https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

NĂM THỨ MƯỜI CHÍN
ISSN 1859-2740

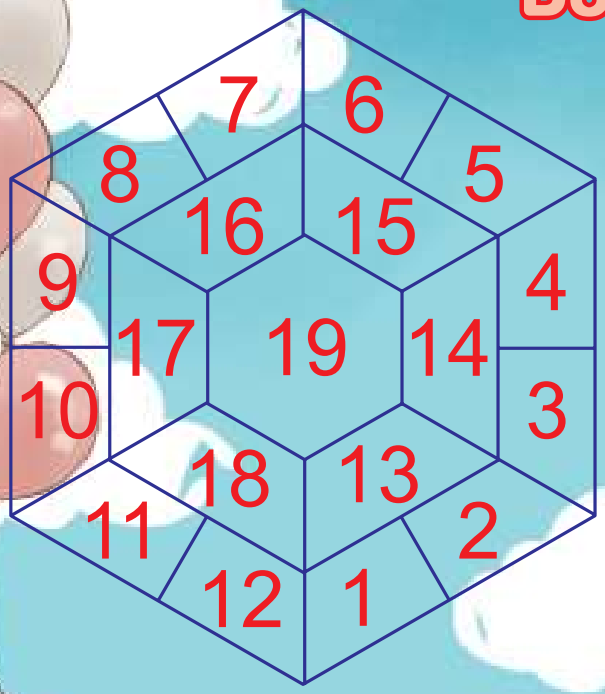
Toán tuổi thơ 2

2/9 187
NĂM HỌC 2018 - 2019

TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Đề thi toán quốc tế Bulgaria (BIMC) 2018





Sử dụng nguyên lí Dirichlet để chứng minh bất đẳng thức

HỌP HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP TẠP CHÍ TOÁN TUỔI THƠ



Chủ tịch Hội đồng thành viên Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã kí quyết định số 520/QĐ-NXBGDVN ngày 05/9/2018 về việc thành lập Hội đồng biên tập Tạp chí Toán Tuổi thơ 1 (dành cho Tiểu học) và Toán Tuổi thơ 2 (dành cho Trung học cơ sở), các Ủy viên trong Hội đồng là các Giáo sư, Tiến sĩ, các thầy cô giáo - những chuyên gia trong làng toán Tiểu học và Trung học cơ sở.

Ngày 05/10/2018, Tạp chí Toán Tuổi thơ tổ chức họp Hội đồng biên tập để bàn về định hướng phát triển và cải tiến nội dung nhằm bắt kịp với xu hướng thời đại và phù hợp với nhu cầu bạn đọc. Ông Hoàng Lê Bách, Tổng Giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã đến dự và có ý kiến chỉ đạo. Tổng Giám đốc đánh giá cao Cuộc thi Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ toàn quốc và mong muốn các thành viên trong Hội đồng biên tập đóng góp ý kiến, nhiệt tình tham gia viết bài để Toán Tuổi thơ luôn là tài liệu thiết thực trong nhà trường.



Các Ủy viên Hội đồng biên tập đã có ý kiến thảo luận rất sôi nổi về định hướng, chiến lược, nội dung và hình thức của tạp chí. Nhiều ý kiến cho rằng tạp chí Toán Tuổi thơ là tài liệu rất bổ ích để các thầy cô có thêm kinh nghiệm trong giảng dạy, các bạn học sinh có niềm say mê học toán. Tuy nhiên để phục vụ nhiều bạn đọc hơn, tạp chí nên có thêm các bài toán ứng dụng thực tế cuộc sống, có thêm bài viết về đổi mới chương trình Sách giáo khoa, một trong những nội dung đang được xã hội quan tâm.

PV

Toán tuổi thơ 2 TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
TS. TRẦN QUANG VINH
Phó Tổng biên tập phụ trách tạp chí:
ThS. NGUYỄN NGỌC HÂN
Phó Tổng biên tập tạp chí:
TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

ỦY VIÊN

NGND. VŨ HỮU BÌNH
TS. NGUYỄN MINH ĐỨC
ThS. ĐẶNG HIỆP GIANG
TS. NGUYỄN MINH HÀ
PGS. TS. VŨ ĐÌNH HÒA
ThS. TRẦN QUANG HÙNG
TS. LÊ THỐNG NHẤT
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG
ThS. PHẠM ĐỨC TÀI
NGND. PGS. TS. TÔN THÂN
PGS. TS. LÊ ANH VINH

TÒA SOẠN

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội
Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702
Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com
Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com
Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.38357197, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Trị sự - Phát hành:
TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG,
NGUYỄN THỊ HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH
Biên tập - Chế bản: **VŨ THỊ MAI, ĐỖ TRUNG KIÊN**
Mĩ thuật: **TRẦN NGỌC TRƯỜNG**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY

Học ra sao? Tr 2
Giải một số phương trình nghiệm nguyên bằng phương pháp chặn
Mai Văn Năm

Đo trí thông minh Tr 5
Tìm số còn thiếu
Nguyễn Đức Tấn

Giải toán thế nào? Tr 6
Một số bài toán liên quan đến điểm Torricelli trong tam giác
Lê Quốc Hán

Nhìn ra thế giới Tr 8
Đề thi Toán quốc tế Bulgaria (BIMC) 2018
Phùng Kim Dung, Đỗ Thị Thúy Ngọc

Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc Tr 10
"Truy tìm" chiếc mũ bảo hiểm
Lê Hồng Mai

Compa vui tính Tr 15
Có cách nào không?
Tạ Thập

Sai ở đâu? Sửa cho đúng Tr 20
Lời giải chính xác chưa?
Đinh Văn Thư

Thách đấu Tr 21
Trận đấu thứ một trăm năm mươi sáu
Thái Nhật Phượng

Dành cho các nhà toán học nhỏ Tr 22
Sử dụng nguyên lí Dirichlet để chứng minh bất đẳng thức
Nguyễn Minh Sang

Vào thăm Vườn Anh Tr 28
Ô chữ Animal
Trần Thị Thảo



GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHẶN

MAI VĂN NĂM
(GV. THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Phương trình nghiệm nguyên là dạng toán xuất hiện nhiều trong các đề thi học sinh giỏi và đề thi vào lớp 10 THPT chuyên. Bài viết này xin giới thiệu phương pháp chặn để giải phương trình nghiệm nguyên.

1. Phương pháp chặn trong tổng hoặc hiệu

Sử dụng tính chất: Tổng của các số nguyên dương luôn lớn hơn một số hạng bất kì trong tổng đó.

- Nếu $a, b, c \ge 0$ và $a + b + c = d$ thì $a, b, c \le d$.
- Nếu $a, b, c \ge 0$ và $a - b - c = d$ thì $a \ge d$.

Bài toán 1. Tìm các cặp số nguyên không âm $(x; y)$ thỏa mãn $x - y = x^2 + xy + y^2$.

Lời giải. Vì x, y là các số nguyên không âm nên $x \ge x - y = x^2 + y^2 + xy \ge 2xy + xy = 3xy$.

- Nếu $x = 0$ thì $-y = y^2 \Rightarrow y = 0$.
- Nếu $x > 0$ kết hợp với $x \ge 3xy$ ta được $1 \ge 3y$, từ đó $y = 0 \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$; $(1; 0)$.

Bài toán 2. Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $\overline{xyz} = (x + y + z)^3$.

Lời giải. Từ đề bài suy ra $64 = 4^3 < \overline{xyz} = (x + y + z)^3 < 10^3 = 1000$.

Do đó $4 < x + y + z < 10$.

Suy ra $x + y + z \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$.

- Nếu $x + y + z = 5$ thì $\overline{xyz} = 5^3 = 125$ (loại).
- Nếu $x + y + z = 6$ thì $\overline{xyz} = 6^3 = 216$ (loại).
- Nếu $x + y + z = 7$ thì $\overline{xyz} = 7^3 = 343$ (loại).
- Nếu $x + y + z = 8$ thì $\overline{xyz} = 8^3 = 512$ (thỏa mãn).
- Nếu $x + y + z = 9$ thì $\overline{xyz} = 9^3 = 729$ (loại).

Vậy $(x; y; z) = (5; 1; 2)$.

2. Phương pháp chặn trên tập hợp nghiệm

Ta dự đoán phương trình có một số hữu hạn nghiệm nguyên sau đó chỉ ra các giá trị khác của biến không phải là nghiệm của phương trình.

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $x(x^2 + x + 1) = 4^y - 1$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với $(x^2 + 1)(x + 1) = 4^y$.

Vì x, y là số nguyên nên $x, y \ge 0$.

- Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ (thỏa mãn).
- Nếu $x > 0$ thì $y > 0$.

Do đó 4^y là số chẵn nên $x + 1$ là số chẵn.

Đặt $x = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$ khi đó ta có

$(2k^2 + 2k + 1)(k + 1) = 4^{y-1}$.

Vì 4^{y-1} chỉ có ước lẻ là 1. Mà $2k^2 + 2k + 1$ là ước lẻ của 4^{y-1} nên $k = 0$.

Suy ra $x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 0)$; $(1; 1)$.

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $4xyz = x + 2y + 4z + 3$.

Lời giải. • Xét $x = 1$ thay vào phương trình ta có

$4yz - 2y - 4z = 4 \Leftrightarrow 2yz - y - 2z = 2$

$\Leftrightarrow (y - 1)(2z - 1) = 3$.

Vì x, y là số nguyên dương nên

$\begin{cases} y-1=1 \\ 2z-1=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y-1=3 \\ 2z-1=1. \end{cases}$

Giải ra ta được (y; z) = (2; 2); (4; 1).

• Xét $x \ge 2$ ta có

$2y+4z+3=4xyz-x=x(4yz-1)$

$\ge 2(4yz-1)=8yz-2.$

Suy ra $8yz-2y-4z \le 5$

$\Leftrightarrow (2y-1)(4z-1) \le 6.$

Vì $4z-1 \ge 3$ nên $2y-1 \le 2$ hay $2y \le 3$

$\Rightarrow y=1.$

Thay vào phương trình ta được

$4xz-x-4z=5 \Leftrightarrow (x-1)(4z-1)=6.$

Do $4z-1 \ge 3$ và là ước lẻ của 6 nên

$\begin{cases} x-1=2 \\ 4z-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ z=1. \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên (x; y; z) là (1; 2; 2); (1; 4; 1); (3; 1; 1).

3. Phương pháp chặn sử dụng bất đẳng thức

Sử dụng các bất thức đẳng cơ bản hay các bất đẳng thức cổ điển để đánh giá hai vế của phương trình, sau đó tìm điều kiện để đẳng thức xảy ra, ta tìm được nghiệm của phương trình.

Bài toán 5. Giải phương trình nghiệm nguyên

$3(x^4+y^4+x^2+y^2+2)=2(x^2-x+1)(y^2-y+1).$

Lời giải. Ta có $(x+1)^2 \ge 0$ nên

$2x^2+4x+2 \ge 0 \Rightarrow 3(x^2+x+1) \ge x^2-x+1.$ (1)

Ta lại có $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1) \ge \frac{1}{3}(x^2-x+1)^2.$ (2)

Tương tự $y^4+y^2+1 \ge \frac{1}{3}(y^2-y+1)^2.$ (3)

Cộng theo vế của (2) và (3) ta được

$3(x^4+y^4+x^2+y^2+2)$

$\ge (x^2-x+1)^2+(y^2-y+1)^2.$

Suy ra $3(x^4+y^4+x^2+y^2+2)$

$\ge 2(x^2-x+1)(y^2-y+1).$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=-1.$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên (x; y) là $(-1;-1).$

4. Phương pháp chặn nhờ sắp thứ tự các biến

Với bài toán mà vai trò của các biến x, y, z là bình đẳng ta có thể giả sử $x \le y \le z$ để có thể chặn được giá trị của biến.

Bài toán 6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5(x+y+z)=4xyz-24.$

Lời giải. Ta đưa phương trình về dạng

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{24}{5xyz}=\frac{4}{5}.$

Không mất tổng quát giả sử $1 \le z \le y \le x.$

Ta có $xyz \ge z.z.z=z^3 \ge z^2$ và $xy \ge z.z=z^2;$

$yz \ge z.z=z^2; zx \ge z.z=z^2.$

Do đó

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{24}{5xyz}=\frac{4}{5} \le \frac{3}{z^2}+\frac{24}{5z^2}=\frac{39}{5z^2}.$

Suy ra $z^2 \le \frac{39}{4}$, từ đó $z \in \{1;2;3\}.$

• Với $z=1$ thay vào phương trình ta được

$5(x+y)+5=4xy-24$

$\Rightarrow (4x-5)(4y-5)=141=47.3=141.1.$ (1)

Vì $x \ge y \ge 1$ nên $4x-5 \ge 4y-5 \ge -1.$

Do đó từ (1) suy ra

$\begin{cases} 4x-5=47 \\ 4y-5=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 4x-5=141 \\ 4y-5=1. \end{cases}$

Giải ra ta được $\begin{cases} x=13 \\ y=2. \end{cases}$

• Với $z=2$ thay vào phương trình ta được

$(8x-5)(8y-5)=297.$ (2)

Phương trình (2) có nghiệm là (x, y) = (4; 2).

• Với $z=3$ giải tương tự ta được phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương (x; y; z) là (13; 2; 1); (13; 1; 2); (1; 2; 13); (1; 13; 2); (2; 1; 13); (2; 13; 1); (4; 2; 2); (2; 4; 2); (2; 2; 4).

5. Phương pháp chặn sử dụng tính chất của số chính phương

• Nếu các số nguyên a, m thỏa mãn $m^2 < a^2 < (m+2)^2$ thì $a^2 = (m+1)^2$.

• Không tồn tại các số nguyên a, m thỏa mãn $m^2 < a < (m+1)^2$.

Bài toán 7. Giải phương trình nghiệm nguyên $9x^2 + 3y^2 + 6xy - 6x + 2y - 35 = 0$.

Lời giải. Biến đổi phương trình về dạng

$9x^2 + 6x(y-1) + (y-1)^2 + 2y^2 + 4y - 36 = 0$

$\Leftrightarrow (3x + y - 1)^2 = 38 - 2(y+1)^2$.

Vì $(3x + y - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (y+1)^2 \leq 19$ nên

$(y+1)^2 \in \{0; 1; 4; 9; 16\}$.

Suy ra $38 - 2(y+1)^2 \in \{38; 36; 30; 20; 6\}$.

Do đó $38 - 2(y+1)^2 = 36 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 1$.

Suy ra $y = 0; y = -2$.

• Với $y = -2$ thì $(3x-3)^2 = 36 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4$.

Suy ra $x = 3; x = -1$.

• Với $y = 0$ thì $(3x-1)^2 = 36$.

Suy ra $x = \frac{7}{3}; x = \frac{-5}{3}$ (loại).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên (x; y) là $(3; -2); (-1; -2)$.

