vĩnh Yên, Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Trang Linh*, 8A, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**; *Nguyễn Công Hùng*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**.

THIỀU QUANG TÙNG



SỬ DỤNG PHẦN BÙ CỦA HÌNH ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

ĐOÀN QUANG VỤ
Trưởng phòng Giáo dục và Đào tạo Nam Trực, Nam Định

Nếu ghép hình A với hình B để được hình C thì ta nói hình A và hình B gọi là phần bù của nhau trong C.

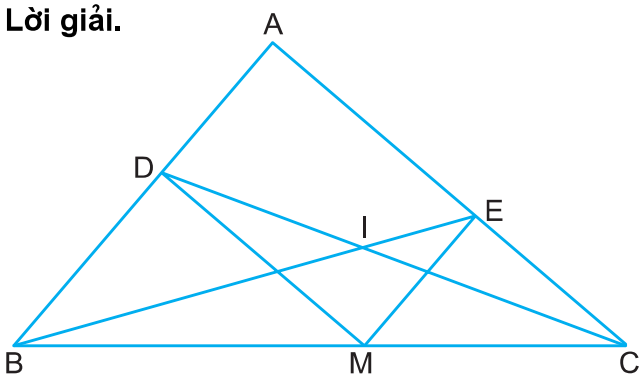
Một số bài toán hình học, cụ thể là bài toán so sánh diện tích của 2 hình được giải quyết nhanh hơn nhờ phát hiện ra phần bù chung của 2 hình ban đầu để dẫn tới so sánh diện tích của 2 hình lớn hơn nhưng thuận lợi hơn.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy điểm M (M khác B và C). Kẻ MD $\perp$ AB (D $\in$ AB), ME $\perp$ AC (E $\in$ AC), BE cắt CD tại I. Chứng minh rằng $S_{ADIE} = S_{BIC}$.

Nhận xét. Ta nhận thấy $S_{ADIE} + S_{BID} = S_{ABE}$, $S_{BIC} + S_{BID} = S_{BCD}$. Do đó, để chứng minh $S_{ADIE} = S_{BIC}$ ta sẽ chứng minh $S_{ABE} = S_{BCD}$.

Phần bù chung là tam giác BID.

Lời giải.



Ta có MD // AC (vì cùng vuông góc với AB), ME // AB (vì cùng vuông góc với AC).

Theo định lí Thales ta có

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BM};\ \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BM}.$$

Suy ra

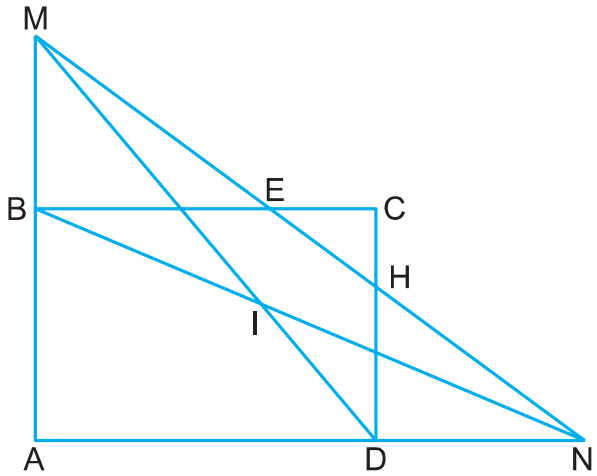
$$\frac{BA}{BD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AB.AE = BD.AC$$

$$\Rightarrow S_{ABE} = S_{BDC}$$

$$\Rightarrow S_{ADIE} + S_{BDI} = S_{BDI} + S_{BIC} \Rightarrow S_{ADIE} = S_{BIC}.$$

Bài toán 2. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M, trên tia đối của tia DA lấy các điểm N. Gọi I là giao điểm của BN và DM. Hãy so sánh S_{ABID} và S_{MIN}.

Lời giải.



Ta xét 3 trường hợp về vị trí của điểm C đối với đường thẳng MN.

- TH1. Điểm C thuộc đoạn thẳng MN ta có bài toán 1 nên $S_{ABID} = S_{MIN}$.
- TH2. Điểm C và điểm A nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa MN.

Gọi giao điểm của MN với BC, CD lần lượt là E, H.

Ta có DH // AM, BE // AN.

Theo định lí Thales ta có

$$\frac{AD}{AN} = \frac{MH}{MN}.\ (1)$$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{ME}{MN}.\ (2)$$

Vì E nằm giữa M, H nên MH > ME. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$\frac{AD}{AN} > \frac{MB}{MA} \Leftrightarrow AD.MA > AN.MB.$$

Suy ra $S_{AMD} > S_{BMN}$

$$\Rightarrow S_{ABID} + S_{BMI} > S_{MIN} + S_{BMI}.$$

Vậy $S_{ABID} > S_{MIN}$.

Ở bài này phần bù chung là ΔBMI.

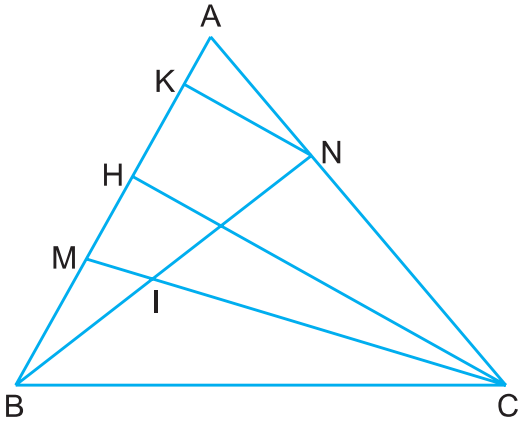
• TH3. Điểm A và điểm C cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ chứa MN.

Chứng minh tương tự TH2 ta được $S_{ABID} < S_{MIN}$.

Nhận xét. *Trong bài toán 1 nếu thay tam giác vuông ABC bằng tam giác thường thì ta được các bài toán sau:*

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AC lấy điểm N. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Biết $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{AN}$. Chứng minh rằng $S_{AMIN} = S_{BIC}$.

Lời giải.



Hạ CH, NK vuông góc với AB (H, K $\in$ AB).

Ta có NK // CH (Vì cùng vuông góc với AB).

Theo hệ quả của định lí Thales ta có

$\frac{NK}{CH}=\frac{AN}{AC}$. (1)

Theo giả thiết ta có $\frac{BM}{AN}=\frac{AB}{AC}$.

Suy ra $\frac{BM}{AB}=\frac{AN}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{NK}{CH}=\frac{BM}{AB}$.

Suy ra BM.CH = AB.NK. Do đó $S_{ANB} = S_{BMC}$

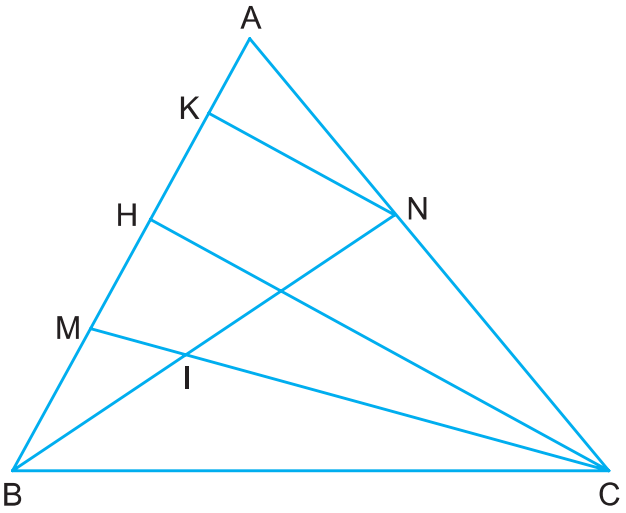
$\Rightarrow S_{AMIN} + S_{BMI} = S_{BIC} + S_{BMI} \Rightarrow S_{AMIN} = S_{BIC}$.

Nhận xét. *Trong bài toán 3 nếu các điểm M, N chia các cạnh AB, AC của tam giác ABC theo một tỉ số nào đó thì ta có bài toán sau:*

Bài toán 4. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\frac{BM}{AB}=\frac{1}{3};\frac{AN}{AC}=\frac{2}{5}$.

Chứng minh rằng $5S_{AMIN} = 6S_{BIC} + S_{BIM}$.

Lời giải.



Hạ CH, NK vuông góc với AB (H, K $\in$ AB).

Ta có NK // CH.

Theo hệ quả của định lí Thales ta có

$\frac{NK}{CH}=\frac{AN}{AC}=\frac{2}{5}$.

$S_{ABN}=\frac{1}{2}.NK.AB=\frac{1}{2}.\frac{2}{5}.CH.AB=\frac{1}{5}.AB.CH.$

$S_{BMC}=\frac{1}{2}.CH.BM=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.CH.AB=\frac{1}{6}.AB.CH.$

Suy ra $\frac{S_{ABN}}{S_{BMC}}=\frac{6}{5}\Rightarrow S_{ABN}=\frac{6}{5}.S_{BMC}$.

Do đó $S_{AMIN} + S_{BIM} = \frac{6}{5}(S_{BIC} + S_{BIM})$

$\Rightarrow S_{AMIN} = \frac{6}{5}.S_{BIC}+\frac{1}{5}.S_{BMI}$

$\Leftrightarrow 5.S_{AMIN} = 6.S_{BIC} + S_{BIM}$.

Bài tập vận dụng.

Bài 1. Cho tam giác MNP, trên cạnh MN lấy A, trên cạnh MP lấy B, PA cắt NB tại I sao cho $S_{MAIB} = S_{NIP}$. Gọi O là trung điểm của AB, MO cắt NP tại C. Chứng minh rằng O là trung điểm của MC.

Bài 2. Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ trên cùng nửa mặt phẳng bờ chứa AC các nửa đường tròn (O) đường kính AB, nửa đường tròn (I) đường kính BC, vẽ tiếp tuyến chung MN của hai nửa đường tròn (M thuộc (O), N thuộc (I)), AM cắt CN tại D, AN cắt CM tại K. Chứng minh rằng $2S_{OKI} = S_{DMKN}$.

KÌ THI TOÁN BALKAN (JBMO) 2017

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH
GV. Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội
(Sưu tầm và dịch)

Kì thi toán Balkan (JBMO) là một kì thi toán thường niên dành cho đối tượng học sinh dưới 15,5 tuổi đến từ các nước thành viên (trong khu vực Balkan). Trong những năm gần đây, các nước chủ nhà cũng đã mời một số nước không phải thành viên tham gia.

Mỗi bài thi của kì thi toán Balkan kéo dài 4 tiếng đồng hồ, bài thi bao gồm 4 bài toán thường về 4 chủ đề chính là: Hình học, Lí thuyết số, Đại số và Tổ hợp (mức độ sơ cấp). Sau đây là một số bài toán trong đề thi năm 2017:

Bài 1. Hãy tìm tất cả các tập hợp gồm 6 số nguyên dương liên tiếp sao cho tích của 2 số trong 6 số cộng với tích của 2 số trong 4 số còn lại sẽ bằng tích của 2 số còn lại sau cùng.

Bài 2. Cho x, y, z là các số nguyên dương khác nhau đôi một. Chứng minh rằng
$(x + y + z)(xy + yz + zx - 2) \geq 9xyz$.
Dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài 3. Cho ABC là một tam giác nhọn sao cho $AB \neq AC$ với đường tròn ngoại tiếp Γ tâm O. Gọi M là trung điểm của BC và D là một điểm nằm trên Γ sao cho $AD \perp BC$. T là một điểm sao cho BDCT tạo thành một hình bình hành và Q là một điểm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A sao cho $\widehat{BQM} = \widehat{BCA}$ và $\widehat{CQM} = \widehat{CBA}$. AO cắt Γ tại E, $(E \neq A)$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác ETQ cắt Γ tại $X \neq E$. Chứng minh rằng ba điểm A, M và X nằm trên cùng một đường thẳng.

Thông báo

CÁCH GỬI BÀI ĐẾN TOÁN TUỔI THƠ

Thân gửi bạn đọc Toán Tuổi thơ 2!

Để thuận tiện cho bạn đọc gửi bài và Ban biên tập chọn bài và chấm bài, tòa soạn quy định cách gửi bài đến Toán Tuổi thơ như sau:

1. Bài gửi đăng

- Bài viết đã gửi đến Toán Tuổi thơ thì không gửi đến báo hay tạp chí khác.
- Nếu bài trích, hoặc sưu tầm ở tài liệu khác thì phải ghi rõ nguồn gốc tài liệu "Sưu tầm". Nếu bài dịch ở tài liệu nào thì cần gửi kèm bản gốc.
- Bài viết có đủ và chính xác các thông tin: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại, số tài khoản ngân hàng để tòa soạn tiện liên lạc và gửi nhuận bút.

