Toán tuổi thơ 2

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG
JOURNAL OF MATHEMATICS AND LITERATURE IN SCHOOL
ISSN 1859-2740
SỐ 269+270
THÁNG 9 NĂM 2025

TRUNG HỌC CƠ SỞ

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM RA MẮT BẠN ĐỌC BỘ SÁCH GIÁO DỤC TÀI CHÍNH

Ngày 18 tháng 8 năm 2025, tại Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) phối hợp cùng Công ty Sách – Nhà sách Tân Việt tổ chức Chương trình giới thiệu bộ sách Giáo dục tài chính cho học sinh từ lớp 1 đến lớp 12.

Bộ sách Giáo dục tài chính do ThS. Lê Thị Thúy Sen biên soạn, lần đầu tiên xây dựng hệ thống kiến thức tài chính học đường toàn diện, phù hợp Chương trình giáo dục phổ thông 2018, kết hợp giữa lí thuyết tài chính – ngân hàng và các giá trị văn hóa, đạo đức, kĩ năng sống.



Bộ sách Giáo dục tài chính cho học sinh từ lớp 1 đến lớp 12

Bộ sách gồm ba phần được sắp xếp khoa học, đảm bảo tính liên môn, sư phạm để thích hợp cho cả việc dạy và học ở các cấp học với tiêu chí: dễ nhớ – dễ hiểu – dễ tiếp thu – dễ áp dụng và thú vị.

Đặc biệt, tác giả đã sử dụng nhiều ca dao, tục ngữ, thành ngữ, truyện ngắn, câu chuyện đời thường, tích xưa, truyền thống dân tộc và các biểu tượng văn hóa quen thuộc để làm cầu nối đưa kiến thức tài chính đến gần với học sinh. Các nội dung được thiết kế theo hướng tích hợp giữa kiến thức tài chính – ngân hàng với giáo dục đạo đức, kĩ năng sống, giáo dục công dân.

Bộ sách cũng là bước cụ thể triển khai "Chiến lược tài chính toàn diện quốc gia đến năm 2025, định hướng 2030" do Thủ tướng Chính phủ phê duyệt, trong đó chỉ rõ: Kiến thức tài chính cần được giáo dục cho học sinh phổ thông, lồng ghép cùng các môn học, các cấp học trong chương trình để tăng cường sự hiểu biết và phát triển năng lực, tư duy tài chính cho thế hệ trẻ.

Phát biểu tại Chương trình, ông Nguyễn Tiến Thanh – Chủ tịch Hội đồng thành viên, Tổng Giám đốc nhấn mạnh: *Bộ sách Giáo dục tài chính không chỉ là một sản phẩm xuất bản, mà còn là tâm huyết, là niềm tin của NXBGDVN gửi đến thế hệ trẻ Việt Nam.* Ông hi vọng những bài học tài chính giản dị sẽ giúp các em dần hình thành tư duy tài chính vững vàng, biết quản lí tiền một cách thông minh, nhân văn và có trách nhiệm. Bộ sách sẽ là tài liệu học tập bổ ích, là hành trang quý giá, người bạn đồng hành thân thiết của các em trên đường trưởng thành.

Nhân dịp này, các diễn giả cũng đã cùng nhau trao đổi về sự cần thiết của giáo dục tài chính cho học sinh phổ thông, hình thức truyền đạt kiến thức, sự cập nhật kiến thức về tài chính trong tương lai...



Các diễn giả tọa đàm tại Chương trình

Hi vọng bộ sách Giáo dục tài chính sẽ giúp các em học sinh từng bước xây dựng thói quen tài chính lành mạnh, hình thành bản lĩnh tiêu dùng thông minh và thái độ tích cực với giá trị lao động, từ đó phát triển toàn diện về năng lực, phẩm chất và trở thành công dân có trách nhiệm trong nền kinh tế hiện đại và xã hội phát triển.

BAN TRUYỀN THÔNG
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Toán tuổi thơ 2

TRUNG HỌC CƠ SỞ

TẠP CHÍ CỦA VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập:
TRẦN HỮU NAM
Thư kí tòa soạn:
VÕ THỊ HỒNG THU

ỦY VIÊN
NGND. Vũ Hữu Bình
TS. Nguyễn Minh Đức
ThS. Đặng Hiệp Giang
TS. Nguyễn Minh Hà
ThS. Nguyễn Ngọc Hân
PGS. TS. Vũ Đình Hòa
ThS. Trần Quang Hùng
TS. Lê Thống Nhất
PGS. TS. Tạ Duy Phượng
TS. Phạm Đức Tài
NGND. PGS. TS. Tôn Thân
GS. TS. Lê Anh Vinh
TS. Trần Quang Vinh

TÒA SOẠN

Số 187B Giảng Võ, phường Ô Chợ Dừa, Hà Nội
Điện thoại - Email:
Biên tập: 024.35682702;
Email: bbttoantuoitho@gmail.com
Phát hành: 024.35682701; 024.35142649;
Email: tapchitoantuoitho@gmail.com
Hành chính: 024.35121606

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh
ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Biên tập - Chế bản: **Nguyễn Quang Tuấn, Vũ Thị Mai, Đỗ Trung Kiên**
Mĩ thuật: **Trần Ngọc Trường**
Phát hành: **Trần Thị Minh Hiền (Trưởng phòng)**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch HĐTV kiêm Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục:
LÊ HỒNG SƠN

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các nhà toán học nhỏ 2
Định lí bốn điểm và ứng dụng
Hoàng Việt Dũng, Phan Thị Vân

Phá án cùng thám tử Sê Lốc Cốc 8
Vụ mất trộm trên xe
Nguyễn Như Mai

Học ra sao? 13
Bất đẳng thức trong kì thi vào lớp 10 THPT năm 2025
Hoàng Lê Nhật Tùng

Thách đấu 21
Trận đấu thứ hai trăm mười tám
Võ Quốc Bá Cẩn

Ôn thi vào lớp 10 25
Đề thi thử môn Toán chuyên
Trương Quang An

Góc Olympic 29
Kì 81
Cao Ngọc Toản

Giải toán thế nào? 37
Sử dụng một tính chất quen thuộc để giải toán
Trần Thanh Hưng

Toán quanh ta 56
Tiền tệ và lãi suất
Nguyễn Ngọc Hùng

Nhìn ra thế giới 61
Bài toán hình học trong kì thi Olympic toán Quốc tế năm 2025
Nguyễn Duy Khương

Minh họa bìa 1: Lê Mạnh Cường
(Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông)

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi. **Mã số:** 8BTT269M25.
Giấy phép xuất bản: số 534/GP-BTTTT, cấp ngày 19/11/2020 của Bộ Thông tin và Truyền thông.
In tại: Xí nghiệp Bản đồ 1, CN công ty TNHH MTV Trắc địa Bản đồ, tổ 7, phường Phúc Đồng, TP. Hà Nội.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2025.

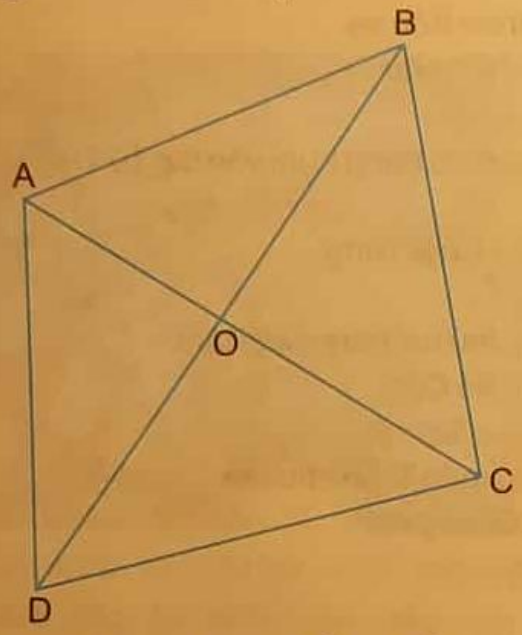
ĐỊNH LÍ BỐN ĐIỂM VÀ ỨNG DỤNG

HOÀNG VIỆT DŨNG *(Trường THCS Đặng Thai Mai, Nghệ An)*

PHAN THỊ VÂN *(Trường THCS Bạch Liêu, Nghệ An)*

Định lí bốn điểm: Cho bốn điểm A, B, C, D. Khi đó $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$

Chứng minh. Phần thuận:

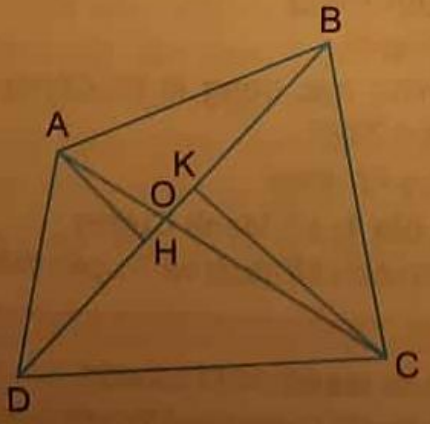


Nếu $AC \perp BD$ tại O thì $AB^2 - AD^2$

$= (OA^2 + OB^2) - (OA^2 + OD^2) = OB^2 - OD^2$

$= (OB^2 + OC^2) - (OD^2 + OC^2) = CB^2 - CD^2$.

Phần đảo: Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, C lên BD.



Ta có $AB^2 - AD^2 = BH^2 - DH^2$

$= BD(BH - DH) = BD(BD - 2DH)$.