Bài toán 8. Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn $A = n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Lời giải. • Nếu $n = 1$ thì $A = 3$ (không là số chính phương).

• Nếu $n = 2$ thì $A = 25 = 5^2$ là số chính phương.

• Nếu $n > 2$ ta có

$4A = 4n^4 + 4n^3 + 4 = (2n^2 + n)^2 + 4 - n^2$

$< (2n^2 + n)^2$.

$4A = 4n^4 + 4n^3 + 4 > 4n^4 + n^2 + 4 + 4n^3$

$-8n^2 - 4n = (2n^2 + n - 2)^2$.

(Vì $4 - n^2 < 0$ và $n^2 - 8n^2 - 4n < 0$).

Do đó $(2n^2 + n - 2)^2 < 4A < (2n^2 + n)^2$.

Vì A là số chính phương nên 4A cũng là số chính phương.

Suy ra $4A = (2n^2 + n - 1)^2$

$\Leftrightarrow 4n^4 + 4n^3 + 4 = (2n^2 + n - 1)^2$

$\Leftrightarrow 3n^2 + 2n + 3 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy $n = 2$.

6. Phương pháp biến đổi để chặn được một ẩn

Bài toán 9. Giải phương trình nghiệm nguyên $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$.

Lời giải. Biến đổi phương trình về dạng

$3x^2 + (3y-1)x + 3y^2 - 8y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3y-1}{3}x + \frac{3y^2 - 8y}{3} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x\frac{3y-1}{6} + \left(\frac{3y-1}{6}\right)^2$

$+ \frac{3y^2 - 8y}{3} - \left(\frac{3y-1}{6}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3y-1}{6}\right)^2 + \frac{27y^2 - 90y - 1}{36} = 0.$

Suy ra $27y^2 - 90y - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 \leq \frac{76}{27} \Leftrightarrow y \in \{0; 1; 2\}$.

Từ đó phương trình có nghiệm nguyên (x, y) là (0; 0); (1; 1).

Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^2 + z^3 = 32$.

Bài 2. Tìm số nguyên x thỏa mãn $5^x + 12^x = 13^x$.

Bài 3. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $x^5 + y^5 = (x+y)^3$.

Bài 4. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

Bài 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^4 - y^4 = 3y^2 + 1$.

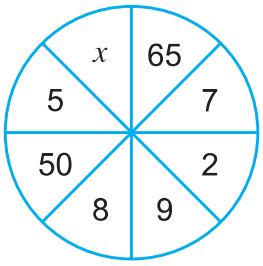
Bài 6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 26 = 0$.

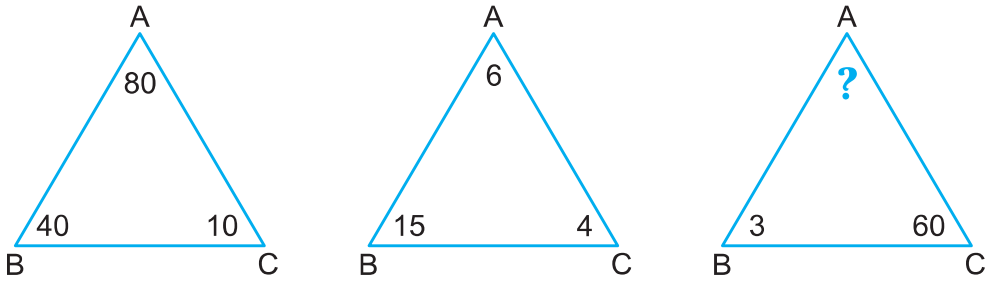


Kì này TÌM SỐ CÒN THIẾU

Bài 1. Tìm số tự nhiên x phù hợp với quy luật như trong hình vẽ.



Bài 2. Thay dấu **?** bởi số thích hợp.



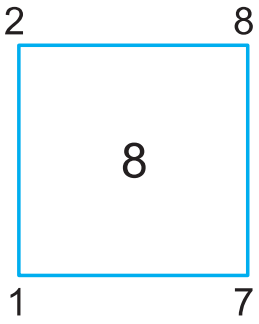
NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Kết quả SỐ NÀO CÒN THIẾU? (TTT2 số 184)

Đọc lại cho đúng. *Do sơ suất nên hình vuông thứ hai (từ trái sang) của bài 2 trên TTT2 số 184 đã viết nhầm số 8 thành số 9. Mong bạn đọc thông cảm!*

Quy luật. **Bài 1.** Mỗi số ở nửa bên trái của hình tròn bằng lập phương của số đối xứng với số đó qua tâm hình tròn chia cho 2. Vậy số thích hợp điền vào chỗ (?) là $10^3 : 2 =$ **500**.

Bài 2. Ở mỗi hình, số ở trong hình vuông bằng hiệu giữa tích các số chẵn và tổng các số lẻ trên các đỉnh của hình vuông. Như vậy số điền vào dấu (?) là $2.6 - (5 + 1) =$ **6**.



Nhận xét. Kì này không có bạn nào giải đúng, phần quà xin gác lại kì sau!

NGUYỄN XUÂN BÌNH

NEW

THÔNG BÁO CHUYỂN TRỤ SỞ

Từ tháng 7 năm 2018, tòa soạn tạp chí Toán Tuổi thơ chuyển trụ sở về địa điểm mới. Địa chỉ liên hệ và gửi bài:

TẠP CHÍ TOÁN TUỔI THƠ

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, P. Cát Linh, Q. Đống Đa, Hà Nội

Điện thoại: 024.3568 2701; *Fax:* 024.3568 2702.

Email: bbttoantuoitho@gmail.com; tapchitoantuoitho@gmail.com

Website: www.toantuoitho.vn

Trân trọng thông báo để các độc giả được biết và tiện giao dịch.

TOÁN TUỔI THƠ



MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐIỂM TORRICELLI TRONG TAM GIÁC

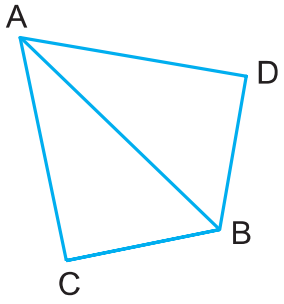
PGS.TS. LÊ QUỐC HÁN
(Khoa Toán, Đại học Vinh, Nghệ An)

Điểm Torricelli trong tam giác: *Cho tam giác ABC có các góc nhỏ hơn 120^o. Có duy nhất một điểm T nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{ATB} = \widehat{ATC} = \widehat{BTC} = 120^o$. Điểm T đó gọi là điểm Torricelli của tam giác ABC. Trước tiên ta xét hai bài toán sau mà chỉ cần sử dụng kiến thức toán lớp 7 để chứng minh:*

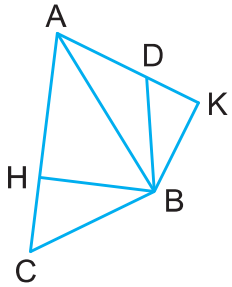
Bài toán 1. Cho hai tam giác ABC và ABD có $\widehat{ACB} + \widehat{ADB} = 180^o$, BC = BD. Hai điểm C và D thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB. Chứng minh rằng AB là tia phân giác của góc CAD.

Lời giải. • Nếu $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^o$ thì $\Delta ABC = \Delta ABD$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Suy ra $\widehat{CAB} = \widehat{DAB}$.



• Nếu $\widehat{ACB} \neq \widehat{ADB}$, không mất tổng quát giả sử $\widehat{ACB} < \widehat{ADB}$. Khi đó $\widehat{ACB} < 90^o < \widehat{ADB}$.



Kẻ BH ⊥ AC, BK ⊥ AD.

Vì $\widehat{ACB} < 90^o < \widehat{ADB}$ nên H thuộc đoạn AC và K thuộc tia đối của tia DA.

Ta có $\widehat{BDK} = 180^o - \widehat{ADB} = \widehat{BCH}$.

Suy ra $\Delta DBK = \Delta CBH$ (cạnh huyền - góc nhọn).

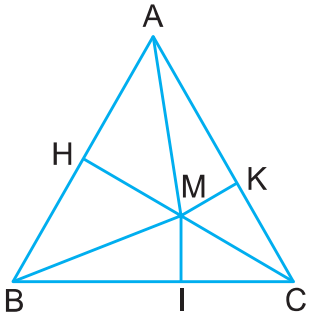
Do đó BH = BK.

Suy ra $\Delta ABH = \Delta ABK$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Suy ra $\widehat{HAB} = \widehat{KAB}$.

Bài toán 2. Cho tam giác đều ABC. Gọi M là điểm nằm trong tam giác. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC, CA. Chứng minh rằng MH + MI + MK không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Lời giải. Gọi chiều cao của tam giác đều ABC là h và độ dài cạnh của tam giác ABC là a.



Ta có $2S_{ABC} = 2S_{AMB} + 2S_{AMC} + 2S_{BMC} = MH.AB + MK.AC + MI.BC = a(MH + MK + MI)$.

Mà $2S_{ABC} = h.a$.

Suy ra MH + MK + MI = h.

Sau đây là hai bài toán giải bằng cách vẽ thêm điểm Torricelli và sử dụng kết quả của bài toán 1 và bài toán 2 mà chỉ cần dùng kiến thức toán lớp 7 để giải quyết:

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

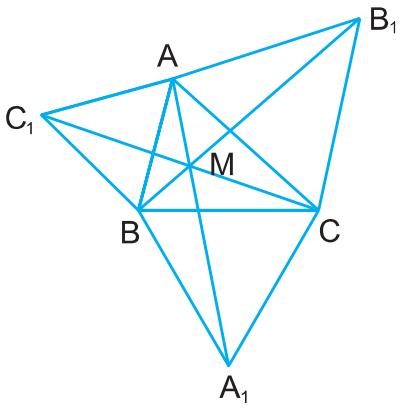
Lời giải. * Cách 1. *Chỉ dùng kiến thức lớp 7 để giải.*

Vì tam giác ABC nhọn nên trong tam giác ABC tồn tại điểm M sao cho

$\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 120^o$.

Ta có $\widehat{BMC} = 360^o - \widehat{AMC} - \widehat{AMB}$

$= 360^o - 120^o - 120^o = 120^o$.



Các tam giác BMA_1 và CMA_1; AMC_1 và BMC_1; AMB_1 và CMB_1 thỏa mãn bài toán 1.

Do đó $\widehat{BMA_1} = \widehat{CMA_1} = \frac{1}{2}.120^o = 60^o$.

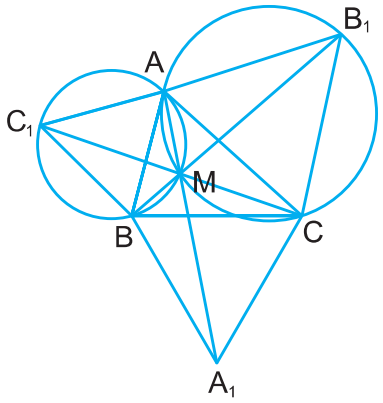
Suy ra $\widehat{BMA_1} + \widehat{AMB} = 60^o + 120^o = 180^o$.

Vậy ba điểm A, M, A_1 thẳng hàng.

Tương tự B, M, B_1 thẳng hàng; C, M, C_1 thẳng hàng.

Suy ra điều phải chứng minh.

* Cách 2. *Sử dụng kiến thức lớp 9 để giải.*



Gọi M là giao điểm đường tròn ngoại tiếp các tam giác CAB_1 và ABC_1.

Ta có các tứ giác $CMAB_1$, $AMBC_1$ nội tiếp.

Vì các cặp tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 là tam giác đều nên $\widehat{AB_1C} = \widehat{BA_1C} = \widehat{AC_1B} = 60^o$.

Do đó

$\widehat{AMC} = 180^o - \widehat{AB_1C} = 180^o - 60^o = 120^o$.

$\widehat{AMB} = 180^o - \widehat{AC_1B} = 180^o - 60^o = 120^o$.

Từ đó kết hợp với tam giác ABC nhọn ta được điểm M nằm trong tam giác ABC và

$\widehat{BMC} = 360^o - \widehat{AMC} - \widehat{AMB}$

$= 360^o - 120^o - 120^o = 120^o$.

Do đó $\widehat{BMC} + \widehat{BA_1C} = 120^o + 60^o = 180^o$.

Suy ra tứ giác $BMCA_1$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{BMA_1} = \widehat{BCA_1} = 60^o$.

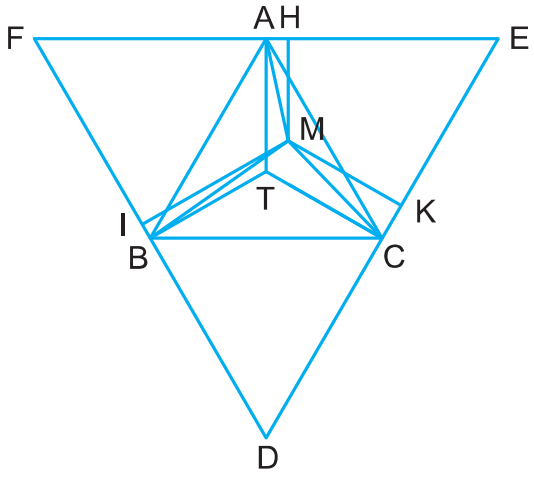
Từ đó $\widehat{BMA_1} + \widehat{AMB} = 60^o + 120^o = 180^o$.

Suy ra ba điểm A, M, A_1 thẳng hàng.

Vậy các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhỏ hơn 120^o và điểm M nằm trong tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho MA + MB + MC nhỏ nhất.

Lời giải.



Gọi T là điểm Torricelli của tam giác ABC. Qua A, B, C lần lượt vẽ các đường thẳng vuông góc với TA, TB, TC, các đường thẳng đó cắt nhau tại D, E, F. Ta có ΔDEF là tam giác đều có chiều cao là h.

Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên EF, FD, DE.

Theo bài toán 2 thì

MA + MB + MC ≥ MH + MI + MK = h

= TA + TB + TC.

Vậy MA + MB + MC nhỏ nhất khi M trùng với T.