2. Bài giải của học sinh

- Mỗi chuyên mục hay mỗi bài Thi giải toán qua thư: giải vào một tờ giấy, phía trên cùng có ghi rõ họ tên, địa chỉ rõ ràng, chính xác (lớp, trường, huyện quận, tỉnh thành).
- Chuyên mục Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ: giải liền 5 bài, có thể giải bằng tiếng Anh hoặc tiếng Việt.
- Khuyến khích bài giải nhiều cách nếu có thể.

3. Hình thức gửi bài

- Bài gửi đăng nên đánh máy, gửi kèm file vào email: bbttoantuoitho@gmail.com, hoặc gửi bản gốc qua đường bưu điện.
- Bài giải của học sinh (viết tay) gửi về tòa soạn theo địa chỉ: **Tạp chí Toán Tuổi thơ, Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, P. Cát Linh, Q. Đống Đa, Hà Nội.**

TTT



VỤ ÁN MẤT BỨC TRANH QUÝ

TRẦN PHƯƠNG NAM

(Ghi theo câu chuyện của thám tử Sê Lốc Cốc)

Đầu Xuân, tới chơi nhà Sê Lốc Cốc. Sau li rượu chúc sức khỏe nhau, như thường lệ, tôi đề nghị thám tử kể cho nghe một vụ phá án. Thám tử thong thả như mọi khi chậm rãi kể:

Bảo tàng ở thành phố X có rất nhiều bức tranh nghệ thuật quý. Một hôm cảnh sát trưởng điện cho tôi:

- Anh tới giúp cho một vụ án mới xảy ra... Bức tranh quý nhất trong bảo tàng vừa bị phát hiện biến mất! Bên chúng tôi đã giữ nguyên hiện trường và có phát hiện ra những kẻ bị tình nghi. Nhưng không có chứng cứ gì để buộc tội.

Thế là tôi lên xe tới ngay bảo tàng. Bước vào trong khu vực hiện trường vụ án thì cảnh sát trưởng đang ở đó với vài nhân viên. Cũng như nhiều vụ án kiểu này, hiện trường không có gì đặc biệt, nơi treo bức tranh quý trống trơ. Tất cả đều bình thường. Kẻ cắp không gây ra một sự xáo trộn nào. Liệu có một vị khách nào đã lấy bức tranh này? Nhưng lấy xong thì mang ra theo lối nào vì bảo tàng chỉ có duy nhất một lối ra cho khách với hệ thống theo dõi an ninh hiện đại mà bức tranh lại khổ lớn? Nếu không có sự hỗ trợ của nhân vật nào đó của bảo tàng thì chuyện bức tranh ra khỏi đây là một chuyện phi thường!



Tôi trao đổi với cảnh sát trưởng và cả hai bên đều nhất trí, chắc chắn kẻ cắp phải thông đồng với một nhân vật có mặt ở bảo tàng. Nhân vật ấy là ai? Chỉ có giám đốc bảo tàng và kíp bảo vệ là có chìa khoá cửa ra vào bảo tàng mà thôi. Đương nhiên là đầu mối phải bắt đầu từ đó.

Biên bản thẩm vấn cho thấy:

- Thời gian xảy ra vụ án, giám đốc đi công tác vắng.
- Kíp bảo vệ bảo tàng trong thời gian này hoạt động bình thường. Không có nghi vấn gì đặc biệt.
- Bức tranh chỉ rời khỏi chỗ treo trong buổi chiều hôm trước và ngay sáng sớm nay đã phát hiện bức tranh biến mất.

Linh tính cho tôi biết: Rất có thể bức tranh chưa ra khỏi bảo tàng mà kẻ cắp có thể đang cất giấu ở đâu đó trong cái bảo tàng lớn này. Cho lục soát tất cả bảo tàng? Giám đốc bảo tàng đang trên đường về đây. Mượn chìa khoá các phòng từ bảo vệ, tôi cùng cảnh sát trưởng đích thân

lặng lẽ đi rà soát tất cả các phòng của bảo tàng, kể cả những căn phòng không dùng cho triển lãm, nghĩa là phải soi tất cả những nơi có thể giấu bức tranh. Không một ai trong bảo tàng được biết chuyện rà soát này.

Trời phù hộ nên linh tính của tôi thật chính xác. Bức tranh đã được phát hiện nằm trong một gian nhà kho đã lâu không dùng đến, chỉ chứa những đồ mà bảo tàng đã không sử dụng từ lâu.

Thế là bức tranh quý nhất sẽ được trả lại đúng vị trí. Tôi để nguyên bức tranh đó ở nơi như kẻ gian đã để và xin số máy của giám đốc bảo tàng để trực tiếp gọi:

- Ông đã về đến bảo tàng chưa? Xin báo tin mừng với ông, chúng tôi đã tìm ra bức tranh quý! Nếu ông về đến bảo tàng thì đến ngay đây!

Lúc sau, ông giám đốc bảo tàng đã có mặt.

Tôi nhìn vị cảnh sát trưởng, rồi nhìn ông giám đốc nói:

- Ông có biết kẻ tòng phạm là ai không?

Không đợi ông ta trả lời, tôi nói với cảnh sát trưởng:

- Tôi đã làm xong việc, còn bây giờ việc bắt ai là việc của ông!

Câu chuyện chỉ kể tới đấy. Sê Lốc Cốc cười sảng khoái. Còn tôi cũng chưa hiểu vì sao ông cười. Còn các bạn, nếu là cảnh sát trưởng thì sẽ ra lệnh bắt ai bây giờ?



Kết quả **(TTT2 số 191)**

"VỤ ÁN" NGÀY CUỐI NĂM

Vì lời khai của cả bốn học sinh đều không đúng sự thật nên từ đó ta có thông tin đúng như sau:

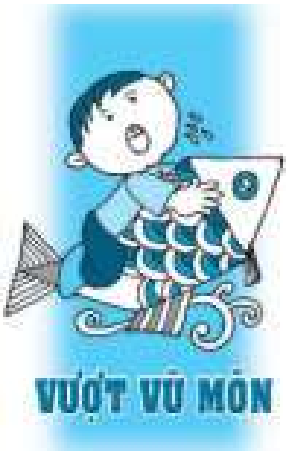
- Theo bạn Trần Văn An: Trong bốn bạn có người lấy tập kết quả thi. Khi An ra khỏi phòng, tập tài liệu đã mất.
- Theo bạn Nguyễn Văn Bình: Bình không phải là người thứ hai đi vào phòng thầy hiệu trưởng. Khi Bình vào phòng thầy hiệu trưởng, vẫn còn tập tài liệu trên mặt bàn.
- Theo bạn Hồ Anh Chinh: Chinh không phải là người thứ ba đi vào phòng. Khi Chinh rời khỏi phòng, tập tài liệu đã mất.
- Theo bạn Vi Văn Đức: Người lấy tập tài liệu vào phòng sau bạn Đức. Lúc Đức vào phòng, tập tài liệu vẫn còn.

Theo dữ liệu trên, Bình và Đức vào trước tiên vì khi đó tập tài liệu vẫn còn trên bàn. Vì Bình không vào thứ hai nên Bình phải vào phòng đầu tiên, sau đó đến Đức vào thứ hai. Do đó hai bạn An và Chinh vào sau, mà bạn Chinh không vào thứ ba nên bạn Chinh vào thứ tư, người vào trước đó là bạn An.

Mặt khác theo bạn Đức, người lấy tập tài liệu vào phòng sau bạn Đức. Do vậy người lấy cắp tập kết quả thi không ai khác chính là bạn Trần Văn An.

Thám tử Sê Lốc Cốc rất vui vì nhiều "thám tử Tuổi Hồng" cũng đưa ra lập luận để khẳng định thủ phạm là bạn An. Kì này thám tử Sê Lốc Cốc sẽ trao quà cho những bạn... thông minh nhất: *Nguyễn Phương Linh*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Đức Anh*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Nguyễn Phương Ngân*, 7D, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thế Quân*, 6B, *Trần Chí Đạt*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Thám tử Sê Lốc Cốc



SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

TRỊNH PHONG QUANG
GV. THCS Quảng Lạc, Nho Quan, Ninh Bình

Phương trình bậc hai một ẩn $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có nghiệm khi $\Delta\geq 0$. Sau đây là một số bài toán giải hệ phương trình có sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để tìm ra khoảng giá trị của một ẩn.

Bài toán 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x^2+1)y=4x\\ x^2-2x-y^3=-9.\end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}yx^2-4x+y=0 \quad (1)\\ x^2-2x-y^3+9=0. \quad (2)\end{cases}$$

• Nếu $y=0$ thì từ (1) suy ra $x=0$, thay vào (2) không thỏa mãn.

• Nếu $y\neq 0$, ta coi các phương trình (1) và (2) của hệ là phương trình bậc hai ẩn x.

Để phương trình (1) và (2) có nghiệm x thì

$$\begin{cases}\Delta'_1=4-y^2\geq 0\\ \Delta'_2=y^3-8\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leq y\leq 2\\ y\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow y=2.$$

Thay $y=2$ vào (1) và (2) ta được

$$\begin{cases}2x^2-4x+2=0\\ x^2-2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2xy-xz-zy=3\\ x^2+y^2-2xy-xz+zy=-1.\end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}(x+y)^2-z(x+y)+z^2-3=0\\ (x-y)^2-z(x-y)+1=0.\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$, khi đó $x=\dfrac{u+v}{2};y=\dfrac{u-v}{2}$.

Ta có $\begin{cases}u^2-zu+z^2-3=0 \quad (1)\\ v^2-zv+1=0 \quad\quad (2)\end{cases}$

Phương trình (1), (2) là phương trình bậc hai ẩn u và ẩn v có nghiệm khi

$$\begin{cases}\Delta_1\geq 0\\ \Delta_2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z^2\leq 4\\ z^2\geq 4\end{cases}\Leftrightarrow z^2=4\Leftrightarrow z=\pm 2.$$

• TH1. $z=2$ thay vào (1) và (2) ta được

$$\begin{cases}u^2-2u+1=0\\ v^2-2v+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u-1)^2=0\\ (v-1)^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u=v=1\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0.\end{cases}$$

• TH2. $z=-2$, thay vào (1), (2) ta được

$$\begin{cases}u^2+2u+1=0\\ v^2+2v+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+1)^2=0\\ (v+1)^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u=v=-1\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=0.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;0;2)$, $(-1;0;-2)$.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2y^2-2y+x^2=0 \quad (1)\\ x^3+2y^2-4y=-3. \quad (2)\end{cases}$$

Lời giải. • Nếu $x=0$ thì từ (1) suy ra $y=0$, thay vào (2) không thỏa mãn.

• Nếu $x\neq 0$, ta coi phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn y.

Để phương trình (1) có nghiệm thì

$$\Delta'=1-x^4\geq 0\Leftrightarrow x^4\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1. \quad (3)$$

Từ (2) ta có $x^3=-3-2y^2+4y$

$$=-1-2(y-1)^2\leq -1\Rightarrow x\leq -1. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $x=-1$.

Với $x=-1$ thay vào (1) và (2) ta được $y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y)=(-1;1)$.

Bài toán 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3 & (1)\\ (2z-y)(y+2)=9+4y & (2)\\ x^2+z^2=4x & (3)\\ z\ge 0. & (4)\end{cases}$$

Lời giải. Từ phương trình (2) ta có

$y^2+2y(3-z)+9-4z=0$. (5)

Ta coi phương trình (5) là phương trình bậc hai ẩn y. Để phương trình có nghiệm thì

$$\Delta'_5=(3-z)^2-(9-4z)=z^2-2z\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z\ge 2\\ z\le 0.\end{array}\right.$$

Mặt khác từ phương trình (3) ta có

$x^2-4x+z^2=0$. (6)

Ta coi phương trình (6) là phương trình bậc hai ẩn x. Để phương trình này có nghiệm thì

$\Delta'_6=4-z^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le z\le 2.$

Do đó $z=0$ hoặc $z=2$.

- TH1. $z=0$, thay vào hệ phương trình ta có

$$\begin{cases}y+2=(3-x)^3\\ y^2+6y+9=0\\ x(x-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y+2=(3-x)^3\\ y^2+6y+9=0\end{cases}\ (\text{I})\\ \begin{cases}x=4\\ y+2=(3-x)^3\\ y^2+6y+9=0\end{cases}\ (\text{II})\end{array}\right.$$

Hệ phương trình (I) vô nghiệm.

$$(\text{II})\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y+2=(3-x)^3\\ y^2+6y+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y+2=-1\\ (y+3)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-3.\end{cases}$$

- TH2. $z=2$, thay vào hệ phương trình ta có

$$\begin{cases}y+2=(3-x)^3\\ y^2+2y+1=0\\ x^2-4x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y; z) là $(4;-3;0)$, $(2;-1;2)$.