$CB^2 - CD^2 = BK^2 - DK^2 = BD(BK - DK)$

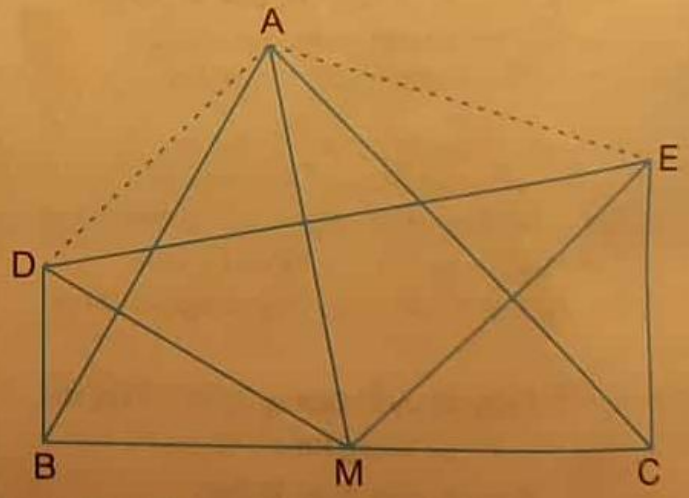
$= BD(BD - 2DK)$.

Do $AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$ nên ta suy ra $DH = DK$, dẫn đến $H \equiv K$ nên $AC \perp BD$.

Định lí bốn điểm tỏ ra rất hiệu quả khi chứng minh hai đường thẳng vuông góc và các dạng toán liên quan. Sau đây là một số bài toán áp dụng.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Qua B, C kẻ d và d' vuông góc với BC. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với AB, AC cắt d, d' lần lượt tại D và E. Chứng minh AM vuông góc với DE.

Hướng dẫn.



Do $AB \perp MD$ và $AC \perp ME$ nên ta có

$DA^2 - DB^2 = MA^2 - MB^2 = MA^2 - MC^2$

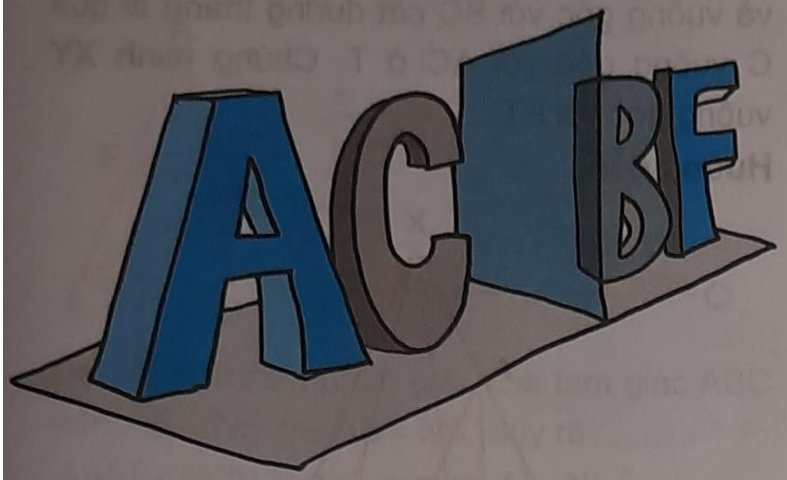
$= EA^2 - EC^2$

$\Rightarrow AD^2 - AE^2 = DB^2 - EC^2$

$= (MD^2 - MB^2) - (ME^2 - MC^2) = MD^2 - ME^2.$

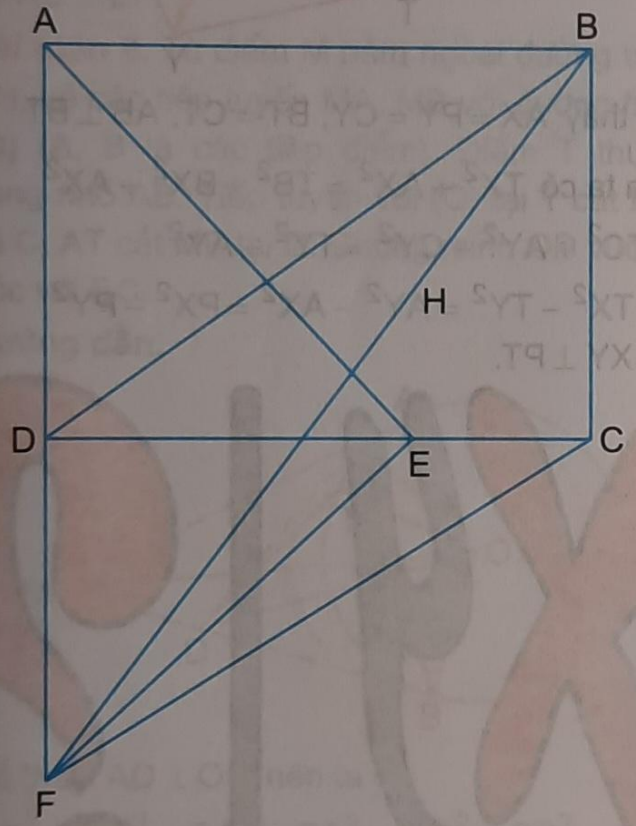
Theo định lí bốn điểm suy ra $AM \perp DE$.

Nhận xét. Bài toán trên áp dụng cả hai chiều của định lí bốn điểm. Khi biến đổi ta cần sử dụng các cạnh bằng nhau để làm trung gian.



Bài toán 2. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB > AD$. Trên cạnh CD lấy E sao cho $AE = AB$. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt đường thẳng AD tại F. Chứng minh AC vuông góc với BF.

Hướng dẫn.



Cách 1. Ta có

$FC^2 - FE^2 = AC^2 - AE^2 = AC^2 - AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow FC^2 - BC^2 = FE^2 = FA^2 - AE^2 = FA^2 - AB^2$

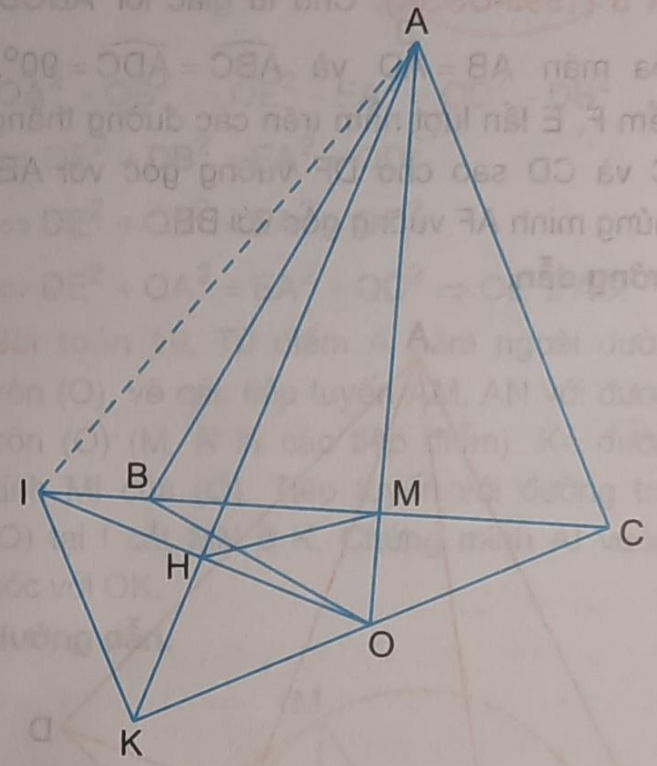
$\Rightarrow AC \perp BF.$

Cách 2. Ta có $AB^2 = AE^2 = AD \cdot AF$ dẫn đến các tam giác AFB và ABD đồng dạng, suy ra $\widehat{AFB} = \widehat{ABD} = \widehat{BAC} \Rightarrow AC \perp BF.$

Nhận xét. Cách 1 sử dụng định lí bốn điểm nên hướng đi mang tính nhất quán. Cách 2 cần linh hoạt trong việc chọn cặp tam giác đồng dạng.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm O thỏa mãn $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$, điểm K đối xứng với C qua O. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với KC, cắt BC tại I. Chứng minh $AK \perp OI$.

Hướng dẫn.



Cách 1.

$AI^2 - AC^2 = OI^2 - OC^2 = OI^2 - OK^2 = IK^2$

$\Rightarrow AI^2 - IK^2 = AC^2.$

Ta lại có $OA^2 - OK^2 = OA^2 - OC^2 = AC^2.$

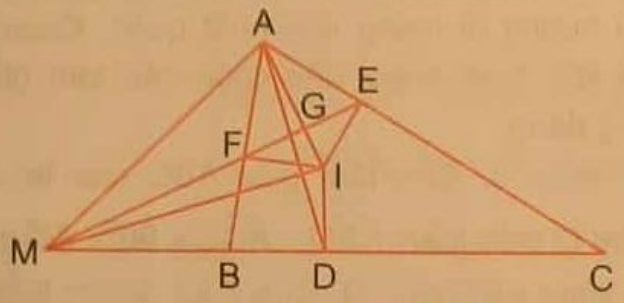
Do đó $AI^2 - IK^2 = OA^2 - OK^2 \Rightarrow AK \perp OI.$

Cách 2. Kẻ KH vuông góc với OI tại H, ta có $OH \cdot OI = OK^2 = OB^2 = OM \cdot OA$, suy ra tứ giác AMHI nội tiếp nên $AH \perp OI$.

Từ đó suy ra $AK \perp OI$.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, I là giao điểm ba đường phân giác trong. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên BC, AC, AB; EF cắt BC ở M. Chứng minh IM vuông góc với AD.

Hướng dẫn.