ĐỀ THI TOÁN QUỐC TẾ BULGARIA (BIMC) 2018

PHẦN THI CÁ NHÂN CẤP THCS

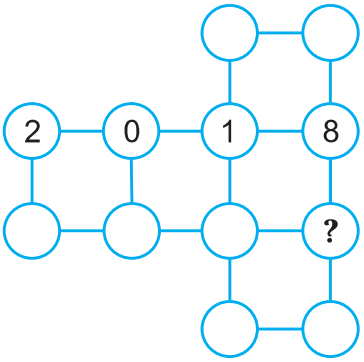
Thời gian làm bài: 90 phút

ThS. PHÙNG KIM DUNG *(Nguyên Tổ trưởng tổ Toán - Tin, Trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Sưu tầm và giới thiệu)*
ThS. ĐỖ THỊ THÚY NGỌC
(Phó Trưởng phòng Giáo dục Trung học, Sở GD - ĐT Ninh Bình, Dịch)

Câu 1. Mark đi xem một bộ phim bắt đầu vào lúc 19 giờ. Cậu ấy đi vệ sinh sau khi xem được một phần ba bộ phim. Khi cậu ấy quay lại, thời gian còn lại của bộ phim dài gấp bảy lần thời gian cậu ở trong nhà vệ sinh. Thời gian từ lúc Mark quay lại xem phim đến 21 giờ 12 phút dài gấp sáu lần thời gian từ 21 giờ 12 phút đến khi hết phim. Hỏi bộ phim kết thúc vào lúc nào?

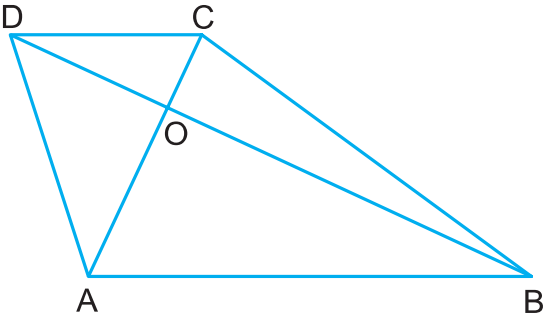
Câu 2. Peter, Anna và Andria mua ba chiếc xe hơi giống nhau với cùng một mức giá. Ban đầu, Peter trả 1300 Euro, Anna trả 1000 Euro và Andria trả 600 Euro. Mỗi tháng sau đó, Peter trả 180 Euro, Anna trả 240 Euro và Andria trả 280 Euro cho đến khi trả hết tiền mua xe. Hỏi giá thấp nhất có thể có của chiếc xe là bao nhiêu Euro?

Câu 3. Trong hình dưới đây có tám hình tròn chưa điền số, điền vào mỗi hình tròn một trong tám số nguyên 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 và 11 sao cho mỗi số nguyên đó được sử dụng đúng một lần và tổng của bốn số ở các đỉnh của mỗi hình vuông là bằng nhau. Tìm số được điền vào đường tròn có đánh dấu "**?**".



Câu 4. Cùng sử dụng hai chữ số, Andrei và Natalie viết ra các số khác nhau có sáu chữ số. Trong mỗi số này, ba chữ số ở các vị trí lẻ là giống nhau và ba chữ số ở các vị trí chẵn cũng giống nhau. Biết 5 lần số của Andrei bằng 6 lần số của Natalie, tìm số của Andrei.

Câu 5. Cho tứ giác ABCD có AB song song với CD, các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại điểm O. Biết AO = p cm, CO = q cm, BO = r cm, DO = s cm, AB = 7 cm và CD = 3 cm, tính giá trị của pq + rs.



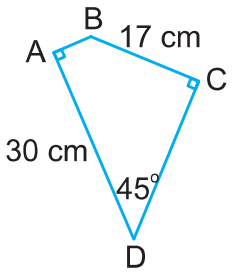
Câu 6. Tổng của 3 số có ba chữ số là 2418. Tất cả 9 chữ số của các số này khác nhau, và hai trong ba số này là bội số của 9. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của số thứ ba.

Câu 7. Biết $\overline{\text{BIMC}} + \overline{\text{BI}} + \overline{\text{MC}} + \text{B} + \text{I} + \text{M} + \text{C} - 1 = 2018$, trong đó B, I, M và C là các chữ số đôi một khác nhau. Tìm giá trị lớn nhất có thể của số có bốn chữ số $\overline{\text{BIMC}}$.

Câu 8. Với bốn chữ số khác 0 đôi một khác nhau, ta có thể tạo ra 24 số có bốn chữ số đôi một khác nhau. Số nhỏ thứ hai trong các số đó là một bội số của 5. Số lớn thứ hai trong các số đó là một số chẵn nhưng không chia hết cho 4. Hiệu số giữa số lớn thứ năm và số

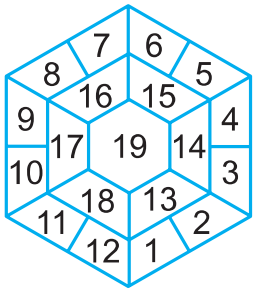
nhỏ thứ năm nằm trong khoảng từ 3000 đến 4000. Tìm giá trị lớn nhất của số lớn nhất trong 24 số đó.

Câu 9. Cho tứ giác ABCD, $AD = 30$ cm, $BC = 17$ cm, $\widehat{ADC} = 45°$ và $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90°$. Tính diện tích của tứ giác ABCD theo đơn vị cm^2.

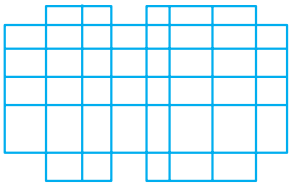


Câu 10. Tổng số tuổi của ba cậu bé trong một gia đình là 25 và tích của ba số tuổi này là 360. Điều này cũng đúng với số tuổi của ba cô bé trong cùng gia đình đó. Cậu bé lớn thứ hai thì nhiều tuổi hơn cô bé lớn thứ hai. Hỏi cậu bé lớn thứ hai nhiều hơn cô bé lớn thứ hai bao nhiêu tuổi?

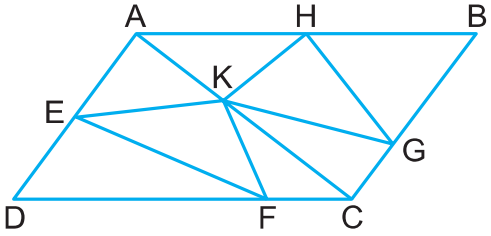
Câu 11. Cho một căn phòng hình lục giác như trong hình dưới đây. Sàn của căn phòng được phủ bằng 19 tấm thảm với 4 màu khác nhau. Hai tấm thảm có chung cạnh dọc theo viền của chúng thì phải có màu khác nhau. Chỉ có hai màu được dùng cho vòng thứ hai và nhiều nhất một tấm thảm ở vòng ngoài là có cùng màu với tấm thảm ở chính giữa. Hai cách phối màu là khác nhau nếu có ít nhất một tấm thảm được đổi màu. Hỏi có bao nhiêu cách phối màu khác nhau?



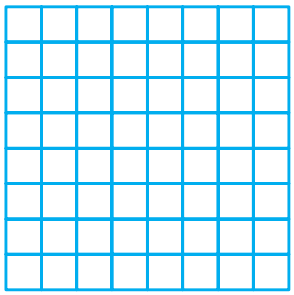
Câu 12. Có bao nhiêu hình chữ nhật trong hình dưới đây?



Câu 13. Cho hình bình hành ABCD có E là trung điểm của AD, H là trung điểm của AB. G, F và K là các điểm lần lượt thuộc BC, CD và CA sao cho $BG = 2GC$, $DF = 3FC$ và $2CK = 3KA$. Diện tích của hình bình hành ABCD là 240 cm^2. Tìm hiệu diện tích của hai tam giác EFK và HKG theo đơn vị cm^2.



Câu 14. Cho một bảng 8×8 gồm các ô vuông đơn vị, được điền bởi các số nguyên từ 1 đến 64, mỗi số được dùng đúng một lần. Bạn có thể chọn ô vuông để điền số 1. Sau đó số 2 phải được điền vào ô vuông kề với ô vuông chứa số 1 trong cùng một hàng hoặc cùng một cột, số 3 được điền vào ô vuông kề với ô vuông chứa số 2 trong cùng một hàng hoặc cùng một cột,... Tìm số lớn nhất các số nguyên tố mà bạn có thể điền vào cùng một hàng.



Câu 15. Có bao nhiêu miền hình chữ nhật (bao gồm cả các miền hình vuông) trong bảng dưới đây có tính chất: Tổng các số trong miền đó chia hết cho 49?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49



"TRUY TÌM" CHIẾC MŨ BẢO HIỂM

LÊ HỒNG MAI *(Hà Nội)*

Hiếm khi có ngày cuối tuần trời đẹp thám tử Sê Lốc Cốc quyết định cho mình một ngày nghỉ ngơi thoải mái.

- Bố ơi! Hôm nay bố có bận gì không? Sê Lốc Con nói.

- Bố đang rảnh đây. Có việc gì thế?

- Thế thì bố con mình sang bác Sê Lốc Ca chơi đi. Anh Ly hứa tuần này cho con đi đá bóng.

- Được thôi, con gọi điện xem anh có nhà không?

Sau cuộc điện thoại, Sê Lốc Con thưa:

- Anh Ly đang bị mắng bố ạ. Con còn nghe thấy cả tiếng nói to của bác Sê Lốc Ca.

- Thế à! Có chuyện gì nhỉ? Để bố gọi cho bác ý xem nào?

Qua điện thoại, bác Sê Lốc Ca kể lể một hồi:

- Ôi trời, có chuyện cỏn con mà hai mẹ con ầm ĩ từ sáng đến giờ chú ạ. Con tôi không tìm được cái mũ bảo hiểm của nó đâu cả.

- Ôi, có cái mũ mà sao cũng to chuyện thế bác?

- Thì thế đấy, mỗi khi mẹ con nhà này giận dỗi nhau anh mệt lắm, cứ làm sứ giả kiêm trọng tài cả ngày.

- Hì hì, để em đưa cháu sang chơi và hỏi chuyện cụ thể xem sao.

Khoảng 10 phút sau tại nhà Sê Lốc Ca.

- Thanh niên yêu quý của chú đâu rồi! Đàn ông thanh niên gì mà có chút chuyện cỏn con cũng ấm ức vậy.

Vợ Sê Lốc Ca thở dài:

- Chú đấy à! Bao nhiêu lần chị mua mũ bảo hiểm cho cu cậu rồi, toàn mũ đắt tiền, hàng chính hãng cả. Nhưng mà đãng trí lắm, cứ vài ngày lại mất. Chiếc mũ cu cậu dùng thích nhất, nhưng tìm không thấy. Nó làm mình làm mẩy đổ lỗi tại mẹ. Chị có đi đâu mà dùng mũ bảo hiểm, cũng chẳng cho ai mượn cả. Hơn nữa mũ của nó như mũ công binh ấy, màu thì màu bộ đội, ai mà đội nổi ngoài mấy bạn thanh niên.

Sê Lốc Ly từ trên nhà đi xuống nghe thấy vậy liền giải thích, giọng điệu vẫn đầy ấm ức:

- Cháu không bao giờ quên đội mũ bảo hiểm khi đi xe máy chú ạ. Đội đi thì phải đội về đúng không chú? Mẹ cháu cứ bảo là do cháu bỏ quên ở đâu đấy.

Sê Lốc Cốc nói:

- Thế cháu có tạt qua chỗ nào không?

- Cháu chỉ có từ nhà đến chỗ gửi xe rồi vào trường thì quên ở đâu được ạ. Chắc chắn hôm qua cháu có đội mũ về mà.

- Chắc mũ của cháu bị mất ở chỗ gửi xe rồi. Lần sau nhớ cất mũ vào cốp xe.

- Cháu để mũ trong cốp xe cháu không gửi xe trong trường, mà cháu để xe ở nhà bạn gần trường nên không bao giờ bị mất gì ạ.

Thám tử Sê Lốc Cốc suy nghĩ:

- Có lẽ chú phải "điều tra" thật rồi. Thôi, ăn trưa rồi chiều đưa em đi đá bóng nhé! Chú sẽ tìm ra cái mũ của cháu.
- Vâng ạ. Nhưng chú ơi, chiều nay cháu không đi đá bóng với em được. Cháu phải đến trường. Mà không có mũ thì đi sao được đây ạ?

Sê Lốc Cốc thắc mắc:
- Thế còn cái mũ trắng kia?
- Đây là mũ của bạn cháu, hôm qua mang sách cho cháu bạn ấy để quên ạ! Chiều cháu phải qua nhà đưa cho bạn ấy.
- Bạn ấy đi xe máy à?
- Vâng, bạn ấy giống cháu, không đội mũ bảo hiểm thì không bao giờ ra đường ạ. Chiều nay bọn cháu đến trường để duyệt kịch cho thứ Hai đầu tuần này tổ chức hoạt động sân khấu hoá tác phẩm văn học.
- À, lại còn biết diễn kịch nữa đấy. Lớp cháu diễn vở kịch gì vậy?
- Diễn kịch "O du kích nhỏ giương cao súng". Bạn cháu đóng vai lĩnh Mỹ đấy ạ. Cháu thì đóng vai bộ đội.
- Trang phục, dụng cụ để diễn kịch các cháu lấy ở đâu?
- Dạ, chúng cháu tự biên tự diễn ạ!

Thám tử Sê Lốc Cốc gật gù:
- Chiều tiện đường chú đưa cháu qua trường luôn. Chú đã đoán được cháu để mũ ở đâu rồi.
- Thế ạ. Chú làm sao biết được! Ôi, cháu nhớ ra rồi…
- Chuyện nhỏ xíu thế mà làm khó được chú thì chú đâu còn được gọi là Sê Lốc Cốc! Mẹ cháu mắng tội đãng trí của cháu là đúng rồi!

Theo cách dẫn dắt của thám tử Sê Lốc Cốc, Sê Lốc Ly đã nhớ ra cái mũ bảo hiểm đang ở đâu? Còn các bạn, các bạn có biết chiếc mũ ấy nó đang ở đâu không?

Kết quả **(TTT2 số 184)**

Hiện trường giả!

Như chúng ta đã biết, thời điểm diễn ra câu chuyện này là đầu hè, trời nắng nóng gay gắt. Gần hai tuần nay, hôm nào Mặt Trời cũng chói chang từ sáng sớm đến chiều tối. Với thời tiết như vậy thì đất đai phải khô ráo, đã thế lại không mưa thì lấy đâu ra bùn đất. Ấy vậy mà, trong văn phòng lại bê bết vết bùn đất trên sàn nhà. Điều đó chứng tỏ rằng có kẻ nào đó cố tình dựng lên hiện trường giả nhằm qua mặt cảnh sát. Nhưng thật không may, với tài ba của thám tử Sê Lốc Cốc thì mọi việc đã sáng tỏ.

Thám tử cũng rất vui vì có nhiều "thám tử Tuổi Hồng" cũng tìm ra điểm vô lí này. Chỉ có điều nhiều bạn chắc mải mê nhiệm vụ phá án mà trên bài viết gửi về chỉ ghi mỗi họ tên, quên hẳn địa chỉ trường lớp, hoặc cũng có bạn quên mất không ghi tên quận, huyện hoặc tỉnh, thành phố. Địa chỉ không rõ ràng và đầy đủ thì thám tử không trao quà được đâu nhé.