Bài toán 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^4+y^2=\dfrac{698}{81} & (1)\\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0. & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$(2)\Leftrightarrow x^2+(y-3)x+(y-2)^2=0$. (3)

Ta coi phương trình (3) là phương trình bậc hai ẩn x. Để phương trình (3) có nghiệm thì

$\Delta_3=(y-3)^2-4(y-2)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow -3y^2+10y-7\ge 0\Leftrightarrow 1\le y\le\dfrac{7}{3}.$

Mặt khác phương trình (2) được viết lại như sau

$y^2+(x-4)y+x^2-3x+4=0$. (4)

Ta coi phương trình (4) là phương trình bậc hai ẩn y. Để phương trình (4) có nghiệm thì

$\Delta_4=(x-4)^2-4(x^2-3x+4)\ge 0$

$\Leftrightarrow -3x^2+4x\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{4}{3}.$

Do đó $x^4+y^2\le\dfrac{256}{81}+\dfrac{49}{9}=\dfrac{697}{81}<\dfrac{698}{81}$ (Mâu thuẫn với (1)).

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x^2+y^2-2xy+2yz-2zx+1=0.\end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1 & (1)\\ (x-y)^2-2z(x-y)+1=0. & (2)\end{cases}$$

Từ phương trình (1) của hệ ta có

$z^2\le 1\Leftrightarrow |z|\le 1$. (3)

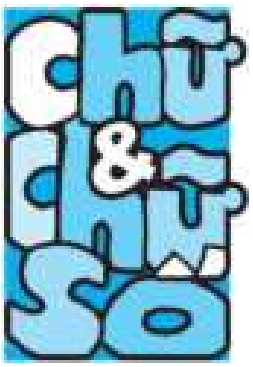
Ta coi phương trình (2) là phương trình bậc hai có ẩn là (x – y). Để phương trình này có nghiệm thì

$\Delta'_2=z^2-1\ge 0\Leftrightarrow z^2\ge 1\Leftrightarrow |z|\ge 1$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $|z|=1\Leftrightarrow z=\pm 1$.

- TH1. $z=1$ ta có $x=1$, $y=0$ hoặc $x=0$, $y=-1$.
- TH2. $z=-1$ ta có $x=-1$, $y=0$ hoặc $x=0$, $y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y; z) là (1; 0; 1); (0; –1; 1); (–1; 0; –1); (0; 1; –1).



Kì này **KÌ 40**

HA × HA × HA = HANOI

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số. Các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau.

NGUYỄN ĐOÀN VŨ

GV. THCS Minh Đức, Q. 1, TP. Hồ Chí Minh

Kết quả KÌ 38 (TTT2 số 191)

DAY × 7 = WEEK.

Dễ thấy Y ≠ 0 và Y ≠ 5; K ≠ 0 và K ≠ 5.

Cách 1. Vì DAY × 7 < 999 × 7 = 6993 nên 0 < W ≤ 6.

✻ **TH1.** W = 1 ta có DAY × 7 = 1EEK. Suy ra D = 1 (loại do W = 1) hoặc D = 2.

Với D = 2 ta có 2AY × 7 = 1EEK.

Do 1400 = 200 × 7 < 2AY × 7 = 1EEK < 299 × 7 = 2093 nên E chỉ có thể bằng một trong các số 4, 5, 6, 7, 8, 9.

* Cho E = 4 và thử 144K : 7 = 2AY với K = 3, 6, 7, 8, 9 ta được 1449 : 7 = 207.

* Cho E = 7 và thử 177K : 7 = 2AY với K = 3, 4, 6, 8, 9 ta được 1778 : 7 = 254.

* Cho E = 8 và thử 188K : 7 = 2AY với K = 3, 4, 6, 7, 9 ta được 1883 : 7 = 269.

* Cho E = 5; E = 6; E = 9 không cho đáp số.

✻ **TH2.** W = 2 cho 1 đáp số 2667 : 7 = 381.

✻ **TH3.** W = 3 cho 2 đáp số

3227 : 7 = 461; 3668 : 7 = 524.

✻ **TH4.** W = 4 cho 1 đáp số 4221 : 7 = 603.

✻ **TH5.** W = 5 cho 2 đáp số

5334 : 7 = 762; 5663 : 7 = 809.

✻ **TH6.** W = 6 cho 1 đáp số 6447 : 7 = 921.

Có tất cả 10 đáp số.

Cách 2.

✻ **TH1.** Y = 1. Khi đó K = 7.

Ta có DA1 × 7 = WEE7.

Cho A nhận giá trị 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Các giá trị của E, D, W được cho trong bảng sau

A	0	2	3	4	5	6	8	9
E	0(loại)	4	1(loại)	8	5(loại)	2	6	3
D		9		8(loại)		4	3	1(loại)
W		6				3	2	

Trường hợp này có 3 nghiệm: 921 × 7 = 6447; 461 × 7 = 3227; 381 × 7 = 2667.

Tương tự xét các trường hợp Y = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 ta cũng có 10 đáp số như trong cách giải 1.

Nhận xét. Kì này không có bạn nào được nhận quà.

TTT





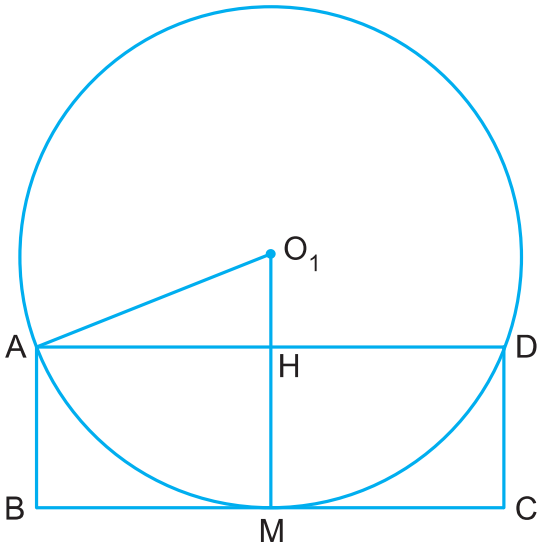
Kì này CÓ CHẮC HAY KHÔNG?

Bài toán. Hồng vẽ hình thang cân ABCD (BC // AD) có $\hat{A} = \hat{D} = 45^\circ$, $AB = BC = CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tia MN cắt tia AB ở E. Bạn Hà khẳng định chắc chắn $MN < 2NE$. Hỏi Hà nói đúng hay sai? Vì sao?

PHẠM TUẤN KHẢI *(Hà Nội)*

Kết quả **(TTT2 số 191)**

CÓ HAY KHÔNG GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT?



Đặt AB = a, BC = b, ta có a + b = k.

Nối O_1M cắt AD tại H. Dễ thấy tứ giác ABMH là hình chữ nhật có $AB = a$, $BM = \frac{b}{2} = AH$.

Trong tam giác vuông AHO_1 ta có

$$AO_1^2 = AH^2 + O_1H^2$$

$$\Leftrightarrow R_1^2 = \frac{b^2}{4} + (R_1 - a)^2.$$

Suy ra $R_1 = \frac{b^2 + 4a^2}{8a}$.

Tương tự ta có $R_2 = \frac{a^2 + 4b^2}{8b}$.

Từ đó suy ra

$$R_1 + R_2 = \frac{b^2 + 4a^2}{8a} + \frac{a^2 + 4b^2}{8b}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + 4ab(a+b)}{8ab}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2 + 3ab + b^2)}{8ab}$$

$$= \frac{(a+b)((a-b)^2 + 5ab)}{8ab}$$

$$\geq \frac{(a+b)5ab}{8ab} = \frac{5(a+b)}{8} = \frac{5k}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $R_1 + R_2$ là $\frac{5k}{8}$ khi $a = b = \frac{k}{2}$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt được thưởng: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Nguyễn Ngọc Phước*, 9G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

VŨ ĐÌNH HÒA



Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(191). Cho số

$M = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 99^{99} + 100^{100}$.

Chứng minh rằng số M có 201 chữ số và tính tổng hai chữ số đầu tiên của số M.

Lời giải. $M = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 99^{99} + 100^{100}$.

Ta có $100^{100} < M$

$< 100^1 + 100^2 + 100^3 + ... + 100^{99} + 100^{100}$

Suy ra $\underbrace{100...0}_{201\ c/s} < M < \underbrace{10101...0100}_{201\ c/s}$.

Ta có M là số có 201 chữ số và hai chữ số đầu tiên bên trái của số M là 10 nên tổng của hai chữ số này là 1.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt, được khen: *Đinh Lê Vinh*, *Nguyễn Việt Hoàng*, 6C; *Nguyễn Thế Dũng*, 7C, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ, **Phú Thọ**; *Trần Thảo Vân*, 6A; *Trần Tuấn Anh*, *Nguyễn Ngọc Trâm*, 7C; *Võ Thị Phương Thảo*, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Trần Kiên*, 6C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**; *Nguyễn Gia Bảo*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Danh Tiến Nam*, 7C, *Thái Khắc Hoàng*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

PHÙNG KIM DUNG

Bài 2(191). Cho

$S = \frac{1}{2018}\left(\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + ... + \frac{2019}{2018}\right)$.

Chứng minh rằng S không là số tự nhiên.

Lời giải. Ta có

$1 < \frac{2}{1} \le 2;\ 1 < \frac{3}{2} < 2;\ 1 < \frac{4}{3} < 2; ...; 1 < \frac{2019}{2018} < 2$

$\Rightarrow 2018 < \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + ... + \frac{2019}{2018} < 2018.2$

$\Rightarrow 1 < \frac{1}{2018}.\left(\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + ... + \frac{2019}{2018}\right) < 2$

$\Rightarrow 1 < S < 2$.

Vậy S không phải là số tự nhiên.

Nhận xét. Có nhiều bạn gửi bài đến tòa soạn và có lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn, đầy đủ, chính xác và sạch đẹp: *Hoàng Nguyễn Mai Sương*, *Nguyễn Công An*, *Phạm Trọng Toàn*, *Hoàng Quỳnh Trang*, *Thái Huyền Trang*, 7C, *Nguyễn Văn Thắng*, *Phan Đăng Huân*, 7D, *Nguyễn Đức Học*, *Lê Văn Quang Hiếu*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Phan Khánh An*, 7A, *Đồng Quốc Khánh*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Lê Đức Mạnh*, 6C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**; *Nguyễn Xuân Duy*, 7E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Đoàn Khánh Duy*, 6B, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ; *Nguyễn Sơn Hải*, 6A5, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Hoàng Công Hiếu*, *Nguyễn Đức Anh*, 7A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**.

LÊ ĐỨC THUẬN

Bài 3(191). Tìm các số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{(a+1)b}$, $\overline{(b+1)a}$ là các số nguyên tố có hai chữ số.

Lời giải. Vì $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{(a+1)b}$, $\overline{(b+1)a}$ đều là các số nguyên tố có hai chữ số nên a, b đều là các số lẻ khác 5 và 9.

Suy ra $a,b \in \{1;3;7\}$.

Do đó $\overline{ab} \in \{13;31;17;71;37;73\}$.

Thử lại thấy $\overline{ab} \in \{13;31;37;73\}$ thỏa mãn.

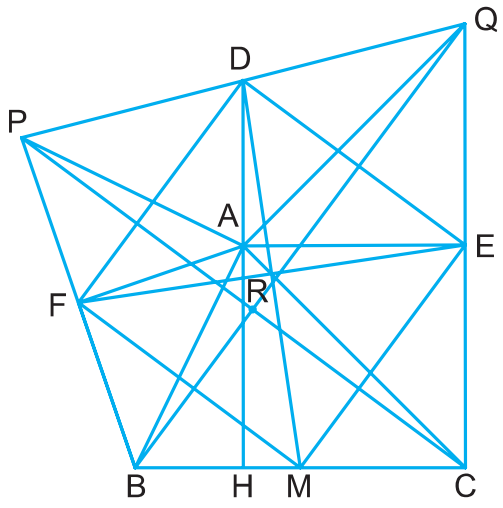
Vậy $\overline{ab} \in \{13;31;37;73\}$.