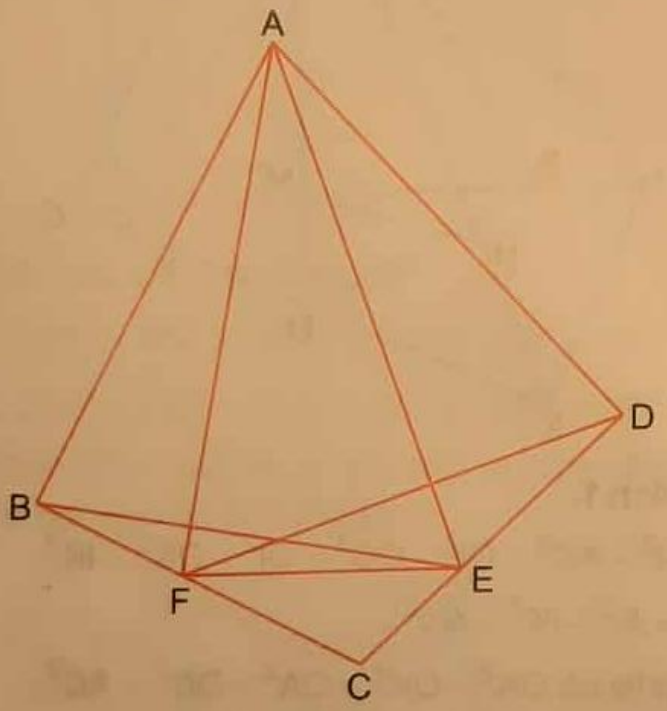


$AM^2 - AE^2 = IM^2 - IE^2 = IM^2 - ID^2 = MD^2$

$\Rightarrow AM^2 - MD^2 = AE^2 = IA^2 - ID^2 \Rightarrow IM \perp AD.$

Bài 5 (1995-USSR). Cho tứ giác lồi ABCD thỏa mãn $AB = AD$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$. Điểm F, E lần lượt nằm trên các đường thẳng BC và CD sao cho DF vuông góc với AE. Chứng minh AF vuông góc với BE.

Hướng dẫn.



Từ $AE \perp DF$, ta có $AD^2 - AF^2 = ED^2 - EF^2$

$\Rightarrow EF^2 = ED^2 + AF^2 - AD^2.$

Do đó $FB^2 - FE^2 = FA^2 - AB^2 - FE^2$

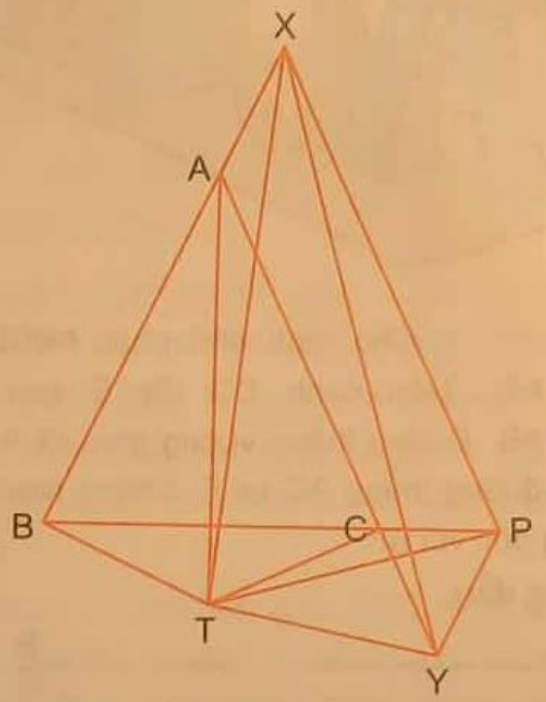
$= FA^2 - AB^2 - (ED^2 + AF^2 - AD^2)$

$= -AB^2 - DE^2 + AD^2 = -DE^2$

$= AD^2 - AE^2 = AB^2 - AE^2$, suy ra $AF \perp BE$.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm P nằm trên tia đối của tia CB, các điểm X, Y lần lượt nằm trên tia BA và AC sao cho $PX \parallel AC$ và $PY \parallel AB$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC cắt đường thẳng đi qua C vuông góc với AC ở T. Chứng minh XY vuông góc với PT.

Hướng dẫn.



Dễ thấy $AX = PY = CY$, $BT = CT$, $AB \perp BT$

nên ta có $TX^2 + AX^2 = TB^2 + BX^2 + AX^2$

$= TC^2 + AY^2 + CY^2 = TY^2 + AY^2$

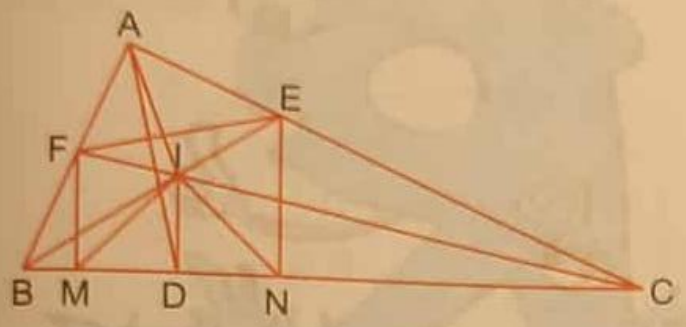
$\Rightarrow TX^2 - TY^2 = AY^2 - AX^2 = PX^2 - PY^2$

$\Rightarrow XY \perp PT.$



Bài toán 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BE, CF cắt nhau ở I. Gọi D là hình chiếu vuông góc của I trên BC. Chứng minh AD vuông góc với EF.

Hướng dẫn. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của F, E trên BC.



Do BE là đường phân giác của tam giác ABC nên $AE = NE$ và $AB = NB$, suy ra

$\Delta ABI = \Delta NBI$ (c.g.c), suy ra $AI = NI$.

Tương tự ta cũng có $AF = MF$, $AI = MI$. Do đó $NI = MI$.

Kết hợp với $ID \perp MN$, suy ra $DM = DN$.

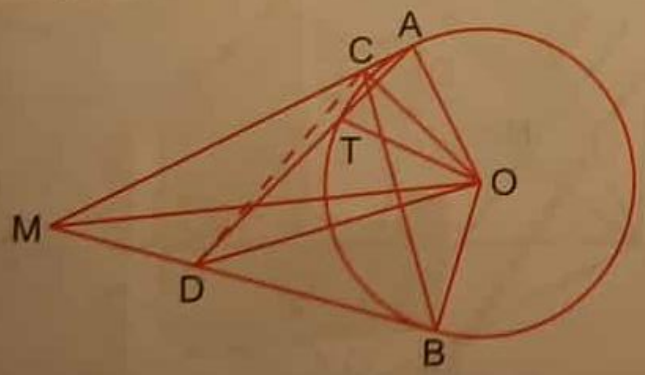
Khi đó $AE^2 - AF^2 = NE^2 - MF^2$

$= (DE^2 - DN^2) - (DF^2 - DM^2) = DE^2 - DF^2$

$\Rightarrow AD \perp EF$.

Bài toán 8. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Điểm T thuộc cung nhỏ AB. Tiếp tuyến với (O) tại T cắt MA tại C, AT cắt MB tại D. Chứng minh OD vuông góc với BC.

Hướng dẫn.



Dễ thấy $AD \perp OC$ nên ta có

$OB^2 - CA^2 = OA^2 - CA^2 = OD^2 - CD^2$.

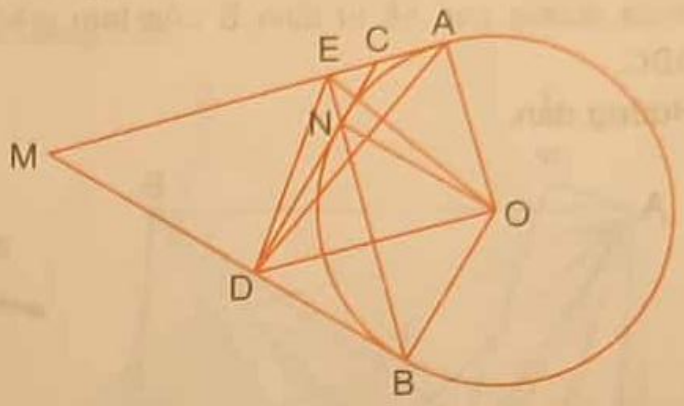
Do đó $OB^2 - OC^2 = AC^2 + OD^2 - CD^2 - OC^2$

$= OD^2 - CD^2 - OA^2 = OD^2 - OB^2 - CD^2$

$= DB^2 - DC^2 \Rightarrow OD \perp BC$.

Bài toán 9. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Lấy C, D nằm trên các đoạn thẳng MA, MB sao cho CD tiếp xúc với đường tròn (O) tại N, BN cắt AM tại E. Chứng minh OE vuông góc với AD.

Hướng dẫn.



$OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow OE^2 - EA^2 = OD^2 - DB^2$

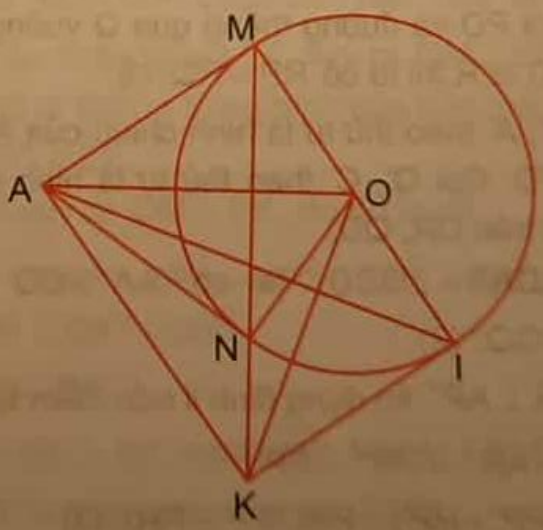
$\Leftrightarrow OE^2 + DB^2 = EA^2 + OD^2$

$\Leftrightarrow DE^2 + OB^2 = EA^2 + OD^2$

$\Leftrightarrow DE^2 + OA^2 = EA^2 + OD^2 \Rightarrow OE \perp AD$.

Bài toán 10. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Kẻ đường kính MI của (O). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại I cắt MN ở K. Chứng minh AI vuông góc với OK.

Hướng dẫn.