Kì này thám tử Sê Lốc Cốc sẽ trao quà cho những bạn sau: *Nguyễn Huy Tuấn Kiệt, Nguyễn Phương Linh*, 6A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Trịnh Bình An*, 8A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Đỗ Thị Thư*, 6D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Lê Quang Chiến*, 9A, THCS Quang Sơn, TP. Tam Điệp, **Ninh Bình**.

Thám tử Sê Lốc Cốc



PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ
BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV. THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

Phân tích đa thức thành nhân tử là một trong những kĩ năng cần thiết nhất với học sinh bậc trung học cơ sở. Trong chương trình sách giáo khoa lớp 8, học sinh được làm quen với các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử: Đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm hạng tử và phối hợp nhiều phương pháp. Bài viết này chúng tôi xin giới thiệu phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách đặt ẩn phụ. Chúng ta xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $A = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$;

b) $B = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$;

c) $C = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$;

d) $D = (a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5$.

Lời giải. Đặt $x = a-b$; $y = b-c$ thì $x+y = a-c$.

a) Ta có

$$A = abx + bcy - ca(x+y) = ax(b-c)$$
$$-cy(a-b) = axy - cxy = xy(a-c)$$
$$= (a-b)(b-c)(a-c).$$

b) Ta có

$$B = x^3 + y^3 - (x+y)^3$$
$$= x^3 + y^3 - x^3 - 3xy(x+y) - y^3$$
$$= -3xy(x+y) = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

c) Ta có

$$C = ay^3 - b(x+y)^3 + cx^3$$
$$= ay^3 - b\left[x^3 + y^3 + 3xy(x+y)\right] + cx^3$$
$$= y^3(a-b) - x^3(b-c) - 3bxy(x+y)$$
$$= xy^3 - x^3y - 3bxy(x+y)$$
$$= xy\left(y^2 - x^2\right) - 3bxy(x+y)$$
$$= xy(x+y)(y-x-3b)$$
$$= xy(x+y)(b-c-a+b-3b)$$
$$= -xy(x+y)(a+b+c)$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

d) Ta có

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)^4$$
$$= (x+y)\left(x^2 + 2xy + y^2\right)^2$$
$$= (x+y)\left(x^4 + 4x^2y^2 + y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 2x^2y^2\right)$$
$$= (x+y)\left(x^4 + y^4\right) + (x+y)\left(4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3\right)$$
$$= x^5 + y^5 + xy\left(x^3 + y^3\right)$$
$$+xy(x+y)\left(4x^2 + 6xy + 4y^2\right)$$
$$= x^5 + y^5 + xy(x+y)\left(5x^2 + 5xy + 5y^2\right)$$
$$= x^5 + y^5 + 5xy(x+y)\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

Do đó

$$D = x^5 + y^5 - (x+y)^5 = x^5 + y^5$$
$$-\left[x^5 + y^5 + 5xy(x+y)\left(x^2 + xy + y^2\right)\right]$$
$$= -5xy(x+y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$
$$= 5(a-b)(b-c)(c-a)\times$$
$$\times\left[(a-b)^2 + (a-b)(b-c) + (b-c)^2\right]$$

$$= 5(a-b)(b-c)(c-a)\times$$
$$\times\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

Ví dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $A = a\left(b^3-c^3\right)+b\left(c^3-a^3\right)+c\left(a^3-b^3\right);$

b) $B = a^3\left(b^2-c^2\right)+b^3\left(c^2-a^2\right)+c^3\left(a^2-b^2\right).$

Lời giải. a) Đặt $x = a^3-b^3; y = b^3-c^3$ thì $x+y = a^3-c^3$, khi đó ta có

$$A = ay-b(x+y)+cx = y(a-b)-x(b-c)$$
$$= \left(b^3-c^3\right)(a-b)-\left(a^3-b^3\right)(b-c)$$
$$= (b-c)(a-b)\left(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2\right)$$
$$= (b-c)(a-b)\left(bc-ab+c^2-a^2\right)$$
$$= (b-c)(a-b)(c-a)(a+b+c).$$

b) Đặt $x = a^2-b^2;\ y = b^2-c^2$ thì $x+y = a^2-c^2$, khi đó ta có

$$B = a^3y-b^3(x+y)+c^3x$$
$$= y\left(a^3-b^3\right)-x\left(b^3-c^3\right)$$
$$= \left(b^2-c^2\right)\left(a^3-b^3\right)-\left(a^2-b^2\right)\left(b^3-c^3\right)$$
$$= (b-c)(a-b)\times$$
$$\times\left[(b+c)\left(a^2+ab+b^2\right)-(a+b)\left(b^2+bc+c^2\right)\right].$$

Ta có

$$(b+c)\left(a^2+ab+b^2\right)-(a+b)\left(b^2+bc+c^2\right)$$
$$= b\left(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2\right)+$$
$$+\left(a^2c+abc+b^2c-ab^2-abc-ac^2\right)$$
$$= b(a-c)(a+b+c)+\left[ac(a-c)-b^2(a-c)\right]$$
$$= (a-c)\left(ab+b^2+bc+ac-b^2\right)$$
$$= (a-c)(ab+bc+ac).$$

Suy ra

$$B = (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ac).$$

Ví dụ 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $A = (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3;$

b) $B = x(x+2y)^3-y(y+2x)^3;$

c) $C = x^4+(x+y)^4+y^4;$

d) $D = a^4+b^4+c^4-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$

Lời giải. a) Đặt $m = a+b+c$, ta có

$$A = m^3-a^3-\left(b^3+c^3\right)$$
$$= (m-a)\left(m^2+ma+a^2\right)-(b+c)\left(b^2-bc+c^2\right)$$
$$= (b+c)\left(m^2+ma+a^2-b^2+bc-c^2\right)$$
$$= (b+c)\left[\left(m^2-b^2\right)+\left(a^2-c^2\right)+(ma+bc)\right]$$
$$= (b+c)\times$$
$$\times\left[(m-b)(m+b)+(a-c)(a+c)+(a+b)(a+c)\right]$$
$$= (b+c)(a+c)(m+b+a-c+a+b)$$
$$= 3(b+c)(a+c)(a+b).$$

b) Đặt $m = x+y,$ ta có

$$B = x(m+y)^3-y(m+x)^3$$
$$= x\left[m^3+3my(m+y)+y^3\right]-$$
$$-y\left[m^3+3mx(m+x)+x^3\right]$$
$$= m^3(x-y)-xy\left(x^2-y^2\right)-$$
$$-3mxy(m+x-m-y)$$
$$= (x-y)\left(m^3-xy(x+y)-3mxy\right)$$
$$= m(x-y)\left(m^2-4xy\right)$$
$$= m(x-y)\left((x+y)^2-4xy\right)$$
$$= m(x-y)^3 = (x+y)(x-y)^3.$$

c) Đặt $m = x+y,$ ta có

$$C = (m-y)^4+m^4+y^4$$
$$= m^4-4m^3y+6m^2y^2-4my^3+y^4+m^4+y^4$$
$$= 2\left(m^4+2m^2y^2+y^4\right)-4my\left(m^2+y^2\right)+2m^2y^2$$
$$= 2\left(m^2+y^2-my\right)^2$$

$= 2\left[(x+y)^2 + y^2 - (x+y)y\right]^2 = 2\left(x^2 + xy + y^2\right)^2.$

d) Đặt $m = a^2 + b^2 + c^2$, ta có

$D = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 4\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)$

$= m^2 - 4\left[b^2\left(a^2 + c^2\right) + c^2a^2\right]$

$= m^2 - 4\left[b^2\left(m - b^2\right) + c^2a^2\right]$

$= \left(m - 2b^2\right)^2 - (2ca)^2$

$= \left(m - 2b^2 - 2ca\right)\left(m - 2b^2 + 2ca\right)$

$= \left(a^2 + b^2 + c^2 - 2b^2 - 2ca\right)\times$

$\times\left(a^2 + b^2 + c^2 - 2b^2 + 2ca\right)$

$= \left[(a-c)^2 - b^2\right]\left[(a+c)^2 - b^2\right]$

$= (a - c - b)(a - c + b)(a + c - b)(a + b + c).$

Ví dụ 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $A = a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 +$

$+ c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c);$

b) $B = (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 -$

$- (c+a-b)^3;$

c) $C = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) -$

$- a^3 - b^3 - c^3 - 2abc.$

Lời giải. a) Đặt $m = x + y + z$ và

$\begin{cases} a+b-c=z \\ b+c-a=x \\ c+a-b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=y+z \\ 2b=z+x \\ 2c=x+y \end{cases}$, khi đó ta có

$2A = (y+z)x^2 + (x+z)y^2 + (y+x)z^2 + 2xyz$

$= xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz$

$= xy(m-z) + yz(m-x) + zx(m-y) + 2xyz$

$= m(xy + yz + zx) - xyz$

$= (x+y)(y+z)(z+x) = 2c.2a.2b.$

Suy ra $A = 4abc.$

b) Đặt $a + b - c = z;\ b + c - a = x;\ c + a - b = y.$

Suy ra $x + y + z = a + b + c$, ta có

$B = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

$= 3(x+y)(y+z)(z+x)$

$= 3.2c.2a.2b = 24abc.$

c) Đặt $\begin{cases} a+b-c=z \\ b+c-a=x \\ c+a-b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=y+z \\ 2b=z+x \\ 2c=x+y. \end{cases}$

Ta có

$4C = 4a^2(b+c-a) + 4b^2(c+a-b)$

$+ 4c^2(a+b-c) - 8abc$

$= (y+z)^2 x + (z+x)^2 y + (x+y)^2 z$

$-(x+y)(y+z)(z+x)$

$= xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$

$-(x+y)(y+z)(z+x) + 6xyz$

$= xy(x+y) + yz(x+y) + zx(x+y)$

$+ z^2(x+y) - (x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz$

$= (x+y)\left(xy + yz + zx + z^2\right)$

$-(x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz$

$= (x+y)(y+z)(z+x) - (x+y)(y+z)(z+x)$

$+ 4xyz = 4xyz.$

$\Rightarrow C = xyz = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$

Bài tập vận dụng

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc;$

b) $a\left(b^2 - c^2\right) + b\left(c^2 - a^2\right) + c\left(a^2 - b^2\right);$

c) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b);$

d) $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b);$

e) $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3;$

g) $a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a);$

h) $(a+b+c)^3 - 4\left(a^3 + b^3 + c^3\right) - 12abc;$

i) $a\left(b^2 + c^2\right) + b\left(c^2 + a^2\right) + c\left(a^2 + b^2\right) + 2abc;$

j) $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 - a^3$

$- b^3 - c^3 + 4abc.$



Kì này CÓ CÁCH NÀO KHÔNG?

Bài toán. Trên bảng ghi các số 1; 2; 3; ...; 10; 11. Mỗi lần bạn Hà xóa hai số bất kì trên bảng và thay vào đó một số bằng tổng các lập phương của hai số đó. Sau 10 lần thực hiện thao tác trên, chỉ còn đúng một số trên bảng. Hỏi có cách nào giúp Hà có được số còn lại trên bảng là 2018 không?

TẠ THẬP *(TP. Hồ Chí Minh)*

Kết quả **(TTT2 số 184)**

CHẴN HAY LẺ?

Ta có nếu a là số tự nhiên lẻ thì a^2 chia 4 dư 1.

Giả sử x, y, z, t, u, v đều là các số lẻ thì khi đó ta có $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ chia hết cho 4.

Mà $u^2 + v^2$ chia 4 dư 2.

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \neq u^2 + v^2$ (điều này trái với giả thiết).

Do đó trong sáu số x, y, z, t, u, v tồn tại ít nhất một số là số chẵn, hay tích xyztuv là một số chẵn.

Vậy tích xyztuv là một số chẵn.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn tham gia giải bài, hầu hết các bạn đều giải đúng. Một số bạn có lời giải hơi dài. Các bạn sau có lời giải tốt và được thưởng là: *Trần Cao Bảo Châu*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Buôn Ma Thuật, **Đắk Lắk**; *Nguyễn Nhật Minh*, 7A, THPT Chuyên Hà Nội - Amsterdam, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Huỳnh Nguyên Phát*, 6A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định**; *Lê Ánh Nguyệt*, 7A3, *Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 8I, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Quách Thạch Thảo*, 7A3, Vũ Minh Khải, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Minh Tiến*, 8A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**.

ANH COMPA

Kết quả Cuộc thi giải toán...

(Tiếp theo trang 30)

Xét tam giác MAC có DN // AC nên theo định lí Thales ta có $\frac{MD}{CD} = \frac{MN}{AN}$.

Mặt khác trong tam giác BAM có BN là đường phân giác góc ABM nên $\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AN}$.

Ta lại có AB = CD nên suy ra BM = MD.

Do đó M ≡ K.

Vậy ba điểm A, K, F thẳng hàng.

Nhận xét. Rất tiếc không có bạn nào giải đúng bài này.

Các bạn được thưởng kì này: *Nguyễn Minh Ngọc*, 8C, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 8I, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Huỳnh Bảo Uyên*, 9A7, THCS Thốt Nốt, Thốt Nốt, **Cần Thơ**; *Trần Cao Bảo Châu*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Buôn Ma Thuật, **Đắk Lắk**.

CAO VĂN DŨNG

Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(184). Cho tổng gồm 1016 số hạng là $S=\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+...+\frac{1}{2016}$.

Hãy so sánh S với $\frac{11}{14}$.

Lời giải. Gọi a, b là hai số tự nhiên thỏa mãn $b>a+1$ thì $ab<(a+1)(b-1)$. (1)

Thật vậy $(a+1)(b-1)=ab+b-(a+1)>ab$

hay $ab<(a+1)(b-1)$.

Ta có

$$S=\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{2016}\right)+\left(\frac{1}{1002}+\frac{1}{2015}\right)+...$$

$$+\left(\frac{1}{1508}+\frac{1}{1509}\right)$$

$$=3017\left(\frac{1}{1001.2016}+\frac{1}{1002.2015}+...+\frac{1}{1508.1509}\right).$$

Áp dụng (1) ta được

$1001.2016<1002.2015<1003.2014<...$

<1508.1509.

Từ đó ta có

$$\frac{1}{1001.2016}>\frac{1}{1002.2015}>...>\frac{1}{1508.1509}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1001.2016}+\frac{1}{1002.2015}+...+\frac{1}{1508.1509}$$

$$<\frac{508}{1001.2016}.$$

Suy ra $S<\frac{3017.508}{1001.2016}<\frac{11}{14}$.