Nhận xét. Có nhiều bạn tham gia giải bài, hầu hết các bạn giải bài đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Anh Thư*, 6C, THCS Cao Mại, Lâm Thao; *Nguyễn Thế Dũng*, 7C, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ, **Phú Thọ**; *Trần Thảo Vân*, 6A; *Trần Gia Huy*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Hằng Nga*, 6D; *Hoàng Nguyễn Mai Sương*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Gia Bảo*, 6B; *Ngô Thị An Bình*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Hồ Trung Hiếu*, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**; *Lê Đức Mạnh*, 6C1, THCS Archimedes Academy; *Nguyễn Xuân Bách*, 7A1, THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội**.

CAO VĂN DŨNG

Bài 4(191). Cho tam giác nhọn ABC. Dựng ra phía ngoài ΔABC các tam giác ACE và ABF thứ tự vuông cân tại E và F. Dựng tam giác DEF vuông cân tại D sao cho A và D cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng EF. Chứng minh rằng AD vuông góc với BC.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC. Dựng ΔABP vuông cân tại A (P thuộc nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C); ΔACQ vuông cân tại A (Q thuộc nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B).

Khi đó AP = AB, AC = AQ, $\widehat{PAC} = \widehat{BAQ}$

$(= 90^o + \widehat{BAC}) \Rightarrow \Delta PAC = \Delta BAQ$ (c.g.c).

Suy ra PC = BQ và $\widehat{ACP} = \widehat{AQB}$.

Gọi R là giao điểm của AC và BQ. Ta có $\widehat{AQB} + \widehat{ARQ} = 90^o$. Suy ra PC ⊥ BQ.

Vì MF, ME lần lượt là đường trung bình của ΔBPC, ΔCQB nên

$$MF = \frac{1}{2}PC,\ ME = \frac{1}{2}BQ.$$

Từ đó ta thấy ΔMEF vuông cân tại M. Kết hợp với ΔDEF vuông cân tại D, suy ra ΔEMD vuông cân tại E.

Xét ΔEAD và ΔECM có

ED = EM; EA = EC, $\widehat{DEA} = \widehat{MEC}$ (cùng phụ với $\widehat{AEM}$) nên $\Delta EAD = \Delta ECM$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{DAE} = \widehat{ECM}$.

Gọi H là giao điểm của DA và BC. Ta có

$$\widehat{HAC} = 180^o - \widehat{CAE} - \widehat{DAE} = 135^o - \widehat{ECM}$$

$$= 135^o - 45^o - \widehat{ACH} = 90^o - \widehat{ACH}.$$

Suy ra $\widehat{HAC} + \widehat{ACH} = 90^o$, hay AD ⊥ BC.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Duy Khôi Nguyên*, 7G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**.

HỒ QUANG VINH

Bài 5(191). Cho các số thực x, y thỏa mãn

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1948 \\ (x+y)(x+1)(y+1) = 2017. \end{cases}$$

Tính x + y.

Lời giải. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1948 \\ (x+y)(x+1)(y+1) = 2017 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 1948 \\ (x+y)[xy + (x+y) + 1] = 2017. \end{cases}$$

Đặt $x + y = a, xy = b$ ta có

$$\begin{cases} a^3 - 3ab = 1948 \\ a(a+b+1) = 2017. \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^3 - 3ab + 3a(a+b+1) = 1948 + 3.2017$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^3 = 8000 \Leftrightarrow a = 19.$$

Vậy x + y = 19.

Nhận xét. Đây là bài toán biến đổi đại số khá quen thuộc về hệ đối xứng, hầu hết các bạn học sinh đều có lời giải theo hướng này, đặt $x + y = a$, $xy = b$ và biến đổi về hệ mới ẩn a và b sẽ dễ giải quyết hơn hệ ban đầu. Ngoài cách giải trên, có một số bạn vận dụng hằng đẳng thức $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$ để giải quyết bài toán đã cho và có lời giải đúng, tuy nhiên cần phải chứng minh đẳng thức đó mới được vận dụng. Có nhiều bạn gửi bài đến tòa soạn, hầu hết các bạn đều có lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải đúng, trình bày tốt: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS-THPT Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 8A5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Hữu Tuấn Anh*, 6C; *Nguyễn Tiến Tuân*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; *Lê Thanh Vinh*, 9A1; *Lê Ánh Nguyệt*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Bắc Ninh**; *Trịnh Duy Đạt*, 8B; *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; *Trịnh Duy Minh*, 9C, THCS Trần Mai Ninh, TP.Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Thái Minh Dũng*, 9B; *Nguyễn Ngọc Phước*, 9G; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 9E; *Bùi Hà Linh*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Phạm Ngọc Trinh*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Võ Thành Nam*, 7C, Trần Trọng Huy, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Kiều Đình Hải*, 9A; *Nguyễn Văn Dương Hùng*, 9B, THCS Lý NHật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Kim Anh Hùng*, 8A1, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Sơn Hải*, 6A5; *Vũ Đình Hoàng*, 8A3, *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; *Trần Minh Khôi*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Nguyễn Thế Dũng*, 7C, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ; *Trần Thị Yến Khanh*, 8A3; *Đặng Thái Tuấn*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Thạch Đức Tùng*, 9A, THCS Cao Mại; *Nguyễn Tuấn Đạt*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ**; *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; *Nguyễn Lương Uy*, 8C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài 6(191). Giả sử a và b là hai số thực sao cho phương trình $x^4 + ax^3 + 3x^2 + 2bx + 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

Chứng minh rằng $a^2 + 2b^2 \geq 12$.

Lời giải. Gọi t là nghiệm thực của phương trình đã cho. Dễ thấy $t \neq 0$.

Ta có $t^4 + at^3 + 3t^2 + 2bt + 2 = 0$

$\Leftrightarrow -(at^3 + 2bt) = t^4 + 3t^2 + 2$

$\Rightarrow (at^3 + 2bt)^2 = (t^4 + 3t^2 + 2)^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$(at^3 + 2bt)^2 \leq (a^2 + 2b^2)(t^6 + 2t^2)$

$\Rightarrow (t^4 + 3t^2 + 2)^2 \leq (a^2 + 2b^2)(t^6 + 2t^2)$.

Suy ra

$$a^2 + 2b^2 \geq \frac{(t^4 + 3t^2 + 2)^2}{t^6 + 2t^2} = \frac{\left[(t^4 + 2) + 3t^2\right]^2}{t^2(t^4 + 2)}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\left[(t^4 + 2) + 3t^2\right]^2 \geq 4 \cdot (t^4 + 2) \cdot 3t^2 = 12t^2(t^4 + 2)$$

$$\Rightarrow \frac{\left[(t^4 + 2) + 3t^2\right]^2}{t^2(t^4 + 2)} \geq 12 \Rightarrow a^2 + 2b^2 \geq 12.$$

Nhận xét. Ý tưởng then chốt trong lời giải trên là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để có sự xuất hiện của $a^2 + 2b^2$.

Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này với nhiều cách khác nhau: tách hằng đẳng thức, chia hai vế của phương trình cho x^2 rồi sử dụng biệt thức Delta, sử dụng định lý Bezout, … Trong đó, lời giải của bạn *Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh** là ngắn gọn và đặc sắc hơn cả. Bạn *Chi* nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, sau đó viết lại phương trình dưới dạng

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2+2\left(\frac{bx}{2}+1\right)^2=\frac{(a^2+2b^2-12)x^2}{4}$$

và thu được kết quả. Ngoài bạn *Chi*, các bạn sau cũng có lời giải đúng: *Lê Danh Vinh*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Cao Kỳ Anh*, *Nguyễn Hoàng Minh Đức*, *Trịnh Hoàng Hải*, *Trần Hằng Linh*, *Nguyễn Trường Minh*, *Đỗ Hoàng Nhật Nam*, *Nguyễn Minh Phương*, *Dương Hồng Sơn*, *Ngô Hà Trang*, *Nguyễn Lương Uy*, 8C1, THCS Archimedes Academy, Cầu Giấy; *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội**; *Lê Văn Quang Trung*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Mạnh Hùng*, *Trương Đức Tài*, 8A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; *Phạm Minh Hải*, *Tạ Huy Hiệu*, *Nguyễn Công Hùng*, *Hà Minh Nhật*, *Đặng Thái Tuấn*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Trần Minh Khôi*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.

VÕ QUỐC BÁ CẨN

Bài 7(191). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}=\sqrt{xyz}+2.\end{cases}$$

Lời giải. ĐKXĐ $x,y,z\ge 0$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $z=\min\{x,y,z\}$.

✻ Xét $z\le y\le x\Rightarrow(\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{x})\le 0$.

Do đó ta có

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}-\sqrt{xyz}$$
$$=(x\sqrt{y}+z\sqrt{y})+(y\sqrt{z}+z\sqrt{x}-z\sqrt{y}-\sqrt{xyz})$$
$$=\sqrt{y}(x+z)+\sqrt{z}(\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{x})\le\sqrt{y}(x+z).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{y}(x+z)=2\sqrt{y.\frac{x+z}{2}.\frac{x+z}{2}}$$
$$\le 2\sqrt{\left(\frac{y+\frac{x+z}{2}+\frac{x+z}{2}}{3}\right)^3}=2\sqrt{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3}=2.$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}-\sqrt{xyz}\le 2$$
$$\Rightarrow x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}\le\sqrt{xyz}+2$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ \sqrt{z}(\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{x})=0\\ y=\dfrac{x+z}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=z=1\\ z=0,y=1,x=2\end{array}\right.$$

✻ Xét $z\le x\le y\Rightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})\le 0$.

Biến đổi tương tự trường hợp trên ta được

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}-\sqrt{xyz}\le\sqrt{x}(y+z)\le 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ \sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{z})=0\\ y=\dfrac{x+z}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=y=z=1.$$

Tương tự với các trường hợp y, z là số nhỏ nhất, ta có tập nghiệm của hệ phương trình trên là $S=\{(1;1;1),(2;1;0),(1;0;2),(0;2;1)\}$.

Nhận xét. Các bạn học sinh cần khéo léo để chứng minh được vế trái của phương trình thứ hai trong hệ luôn nhỏ hơn hoặc bằng vế phải. Hầu hết các bạn gửi bài về đều làm được điều này, tuy nhiên nhiều bạn lại quên rằng x, y, z chỉ có vai trò bình đẳng trong các hoán vị của chúng, do đó hệ phương trình chỉ có 4 nghiệm. Các bạn có lời giải tốt: *Lê Ngọc Tùng,* 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; *Dương Hồng Sơn,* 8C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**; *Đặng Thái Tuấn*, *Phạm Minh Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Trần Minh Khôi*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.

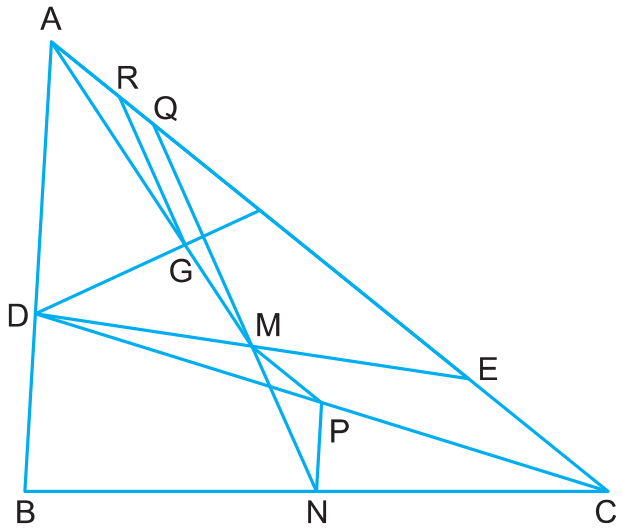
BÙI MẠNH TÙNG

Bài 8(191). Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC). Các điểm D và E thứ tự thuộc các cạnh AB và AC sao cho BD = CE. Chứng minh rằng

trọng tâm G của tam giác ADE thuộc một đoạn thẳng cố định khi D và E di chuyển trên AB và AC.

Lời giải. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của DE, BC, CD.

Theo tính chất đường trung bình dễ thấy $MP = \frac{CE}{2} = \frac{BD}{2} = PN$.



Suy ra tam giác PMN cân tại P. (1)

Cũng từ tính chất đường trung bình thì MP // CE và NP // BD, mà các đường thẳng BD và CE cố định nên $\widehat{MNP}$ không đổi.

Kết hợp với (1) dẫn tới $\widehat{PMN}$ không đổi. (2)

Gọi MN cắt AC tại Q. Do MP // CE nên $\widehat{NQC} = \widehat{PMN}$, góc này không đổi theo (2), kết hợp N cố định ta được đường thẳng NQ cố định và Q cũng cố định.