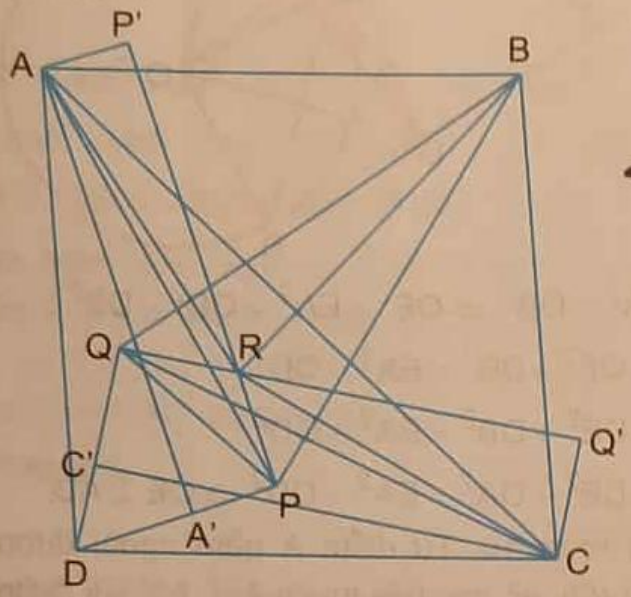
$OA^2 - OI^2 = OA^2 - OM^2 = AM^2$.

$AK^2 - KI^2 = OK^2 + MA^2 - MO^2 - KI^2 = MA^2$.

Do đó $OA^2 - OI^2 = KA^2 - KI^2 \Rightarrow AI \perp OK$.

Bài toán 11 (2017-Canada). Cho hình bình hành ABCD. Các điểm P và Q nằm trong hình bình hành ABCD sao cho các tam giác ABP và BCQ là các tam giác đều. Chứng minh rằng giao điểm của đường thẳng qua P vuông góc với PD và đường thẳng qua Q vuông góc với DQ, nằm trên đường thẳng chứa đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC.

Hướng dẫn.



Dễ thấy $AD = BQ = CQ$, $AP = BP = CD$,

$\widehat{DAP} = \widehat{QBP} = \widehat{QCD}$, suy ra

$\Delta DAP = \Delta QBP = \Delta QCD$, dẫn đến

$DP = QP = QD$.

Gọi giao điểm của đường thẳng qua P vuông góc với PD và đường thẳng qua Q vuông góc với DQ là R thì ta có $RP = RQ$. (1)

Gọi P', A' theo thứ tự là hình chiếu của A trên PR, PD. Gọi Q', C' theo thứ tự là hình chiếu của C trên QR, QD.

Từ $\Delta DAP = \Delta QCD$, ta có $AA' = CC'$ hay $PP' = QQ'$. (2)

Từ $PR \perp AP'$ áp dụng định lí bốn điểm ta có

$AP^2 - AR^2 = PP'^2 - RP'^2$

$= PR(PP' + RP') = PR(2PP' - PR)$. (3)

Tương tự $CQ^2 - CR^2 = QR(2QQ' - QR)$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta có

$AP^2 - AR^2 = CQ^2 - CR^2$

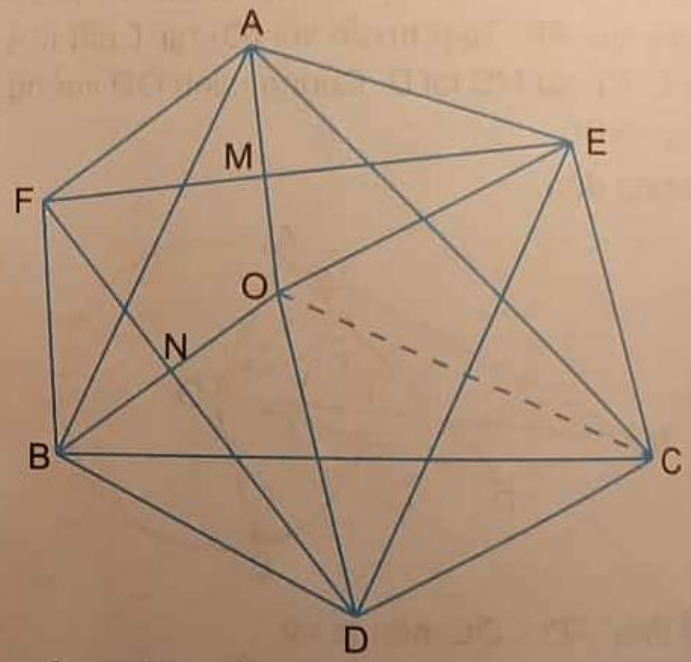
$\Leftrightarrow AB^2 - AR^2 = BC^2 - CR^2 \Rightarrow BR \perp AC$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.



Bài toán 12 (1997-USA). Cho tam giác ABC. Dựng các tam giác cân BCD, CAE và ABF nằm bên ngoài tam giác ABC và BC, CA, AB lần lượt là các cạnh đáy. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, B, C và vuông góc với EF, FD, DE theo thứ tự đó thì đồng quy.

Hướng dẫn. Gọi O là giao điểm của đường thẳng qua A vuông góc EF với đường thẳng qua B vuông góc FD. Ta cần chứng minh $CO \perp DE$.



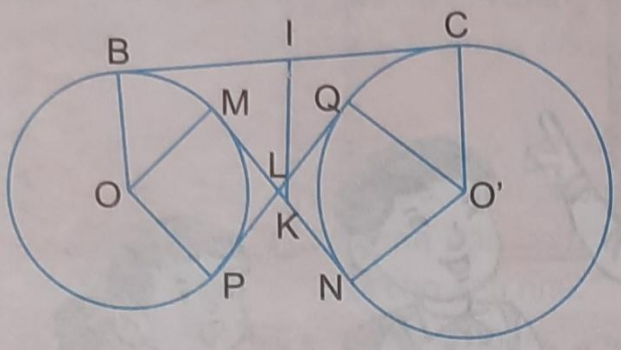
$OE^2 - OD^2 = (OF^2 + AE^2 - AF^2) - (BD^2 + OF^2 - BF^2)$

$= AE^2 - BD^2 + BF^2 - AF^2 = CE^2 - CD^2$

$\Rightarrow OC \perp DE$.

Bài toán 13. Cho đường tròn (O) và (O') ngoài nhau. MN, PQ là các tiếp tuyến chung trong, BC là tiếp tuyến chung ngoài. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng MN, PQ, BC thẳng hàng.

Hướng dẫn. Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, MN, PQ. Ta có



$OI^2 - O'I^2 = BI^2 + OB^2 - IC^2 - O'C^2$

$= OB^2 - O'C^2.$

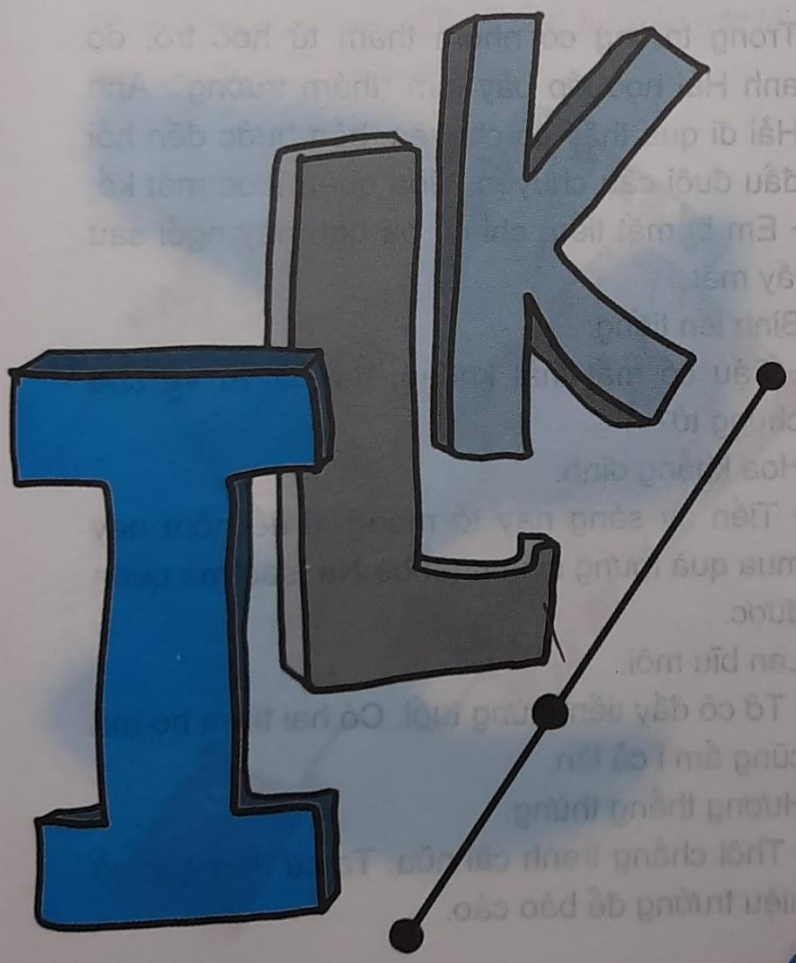
$OK^2 - O'K^2 = OM^2 + KM^2 - O'N^2 - KN^2$

$= OM^2 - O'N^2.$

Từ đó $OI^2 - O'I^2 = OK^2 - O'K^2 \Rightarrow IK \perp OO'$.

Chứng minh tương tự ta thu được $IL \perp OO'$.

Từ đó suy ra ba điểm I, L, K thẳng hàng.