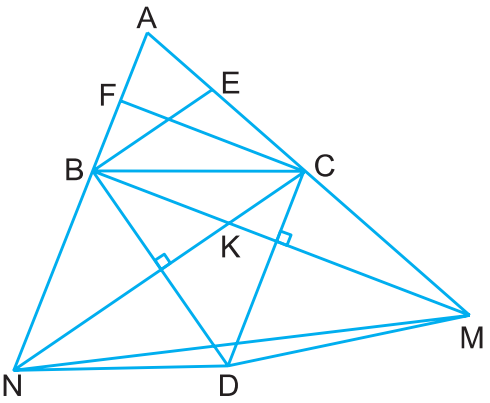
Vậy $S<\frac{11}{14}$.

Nhận xét. Có nhiều bạn gửi lời giải đến tòa soạn. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Lê Minh Long*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Tuấn Dương*, *Nguyễn An Thịnh*, 7B5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Trần Chí Đạt*, 6E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

PHÙNG KIM DUNG

Bài 2(184). Cho tam giác ABC với $AB<AC$ và $\widehat{BAC}>60^o$. Vẽ các đường phân giác BE và CF của ΔABC. Đường thẳng qua B song song với CF cắt AC ở M, đường thẳng qua C song song với BE cắt AB ở N, và cắt BM ở K. So sánh KM với KN.

Lời giải.



Từ giả thiết BE // CN nên ta có $\widehat{ABE}=\widehat{BNC}$ (hai góc đồng vị); $\widehat{EBC}=\widehat{BCN}$ (hai góc so le trong).

Mà $\widehat{ABE}=\widehat{EBC}$ nên $\widehat{BNC}=\widehat{BCN}$.

Từ đó ΔBNC cân tại B, suy ra $BC=BN$.

Chứng minh tương tự ta có ΔBCM cân tại C. Suy ra $BC=CM$.

Do đó $BN=BC=CM$.

Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với CN, từ C kẻ đường thẳng vuông góc với BM, hai đường thẳng này cắt nhau tại D.

Vì $\widehat{BAC}>60^o$ nên $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}<120^o$.

Suy ra $\frac{\widehat{ABC}}{2}+\frac{\widehat{ACB}}{2}=\widehat{BCK}+\widehat{CBK}<60^o$.

Từ đó $\widehat{BKC}>120^o\Rightarrow\widehat{BKN}<60^o$.

Mà $\widehat{BKN}=\widehat{BDC}$ (cùng bù với $\widehat{NKM}$) nên $\widehat{BDC}<60^o$.

Dễ dàng chứng minh được BD, CD lần lượt là các đường trung trực của CN, BM.

Do đó $\widehat{BDN} = \widehat{BDC} = \widehat{CDM}$, suy ra

$\widehat{BDN} + \widehat{BDC} + \widehat{CDM} < 60^o + 60^o + 60^o = 180^o$.

Từ đó D khác phía với B, C so với đường thẳng MN.

Vì AB < AC nên $\widehat{ABC} > \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{EBC} > \widehat{FCB}$.

Suy ra $\widehat{KCB} > \widehat{KBC}$, mà $\widehat{KBD} = \widehat{KCD}$ (cùng phụ với $\widehat{BKN}$) nên $\widehat{BCD} > \widehat{CBD}$.

Từ đó BD > CD.

Ta lại có BD = DM và CD = DN.

Suy ra DM > DN $\Rightarrow \widehat{DNM} > \widehat{DMN}$. (1)

Vì $\widehat{DNC} = \widehat{DCN}$, $\widehat{DMB} = \widehat{DBM}$ nên

$\widehat{DNC} = \widehat{DMB}$ (do $\widehat{DCN} = \widehat{DBM}$). (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{KNM} < \widehat{KMN}$.

Suy ra KM < KN.

Nhận xét. Có rất nhiều bài gửi về tòa soạn tuy nhiên chỉ có một số bạn có lời giải đúng. Bạn có lời giải tốt được khen kì này: *Nguyễn An Thịnh*, 7B5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**.

HỒ QUANG VINH

Bài 3(184). Giải phương trình

$3x^2 + 5x + 14 = 5(x+1)\sqrt{4x-1}$.

Lời giải. ĐKXĐ $x \ge \frac{1}{4}$. Đặt $a = \sqrt{4x-1} \ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$3x^2 + 5x + 14 - 5(x+1)a = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(4x-1) + 13x + 12 - 5xa - 5a = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2a^2 - 5xa + 13x + 12 - 5a = 0$

$\Leftrightarrow (x-2a)(3x+a) + 3(3x+a) + 4(x-2a) + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2a+3)(3x+a+4) = 0$. (1)

Vì $x \ge \frac{1}{4}$, $a \ge 0$ nên $3x + a + 4 > 0$.

Suy ra (1) $\Leftrightarrow 0 = x - 2a + 3$

$\Leftrightarrow x + 3 = 2\sqrt{4x-1} \Leftrightarrow (x+3)^2 = 4(4x-1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 12 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 12$

$\Leftrightarrow x - 5 = \pm 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 + 2\sqrt{3} \\ x = 5 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

(thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có hai nghiệm là $5 - 2\sqrt{3}$ và $5 + 2\sqrt{3}$.

Nhận xét. Đây là bài toán giải phương trình dựa vào kĩ năng phân tích thành nhân tử, dạng cơ bản. Các bạn sau có lời giải tốt: *Lê Danh Vinh*, 8A1, THCS Yên Phong; *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Minh Khải*, *Cao Ngọc Khoa*, *Nguyễn Công Hải*, *Nguyễn Công Hùng*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Quang Huy*, *Nguyễn Thanh Nguyên*, *Lê Văn Quang Trung*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài 4(184). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4(a+b+c)^2 + 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, với a, b, c là các số thực dương.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9.$$

Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$.

Do đó $A \ge 4(a+b+c)^2 + \frac{27}{a+b+c}$. (1)

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $4(a+b+c)^2 + \frac{27}{a+b+c}$

$$= 4(a+b+c)^2 + \frac{27}{2(a+b+c)} + \frac{27}{2(a+b+c)}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{4(a+b+c)^2 \cdot \frac{27}{2(a+b+c)} \cdot \frac{27}{2(a+b+c)}} = 27. \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \ge 27$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Vậy min A = 27 khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Bài toán này có nhiều cách giải. Một số bạn sử dụng phép khai triển trực tiếp rồi dùng bất đẳng thức AM-GM theo từng nhóm nhỏ: $4a^2 + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}$, $8ab + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, ... cũng thu được lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Lê Danh Vinh, Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, 8A1, *Nguyễn Mạnh Kiên*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; *Nguyễn*

Trung Hoàng, 8C, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS thị trấn Chờ, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**; *Nguyễn Trọng Đức* và *Nguyễn Xuân Hưng*, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, *Lê Văn Quang Trung, Lê Văn Mạnh*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Lê Quang Chiến*, 9A, THCS Quang Sơn, TP. Tam Điệp, **Ninh Bình**; *Lương Minh Hiếu*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Nguyễn Công Hùng*, *Vũ Minh Khải*, *Nguyễn Công Hải, Cao Ngọc Khoa*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

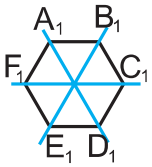
VÕ QUỐC BÁ CẨN

Bài 5(184). Một mạng lưới các hình tam giác đều với cạnh có độ dài 1 lập thành một hình lục giác đều với cạnh có độ dài 2018. Tính số các giao điểm trong mạng lưới này.

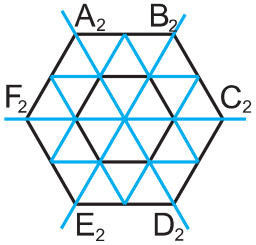
Lời giải. Hình lục giác cạnh 1 có 7 giao điểm, $7 = 1 + 1.6$ *(Hình 1)*.

Hình lục giác cạnh 2 có số giao điểm là tổng số giao điểm của hình lục giác cạnh 1 với số giao điểm trên 6 cạnh của hình lục giác cạnh 2. Mỗi cạnh của hình lục giác cạnh 2 có 3 giao điểm nhưng có 6 giao điểm (6 đỉnh) đã tính 2 lần nên có số giao điểm tăng thêm là $3.6 - 6 = 12$, $12 = 2.6$.

Do đó hình lục giác cạnh 2 có số giao điểm là $7 + 2.6 = 19$ *(Hình 2)*.



Hình 1



Hình 2

Để ý thấy $19 = 1 + 1.6 + 2.6 = 1 + (1 + 2)6$.

Hình lục giác cạnh 3 có số giao điểm là tổng số giao điểm của hình lục giác cạnh 2 với số giao điểm trên 6 cạnh của hình lục giác cạnh 3. Mỗi cạnh của hình lục giác cạnh 3 có 4 giao điểm nhưng có 6 giao điểm đã tính 2 lần nên có số giao điểm tăng thêm là $4.6 - 6 = 18$.

Do đó hình lục giác cạnh 3 có số giao điểm là $19 + 18 = 37$ *(Hình 3)*.

Để ý thấy

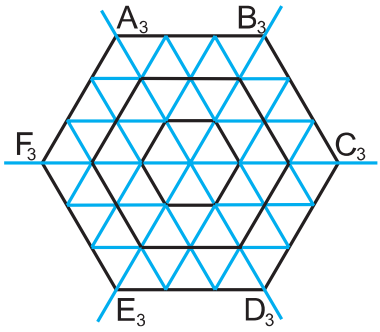
$37 = 1 + 1.6 + 2.6 + 3.6 = 1 + (1 + 2 + 3)6$.

Ta dự đoán hình lục giác cạnh n có số giao điểm là

$1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)6 = 1 + 3n(n + 1)$. (*)

Ta chứng minh bằng quy nạp như sau:

Ta thấy (*) đúng với $n = 1$.



Hình 3

Giả sử (*) đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k > 1$), tức là hình lục giác cạnh k sẽ có số giao điểm là $1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + k)6$.

Ta sẽ chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$. Hình lục giác cạnh $k + 1$ có số giao điểm là tổng số giao điểm của hình lục giác cạnh k với số giao điểm trên 6 cạnh của hình lục giác cạnh $k + 1$. Mỗi cạnh của hình lục giác cạnh $k + 1$ có $k + 2$ giao điểm nhưng có 6 giao điểm đã tính 2 lần nên có số giao điểm tăng thêm là $(k + 2)6 - 6 = 6k + 6$.

Do đó hình lục giác cạnh $k + 1$ có số giao điểm là $1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + k)6 + 6k + 6 = 1 + [1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1)]6$, suy ra (*) đúng với $n = k + 1$.

Vậy theo quy nạp thì (*) luôn đúng với mọi n, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Thay $n = 2018$, hình lục giác cạnh 2018 có $1 + 2018(2018 + 1)3 = 12223027$ giao điểm.

Nhận xét. Đây là bài toán đếm hình thú vị, thường có trong các kì thi Toán trên thế giới ở lứa tuổi THCS như IMC, IMSO, ... Các bạn có thể thấy mối liên hệ giữa quy luật dãy số với quy luật dãy các hình. Các bạn sau có lời giải tốt được khen là: *Nguyễn Tuấn Dương*, 7B5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Lê Danh Vinh*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Hà Tự Linh*, 7A1, THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội**.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

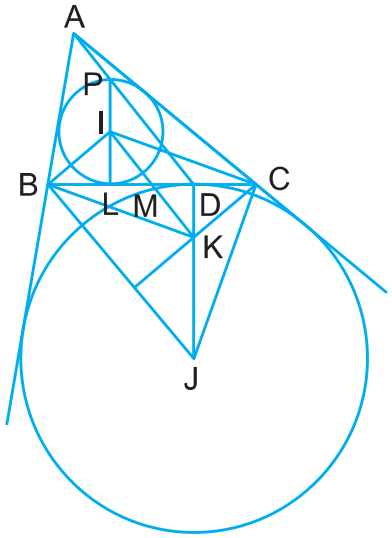
Bài 6(184). Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, trực tâm H và trung tuyến AM. Gọi K, L là các điểm đối xứng với D qua các trục AC, AB theo thứ tự. Đường thẳng qua D vuông góc HM cắt CA, AB tương ứng tại E, F. KE cắt LF tại P. Đường thẳng qua A vuông góc với AP cắt trung trực của AD tại S. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL. Chứng minh rằng ST ⊥ AT.

Lời giải. *Để chứng minh bài toán này ta sử dụng hai bổ đề sau.*

• **Bổ đề 1.** Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại L. Đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A là (J). (J) tiếp xúc BC tại D. LP là đường kính của (I). Khi đó A, D, P thẳng hàng.

Bổ đề này là một kết quả quen thuộc, bạn đọc tự chứng minh.

• **Bổ đề 2.** Cho tam giác ABC có đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A là (J). (J) tiếp xúc BC tại D. M là trung điểm của BC. K là trực tâm tam giác JBC. Khi đó AD // KM.



Ta chứng minh bổ đề 2.

Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC tại L, LP là đường kính của (I). Theo bổ đề 1 thì A, P, D thẳng hàng. Theo tính chất đường trung bình thì MI // AD. (1)

Mặt khác, do BI và BJ lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài đỉnh B của ΔABC nên BI ⊥ BJ.

Tương tự CI ⊥ CJ.

Ta có K là trực tâm ΔBCJ nên CK ⊥ BJ; BK ⊥ CJ.

Từ đó suy ra BI // CK và IC // BK.

Do vậy BICK là hình bình hành.

Vậy IK đi qua M. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra AD // KM.

Trở lại bài toán

Gọi giao điểm của BL và CK là N.

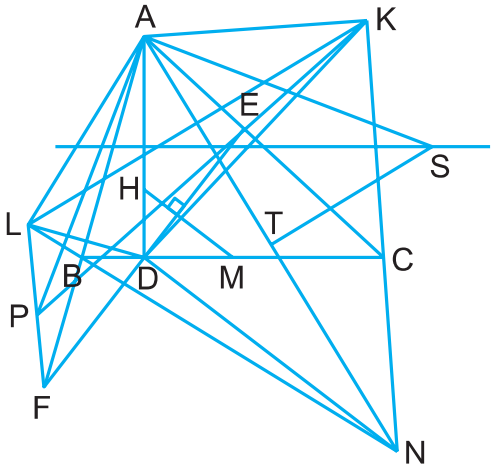
Ta có $\widehat{ALN} = \widehat{ADB} = 90^o = \widehat{ADC} = \widehat{AKC}$.

Suy ra L, A, K, N cùng nằm trên đường tròn (T) đường kính AN. (3)

Theo tính chất đối xứng ta có

$\widehat{PLN} = \widehat{BDF} = \widehat{CDE} = \widehat{CKP}$.

Từ đó tứ giác PLKN nội tiếp. (4)



Từ (3) và (4) ta thu được P nằm trên đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác AKL

Cũng theo tính đối xứng, dễ thấy A là tâm đường tròn bàng tiếp góc N của tam giác NBC, theo bổ đề 2 thì HM // ND, điều này dẫn tới $\widehat{PAN} = \widehat{PLN} = \widehat{BDF} = \widehat{DHM}$

$= 180^o - \widehat{AHM} = 180^o - \widehat{NDA}$ (vì EF ⊥ HM).