Lấy R thuộc đoạn thẳng AQ sao cho $AR = \frac{2}{3}AQ$ thì R cố định. Gọi G là trọng tâm tam giác ADE thì $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} = \frac{AR}{AQ}$.

Từ đây RG // QM nói cách khác G nằm trên đường thẳng cố định đi qua R song song với QN.

Nhận xét. Những bài chứng minh điểm thuộc một đường cố định thực chất là phần thuận của một bài toán quỹ tích. Bài toán này áp dụng trực tiếp một tính chất quen thuộc của tứ giác có hai cạnh đối bằng nhau. Các bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Công Hùng*, *Đặng Thái Tuấn*, *Hà Minh Nhật*, 9A3, THCS Lâm Thao; *Trần Minh Khôi*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Lê Minh Hoàng, Đinh Mai Chi*, *Dương Hồng Sơn*, *Nguyễn Hoàng Minh Đức*, *Nguyễn Minh Phương*, *Nguyễn Lương Vy*, *Ngô Hà Trang*, *Nguyễn Lương Uy*, *Nguyễn Quang Thái*, *Đỗ Hoàng Nhật Nam*, 8C1, THCS Archimedes Academy; *Trần Quý Dương*, 8A, THCS Thạch Thất, Thạch Thất, **Hà Nội**; *Trần Trung Thành*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Như Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, *Nguyễn Ngọc Phước*, 9G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

TRẦN QUANG HÙNG

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Nguyễn Anh Thư, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; *Dương Hồng Sơn*, *Ngô Hà Trang*, 8C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**; *Trần Minh Khôi*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Nguyễn Thế Dũng*, 7C, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ, **Phú Thọ**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 8A5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Như Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Lê Danh Vinh*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Đức Anh*, 7A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Duy Khôi Nguyên*, 7G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM SÁU MƯƠI MỐT

Người thách đấu: *Cao Minh Quang*, GV. THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.

Bài toán thách đấu: Giải phương trình $2x^2+1=\sqrt{\dfrac{4x^4-4\sqrt{2}x+5}{1-x^2}}$.

Thời hạn: Trước ngày 08.4.2019 theo dấu bưu điện.

Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI CHÍN (TTT2 số 191)

Đề bài. Tìm các cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn $7pq^2 + p = q^3 + 43p^3 + 1$.

Lời giải. Giả sử p, q là các số nguyên tố thỏa mãn bài toán, tức là

$7pq^2 + p = q^3 + 43p^3 + 1$.

Ta có nhận xét sau:

Hai số p, q không thể cùng là các số lẻ (vì nếu p, q là các số lẻ thì $7pq^2 + p$ là các số chẵn và $q^3 + 43p^3 + 1$ là số lẻ).

Hai số p và q không bằng nhau (vì nếu p = q ta suy ra $1 \vdots p$, mâu thuẫn với $p \geq 2$).

Do đó trong hai số nguyên tố p, q thì có một số bằng 2 và một số là lẻ.

Suy ra $7pq^2$ và $q^3 + 43p^3 + 1$ là các số chẵn.

Do đó p là số chẵn, suy ra p = 2.

$\Rightarrow 14q^2 + 2 = q^3 + 344 + 1$

$\Rightarrow q^2(14 - q) = 343 = 7^3$.

Kết hợp với q là số nguyên tố ta suy ra q = 7.

Vậy có duy nhất một cặp các số nguyên tố (p, q) thỏa mãn bài toán là p = 2, q = 7.

Nhận xét. Có nhiều võ sĩ tham gia trận đấu tuy nhiên lời giải chưa được chuẩn xác và chặt chẽ. Võ sĩ có lời giải chặt chẽ, gọn gàng nhất (không cần xét trường hợp q = 2) là võ sĩ được đăng quang trong trận đấu này: *Ngô Thị An Bình*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

LỜI GIẢI ĐỀ THI... (Tiếp theo trang 27)

Bài 5. a) Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(ab+bc+ca)$$
$$\geq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(ab+bc+ca)\geq 9.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM vào vế trái ta được

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(ab+bc+ca)$$
$$\geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+2(ab+bc+ca)$$
$$=\frac{3}{abc}+(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{abc}(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)}$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{abc}\cdot 3abc(a+b+c)}=9.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) Rõ ràng sau mỗi bước thực hiện tổng các số trên đường tròn tăng gấp đôi.

Suy ra sau 100 bước, tổng của 25 số nhận được là $2^{100}\left[12.1+13.(-1)\right]=-2^{100}$.

Do đó trong 25 số này có một số có giá trị không vượt quá $\dfrac{-2^{100}}{25}$.

Ta có $\dfrac{-2^{100}}{25}<-10^{28} \Leftrightarrow 25.10^{28}<2^{100}$

$\Leftrightarrow 5^2.2^{28}.5^{28}<2^{100}$

$\Leftrightarrow 5^{30}<2^{72} \Leftrightarrow (5^5)^6<(2^{12})^6$

$\Leftrightarrow 5^5<2^{12} \Leftrightarrow 3125<4096$. (luôn đúng)

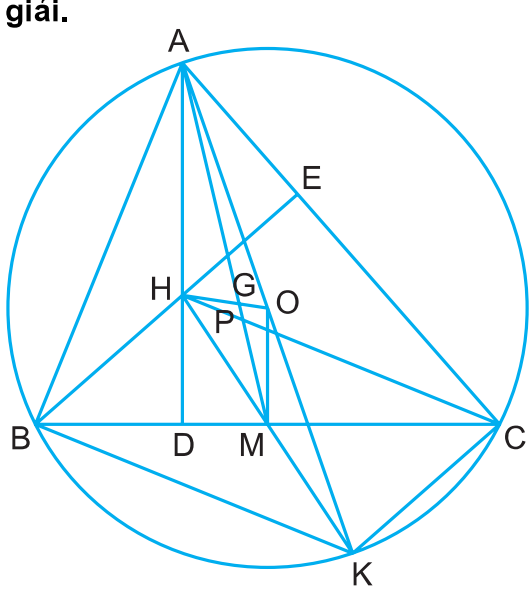
TỪ MỘT SỐ BÀI TOÁN QUEN THUỘC ĐẾN BÀI TOÁN THI VMO NĂM 2019

NGUYỄN ĐĂNG KHOA
GV. THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ

Kì thi chọn học sinh giỏi cấp Quốc gia môn Toán dành cho học sinh Trung học phổ thông VMO (Vietnam Mathematical Olympiad) được tổ chức hàng năm. Kì thi năm nay được diễn ra trong hai ngày 13.01 và 14.01.2019. Trong đề thi ngày đầu tiên xuất hiện một bài hình khá thú vị, qua bài viết này chúng tôi muốn trình bày bài toán đó bằng kiến thức ở THCS. Để tìm lời giải bài toán đó trước hết ta xét các bài toán sau:

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H và trọng tâm G. Chứng minh rằng ba điểm H, G, O thẳng hàng và HG = 2GO (G nằm giữa O và H). *(Đường thẳng Euler).*

Lời giải.



Vẽ các đường cao AD và BE của tam giác ABC cắt nhau tại H, vẽ đường kính AK của đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\overset{\frown}{ABK} = \overset{\frown}{ACK} = 90^\circ$.

Từ đó BE $\perp$ AC, KC $\perp$ AC.

Do đó BH // KC.

Chứng minh tương tự ta được CH // KB.

Suy ra tứ giác BHCK là hình bình hành.

Do đó M là trung điểm của HK.

Từ đó suy ra OM là đường trung bình của tam giác AHK.

Do đó OM // AH, AH = 2OM.

Gọi P là giao điểm của OH và AM.

Theo hệ quả của định lí Thales ta có

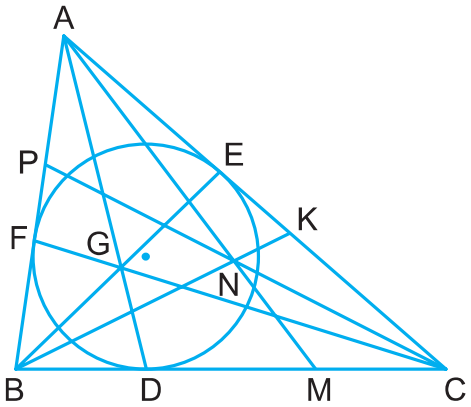
$$\frac{AP}{PM} = \frac{AH}{OM} = 2 \Rightarrow AP = 2PM \Rightarrow AP = \frac{2}{3}AM.$$

Do đó P trùng với G.

Vậy ba điểm H, G, O thẳng hàng và HG = 2GO.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại M, K, P. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy tại G và AM, BK, CP đồng quy tại N *(G gọi là điểm Gergone, N gọi là điểm Nagel).*

Lời giải.



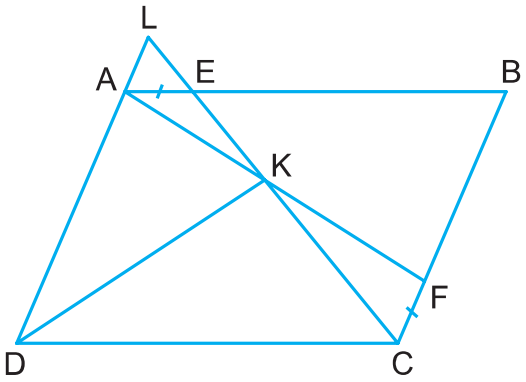
Ta dễ dàng chứng minh AP = BF = BD = CM, AF = BP = AE = CK, CE = CD = BM = AK.

Do đó $\frac{AF}{BF}.\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}=1;\ \frac{AP}{BP}.\frac{BM}{CM}.\frac{CK}{AK}=1.$

Theo định lí Ceva thì AD, BE, CF đồng quy tại G và AM, BK, CP đồng quy tại N.

Bài toán 3. Cho hình bình hành ABCD, trên cạnh AB, BC lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho AE = CF. Gọi K là giao điểm của AF, CE. Chứng minh rằng DK là tia phân giác của $\widehat{ADC}$.

Lời giải.



Gọi L là giao điểm của AD và CE.

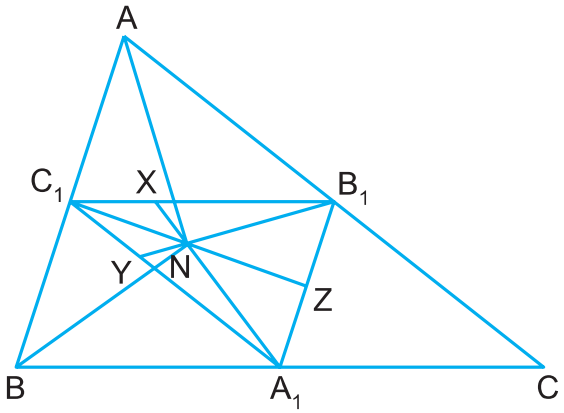
Áp dụng định lí Thales ta có

$\frac{LD}{DC}=\frac{LA}{AE}=\frac{LA}{CF}=\frac{LK}{KC}.$

Từ đó suy ra DK là tia phân giác của $\widehat{ADC}$.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC. Gọi trung điểm của BC, AC, AB lần lượt là A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng điểm Nagel của tam giác $A_1B_1C_1$ đồng thời là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.



Gọi X, Y, Z lần lượt là tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A_1, B_1, C_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ với các cạnh B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1. Gọi N là điểm Nagel của tam giác $A_1B_1C_1$.

Ta dễ dàng chứng minh $C_1Y = B_1Z$.

Áp dụng bài toán 3 ta có AN là tia phân giác $\widehat{BAC}$.

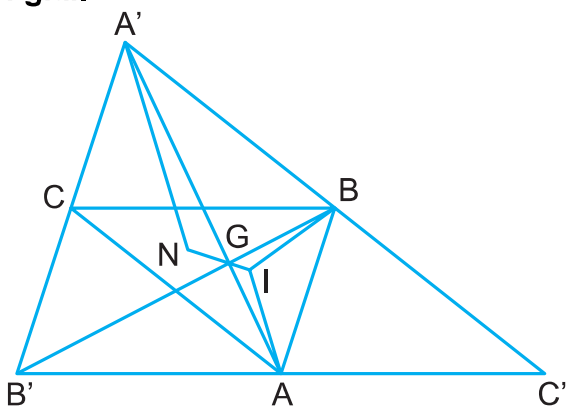
Chứng minh tương tự thì ta được BN là tia phân giác $\widehat{ABC}$.