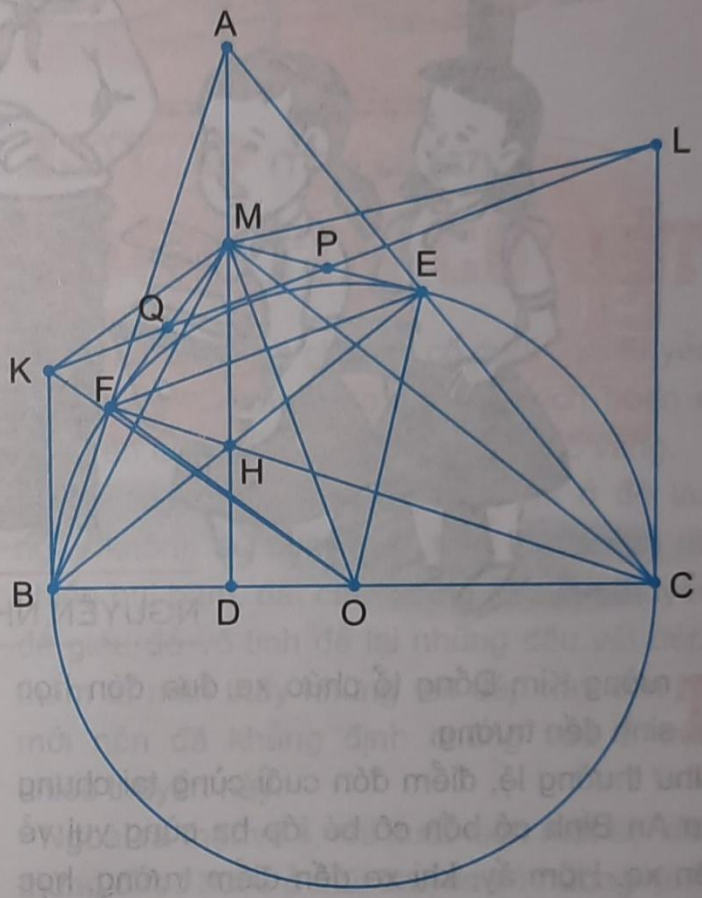


Bài toán 14. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của AH; P, Q lần lượt là trung điểm của ME, MF. Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn tâm O đường kính BC cắt PQ lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng:

a) $KB = KM$.

b) $\widehat{KML} = 2\widehat{BMC}$.

Hướng dẫn.



a) Do $ME = MF$, $OE = OF$ nên OM là trung trực của đoạn thẳng EF, suy ra $OM \perp EF$.

Do PQ là đường trung bình của tam giác MEF nên $PQ // EF$.

Từ đó suy ra $OM \perp PK$, do đó ta có

$OK^2 - MK^2 = OP^2 - MP^2 = OP^2 - EP^2 = OE^2$

$= OB^2 = OK^2 - BK^2$

$\Rightarrow MK = BK$.

b) Do $MK = BK$ nên $\widehat{KMB} = \widehat{KBM} = \widehat{BMD}$, suy ra MB là phân giác của góc KMD.

Tương tự MC cũng phân giác của góc LMD.

Từ đó suy ra $\widehat{KML} = 2\widehat{BMC}$.



VỤ MẤT TRỘM TRÊN XE



NGUYỄN NHƯ MAI *(Hà Nội)*

Trường Kim Đồng tổ chức xe đưa đón học sinh đến trường.

Như thường lệ, điểm đón cuối cùng tại chung cư An Bình có bốn cô bé lớp ba cùng vui vẻ lên xe. Hôm ấy, khi xe đến điểm trường, học trò như đàn chim xổ lồng, ùa xuống xe. Tốp cuối cùng là Hoa, sau đó lần lượt là Bình, Hương và Lan. Bác tài vẫn đứng chờ kiểm xem còn sót bé nào trên xe không. Hoa bấy giờ mới chợt nhớ bỏ quên cặp sách trên xe, bèn trèo lên xe tìm lại. Chiếc cặp vẫn còn, nhưng bị mở tung ra. Hoa nhặt sách bút vào cặp, nhưng tờ hai trăm ngàn đã bị mất. Đó là món tiền Hoa chuẩn bị mua quà sinh nhật cho bé Na tròn một tuổi.

Ba bạn thân vẫn đứng chờ, cùng nhau đến ngồi dưới gốc bàng ở góc sân trường.

Hoa mở cặp ra cho các bạn xem và khóc hu hu. Cả nhóm ồn ào tranh cãi nhau.

Trong trường có nhóm thám tử học trò, do anh Hải học lớp bảy làm "thám trưởng". Anh Hải đi qua thấy có chuyện, bèn bước đến hỏi đầu đuôi câu chuyện. Hoa quệt nước mắt kể:

- Em bị mất tiền, chỉ có ba bạn này ngồi sau lấy mất.

Bình lên tiếng:

- Cậu có mất thật không, hay là vu vạ cho chúng tớ?

Hoa khẳng định:

- Tiền ấy sáng nay tớ mang đi để hôm nay mua quà mừng sinh nhật bé Na, sao mà quên được.

Lan bĩu môi:

- Tớ có đầy tiền mừng tuổi. Có hai trăm bọ mà cũng ầm ĩ cả lên.

Hương thẳng thừng:

- Thôi chẳng tranh cãi nữa. Ta cứ đến gặp cô hiệu trưởng để báo cáo.

Anh Hải lắng nghe tất cả. Anh biết bốn cô bé này ở cùng chung cư, rất thân nhau. Anh hiểu, có thể một bé nào trót lấy. Làm to chuyện ra, nhà trường cũng mang tiếng, mà người "trót nhỡ" sẽ rất xấu hổ. Bố mẹ sẽ mắng mỏ. Bạn bè sẽ tẩy chay.

Anh suy nghĩ rồi nói:

- Được rồi, các em hãy bình tĩnh. Không việc gì phải ầm ĩ. Anh đã có cách tìm ra tiền cho Hoa.

Anh Hải ghé vào căng tin mua ba chiếc phong bì đưa mỗi bé một chiếc. Trên phong bì không ghi tên người gửi. Anh dặn, sau buổi học các em trả lại phong bì cho anh nhé.

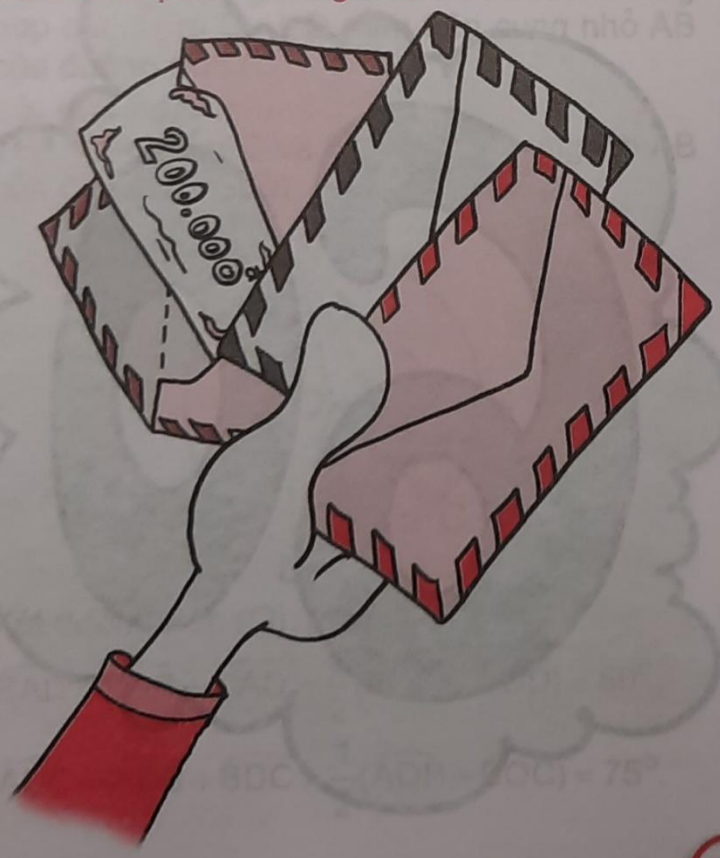
Cũng vừa lúc ấy, trống trường đã giục học trò vào lớp.

Sau buổi học, anh Hải lần lượt thu lại ba chiếc phong bì. Quả nhiên trong một phong bì có tờ hai trăm nghìn anh đem trả lại cho Hoa.

Hoa không biết ai là thủ phạm. Các bạn khác cũng không biết ai là người đã trót nhỡ. Cả bốn bạn lại thân nhau như cũ.

Thám trưởng Hải xử lý thật thông minh và có tình, có lý.

Theo các bạn, anh Hải có biết bé nào trót lấy và đã trả lại tiền không nào?





Kết quả (TTT2 số 267)

TRUY TÌM CỔ VẬT

Trong lúc tên trộm giấu đồ cổ dưới con thuyền cũ, chúng đã cầm vào sợi dây xích hoen rỉ nên trên tay chúng đã có những vết ố vàng.

- Do con thuyền này đã được để ở đó lâu ngày không sử dụng nên trên thuyền có rất nhiều bụi bặm, đất cát, chúng trèo lên thuyền để giấu đồ vô tình để lại những dấu vết dép, thám tử nhìn thấy những vết dép này còn rất mới nên đã khẳng định chúng vừa ở trên chiếc thuyền này.

- Ngoài ra thật vô lí, khi xuất hiện một sợi dây thừng được buộc ở mũi thuyền có hướng quay xuống lòng sông như đang được buộc một vật nào đó thả xuống dưới.

HONG HA

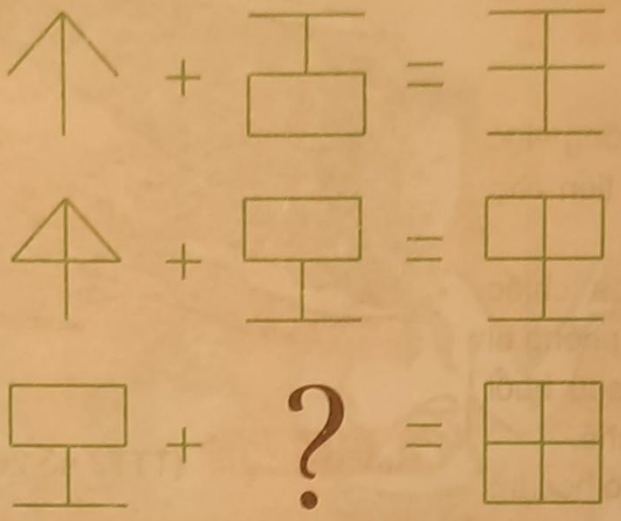
Nhận xét. Các bạn sau có lập luận tốt được thưởng kì này: *Nghiêm Khánh Chi*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Trúc Chi*, 8B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Phạm Hữu Giang*, 7A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Đậu Phương Linh*, 8C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Hoàng Thanh Nhàn*, *Trần Thị Ngọc Trâm*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Thám Tử Sê-Lốc-Cốc



Kì này THAY BỞI HÌNH NÀO?