Từ đó PA tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác ADN nên S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADN, kết hợp với T là trung điểm của AN ta được ST ⊥ TA.

Nhận xét. Thông thường chúng ta sử dụng tính chất tiếp tuyến đường tròn theo cách là tiếp tuyến vuông góc với bán kính tại tiếp điểm. Lời giải trên có một ý tưởng thú vị ngược lại là sau khi chứng minh PA là tiếp tuyến, ta suy ra S là tâm đường tròn ngoại tiếp. Chỉ có bạn *Nguyễn Đăng Khoa*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ** là có lời giải chuẩn nhất.

TRẦN QUANG HÙNG



LỜI GIẢI CHÍNH XÁC CHƯA?

ThS. ĐINH VĂN THƯ
(GV. CĐSP Thái Bình, TP. Thái Bình, Thái Bình)

Bài toán. Cho hàm số $y = \frac{1}{(m-1)^2}x - 2 + m$ $(m \neq 1)$. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox và Oy lần lượt tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB cân.

Lời giải. * Cho x = 0 thì y = m – 2, nên đồ thị hàm số đi qua điểm A(0; m – 2).

* Cho y = 0 thì $x = (m-2)(m-1)^2$, nên đồ thị hàm số đi qua điểm $B((m-2)(m-1)^2; 0)$.

Vì tam giác OAB vuông tại O nên tam giác OAB cân khi và chỉ khi OA = OB.

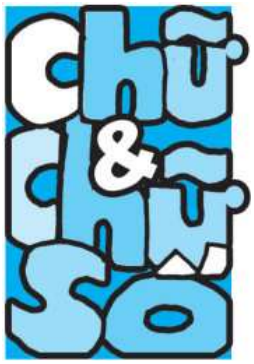
Tức là $|m-2| = |m-2|(m-1)^2$

$$\Leftrightarrow |m-2|[1-(m-1)^2] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=0 \\ (m-1)^2=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m-1=1 \\ m-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=0. \end{array}\right.$$

Vậy m = 0 hoặc m = 2 thỏa mãn điều kiện đề bài.

Theo bạn, lời giải trên có điểm nào không chính xác? Tòa soạn đợi phân tích của bạn nhé!



Kì này

KÌ 35

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số. Các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau. Lời giải cần có lập luận lôgic.

$$\begin{array}{r} \text{YELLOW} \\ + \text{YELLOW} \\ \text{RED} \\ \hline \text{ORANGE} \end{array}$$

ĐÔNG BA



Các bạn hãy giải bài toán sau bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé! Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

Problem 1(187). Fill all triples of positive integers (a, b, c) such that $a^2 + 2^{b+1} = 3^c$.

VÕ QUỐC BÁ CẨN
(Trường THCS Archimedes Academy, Hà Nội)

THÁCH ĐẤU

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI SÁU

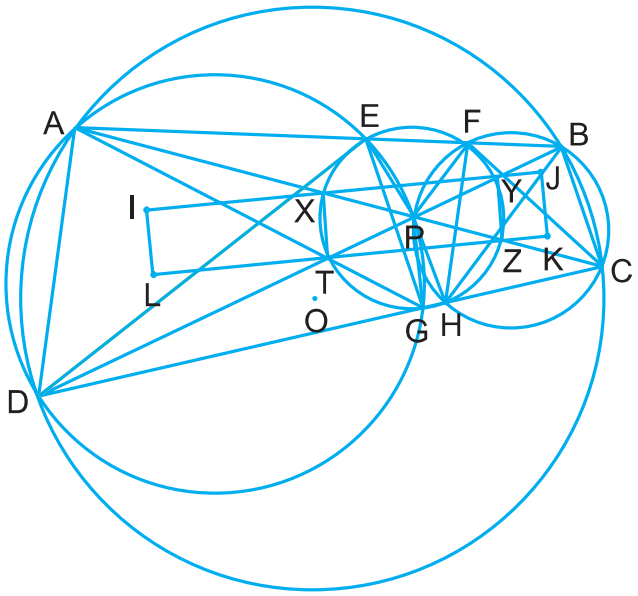
Người thách đấu: *Thái Nhật Phượng*, GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa.**

Bài toán thách đấu: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến BM. Lấy điểm N nằm giữa A và B. Kẻ AH $\perp$ CN tại H. Gọi D là giao điểm của BM và CN. Gọi E là giao điểm của AD và BH. Tính số đo góc NEA.

Thời hạn: Trước ngày 08.11.2018 theo dấu bưu điện.

Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI TƯ (TTT2 số 184)

Đề bài. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). P là giao điểm của AC và BD. Đường tròn qua ba điểm A, D, P theo thứ tự cắt AB, DC tại E, G. Đường tròn qua ba điểm B, C, P theo thứ tự cắt AB, CD tại F, H. Các điểm I, J, K, L theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ADE, BCF, CBH, DAG. Chứng minh rằng tứ giác IJKL là hình chữ nhật.



Lời giải. *Để giải bài toán trên ta cần có hai bổ đề sau:*

• **Bổ đề 1.** Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. P là giao điểm thứ hai của AI và (O). Khi đó PI = PB = PC.

• **Bổ đề 2.** Nếu tứ giác ABCD nội tiếp và X, Y, Z, T theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC thì tứ giác XYZT là hình chữ nhật.

Phép chứng minh các bổ đề trên rất quen thuộc, bạn đọc tự chứng minh.

Trở lại giải bài toán thách đấu.

Gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEG, BFH, CFH, DEG.

Áp dụng bổ đề 1 đối với tam giác AEG ta có PE = PX = PG.

Áp dụng bổ đề 1 đối với tam giác DEG ta có PE = PG = PT.

Từ đó ta có PX = PE = PG = PT. (1)

Áp dụng bổ đề 1 đối với tam giác BFH ta có PY = PF = PH. (2)

Áp dụng bổ đề 1 đối với tam giác CFH ta có PZ = PF = PH. (3)

Vì $\overset{\frown}{ADP} = \overset{\frown}{FEP}$; $\overset{\frown}{ADP} = \overset{\frown}{BCP}$ nên $\overset{\frown}{FEP} = \overset{\frown}{BCP}$.

Mà $\overset{\frown}{BCP} = \overset{\frown}{PFE}$ do đó $\overset{\frown}{FEP} = \overset{\frown}{PFE}$.

Từ đó suy ra PE = PF. (4)

Từ (1); (2); (3) và (4) suy ra

PF = PY = PZ = PH = PG = PT = PX = PE.

Vậy tám điểm E, F, G, H, X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn và XZ, YT là các đường kính của đường tròn đó.

Do đó tứ giác XYZT là hình chữ nhật. (5)

Theo bổ đề 2, các tứ giác IXTL và JYZK là hình chữ nhật. (6)

Từ (5) và (6) suy ra tứ giác IJKL là hình chữ nhật.

Nhận xét. Không có võ sĩ nào đăng quang trong trận đấu này, phần thưởng xin dồn vào kì sau.

NGUYỄN MINH HÀ

SỬ DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLET ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN MINH SANG
(GV. THCS Lâm Thao, Lâm Thao, Phú Thọ)

Trong nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức nếu biết vận dụng khéo léo nguyên lí Dirichlet sẽ giúp tìm được lời giải của các bài toán bất đẳng thức hay và khó.

• Nguyên lí Dirichlet:

* Cho m con thỏ vào n chiếc lồng (m > n) thì tồn tại ít nhất một chiếc lồng chứa ít nhất 2 con thỏ.

* Trong 3 số thực bất kì x, y, z thì có ít nhất 2 số cùng không âm hoặc cùng không dương, do đó tích của hai số đó là số không âm.

* Trong các bài toán nếu ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi x = y = z = k thì khi đó tồn tại ít nhất hai số có tích không âm, chẳng hạn (x – k)(y – k) không âm.

Sau đây là một số bài tập vận dụng:

Bài toán 1. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$.

Lời giải. Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 3 số a – 1, b – 1, c – 1 tồn tại ít nhất hai số có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử

$(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow 2c(a-1)(b-1)\ge 0$.

$\Leftrightarrow 2abc\ge 2bc+2ca-2c$.

Suy ra $a^2+b^2+c^2+2abc+1$

$\ge a^2+b^2+c^2+2bc+2ac-2c+1$

$=(a^2+b^2)+(c^2+1)+2bc+2ac-2c$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$(a^2+b^2)+(c^2+1)\ge 2ab+2c$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ac)$.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Bài toán 2. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$.

Lời giải. Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 3 số a^2-1; b^2-1; c^2-1 tồn tại ít nhất hai số có tích không âm. Không mất tổng quát giả sử

$(a^2-1)(b^2-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2-a^2-b^2+1\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2+2a^2+2b^2+4\ge 3a^2+3b^2+3$

$\Leftrightarrow (a^2+2)(b^2+2)\ge 3(a^2+b^2+1)$

$\Leftrightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$

$\ge 3(a^2+b^2+1)(1+1+c^2)$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$3(a^2+b^2+1)(1+1+c^2)\ge 3(a+b+c)^2$. (2)

Ta lại có $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$. (3)

Từ (2) và (3) ta có

$3(a^2+b^2+1)(1+1+c^2)\ge 9(ab+bc+ca)$. (4)

Từ (1) và (4) suy ra

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Bài toán 3. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\ge 2(a+b+c)$.

Lời giải. Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 3 số a – 1; b – 1; c – 1 tồn tại ít nhất hai số có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử

$(a-1)(b-1) \ge 0 \Rightarrow ab + 1 \ge a + b$

$\Rightarrow 2ab + 2c + 2 \ge 2(a + b + c)$. (1)

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \ge 2ab + 2c + 2.$$

Thật vậy

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} + 3$$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3$$

$$= (a^2b^2 + 1) + c^2(a^2 + b^2) + 2$$

$$\ge 2ab + 2c^2ab + 2 = 2ab + 2c + 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \ge 2(a + b + c).$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Bài toán 4. Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$9abc + 1 \ge 4(ab + bc + ca)$.

Lời giải. Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi

$$a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 3 số 3a – 1; 3b –1; 3c – 1 tồn tại ít nhất hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử

$(3a-1)(3b-1) \ge 0 \Leftrightarrow 9ab - 3a - 3b + 1 \ge 0$

$\Rightarrow 9abc + 1 \ge 3(ac + bc) - c + 1.$

Ta sẽ chứng minh

$3(ac + bc) - c + 1 \ge 4(ab + bc + ca)$. (1)

Thật vậy $1 = a + b + c \Rightarrow 1 = (a + b + c)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$

Suy ra $3(ac + bc) - c + 1 = 3(ac + bc) - c + a^2$

$+ b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow 3(ac + bc) - c + 1 = a^2 + b^2 - 2ab$

$+ 4(ab + bc + ca) + bc + ca + c^2 - c$

$\Leftrightarrow 3(ac + bc) - c + 1 = 4(ab + bc + ca)$

$+ c(a + b + c) - c + (a - b)^2 \ge 4(ab + bc + ca)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $9abc + 1 \ge 4(ab + bc + ca)$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài toán 5. Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \ge 5(a + b + c)$.

Lời giải. Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 3 số a – 1; b – 1; c – 1 tồn tại ít nhất hai số có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử

$(a - 1)(b - 1) \ge 0 \Rightarrow abc \ge bc + ac - c.$

Do đó $2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8$

$\ge 2(a^2 + b^2 + c^2) + bc + ac - c + 8$. (1)

Ta sẽ chứng minh

$2(a^2 + b^2 + c^2) + bc + ac - c + 8 \ge 5(a + b + c)$

$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) + bc + ac + 8$

$\ge 5(a + b) + 6c$. (2)

Ta đặt

$A = 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2bc + 2ac + 16 = (b + c)^2$

$+ (a + c)^2 + 3(a^2 + 1) + 3(b^2 + 1) + 2(c^2 + 1) + 8$

$= [(b + c)^2 + 4] + [(a + c)^2 + 4] + 3(a^2 + 1)$

$+ 3(b^2 + 1) + 2(c^2 + 1).$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$A \ge 4(b + c) + 4(a + c) + 6a + 6b + 4c$

$= 10a + 10b + 12c$

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) + bc + ac + 8 \ge 5(a + b) + 6c.$

Vậy (2) được chứng minh.

Từ (1) và (2) suy ra

$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \ge 5(a + b + c)$.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4 \ge 2(ab + bc + ca)$.

Bài 2. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$(a^2 + 4)(b^2 + 4)(c^2 + 4) \ge 36(ab + bc + ca)$.

Bài 3. Cho 3 số thực a, b, c. Chứng minh rằng

$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2c^2 + 2 \ge 2(ab + bc + ca)$.



BÀI TOÁN "TĂNG, GIẢM GIÁ"

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Trong cuộc sống chúng ta hay gặp những thông báo về tăng giảm giá ở các cửa hàng bán sản phẩm. Từ đó dẫn đến những bài toán thực tế. Chúng ta nhớ lại công thức tính giá trị sau khi thay đổi:

- *Giá một sản phẩm là a đồng, nếu giảm giá b% (b < 100) thì giá tiền sản phẩm đó sau khi giảm giá là a – a.b% = a(1 – b%), nếu tăng giá c% thì giá tiền sản phẩm đó sau khi tăng giá là a(1 + c%).*

Sau đây là một số bài toán minh họa.

Bài toán 1. Một siêu thị điện máy tiến hành giảm giá chiếc ti vi, sau hai lần giảm giá, mỗi lần giảm 20% so với giá trị thời điểm đó thì giá của chiếc ti vi còn là 12 800 000 đồng. Tính giá tiền ban đầu của chiếc ti vi.

Lời giải. Gọi giá tiền ban đầu của chiếc ti vi là x (đồng) (x > 0).

Giá tiền chiếc ti vi sau khi giảm giá lần thứ nhất là:

x – x.20% = x(1 – 20%) = 0,8x (đồng).

Giá tiền chiếc ti vi sau khi giảm giá lần thứ hai là:

0,8x – 0,8x.20% = 0,64x (đồng).

Mà sau khi giảm giá 2 lần thì giá của chiếc ti vi là 12 800 000 đồng nên ta có

0,64x = 12 800 000 $\Leftrightarrow$ x = 20 000 000

Vậy giá ban đầu của chiếc ti vi là 20 000 000 đồng.

Bài toán 2. Một cửa hàng lúc đầu bán giày đồng giá 300 000 đồng một đôi, về sau ông chủ tăng giá mỗi đôi giày. Sau hai lần tăng giá, mỗi lần tăng x%, so với thời điểm đó thì giá mới của mỗi đôi giày là 432 000 đồng. Hãy tìm x.

Lời giải. Giả sử giá tiền một đôi giày lúc đầu là a (đồng).