Vậy N là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Nhận xét. *Tam giác $A_1B_1C_1$ được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC (tam giác median) và ngược lại tam giác ABC là tam giác anti-median của tam giác $A_1B_1C_1$.*

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I, trọng tâm G và điểm Nagel là N. Chứng minh rằng ba điểm I, G, N thẳng hàng và GN = 2GI *(G nằm giữa N và I)*.

Lời giải.

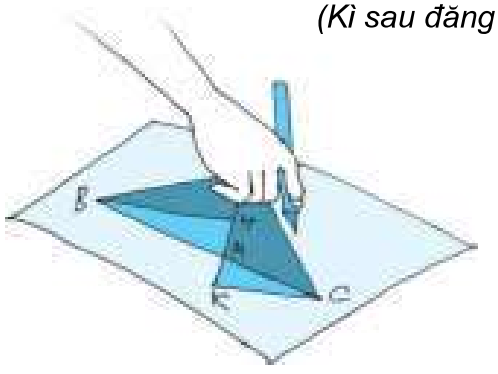


Gọi tam giác A'B'C' là tam giác anti-median của tam giác ABC.

Khi đó G, N lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp của tam giác A'B'C'.

Suy ra $\Delta AGI \backsim \Delta A'GN$ nên ba điểm I, G, N thẳng hàng và $\frac{GN}{GI}=\frac{GA'}{GA}=2.$

(Kì sau đăng tiếp)





LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

PHẠM VĂN CHIẾN
GV. THCS Xuân Phong, Xuân Trường, Nam Định

Bài toán. Cho phương trình bậc hai ẩn x

$x^2 + 6x + 6m - m^2 = 0$. (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - 8x_1 = x_2$.

Lời giải. Ta có $\Delta' = 9 - 6m + m^2 = (m - 3)^2$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Khi đó $x_1 = -3 + m - 3 = m - 6$,

$x_2 = -3 - m + 3 = -m$.

Thay $x_1 = m - 6$; $x_2 = -m$ vào $x_1^2 - 8x_1 = x_2$ ta được $(m - 6)^2 - 8(m - 6) = -m$.

$\Leftrightarrow m^2 - 19m + 84 = 0$

$\Leftrightarrow m_1 = 12$; $m_2 = 7$ (thỏa mãn $m \neq 3$).

Vậy m = {7; 12} là các giá trị cần tìm.

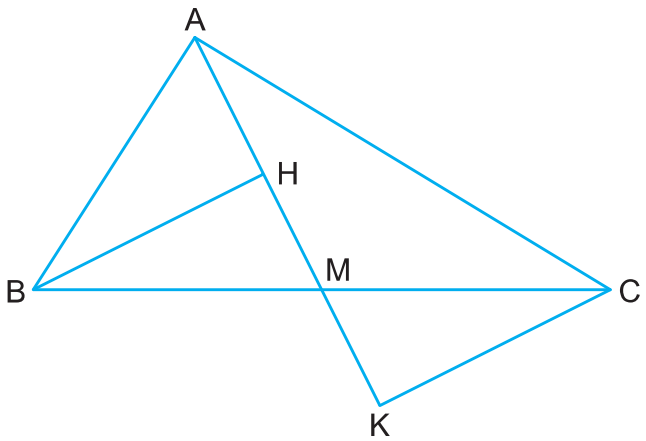
Các bạn có ý kiến gì về lời giải trên?

Kết quả **(TTT2 số 191)**

BẠN SẼ NÓI GÌ?

Bài toán này có hai cách giải, cách giải 1 là cách giải thông thường và đã chặt chẽ, còn cách giải 2 cần xét đủ các trường hợp thì lời giải sẽ đẹp và chặt chẽ hơn, đó là cần xét 3 trường hợp sau:

✻ **TH1.** AB < AC.



Kẻ BH ⊥ AM tại H, CK ⊥ AM tại K. Ta có điểm H nằm giữa điểm A và điểm M.

Xét tam giác HBM ($\widehat{BHM} = 90^o$) và tam giác KCM ($\widehat{CKM} = 90^o$) có BM = MC (vì AM là trung tuyến), $\widehat{HMB} = \widehat{KMC}$ (đối đỉnh).

Do đó ΔHBM = ΔKCM (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra HM = KM.

Ta có AB > AH (vì AH ⊥ BH), AC > AK (vì AK ⊥ CK).

Do đó AB + AC > AH + AK

= AM – HM + AM + KM = 2AM.

✻ **TH2.** AB = AC, khi đó H và K trùng M.

✻ **TH3.** AB > AC, điểm M và K đổi vị trí cho nhau, lời giải tương tự như TH1.

Nhận xét. Một số học sinh không để ý 2 trường hợp còn lại, một vài bạn khác cho rằng cách 2 sai ở chỗ "trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông là cạnh huyền - góc nhọn không được ghi là G.C.G", thực ra bản chất là một, do trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

Bạn có lời giải tốt được thưởng kì này là *Nguyễn Ngân Giang*, 9A, THCS Sơn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**.

VI MẠNH TƯỜNG

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9

THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Năm học 2018 - 2019

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(5,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

2. Cho $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)...\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$ là một tích của 2019 thừa số. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Bài 2. *(5,0 điểm)*

1. Biết a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9. Chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

2. Tìm các số nguyên n sao cho $9^n + 11$ là tích của k ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) số tự nhiên liên tiếp.

Bài 3. *(3,0 điểm)*

1. Cho x, y, z là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}, \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}, \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

2. Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca - abc$.

Bài 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi S là giao điểm của AI và DE.

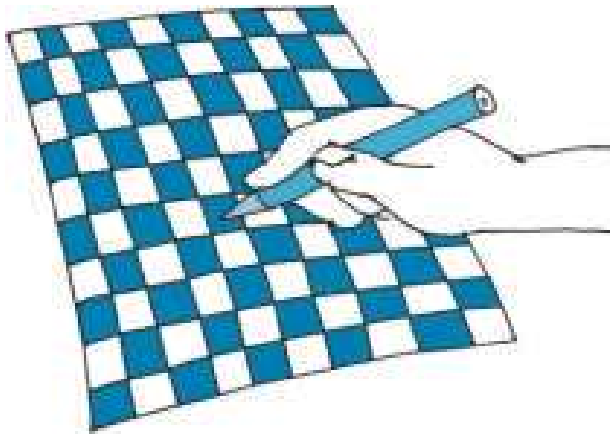
1. Chứng minh tam giác IAB đồng dạng với tam giác EAS.

2. Gọi K là trung điểm của AB, O là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm K, O, S thẳng hàng.

3. Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh AM = AN.

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Xét bảng ô vuông cỡ 10 × 10 gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kì đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần.



HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI THPT CHUYÊN

Năm học 2019 - 2020

Môn thi: Toán

(Đề đăng trên TTT2 số 192 + 193)

Bài 1. a) $a+b+c+\sqrt{abc}=4$

$\Leftrightarrow 4a+4b+4c+4\sqrt{abc}=16$

$\Rightarrow \sqrt{a(4-b)(4-c)}=\sqrt{a(16-4b-4c+bc)}$

$=\sqrt{a(4a+4b+4c+4\sqrt{abc}-4b-4c+bc)}$

$=\sqrt{a(4a+4\sqrt{abc}+bc)}$

$=\sqrt{a(2\sqrt{a}+\sqrt{bc})^2}=\sqrt{a}(2\sqrt{a}+\sqrt{bc})$

$=2a+\sqrt{abc}.$

Tương tự

$\sqrt{b(4-c)(4-a)}=2b+\sqrt{abc},$

$\sqrt{c(4-a)(4-b)}=2c+\sqrt{abc}$

$\Rightarrow A=2(a+b+c+\sqrt{abc})+\sqrt{abc}=8+\sqrt{abc}.$

b) Ta có

$\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{12\sqrt{14}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{14x}}-\frac{1}{\sqrt{14y}}=\frac{1}{168}.$ (1)

$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{14x}=\frac{1}{14y}+\frac{2}{168\sqrt{14y}}+\frac{1}{168^2}.$

Vì vậy $\sqrt{14y}$ là số hữu tỉ, lập luận tương tự ta được $\sqrt{14x}$ là số hữu tỉ.

Đặt $x=14a^2, y=14b^2$ $(a,b\in\mathbb{N}^*)$ thay vào (1) ta được $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow a=\frac{12b}{b+12}=12-\frac{144}{b+12}.$

Do đó

$b+12\mid 144\Rightarrow b\in\{4,6,12,24,36,60,132\}$

$\Rightarrow a\in\{3,4,6,8,9,10,11\}.$

Vậy có tất cả 7 cặp (x; y) thỏa mãn đề bài.

Bài 2. a) Ta xét tích của năm số đã cho

$T=n(n^2+10)(n^2-2)(n^3+6)(n^3+36)$

$=n(n^2-4+14)(n^2-9+7)(n^3-1+7)(n^3+1+35)$

$=n(n^2-4)(n^2-9)(n^3-1)(n^3+1)+7M, (M\in\mathbb{Z}).$

$=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)N+7M,$

$(N, M\in\mathbb{Z}).$

Từ đây ta thấy T chia hết cho 7 suy ra một trong năm số đã cho phải bằng 7. Do $n^2+10>7$, $n^3+36>7$.

✻ TH1. $n=7$ (thỏa mãn).

✻ TH2. $n^3+6=7\Rightarrow n=1$ (không thỏa mãn).

✻ TH3. $n^2-2=7\Rightarrow n=3$ khi đó $n^3+6=33$ không là số nguyên tố (loại).

Vậy $n=7$.

b) $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ mx+y=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-(m-1)x\\ mx+2-(m-1)x=m+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-(m-1)x\\ x=m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-m^2+2m+1\\ x=m-1.\end{cases}$

Vậy với mọi m, hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=m-1\\ y=-m^2+2m+1.\end{cases}$

Ta có $2x+y-3=2(m-1)-m^2+2m+1-3$

$=-m^2+4m-4=-(m-2)^2\le 0.$

Bài 3. a) Điều kiện $x\ge 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x^2+4x-12})$

$=(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2})$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+4x-12}=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}.$ (1)

(do $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}>0$).

Đặt $\sqrt{x+6}=a;\sqrt{x-2}=b, (a\ge 2\sqrt{2};b\ge 0).$

Phương trình (1) tương đương với

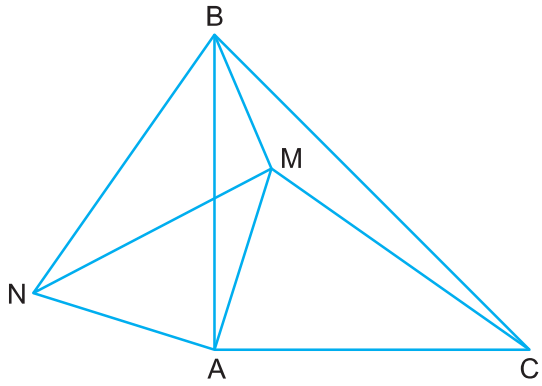
$1+ab=a+b\Leftrightarrow(a-1)(b-1)=0$

$\Leftrightarrow b-1=0$ (do $a-1>0$).

$\Leftrightarrow b=1$. Do đó $\sqrt{x-2}=1\Leftrightarrow x=3.$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x=3$.

b) Không giảm tổng quát giả sử $MA=\sqrt{3}$, $MB=\sqrt{2}$ và $MC=2\sqrt{2}$.



Dựng tam giác vuông cân AMN sao cho M, N nằm về khác phía đối với AB.

Ta có $\Delta ABN = \Delta ACM$ (c.g.c).

Suy ra $BN = CM = 2\sqrt{2}$, $\widehat{CMA} = \widehat{ANB}$.

Do $AM = AN = \sqrt{3} \Rightarrow MN = AM\sqrt{2} = \sqrt{6}$.

Xét tam giác BMN có

$MB^2 + MN^2 = 8 = BN^2 \Rightarrow \Delta BMN$ vuông tại M

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMN} + \widehat{NBM} = 135^o$.

Trong tam giác BMN có $BN = 2BM \Rightarrow \widehat{MNB} = 30^o$

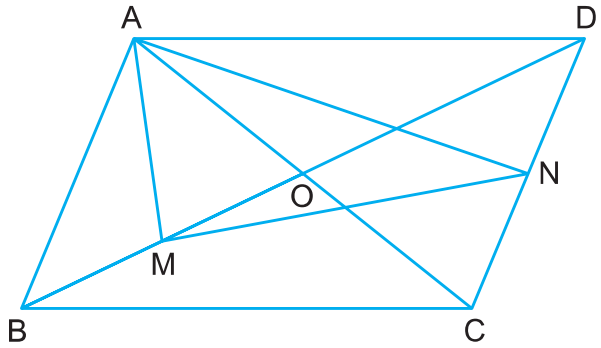
$\Rightarrow \widehat{CMA} = \widehat{BNA} = \widehat{BNM} + \widehat{MNA} = 75^o$.