Hãy tìm quy luật của các phép tính sau và cho biết dấu ? được thay bởi hình nào trong các hình A, B, C, D, E?





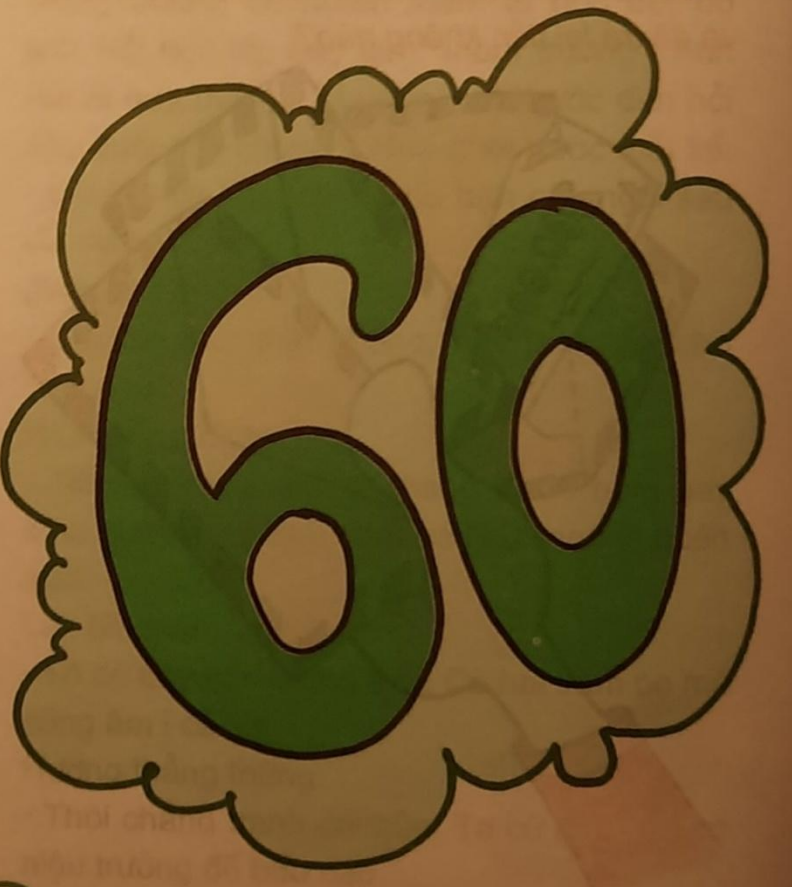


MINH HẢI *(Hưng Yên)*

Kết quả TÌM NĂM SỐ CÒN THIẾU (TTT2 số 267)

a) Dãy 7; 13; 19; 31;...là dãy các số nguyên tố chia 3 dư 1. Do đó năm số tiếp theo của dãy là: 37; 43; 61; 67; 73.

b) Dãy 19; 28; 44; 60;...có số hạng đầu là 19, các số hạng tiếp theo bằng tổng của số hạng trước với tích các chữ số của số hạng đó. Do đó năm số tiếp theo của dãy là 60; 60; 60; 60; 60.



HONG HA

Nhận xét. Kì này có nhiều bạn tham gia giải bài, tuy nhiên nhiều bạn đưa ra quy luật không đúng cho mọi số hạng của dãy. Các bạn sau chỉ ra đúng quy luật cho cả hai dãy số, được thưởng kì này: *Nguyễn Đức Kiên*, *Phan Minh Nhật*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, **Nghệ An**.

TRẦN THỊ THẢO

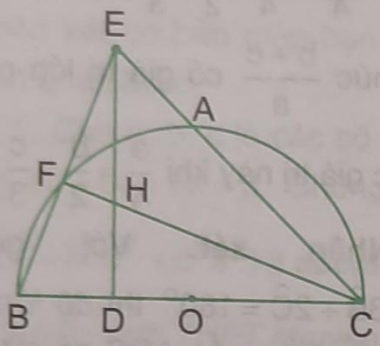


ĐÃ LÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CHƯA?

NGUYỄN TRI PHƯƠNG *(Trường THCS Nhơn Mỹ, Gia Lai)*

Bài toán. Cho A là điểm chính giữa của nửa đường tròn tâm O đường kính BC cố định. Một điểm D di chuyển trên đoạn OB (D không trùng với O, B). Đường thẳng qua D và vuông góc với BO cắt tia CA tại E. Đoạn thẳng EB cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai F. Gọi H là giao điểm của CF và ED. Xác định vị trí điểm D để biểu thức $HF\cdot HC$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



Các tam giác EFH và CDH đồng dạng nên

$$HF\cdot HC = HE\cdot HD \le \frac{(HE+HD)^2}{4} = \frac{DE^2}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$HE = HD = DB = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{3}BC.$$

Suy ra $DE = DC = \frac{2}{3}BC$ nên $HF\cdot HC \le \frac{BC^2}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $HF\cdot HC$ là $\frac{BC^2}{9}$ khi điểm D cách B một đoạn bằng $\frac{1}{3}BC$.

Theo bạn, giá trị trên đã là giá trị lớn nhất chưa?

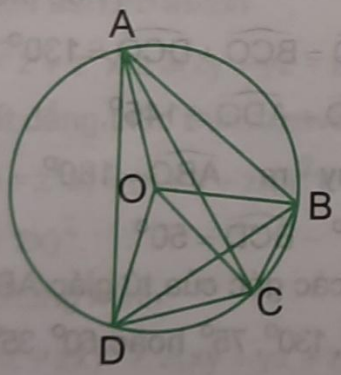
Kết quả **(TTT2 số 267)**

CÒN PHÂN VÂN GÌ HAY KHÔNG?

Phân tích. Lời giải đưa ra còn thiếu trường hợp các điểm C và D nằm trên cung nhỏ AB của đường tròn (O).

Lời giải hoàn chỉnh.

TH1. Các điểm C và D nằm trên cung lớn AB của đường tròn (O).



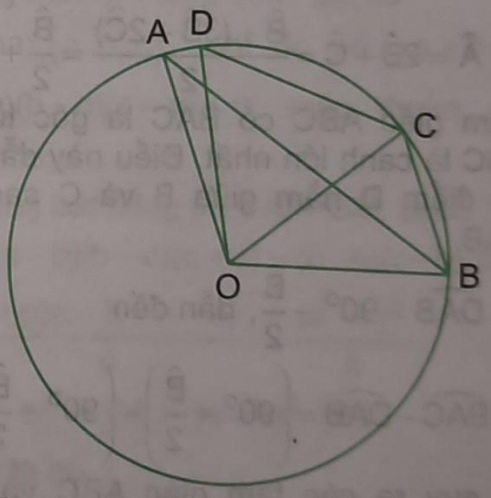
Xét đường tròn (O), ta có:

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \frac{1}{2}(\widehat{BOC} + \widehat{COD}) = 50^\circ,$$

$$\widehat{ADC} = \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = \frac{1}{2}(\widehat{AOB} + \widehat{BOC}) = 75^\circ.$$

Từ đó suy ra $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 105^\circ$, $\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 130^\circ$.

TH2. Các điểm C và D nằm trên cung nhỏ AB của đường tròn (O).



Vì $\widehat{AOB} = 110^\circ$, $\widehat{BOC} = 40^\circ$, $\widehat{COD} = 60^\circ$ nên ta $\widehat{AOD} = 10^\circ$.

Các tam giác BOC, COD, AOD cân tại O và đều đã biết số đo góc ở đỉnh nên ta tính được $\widehat{BCO} = 70^\circ$, $\widehat{DCO} = \widehat{CDO} = 60^\circ$, $\widehat{ADO} = 85^\circ$.

(Xem tiếp trang 12)



Kì này CÓ LÀ SỐ NGUYÊN KHÔNG?

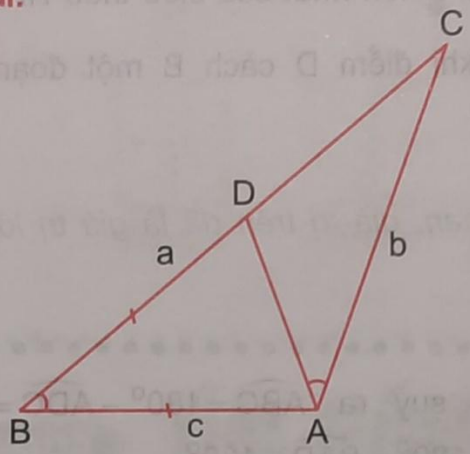
Bài toán. Cho số nguyên n và $n > 2025$. Gọi x là số thực sao cho $x^n = 2025^n + 2026^n$. Hỏi x có thể là số nguyên không?

NGUYỄN TẤN NGỌC *(Trường THCS Bình Định, Gia Lai)*

Kết quả (TTT2 số 267)

CÓ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT KHÔNG?

Lời giải.



Từ giả thiết $3\hat{B} + 2\hat{C} = 180^\circ$ ta có $3\hat{B} + 2\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.

Suy ra $\hat{A} = 2\hat{B} + \hat{C} = \dfrac{\hat{B} + (3\hat{B} + 2\hat{C})}{2} = \dfrac{\hat{B}}{2} + 90^\circ$.

Vậy tam giác ABC có BAC là góc tù nên cạnh BC là cạnh lớn nhất. Điều này dẫn đến tồn tại điểm D nằm giữa B và C sao cho $DB = AB$.

Khi đó $\widehat{DAB} = 90^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2}$, dẫn đến

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAC} - \widehat{DAB} = \left(90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}\right) = \hat{B}.$$

Từ đó suy ra các tam giác ABC và DAC đồng dạng nên ta có $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{BC}{AC}$ hay

$b^2 = a(a - c)$

$$\Rightarrow a(b+c) = a^2 - b^2 + ab = \frac{5a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 \le \frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{a} \le \frac{5}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{2} = b, \frac{b+c}{a} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}.$$

Vậy biểu thức $\dfrac{b+c}{a}$ có giá trị lớn nhất là $\dfrac{5}{4}$ và đạt được giá trị này khi $\dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{3}$.