Sau lần tăng giá thứ nhất, giá tiền một đôi giày là a(1 + x%) (đồng).

Sau lần tăng giá thứ hai, giá tiền một đôi giày là

$a(1 + x\%) + a(1 + x\%).x\% = a(1 + x\%)^2$ (đồng)

Theo đề bài ta có

a = 300 000 và $a(1 + x\%)^2 = 432\,000$.

Do đó $(1 + x\%)^2 = 432\,000:300\,000 = 1,44$

$\Leftrightarrow 1 + x\% = 1,2 \Leftrightarrow x\% = 0,2 \Leftrightarrow x = 20$.

Vậy x = 20.

Bài tập vận dụng

Một cửa hàng bán quần áo, bán giá 400 000 đồng một cái áo. Chủ cửa hàng tăng giá sản phẩm lần thứ nhất là x%, lần thứ hai giảm giá sản phẩm đi x% so với thời điểm đó. Sau 2 lần thay đổi, giá của sản phẩm lúc này là 396 000 đồng. Hãy tìm x.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8
QUẬN 1, TP. HỒ CHÍ MINH

Năm học 2017 - 2018

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. *(6 điểm)*

Giải các phương trình

a) $\frac{4x^2+16}{x^2+6}=\frac{3}{x^2+1}+\frac{5}{x^2+3}+\frac{7}{x^2+5}$.

b) $(x^2-2x+2)^2=3x-2$.

c) $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{4x^2+15x+14}=\frac{2}{5}$.

Bài 2. *(4 điểm)*

a) Cho $a=x+\frac{1}{x}$, $b=y+\frac{1}{y}$, $c=xy+\frac{1}{xy}$. Tính giá trị của biểu thức $a^2+b^2+c^2-abc$.

b) Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $abc=123^{345}$.

Tìm số dư của phép chia tổng $a^{30}+b^4+c^{2018}$ cho 8.

Bài 3. *(3 điểm)*

a) Có 28 que mà độ dài các que lần lượt là 1 cm, 2 cm, 3 cm, ..., 28 cm. Hỏi có thể xếp nối các que đó để được một hình vuông không? Vì sao?

b) Một ô tô đi từ A đến B. Cùng thời điểm đó, một ô tô thứ hai đi từ B đến A với vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ hai ô tô này gặp nhau. Hỏi mỗi ô tô đi cả quãng đường AB mất bao nhiêu giờ?

Bài 4. *(3 điểm)*

Cho hình vuông ABCD. Gọi E là điểm trên cạnh AD, đường thẳng qua A vuông góc với BE tại H cắt CD tại F. Trên cạnh AB lấy điểm K sao cho AK = AE. Chứng minh rằng $\widehat{BHK}=\widehat{CHF}$.

Bài 5. *(4 điểm)*

Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng qua O song song với CD cắt AD tại E.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{OE}$.

b) Giả sử $AB.CD=4OE^2$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành.

ĐẶT MUA TẠP CHÍ CẢ NĂM HỌC TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC
MÃ ẤN PHẨM: C 169.1

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TP. HÀ NỘI

Năm học 2018 - 2019
Môn thi: Toán (chuyên Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề đăng trên TTT2 số 185 +186)

Bài 1. a) Đặt $t = \sqrt{x^2+5}$ $(t>0)$.
Phương trình đã cho trở thành
$$t^2-(x+3)t+2x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x+1. \end{array}\right.$$
* Với $t=2$ ta có phương trình $\sqrt{x^2+5}=2$ vô nghiệm.
* Với $t=x+1$ ta có $\sqrt{x^2+5}=x+1 \Leftrightarrow x=2$.
Vậy phương trình có nghiệm là $x=2$.

b) Ta có $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=1 \ (1)\\ (x+y)(x^2+y^2)=1. \ (2)\end{cases}$
Từ (2) suy ra $x \neq -y$. Chia (1) cho (2) theo từng vế ta được $\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}=1$.
Từ đó suy ra $xy=0 \Rightarrow x=0$ hoặc $y=0$.
* Với $x=0 \Rightarrow y=1$.
* Với $y=0 \Rightarrow x=1$.
Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S=\{(0;1);(1;0)\}$.

Bài 2. Ta có $4x^2+8xy+3y^2+2x+y+2=0$
$\Leftrightarrow 4x^2+2xy+6xy+3y^2+2x+y=-2$
$\Leftrightarrow 2x(2x+y)+3y(2x+y)+(2x+y)=-2$
$\Leftrightarrow (2x+y)(2x+3y+1)=-2$.
Từ đó ta có các trường hợp sau

- TH1. $\begin{cases}2x+y=1\\ 2x+3y+1=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=-2.\end{cases}$ (loại)
- TH2. $\begin{cases}2x+y=-1\\ 2x+3y+1=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=1.\end{cases}$
- TH3. $\begin{cases}2x+y=-2\\ 2x+3y+1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}\\ y=1.\end{cases}$ (loại)
- TH4. $\begin{cases}2x+y=2\\ 2x+3y+1=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=-2.\end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là $(-1;1);(2;-2)$.

b) Ta có $3a^2+a=4b^2-b$
$\Leftrightarrow 3a^2-3b^2+a+b=b^2$
$\Leftrightarrow (a+b)(3a-3b+1)=b^2$.
Gọi ƯCLN $(a+b;3a-3b+1)=d$.
Khi đó ta có $\begin{cases}a+b \vdots d\\ 3a-3b+1 \vdots d\end{cases}$
$\Rightarrow (a+b)(3a-3b+1) \vdots d^2$.
Do đó $b^2 \vdots d^2 \Rightarrow b \vdots d$. Mà $a+b \vdots d \Rightarrow a \vdots d$.
Lại có $3a-3b+1 \vdots d$ nên suy ra $1 \vdots d$.
Từ đó $d=1$.
Do vậy $a+b$ và $3a-3b+1$ là 2 số nguyên tố cùng nhau.
Vậy $a+b$ là số chính phương.

Bài 3. a) Ta có
$$\frac{1}{yz+y+1}=\frac{1}{\frac{1}{x}+y+1}=\frac{x}{xy+x+1}.$$
$$\frac{1}{zx+z+1}=\frac{xyz}{zx+z+xyz}=\frac{xy}{xy+x+1}.$$
Suy ra $\dfrac{1}{xy+x+1}+\dfrac{1}{yz+y+1}+\dfrac{1}{zx+z+1}$
$=\dfrac{1}{xy+x+1}+\dfrac{x}{xy+x+1}+\dfrac{xy}{xy+x+1}=1.$

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có
$$\frac{P^2}{3} \le \frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}. \ (1)$$
Vì $xyz \ge 1$ và $x>0$ nên $yz \ge \dfrac{1}{x}$.
Do đó $\dfrac{1}{yz+y+1} \le \dfrac{1}{\frac{1}{x}+y+1}$.
Suy ra $\dfrac{1}{yz+y+1} \le \dfrac{x}{xy+x+1}$. (2)

Ta chứng minh $\frac{1}{zx+z+1} \le \frac{xyz}{zx+z+xyz}$

$\Leftrightarrow (xyz-1)(xz+z) \ge 0.$

Suy ra $\frac{1}{zx+z+1} \le \frac{xy}{x+1+xy}$. (3)

Từ (2), (3) ta có

$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}$

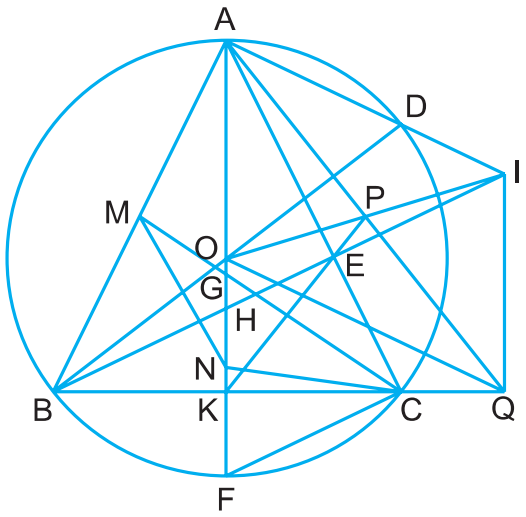
$\le \frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xy+x+1}+\frac{xy}{xy+x+1}=1.$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $P^2 \le 3 \Rightarrow P \le \sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P=\sqrt{3}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

Bài 4.



a) Ta có $\widehat{AHI}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{CAH}$).

Mặt khác $\widehat{ADO}=\widehat{ACB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

Suy ra $\widehat{AHI}=\widehat{ADO} \Rightarrow \widehat{BHO}=\widehat{BDI}$.

Từ đó ta có $\Delta BOH \backsim \Delta BID$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BO}{BI}=\frac{BH}{BD}$

$\Rightarrow BH.BI=BO.BD=2R^2$.

b) Gọi G là giao điểm của AH và CM, K là trung điểm của BC.

Kẻ đường kính AF.

Khi đó áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ACF ta có $AC^2=AK.AF$.

Suy ra $AM.AC=AG.AN \Leftrightarrow \frac{AM}{AG}=\frac{AN}{AC}$.

Do vậy $\Delta AMN \backsim \Delta AGC$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{ANM}=\widehat{ACG}$.

Vậy tứ giác AMNC nội tiếp.

c) Gọi Q là hình chiếu vuông góc của I trên BC nên ta có IQ // AO. (1)

Vì tứ giác ABQI nội tiếp nên $\widehat{IAQ}=\widehat{IBQ}$

$\Rightarrow \widehat{BAQ}=\widehat{ABQ}$.

Do vậy ΔABQ cân tại Q.

Từ đó QO // AI (cùng vuông góc AB). (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác AOQI là hình bình hành.

Gọi P là trung điểm chung của AQ và OI.

Ta có $\widehat{AKP}=\widehat{KAP}$ (vì AP = KP). (3)

$\widehat{AKE}=\widehat{ACH}$ (vì tứ giác CEHK nội tiếp)

$=\widehat{ABH}=\widehat{KAP}$ (vì $\widehat{BAQ}=\widehat{ABQ}$; $\widehat{BAO}=\widehat{CBE}$). (4)

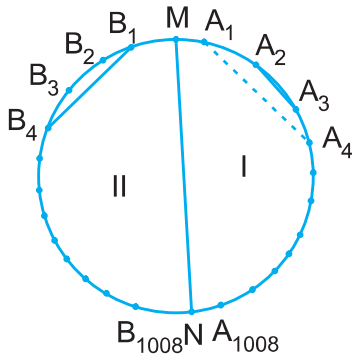
Từ (3) và (4) ta có $\widehat{AKE}=\widehat{AKP}$.

Suy ra K, E, P thẳng hàng.

Vậy đường thẳng KE đi qua trung điểm của đoạn thẳng OI.

Bài 5. An đi trước luôn thắng với chiến thuật như sau.

An đi trước, nối dây cung MN sao cho dây cung MN chia 2018 điểm trên đường tròn thành hai phần (phần I, phần II) mỗi phần có 1008 điểm. An quy ước đặt tên và đánh thứ tự các điểm còn lại như hình vẽ.



Đến lượt Bình nối dây cung bất kì ở một trong hai phần trên (vì dây cung không được cắt dây cung MN), giả sử Bình nối dây cung B_iB_j (hoặc A_iA_j). Đến lượt An sẽ nối dây A_iA_j (hoặc B_iB_j). Khi đó Bình nối được một dây thỏa mãn thì An sẽ nối được dây tương ứng nên An không vẽ được khi và chỉ khi Bình không vẽ được.

Điều này chứng tỏ An không thua. Vì số điểm là hữu hạn nên thuật toán dừng, tức là sau hữu hạn lần chơi thì Bình không vẽ được dây nào thỏa mãn điều kiện đề bài. Vậy Bình là người thua cuộc.



Ô chữ ANIMAL

TRẦN THỊ THẢO
(GV. TH Đức Lâm, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Các chữ cái xếp tên những con vật được viết liền nhau theo hàng ngang hoặc hàng dọc trong các ô chữ dưới đây. Đố bạn tìm ra tên của chúng! Chủ Vườn sẽ tặng quà cho 5 bạn tìm được nhiều tên nhất!

C	H	I	C	K	E	N	A	P	P	O
P	O	S	Z	A	W	X	Y	B	I	E
R	B	E	K	N	T	S	N	E	A	B
T	A	D	O	G	X	V	L	A	N	B
A	B	B	U	A	T	A	K	R	T	E
S	Q	U	I	R	R	E	L	I	S	F
C	Z	F	O	O	G	M	X	L	V	Q
H	V	F	R	O	N	C	A	T	C	A
T	H	A	M	S	T	E	R	F	T	V
Y	R	L	E	A	I	I	G	E	G	H
E	V	O	D	E	D	E	E	R	G	I

Kết quả CAN YOU GUESS THESE WORDS? (TTT2 số 184)

• Khi bạn nói 10 lần từ "nis" thì sẽ được 10 "nis" hay ten "nis", đó là môn thể thao *tennis* (quần vợt).

• Từ phải tìm là "ouse", khi kết hợp với M sẽ thành *mouse* (con chuột - đương nhiên sợ loài mèo rồi); khi kết hợp với H sẽ thành *house* (ngôi nhà - đó chính là nơi bạn sinh sống).

• Từ phải tìm là "ea", khi kết hợp với S sẽ thành *sea* (biển - nơi bạn có thể bơi); còn khi kết hợp với T thì đó là *tea* (trà - một thứ đồ uống tuyệt vời).

Nhận xét. Những câu hỏi kì trước là câu đố mẹo, chơi chữ nên nhiều bạn không nghĩ ra, hơi đáng tiếc phải không nào? Có nhiều bạn gửi bài giải về, nhưng phần lớn đều hiểu chưa rõ đề bài nên đã giải sai.

Phần thưởng kì này được trao cho 3 "cao thủ" sau: *Nguyễn Nhật Minh*, 7A, THCS chuyên Hà Nội - Amsterdam, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Phương Linh*, 6A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Mai Phương, Phạm Khánh Linh*, 6D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**. *Các địa chỉ lớp nêu trên là của năm học trước (năm học 2017 - 2018). Nhưng các bạn yên tâm, cho dù lên lớp trên nhưng phần quà vẫn sẽ gửi tới tận tay các bạn.*

Các bạn ơi, thời gian rỗi nhớ ghé thăm Vườn Anh nhé! Biết thêm một ngôn ngữ cũng sẽ giúp cho chúng ta hiểu biết thêm nhiều điều đó. Hẹn gặp lại các bạn ở những số báo tới.

Chủ Vườn

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Kì 19

CLB1. When a number is divided by 2018, the result is the same as dividing 2018 to this number. Find this number.