$\Rightarrow \widehat{BMC} = 360^o - \widehat{AMB} - \widehat{CMA} = 150^o$.

Bài 4. a) Từ giả thiết

$\Delta AMN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$. (1)

$\widehat{MAN} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAN}$. (2)



Từ (1) và (2) suy ra

$\Delta BAM \backsim \Delta CAN \Rightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BM}{CN}$. (3)

Vì $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ nên ΔOAB cân tại O

$\Rightarrow OA = OB \Rightarrow AC = BD \Rightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

Theo giả thiết $BM = \dfrac{1}{4}BD = \dfrac{1}{4}AC$ và $CN = \dfrac{1}{2}AB$.

Thay vào (3) ta được

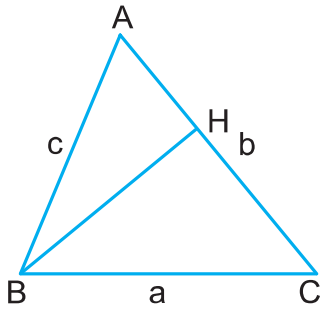
$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BM}{CN} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{2AB}$

$\Leftrightarrow 2AB^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Từ đó $AB = BC$ nên ABCD là hình vuông.

b) Ta có bổ đề sau: Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; $\widehat{BAC} < 90^o$.

Khi đó $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{BAC}$.



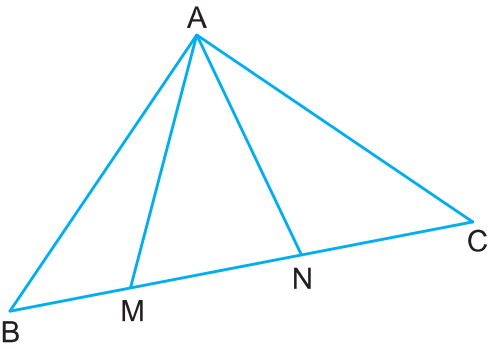
Thật vậy, kẻ $BH \perp AC$ ta có

$BC^2 = BH^2 + CH^2 = BH^2 + (AC - AH)^2$

$\Leftrightarrow BC^2 = BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC.AH$

$= AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos\widehat{BAC}$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{BAC}$.



Áp dụng bổ đề trên ta có

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN.\cos\widehat{MAN}$. (1)

Mặt khác

$AM^2 = BM^2 + AB^2 - 2.BM.AB.\cos 45^o$

$= BM^2 + AB^2 - \sqrt{2}.BM.AB$

$AN^2 = CN^2 + AC^2 - 2.CN.AC.\cos 45^o$

$= CN^2 + AC^2 - \sqrt{2}.CN.AC$.

Thay vào (1) ta có

$\cos\widehat{MAN} = \dfrac{2AB^2 - \sqrt{2}.AB.BM - \sqrt{2}.AC.CN}{2.AM.AN}$. (2)

$S_{\Delta AMN} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABM} - S_{\Delta ACN}$

$= \dfrac{2AB^2 - AB.MB.\sqrt{2} - AC.CN.\sqrt{2}}{4}$. (3)

$S_{\Delta AMN} = \dfrac{AM.AN.\sin\widehat{MAN}}{2}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$\sin\widehat{MAN} = \dfrac{2AB^2 - \sqrt{2}.AB.BM - \sqrt{2}.AC.CN}{2.AM.AN}$. (5)

Từ (2) và (5) $\Rightarrow \tan\widehat{MAN} = 1 \Rightarrow \widehat{MAN} = 45^o$.

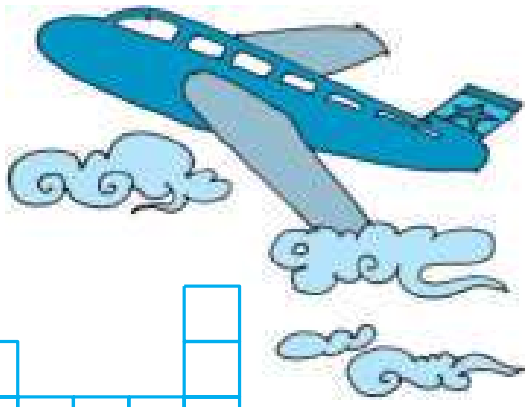
(Xem tiếp trang 21)

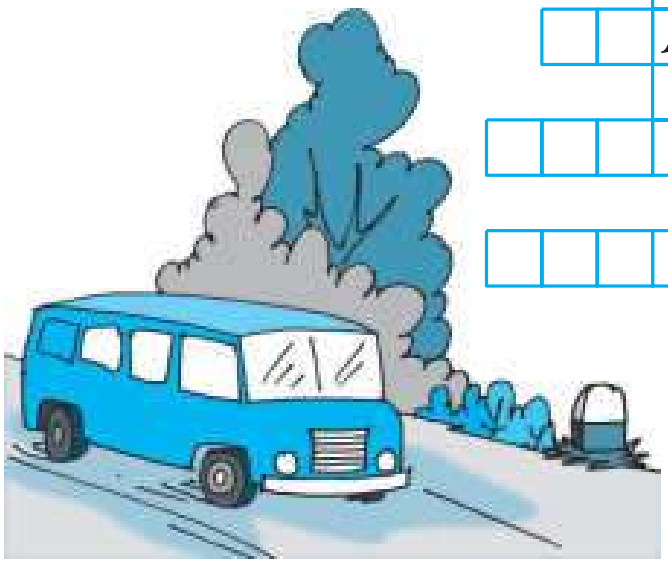


Ô chữ PHƯƠNG TIỆN GIAO THÔNG

HỒ THỊ THU HƯỜNG
GV. TH Ngô Đức Kế, Can Lộc, Hà Tĩnh

Chúng ta cùng tìm hiểu các loại phương tiện giao thông qua các ô chữ sau nhé!





Kết quả Ô chữ NĂM MỚI (TTT2 số 191)

Các danh từ về chủ đề ngày Tết được điền trong ô chữ là

- LUCKY MONEY — Tiền lì xì
- FIREWORK — Pháo hoa
- WORSHIP — Phong tục thờ cúng
- STICKY RICE — Gạo nếp
- CHUNG CAKE — Bánh chưng
- MARIGOLD — Cúc vạn thọ
- FRUIT — Trái cây

Nhận xét. Các bạn sau có đáp án đúng và trình bày đẹp được thưởng kì này: *An Hà Hùng*, 6A1, THCS Mộc Ly, Mộc Châu, **Sơn La**; *Kiều Hồng Phong*, 9A, THCS Hòa Tiến, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Mai Chi*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Đoàn Khánh Linh*, 7D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**.

Các bạn sau được khen: *Ngô Hà Trang*, 8C1, THCS Archimedes, Academy, **Hà Nội**; *Nguyễn Đức Anh*, 6C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Khánh Ngọc*, 6A1, THCS Mộc Ly, Mộc Châu, **Sơn La**; *Lương Khánh Toàn*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**.

HOÀI LAI

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Kì 24

CLB1. Given three numbers a, b, c satisfying $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=2019.$

Find the value of the following expression:

$$M=\frac{a^2-b^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{b^2-c^2}{(b+a)(c+a)}+\frac{c^2-a^2}{(c+b)(a+b)}.$$

CLB2. The difference between the areas of two squares whose side lengths are positive integers (in cm) is 101 cm^2. Find the perimeter of each square.

CLB3. Given that x, y are rational numbers satisfying:

$(x^2+9y^2-2)(x+3y)^2+(3xy-1)^2=-12xy.$

Show that 3xy + 1 is the square of a rational number.

CLB4. Given 3 real numbers a, b, c satisfying $|a+b+c|\le 1$, $|a-b-c|\le 1$, $|c|\le 1$. Find the maximum value of the expression:

$$M=a^2+\frac{19}{5}b^2.$$

CLB5. Given quadrilateral ABCD with AC perpendicular to BD. E and H are the midpoints of AB and DA respectively. Draw EG perpendicular to CD with G being the point of intersection and HF perpendicular to BC with F being the point of intersection. Prove that line segments EG, HF and AC are concurrent.

ĐỖ ĐỨC THÀNH *(dịch)*

Kết quả Kì 22 (TTT2 số 191)

CLB1. Từ $a+b+c=\frac{1}{abc}\Rightarrow abc(a+b+c)=1.$

Do đó $1+a^2b^2=abc(a+b+c)+a^2b^2$

$=ab\left[c(a+b+c)+ab\right]=ab(a+c)(b+c).$

Tương tự ta có $1+b^2c^2=bc(b+a)(c+a);$

$1+c^2a^2=ca(c+b)(a+b).$

Do đó $M=\frac{ab(a+c)(b+c)bc(b+a)(c+a)}{b^2(c+a)^2ca(c+b)(a+b)}=1.$

CLB2. Với a, b > 0, a < b, a, b $\in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2}<\frac{1}{2ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

Do đó $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{2018^2+2019^2}$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{2^2+3^2}+\frac{1}{3^2+4^2}+...+\frac{1}{2018^2+2019^2}.$

$<\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)<\frac{9}{20}.$

CLB3. ĐKXĐ: $x\ne -5, x\ne -4, x\ne -3, x\ne -\frac{8}{3}.$

$$\frac{1}{x+5}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+3)(3x+8)}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+3)(3x+8)}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+3)}{(x+3)(3x+8)}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3x+8=2\Leftrightarrow x=-2.$$

Vậy $x=-2.$

CLB4. Gọi 4 số cần tìm là a, b, c, d trong đó $a\le b\le c\le d.$

Đặt $S=a+b+c+d.$ Theo đầu bài ta có

$a=(b+c+d)^2\ge 0\Rightarrow a\ge 0\Rightarrow 0\le a\le b\le c\le d.$

Suy ra $(b+c+d)^2\le(c+d+a)^2\le(d+a+b)^2$

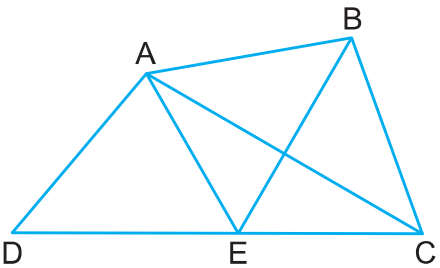
$\le(a+b+c)^2\le(b+c+d)^2\Rightarrow a=b=c=d.$

Khi đó $a=(a+a+a)^2\Leftrightarrow 9a^2-a=0$

$$\Leftrightarrow a(9a-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\frac{1}{9}.\end{array}\right.$$

Vậy $a=b=c=d=0$ hoặc $a=b=c=d=\frac{1}{9}.$

CLB5.



Gọi E là giao điểm của tia phân giác góc A và tia phân giác góc B.

Ta có $\widehat{BAE}=\frac{\hat{A}}{2}=70°$ và $\widehat{ABE}=\frac{\hat{B}}{2}=50°.$

Mà $\widehat{BAE}+\widehat{ABE}+\widehat{AEB}=180°\Rightarrow\widehat{AEB}=60°.$

(Xem tiếp trang 6)



Hỏi: Em rất muốn trở thành nhạc sĩ nhưng nếu thế thì phải sáng tác được bài hát. Theo anh phải học nhạc đến trình độ nào thì mới sáng tác được bài hát?

NGUYỄN VĂN A
(THCS Nghĩa Tân, Hà Nội)

Đáp:

Nghĩ một giai điệu hát lên
Mà thấy các bạn ở bên không cười
Dù chưa học nhạc trên đời
Vẫn ra bài hát để người hát theo.



Hỏi: Lớp em rất nhiều bạn phát âm "chống chèo" và "trống chèo" như nhau. Như vậy có được không ạ?

THÁI HUY V
(THCS Chu Văn An, Thái Nguyên)

Đáp:

Trong Toán chia một dễ thay
Số nào chia một bằng ngay chính mình
Trong thơ "chia một" tài tình
Chia xong người khác, sạch tinh chẳng còn.

Hỏi: Bài toán chứng minh bất đẳng thức có dấu $\leq$ hoặc $\geq$ thì sau khi chứng minh có cần chỉ ra đẳng thức xảy ra khi nào không? Không làm thì có bị trừ điểm không anh?

LÊ VIẾT T
(THCS Lê Hồng Phong, Huế)

Đáp:

Chứng minh xong sẽ thở phào
Làm thêm: Đẳng thức khi nào xảy ra
Gọi thêm vì chẳng bắt mà
Thầy đừng trừ điểm, oan gia học trò.