HONG HA

Nhận xét. Với giả thiết $3\hat{B} + 2\hat{C} = 180^\circ$ thì độ lớn mỗi góc của tam giác ABC có sự thay đổi, dẫn đến độ dài mỗi cạnh của tam giác ABC cũng thay đổi. Rất tiếc kì này không có bạn nào đưa ra lời giải đúng.

QUANG ANH

CÒN PHÂN VÂN GÌ HAY KHÔNG?

(Tiếp theo trang 11)

Suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{BCO} + \widehat{DCO} = 130^\circ$,

$\widehat{ADC} = \widehat{CDO} + \widehat{ADO} = 145^\circ$.

Từ đó suy ra $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 35^\circ$, $\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 50^\circ$.

Vậy số đo các góc của tứ giác ABCD lần lượt là $50^\circ, 105^\circ, 130^\circ, 75^\circ$ hoặc $50^\circ, 35^\circ, 130^\circ, 145^\circ$.

HONG HA

Nhận xét. Kì này không có bạn nào chỉ ra lỗi sai và đưa ra lời giải đúng, phần thưởng đành gác lại cho kì sau.

VI MẠNH TƯỜNG



GIẢI TOÁN THẾ NÀO?

BẤT ĐẲNG THỨC
TRONG KÌ THI VÀO LỚP 10 THPT, NĂM 2025

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG
Trường THCS Trần Duy Hưng, Hà Nội

Bất đẳng thức là một mảng toán khó và thường nằm ở những câu phân loại trong các đề thi tuyển sinh vào trường THPT. Trong kì thi tuyển sinh năm 2025, có rất nhiều bài toán hay với những ý tưởng đẹp. Bài viết này tác giả xin tổng hợp lại một số bài toán đó và những nhận xét cơ bản giúp bạn đọc có cái nhìn khách quan hơn.

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$2+\frac{1}{3}(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2)\ge abc(a+b+c).$$

(*Thi tuyển sinh THPT chuyên Nam Định*)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ ta có

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\ge a^2b^3c+ab^2c^3+a^3bc^2.$$

Do đó ta cần chứng minh

$$6+a^2b^3c+ab^2c^3+a^3bc^2\ge 3abc(a+b+c).$$

Đặt $x=ab,\ y=bc,\ z=ca$ thì $x+y+z=3$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$6+x^2y+y^2z+z^2x\ge 3(xy+yz+zx).$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có

$$3(x^2y+y^2z+z^2x)=(x+y+z)(x^2y+y^2z+z^2x)$$
$$\ge (xy+yz+zx)^2.$$

Ta quy về chứng minh

$$18+(xy+yz+zx)^2\ge 9(xy+yz+zx)$$

hay $(xy+yz+zx-3)(xy+yz+zx-6)\ge 0$.

Bất đẳng thức này đúng do

$$xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}=3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$, suy ra $a=b=c=1$.

Nhận xét. Ý tưởng của bài toán này tương tự như bài toán trong đề thi tuyển sinh trường THPT chuyên KHTN năm 2014 như sau: Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$2abc(a+b+c)\le\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2.$$

Bài toán 2. Với các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2b+b^2c+c^2a+16=ab^2+bc^2+ca^2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

(*Thi tuyển sinh THPT chuyên Hà Nội*)

Lời giải. Giả thiết bài toán có thể viết lại thành $(a-b)(b-c)(c-a)=16$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Khi đó nếu $a\ge b\ge c$ thì $(a-b)(b-c)(c-a)\le 0$, mâu thuẫn với giả thiết nên $a\ge c\ge b$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$16=(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)(c-b)(a-c)$$
$$\le\frac{(a-b)(c-b+a-c)^2}{4}=\frac{(a-b)^3}{4}$$
$$\Rightarrow (a-b)^3\ge 64\Rightarrow (a-b)^2\ge 16.$$

Từ đó ta có

$$2(a^2+b^2+c^2)\ge 2(a^2+b^2)\ge (a-b)^2\ge 16,$$

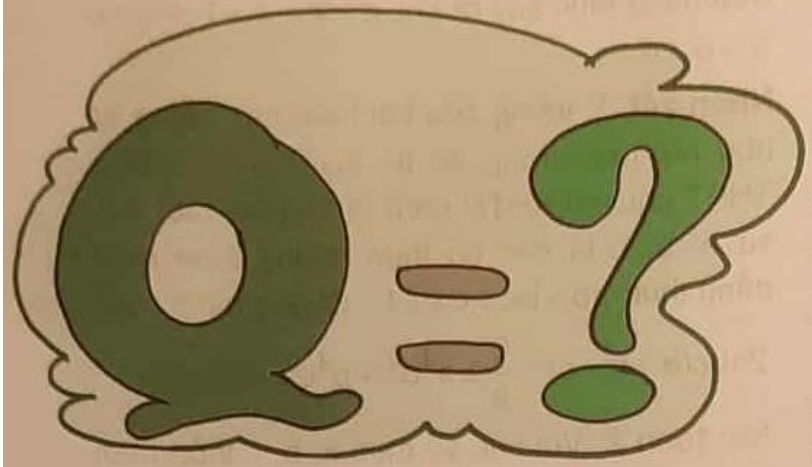
suy ra $P=a^2+b^2+c^2\ge 8$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=2,\ b=-2,\ c=0$.

Nhận xét. Ý tưởng bài toán này tương đối quen thuộc, có thể sử dụng phương pháp đặt

ẩn phụ với $a-b=x,\ b-c=y,\ c-a=z$ thì $x+y+z=0$. Sau đó quy biểu thức P về hai ẩn và đánh giá. Bạn đọc có thể thử sức với bài toán tương tự sau: Với x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=8$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3-2(xy+yz+zx).$$



Bài toán 3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1<x,y,z<2$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)\left(\frac{x^3}{x^3+8z^3}+\frac{y^3}{y^3+8x^3}+\frac{z^3}{z^3+8y^3}\right)\geq\frac{3xy}{z^2+8xy}+\frac{3yz}{x^2+8yz}+\frac{3zx}{y^2+8zx}.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên KHTN)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3}\cdot\frac{y^3}{z^3}\cdot\frac{z^3}{x^3}}=3,$$

$$\frac{x^3}{x^3+8z^3}+\frac{y^3}{y^3+8x^3}+\frac{z^3}{z^3+8y^3}$$

$$\geq\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{x^3(x^3+8z^3)+y^3(y^3+8x^3)+z^3(z^3+8y^3)}$$

$$=\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{(x^3+y^3+z^3)^2+6(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)}$$

$$\geq\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{(x^3+y^3+z^3)^2+2(x^3+y^3+z^3)^2}=\frac{1}{3}.$$

Từ đó

$$\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)\left(\frac{x^3}{x^3+8z^3}+\frac{y^3}{y^3+8x^3}+\frac{z^3}{z^3+8y^3}\right)\geq 1.$$

Lại có $\frac{z^2}{z^2+8xy}+\frac{x^2}{x^2+8yz}+\frac{y^2}{y^2+8zx}$

$$\geq\frac{(z+x+y)^2}{(z+x+y)^2+6(xy+yz+zx)}\geq\frac{1}{3},$$ suy ra

$$1-\frac{z^2}{z^2+8xy}+1-\frac{x^2}{x^2+8yz}+1-\frac{y^2}{y^2+8zx}\leq\frac{8}{3}$$

hay $\frac{3xy}{z^2+8xy}+\frac{3yz}{x^2+8yz}+\frac{3zx}{y^2+8zx}\leq 1.$

Từ đó ta có điều cần chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

Nhận xét. Điều kiện $1<x,y,z<2$ là không cần thiết. Ý tưởng chính của bài toán là chứng minh $VT\geq 1\geq VP$ thông qua đại lượng trung gian là 1. Ta có thể tổng quát bài toán như sau: Cho x, y, z, m là các số thực dương và $k\geq 2$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x^m}{y^m}+\frac{y^m}{z^m}+\frac{z^m}{x^m}\right)\left(\frac{x^m}{x^m+kz^m}+\frac{y^m}{y^m+kx^m}+\frac{z^m}{z^m+ky^m}\right)\geq\frac{3xy}{z^2+kxy}+\frac{3yz}{x^2+kyz}+\frac{3zx}{y^2+kzx}.$$

Việc chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Bài toán 4. Với các số thực x, y, z thỏa mãn $0<x,y,z<1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{4}{(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{z})}+3(x-1)(y-1)(z-1).$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Hà Tĩnh)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{z})=x+2\sqrt{xz}+2\sqrt{xy}+4\sqrt{y}$

$\leq x+x+z+x+y+2(y+z)=3(x+y+z)$, suy ra

$$\frac{4}{(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{z})}\geq\frac{4}{3(x+y+z)}.$$

Với $0<x,y,z<1$ ta có

$(1-x)(1-y)(1-z) \le \dfrac{(1-x+1-y+1-z)^3}{27}$

$= \dfrac{[3-(x+y+z)]^3}{27}.$

Do đó $P \ge \dfrac{4}{3(x+y+z)} - \dfrac{3[3-(x+y+z)]^3}{27}$

$= \dfrac{4}{3t} - \dfrac{(3-t)^3}{9}$ với $0 < t = x+y+z < 3.$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{4}{3t} - \dfrac{(3-t)^3}{9} \ge \dfrac{4}{9}$ hay

$(t-1)^2(3-t)(4-t) \ge 0,$ bất đẳng thức này đúng với $0 < t < 3.$ Suy ra $P \ge \dfrac{4}{9}.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{4}{9}.$