CLB2. Solve the following equation

$$x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 0.$$

CLB3. Let ABC be an isosceles triangle at A with $AB = 4 - x$, $AC = |2x + 3|$, $BC = 11$. Find the measure of angle ABC.

CLB4. Find x such that $A = \dfrac{2018x}{(x + 2019)^2}$ gets the maximum value.

CLB5. Let ABC be an isosceles triangle at A with $\angle A = 160^o$. On half of the plane with boundary BC without A, ray Bx is drawn such that $\angle CBx = 30^o$. A line passing C and perpendicular to AB at D intersects Bx at E. Find the measure of angle AED.

DƯƠNG THU TRANG *(dịch)*

Kết quả Kì 17 (TTT2 số 184)

CLB1. Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 chỉ có hai ước là 1 và chính nó.

Mà c là số lớn nhất trong ba số nên c là số nguyên tố; a và b bằng 1 hoặc –1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của a + b là –2 khi và chỉ khi a = b = –1 và c là số nguyên tố.

CLB2. • Nếu a > b.

Từ $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$, suy ra b < c; c > d; d < e; e > a; a < b (mâu thuẫn).

• Nếu a < b (làm tương tự dẫn đến điều mâu thuẫn).

* Nếu a = b = 1 thì c = d = e = 1 nên a = b = c = d = e. Suy ra điều phải chứng minh.

* Nếu $a = b \geq 2$ thì b = c = d = e nên a = b = c = d = e. Suy ra điều phải chứng minh.

CLB3. $\dfrac{a^2}{20} + \dfrac{b^4}{11} + \dfrac{c^6}{2016} = \dfrac{a^2 + b^4 + c^6}{2017}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2017}\right)a^2 + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{2017}\right)b^4 + \left(\frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}\right)c^6 = 0.$$

Mà $\dfrac{1}{20} > \dfrac{1}{2017}, \dfrac{1}{11} > \dfrac{1}{2017}, \dfrac{1}{2016} > \dfrac{1}{2017}$

nên suy ra a = b = c = 0.

CLB4. Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 125$ và $a \geq 5$, $b \geq 6$, $c \geq 7$ suy ra $5 \leq a \leq 10$, $6 \leq b \leq 9$, $7 \leq c \leq 8$.

Khi đó ta có

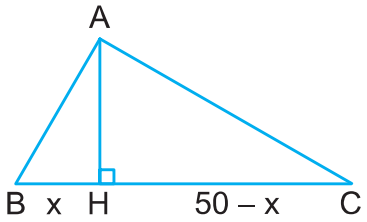
$$\begin{cases} (a-5)(10-a) \geq 0 \\ (b-6)(9-b) \geq 0 \\ (c-7)(8-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15a \geq a^2 + 50 \\ 15b \geq b^2 + 54 \\ 15c \geq c^2 + 56. \end{cases}$$

Cộng theo vế của các bất đẳng thức trên ta được $15(a + b + c) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 160 = 285$.

Do đó $M = a + b + c \geq 19$.

Vậy Min M = 19 khi a = 5, b = 6, c = 8.

CLB5.



Đặt BH = x.

Vì ΔHBA ∽ ΔHAC nên $AH^2 = BH.CH$

$\Leftrightarrow 24^2 = x(50 - x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 50x + 576 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 18)(x - 32) = 0$

$\Leftrightarrow x = 18$ hoặc $x = 32$.

Vậy BH = 18 cm hoặc BH = 32 cm.

Nhận xét. Chỉ có một bạn có lời giải tốt được nhận quà là bạn: *Nguyễn An Thịnh*, 7B5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**.

THIỀU QUANG TÙNG

Bài 34NS. Đặt $3x-16y-24=m,\ m\in\mathbb{N}$. Ta có $9x^2+16x+96=m^2$

$\Leftrightarrow 81x^2+144x+864=9m^2$

$\Leftrightarrow (9x+8-3m)(9x+8+3m)=-800.$ (1)

Thay $m=3x-16y-24$ vào (1) ta được

$(3y+5)(9x-24y-32)=-25.$

Suy ra $3y+5$ là ước của 25.

Mà 3y + 5 chia 3 dư 2 nên

$3y+5\in\{-1;5;-25\}\Rightarrow y\in\{-2;0;-10\}.$

Ta tìm được cặp (x; y) là (1; –2); (3; 0); (–23; –10).

Thử lại, ta loại cặp số (3; 0) vì $m=3x-16y-24<0.$

Vậy nghiệm nguyên (x; y) của phương trình là (1; –2), (–23; –10).

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Minh Ngọc*, 8C, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 8I, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Huỳnh Bảo Uyên*, 9A7, THCS Thốt Nốt, Thốt Nốt, **Cần Thơ**; *Trần Cao Bảo Châu*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Buôn Ma Thuật, **Đắk Lắk.**

Bài 35NS. Cộng theo từng vế của hai phương trình ta được

$x^3+y^3-xy+x^2+x+xy-y^2+y=0$

$\Leftrightarrow (x^3+y^3)+(x^2-y^2)+(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2+x-y+1)=0.$

Mà $x^2-xy+y^2+x-y+1$

$=x^2+x+1-(xy-y^2+y)$

$=x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,\ \forall x.$

Do đó $x+y=0\Rightarrow x=-y.$

Thay x = –y vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $2y^2-y-1=0$

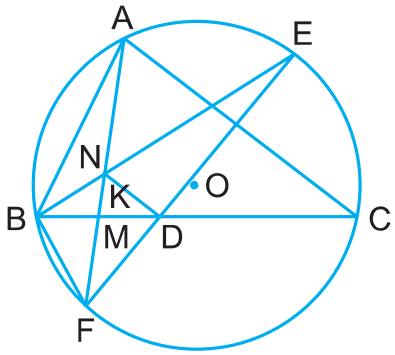
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=-1 \\ y=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Thử lại thấy đúng.

Vậy nghiệm (x; y) của hệ phương trình là (–1; 1); $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt và ngắn gọn: *Nguyễn Minh Ngọc*, 8C, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 8I, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Huỳnh Bảo Uyên*, 9A7, THCS Thốt Nốt, Thốt Nốt, **Cần Thơ**; *Trần Cao Bảo Châu*, 7A, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Buôn Ma Thuật, **Đắk Lắk.**

Bài 36 NS.



Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AF với BC, BE.

Ta có $\overset{\frown}{ABE}=\overset{\frown}{CBE}$ (vì BE là phân giác góc ABC).

Mà $\overset{\frown}{ABE}=\overset{\frown}{AFE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AE).

Suy ra $\overset{\frown}{NBD}=\overset{\frown}{DFN}.$

Do đó tứ giác BNDF nội tiếp.

Suy ra $\overset{\frown}{BFN}=\overset{\frown}{BDN}.$

Mà $\overset{\frown}{BFN}=\overset{\frown}{BCA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

Suy ra $\overset{\frown}{BDN}=\overset{\frown}{BCA}.$

Do đó DN // AC.

(Xem tiếp trang 15)



CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(187). Cho

$$A = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{2018!}.$$

Hãy so sánh A với $\frac{2017}{1152}$.

(Kí hiệu n! = 1. 2. 3... n)

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài 2(187). Có hai hộp đựng lần lượt 100 viên bi và 123 viên bi. Hai bạn Hồng và Hà tham gia trò chơi bốc bi như sau: Mỗi người đến lượt mình được bốc một số viên bi tùy ý ở trong một hộp. Ai bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hồng là người bốc trước. Hãy chỉ ra cách chơi để Hồng luôn là người thắng cuộc.

TẠ THẬP

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài 3(187). Tìm các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a^2 + 5ab + b^2 = 7^c$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài 4(187). Cho tam giác đều ABC, lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho MA : MB : MC = 3 : 4 : 5. Kẻ AH vuông góc với BM tại H. Tính tỉ số $\frac{AH}{CM}$.

LƯU LÝ TƯỞNG

(GV. THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

SOLVE VIA MAIL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Trang Duong Thu

1(187). Let $A = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{2018!}$.

Compare *A* with $\frac{2017}{1152}$.

(Notation: $n!$ = 1. 2. 3... n)

2(187). Two boxs contain 100 marbles and 123 marbles respectively. Hong and Ha play taking arbitrary number of marbles in one box. The winner is the one who gets the last marble. Hong takes the marbles first. Show the way helping Hong to win the game.

3(187). Find prime numbers *a*, *b*, *c*, such that $a^2 + 5ab + b^2 = 7^c$.

4(187). Let *ABC* be an equilateral triangle. *M* is inside triangle *ABC* such that *MA* : *MB* : *MC* = 3 : 4 : 5. Draw *AH* perpendicular to *BM* at *H*. Find the ratio $\frac{AH}{CM}$.

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Vũ Minh Khải, *Cao Ngọc Khoa*, *Nguyễn Công Hải*, *Nguyễn Công Hùng*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Danh Vinh*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**, *Lê Văn Quang Trung*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn An Thịnh*, *Nguyễn Tuấn Dương*, 7B5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS thị trấn Chờ, Yên Phong, **Bắc Ninh**.



CÁC LỚP THCS

Bài 5(187). Cho số nguyên tố lẻ p và các số nguyên dương a, b, c, d phân biệt nhỏ hơn p thỏa mãn $a^2 + b^2$ và $c^2 + d^2$ đều chia hết cho p. Chứng minh rằng trong hai số ac + bd và ad + bc có đúng một số chia hết cho p.

VÕ QUỐC BÁ CẨN

(Trường THCS Archimedes Academy, Hà Nội)

Bài 6(187). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + y^2 + 11 = 6x^2 + 4y \\ x^2y + x^2 = 16. \end{cases}$$

ThS. NGUYỄN THANH GIANG

(Phó Hiệu trưởng trường THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên, Hưng Yên)

Bài 7(187). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^3+a+1} + \frac{b}{b^3+b+1} + \frac{c}{c^3+c+1} \le 1.$$

CAO MINH QUANG

(GV. THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài 8(187). Cho tam giác ABC và N là trung điểm của cạnh AC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho MC = 2MB. Vẽ đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với NB tại N. Gọi D là giao điểm của tia AM với đường tròn (O). Tia BD cắt đoạn thẳng AN tại P, tia ND cắt đoạn thẳng AB tại Q. Gọi I là giao điểm của các đoạn thẳng AD và PQ. Chứng minh rằng IP = IQ.

HUỲNH THANH TÂM

(Bưu điện thị xã An Nhơn, Bình Định)

SOLVE VIA MAIL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Trang Duong Thu

5(187). Let *p* be an odd prime number and *a*, *b*, *c*, *d* be distinct positive integers less than *p* satisfying that $a^2 + b^2$ and $c^2 + d^2$ are both divisible by *p*. Prove that among *ac* + *bd* and *ad* + *bc*, there is only one number divisible by *p*.

6(187). Solve the following systems of equations

$$\begin{cases} x^4 + y^2 + 11 = 6x^2 + 4y \\ x^2y + x^2 = 16. \end{cases}$$

7(187). Let *a*, *b*, *c* be a positive integers satisfying *abc* = 1. Prove that

$$\frac{a}{a^3+a+1} + \frac{b}{b^3+b+1} + \frac{c}{c^3+c+1} \le 1.$$

8(187). Let *ABC* be a triangle and *N* be a midpoint of *AC*. *M* is on *BC* such that *MC* = 2*MB*. Draw circle (*O*) passing *A* with tangent of *NB* at *N*. Let *D* be an intersection point of ray *AM* and circle (*O*). Ray *BD* intersects *AN* at *P*, ray *ND* intersects *AB* at *Q*. Let *I* be an intersection point of *AD* and *PQ*. Prove that *IP* = *IQ*.

"279 BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG OLYMPIC CÁC NƯỚC"

ĐƯỢC TÁI BẢN



Nhà giáo Nguyễn Bá Đang tại một hội thảo về dạy toán

Vừa ra mắt trong thời gian ngắn, cuốn sách "279 bài toán hình học phẳng Olympic các nước" của thầy giáo Nguyễn Bá Đang đã tới với nhiều thầy cô và học sinh yêu thích môn Hình học. Tuy nhiên khá nhiều bạn đọc không kịp có cuốn sách này.

Đáp ứng nhu cầu của bạn đọc, Tạp chí Toán Tuổi thơ (đơn vị tổ chức bản thảo và phát hành) đã đề nghị Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam kịp thời tái bản cuốn sách này.

Nhiều bài toán trong cuốn sách chỉ cần sử dụng kiến thức toán trung học cơ sở để giải quyết. Bởi vậy, học sinh từ cấp trung học cơ sở đã có thể tìm thấy khá nhiều điều bổ ích cho mình.

Các thầy cô có thể sử dụng cuốn sách như là một tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi cấp tỉnh, cấp Quốc gia và Quốc tế cho học sinh Trung học phổ thông, thi học sinh giỏi cấp tỉnh lớp 9, thi tuyển sinh vào lớp 10 các trường chuyên khối khoa học tự nhiên. Các bạn học sinh có thêm điều kiện làm quen với những bài hình học phẳng trong các kì thi Olympic toán của nhiều nước và các bài hình học phẳng đã đăng trên các tạp chí trên thế giới.

Cuốn sách cũng là tài liệu quý cho sinh viên khoa toán các trường Đại học Sư phạm, Cao đẳng Sư phạm, các bậc phụ huynh và tất cả những ai yêu toán.

Các bài toán được tuyển chọn và giới thiệu trong cuốn sách được lấy từ các bài toán hình học phẳng trong kì thi IMO, Toán khu vực châu Á - Thái Bình Dương (Asian Pacific Mathematical Olympiad, viết tắt là APMO), đặc biệt là tài liệu đề xuất của các nước trong kì thi IMO (IMO Shortlist) và trong các kì thi Olympic Toán các nước như Canada, Hoa Kì, Nga, Trung Quốc, Bulgaria, Ba Lan, Slovenia, Hungary, Rumani, Singapore... Ngoài ra chúng tôi còn giới thiệu các bài toán trên các Tạp chí nổi tiếng như МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ, КВАНТ, CRUX, Mathematical Excalibur và tài liệu trên internet... Cuốn sách cũng bổ sung thêm một số bài toán là các định lí cổ điển nổi tiếng mà hầu hết các lời giải chỉ dùng kiến thức cấp trung học cơ sở.

Để các bạn thuận tiện trong việc sử dụng, các bài toán được phân loại theo các chủ đề: Tam giác (93 bài toán), Tứ giác (53 bài toán), Đường tròn (133 bài toán).



Các bạn có thể mua cuốn sách tại các cửa hàng, siêu thị sách hoặc liên hệ với tòa soạn Tạp chí Toán Tuổi thơ.

* Địa chỉ: Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội.
* Điện thoại: 024.35682701
* Fax: 024.35682702
* Email: tapchitoantuoitho@gmail.com

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.
Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.
Mã số: 8BTT187M18. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2018.

Giá: 10 000 đồng