Hỏi: Em về quê được ông đưa ra đình chơi, ông bảo trong đình có bàn thờ Thành hoàng của làng. Em không dám hỏi ông vị Thành hoàng là ai. Anh có biết không?

NGÔ KIỀU T
(THCS Trần Mai Ninh, Thanh Hoá)

Đáp:

Thành hoàng Vua sắc phong cho
Người lập làng, ấp công to một thời;
Ông tổ nghề mới ra đời
Đời sau thờ cúng ơn người có công.



Hỏi: Trong câu ca dao:

Thật vàng chẳng phải thau đâu
Xin đừng thử lửa thêm đau lòng người.

Rồi đôi khi ta thường nói "Vàng thau lẫn lộn". Vậy "thau" là gì anh nhỉ?

HOÀNG THỊ L
(THCS Hải Ninh, Tĩnh Gia, Thanh Hóa)

Đáp:

Thau - hợp kim của kẽm, đồng
Tùy theo tỉ lệ sẽ trông giống vàng
Cho vào lửa thấy rõ ràng
Vàng thì không chảy, thau tan thành dòng.

ANH PHÓ GỠ XƯA



CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(194). Có hai loại xe trọng tải 4 tấn và 11 tấn. Nếu mỗi xe chở đúng trọng tải thì cần mỗi loại mấy xe để chở hết 58 tấn hàng?

TẠ THẬP
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài 2(194). Cho $A=\frac{3^3}{1}-\frac{5^3}{3}+\frac{7^3}{6}-\frac{9^3}{10}+\frac{11^3}{15}-\frac{13^3}{21}+\frac{15^3}{28}-\frac{17^3}{36}+...+\frac{199^3}{4950}$.

So sánh A với 814.

NGUYỄN NGỌC HÙNG
(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài 3(194). Năm số 1, 2, 3, 4, 5 được chia thành hai nhóm bất kì. Chứng minh rằng một trong hai nhóm luôn có hai số mà hiệu của chúng bằng một số trong nhóm đó.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài 4(194). Cho hai tam giác ABC và BCD có cạnh BC chung, A và D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa BC, biết rằng $\widehat{ABC}=36^o$, $\widehat{CBD}=30^o$, $\widehat{BAD}=81^o$, $\widehat{CAD}=27^o$. Tính số đo các góc của tam giác ACD.

NGUYỄN BÁ ĐANG
(Hà Nội)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

1(194). There are two types of trucks: 4-tonne trucks and 11-tonne trucks. How many of each types of trucks would be needed to transport 58 tonnes of goods if they are all fully loaded?

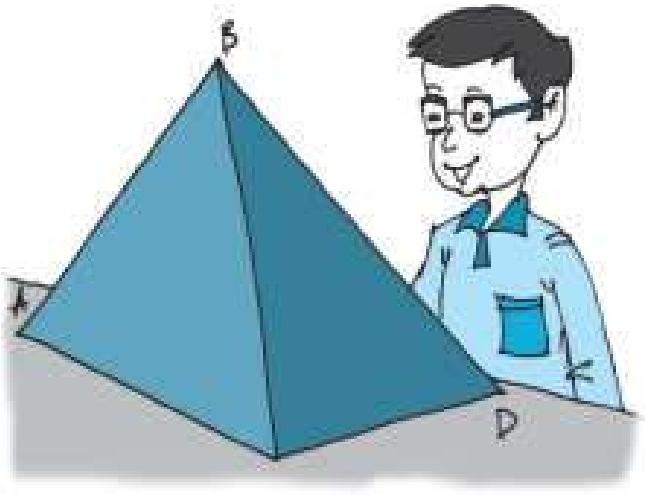
2(194). Given that

$A=\frac{3^3}{1}-\frac{5^3}{3}+\frac{7^3}{6}-\frac{9^3}{10}+\frac{11^3}{15}-\frac{13^3}{21}+\frac{15^3}{28}-\frac{17^3}{36}+...+\frac{199^3}{4950}$.

Compare A with 814.

3(194). Five numbers 1, 2, 3, 4, 5 are arbitrarily grouped into 2 smaller groups. Prove that there always exists one group in which the difference between two members of the group is equal to another number in that group.

4(194). Given triangles ABC and BCD with common side BC. A and D are on different sides of BC and it is known that: $\angle ABC=36^o$, $\angle CBD=30^o$, $\angle BAD=81^o$, $\angle CAD=27^o$. Find the measure of angles in triangle ACD.



CÁC LỚP THCS

Bài 5(194). Số nguyên dương n được gọi là *số thú vị* nếu tồn tại các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn $n = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2 + t^2}$.

a) Chứng minh rằng có vô hạn *số thú vị*.

b) Hỏi số 2019 có phải là *số thú vị* không? Tại sao?

NGUYỄN TIẾN LÂM

(GV. THPT chuyên KHTN Hà Nội)

Bài 6(194). Giải phương trình

$$(x+3)\sqrt{-x^2 - x + 48} = x - 24.$$

LƯU LÝ TƯỞNG

(GV. THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

Bài 7(194). Cho n là số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 3.

a) Tìm số nguyên dương lớn nhất k(n) để trong n số nguyên dương phân biệt bất kì không vượt quá k(n) luôn tồn tại 3 số (không nhất thiết phân biệt) mà một số bằng tổng của hai số còn lại.

b) Tìm số nguyên dương lớn nhất h(n) để trong n số nguyên dương phân biệt bất kì không vượt quá h(n) luôn tồn tại ba số phân biệt mà một số bằng tổng hai số còn lại.

HOÀNG NGỌC MINH

(GV. THPT chuyên KHTN Hà Nội)

Bài 8(194). Cho hai đường tròn (O) và (O') không bằng nhau và cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O) và (O') tại C và D sao cho B nằm bên trong tam giác ACD. Kẻ AM vuông góc với CD tại M. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AB, đường thẳng này cắt đoạn thẳng AM tại H. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ACD.

HUỲNH THANH TÂM

(Bưu điện Thị xã An Nhơn, Bình Định)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

5(194). A positive integer n is named *interesting number* if there exists other positive integers x, y, z, t satisfying: $n = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2 + t^2}$.

a) Prove that there are an infinite number of *interesting numbers*.

b) Is 2019 an *interesting number*? Give an explanation.

6(194). Solve the equation

$$(x+3)\sqrt{-x^2 - x + 48} = x - 24.$$

7(194). n is a positive integer $(n \geq 3)$.

a) Find the greatest positive integer k(n) so that among n arbitrary distinct positive integers not exceeding k(n), there always exists 3 numbers (not necessarily distinct) in which the sum of two of them is equal to the other one.
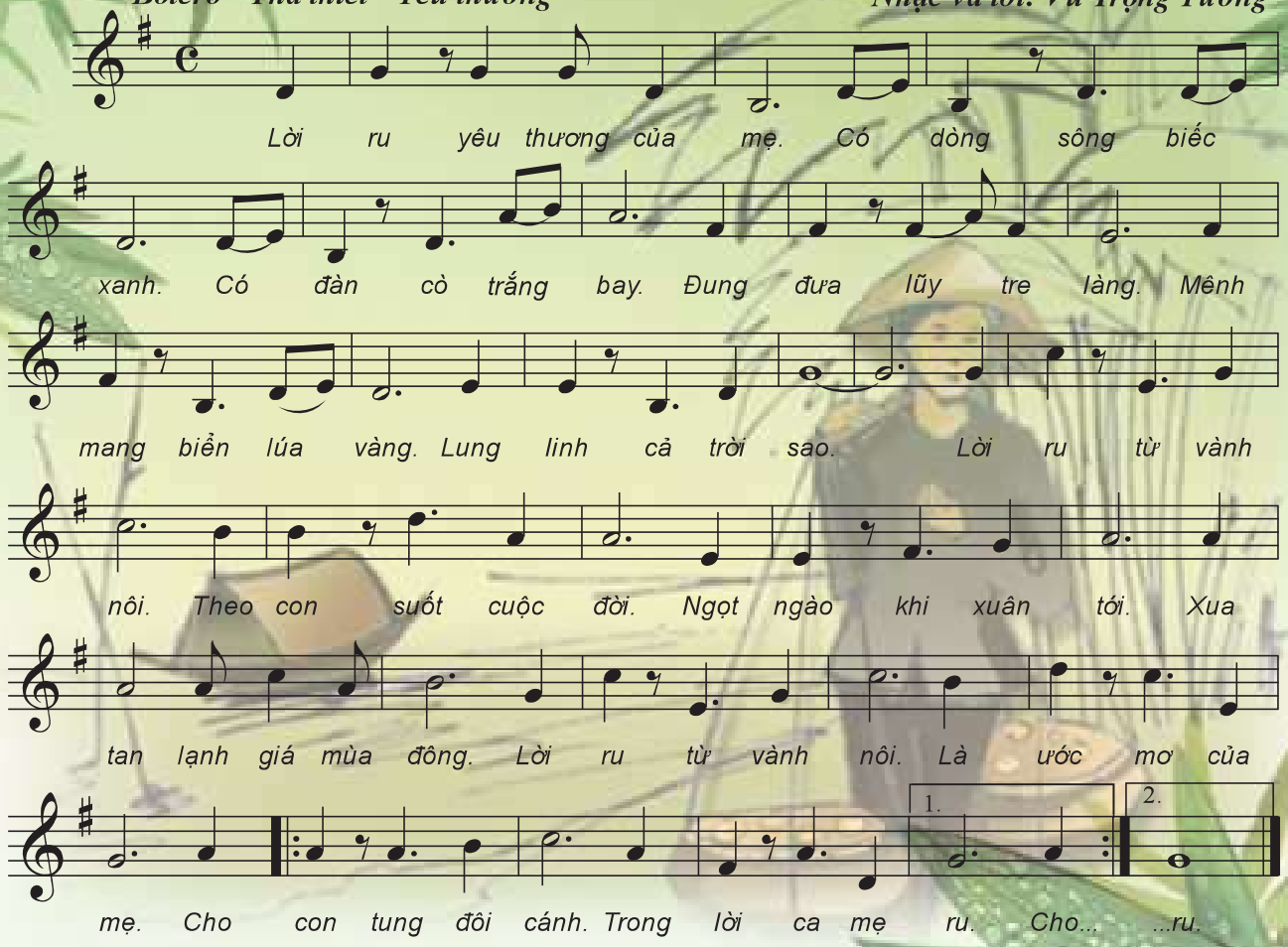
b) Find the greatest positive integer h(n) so that among n arbitrary distinct positive integers not exceeding h(n), there always exists 3 distinct numbers in which the sum of two of them is equal to the other one.

8(194). Two circles of different sizes with centers O and O' intersect at points A and B. We construct a common external tangent passing the two circles at C and D respectively so that B is inside triangle ACD, then, draw AM perpendicular to CD (where M is the point of intersection). From B, we construct a line perpendicular to AB meeting AM at H. Prove that H is the orthocenter of triangle ACD.

LỜI RU CỦA MẸ

(Tặng Mẹ kính yêu với lòng biết ơn)

Bolero - Tha thiết - Yêu thương ***Nhạc và lời: Vũ Trọng Tường***



Trong những năm qua, các thế hệ học sinh đã rất quen thuộc với những bài hát của nhạc sĩ Vũ Trọng Tường như: *Hạt nắng sân trường, Cây bàng mùa hạ, Thi hát cùng chim, Mùa hè - Mùa thi, Lời ru của mẹ, Tiếng trống mùa thu...* đặc biệt là *Mùa thu ngày khai trường* - một bài hát không thể thiếu vắng và luôn được vang lên ở khắp các ngôi trường trong những ngày khai giảng năm học mới. Là một nhạc sĩ cũng có một số năm công tác trong ngành giáo dục, nhạc sĩ Vũ Trọng Tường đã dành nhiều tâm huyết viết cho tuổi thơ, về thầy cô và mái trường. Những bài hát thiếu nhi do ông sáng tác với ca từ và giai điệu giản dị, trong trẻo, dễ thương, luôn gần gũi, gắn bó với thiếu nhi cả nước và được các em yêu thích.



Xin giới thiệu với các em bài hát *Lời ru của mẹ* của nhạc sĩ Vũ Trọng Tường - một ca khúc sâu lắng thể hiện những tình cảm yêu thương của tuổi thơ tặng mẹ kính yêu trong những ngày tháng 3 đầy ý nghĩa này.

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.
Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.
Mã số: 8BTT194M18. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 03 năm 2019.

Giá: 10 000 đồng