Nhận xét. Ý tưởng chính của bài toán là quy biểu thức P về một đại lượng $t = a+b+c$ để đánh giá. Có thể thấy hướng làm này đã xuất hiện nhiều ở các đề thi tuyển sinh Đại học những năm trước. Bạn đọc có thể thử sức với hai bài tương tự dưới đây:

Bài 1. Với x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 = 2,$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^2+yz+x+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz}{9}.$$

(Thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2014)

Bài 2. Với a, b, c là các số thực dương, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

(Thi tuyển sinh Đại học khối B, năm 2013)

Bài toán 5. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+2bc+2ac = 7,$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{11a+11b+12c}{\sqrt{8a^2+56}+\sqrt{8b^2+56}+\sqrt{4c^2+7}}.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Khánh Hòa)

Lời giải. Từ giả thiết, kết hợp với bất đẳng thức AM-GM ta có

$\sqrt{8a^2+56}+\sqrt{8b^2+56}+\sqrt{4c^2+7}$

$= \sqrt{8(a^2+7)}+\sqrt{8(b^2+7)}+\sqrt{4c^2+7}$

$= \sqrt{8(a^2+ab+2bc+2ac)}+\sqrt{8(b^2+ab+2bc+2ac)}$

$+\sqrt{4c^2+ab+2bc+2ac}$

$= 2\sqrt{(2a+2b)(a+2c)}+2\sqrt{(2a+2b)(b+2c)}$

$+\sqrt{(a+2c)(b+2c)}$

$\le 2a+2b+a+2c+2a+2b+b+2c$

$+\dfrac{2c+a+2c+b}{2} = \dfrac{11a+11b+12c}{2}.$

Do đó $Q \ge 2.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1,\ c = \dfrac{3}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 2.

Nhận xét. Ý tưởng của bài toán là sử dụng đẳng thức quen thuộc $x^2+m = (x+y)(x+z)$ với $m = xy+yz+zx$ sau đó đánh giá biểu thức dưới mẫu theo bất đẳng thức AM-GM. Bạn đọc có thể thử sức với hai bài toán sau:

Bài 1. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc(a+b+c) = 3,$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}+\sqrt{c^2+3}}.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Bắc Ninh, năm 2019)

Bài 2. Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx = 5,$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Hà Nam, năm 2013).

Bài toán 6. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 < x < y \le 13$ và $2xy \le 13x + 9y$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \le 250$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Phú Yên)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có

$$250 = \frac{169}{y^2} \cdot y^2 + \frac{81}{x^2} \cdot x^2$$

$$= (y^2 - x^2)\frac{169}{y^2} + x^2\left(\frac{169}{y^2} + \frac{81}{x^2}\right)$$

$$\ge (y^2 - x^2)\frac{169}{13^2} + x^2 \cdot \frac{\left(\frac{13}{y} + \frac{9}{x}\right)^2}{2}$$

$$= y^2 - x^2 + \frac{(13x + 9y)^2}{2y^2} \ge y^2 - x^2 + \frac{(2xy)^2}{2y^2}$$

$$= y^2 - x^2 + 2x^2 = x^2 + y^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 9, y = 13$.

Nhận xét. Ý tưởng của bài toán là dự đoán điểm rơi để sử dụng phép khai triển Abel. Bạn đọc có thể thử sức với hai bài toán dưới đây:

Bài 1. Với x, y là những số thực thỏa mãn điều kiện $0 < x \le y \le 2, 2x + y \ge 2xy$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^2(x^2 + 1) + y^2(y^2 + 1).$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên KHTN, năm 2016)

Bài 2. Với a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $a > b \ge 2, 3a + 2b \le 4ab$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = a^2 + b^2$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Quốc học Huế, năm 2019)

Để kết thúc bài viết, tác giả đưa ra một số bài tập trong các đề thi tuyển sinh năm 2025 để bạn đọc luyện tập.

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3 + 8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3 + 8}} \ge 1.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Hải Phòng)

Bài 2. Xét các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng $abc \le 1$ và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab + c}{a^4 + b^4 + c} + \frac{bc + a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{ca + b}{c^4 + a^4 + b} - \frac{3}{abc}.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Bà Rịa – Vũng Tàu)

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $\frac{3}{1+a} + \frac{3}{1+b} + \frac{3}{1+c} - \frac{4}{(1+a)(1+b)(1+c)} \ge 4$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Hải Dương)

Bài 4. Với x, y, z là các số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{2x^2 + 2xy + y^2}}{x + 2y} + \frac{\sqrt{2y^2 + 2yz + z^2}}{y + 2z} + \frac{\sqrt{2z^2 + 2zx + x^2}}{z + 2x}.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Hưng Yên)

Bài 5. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{4 - a^3}{a} + \frac{4 - b^3}{b} + \frac{4 - c^3}{c}$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Bình Phước)

Bài 6. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a + b}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b + c}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c + a}{c^2 + ca + a^2}.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Thái Bình)

Bài 7. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)} + \frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2(b+2c)} + \frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2(c+2a)}.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên KHTN Hà Nội)

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN TRONG KÌ THI VÀO LỚP 10 THPT, NĂM 2025

CAO MINH QUANG *(Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)*

Trong chương trình Toán THCS, bài toán tìm nghiệm nguyên là một nội dung quan trọng, giúp học sinh luyện tập tư duy logic và khả năng biến đổi linh hoạt, vận dụng nhiều kĩ thuật, trong đó có tính chọn lọc cao về tư duy và độ sâu chuyên môn.

Phương trình nghiệm nguyên là loại phương trình chỉ nhận giá trị nguyên làm nghiệm. Việc tìm nghiệm nguyên cho các phương trình đặt ra thách thức đối với khả năng lý luận số học và khai thác đặc trưng của từng biểu thức. Bài viết này tổng hợp các bài toán phương trình nghiệm nguyên trong các đề thi tuyển sinh vào trường THPT của các tỉnh thành năm 2025. Sự phân loại các bài toán theo định hướng các phương pháp chỉ mang tính chất tương đối và chủ quan của tác giả bài viết.

1. Đưa về phương trình tích

Biến đổi phương trình thành tích hai biểu thức nguyên rồi áp dụng điều kiện tích bằng hằng số. Đây cũng là dạng toán gần như phổ biến nhất trong lớp các bài toán về phương trình nghiệm nguyên.

Bài toán 1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Thái Bình)

Lời giải. Phương trình được viết lại thành

$$(x^2 + 2xy + y^2) + 2(x + y) + 1 - 4x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 - 4x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (y - x + 1)(3x + y + 1) = 9.$$

Từ đây, xét các trường hợp ta nhận được các nghiệm nguyên (x, y) là $(2, 2)$; $(-2, 6)$; $(0, 2)$; $(-2, -4)$; $(2, -8)$; $(0, -4)$.

Bài toán 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(y + 5)x^2 + 3(x - 1) = y$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Bà Rịa–Vũng Tàu)

Lời giải. Phương trình được viết lại thành

$$(y + 5)(x^2 - 1) + 3(x - 1) = -5$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)[(y + 5)(x + 1) + 3] = -5.$$

Suy ra $x - 1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow x \in \{-4; 0; 2; 6\}$.

Từ đó ta tìm được nghiệm nguyên (x, y) là $(0, -3)$.

Bài toán 3. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$2x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y = 7.$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Bình Định)

Lời giải. Phương trình được viết lại thành

$$2x^2 - 2y^2 + xy + y^2 + 2x + 2y = 7$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(2x - y + 2) = 7.$$

Từ đây, xét các trường hợp ta nhận được các nghiệm nguyên (x, y) là $(2, -1)$ và $(2, 5)$.

Bài toán 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm (a, b) thoả mãn

$$(ab - 5)^2 - a^2 = b(a + b).$$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên thành phố Huế)

Lời giải. Phương trình được viết lại thành

$$a^2b^2 - 9ab + 25 = (a + b)^2$$

$\Leftrightarrow 4a^2b^2 - 36ab + 100 = 4(a+b)^2$

$\Leftrightarrow (2ab-9)^2 + 19 = (2a+2b)^2$

$\Leftrightarrow (2a+2b-2ab+9)(2a+2b+2ab-9) = 19.$

Từ đây, xét các trường hợp ta nhận được các bộ (a, b) không âm là (0, 5) và (5, 0).

Bài toán 5. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$(x-y)(x+y) + x^2(1-y) = 17 - 2y.$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Quảng Bình)

Lời giải. Phương trình được viết lại thành

$2x^2 - y^2 - x^2y + 2y = 17$

$\Leftrightarrow (x^2+y)(2-y) = 17.$

Ta chú ý $(x^2+y) + (2-y) > 0$ nên xét hai trường hợp $\begin{cases} x^2+y &= 1 \\ 2-y &= 17 \end{cases}$ và $\begin{cases} x^2+y &= 17 \\ 2-y &= 1 \end{cases}$

ta thu được các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn là (4, −15); (−4, −15); (4, 1); (−4, 1).

Bài tập tương tự

Bài 1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình $xy - x + 3y = 6.$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Đắk Nông)

Bài 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2xy + 2x + x + y = 0.$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Ninh Thuận)

Bài 3. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0.$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Cần Thơ)

Bài 4. Tìm các số nguyên dương x sao cho $x^2 + x + 10$ là số chính phương.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Đắk Lắk)

Bài 5. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên

$y^2 - 5y + 62 = (y-2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x?$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Điện Biên)

Bài 6. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$(x^2+3)y^2 - (x-2y)(x+2y+1) = 25x + 2y + 169.$

2. Rút một ẩn theo ẩn còn lại

Nếu phương trình đã cho là một đa thức bậc nhất đối với x (hoặc y) với hệ số nguyên thì ta sẽ biểu diễn được x theo y (hoặc y theo x) rồi sử dụng phép chia đa thức và tính chất chia hết để giải.

Bài toán 1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn $x^2 - xy - x + 2y + 1 = 0.$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Sóc Trăng)

Lời giải. Phương trình được viết lại thành

$(x-2)y = x^2 - x + 1.$

Khi $x = 2$ phương trình trên trở thành $0y = 3$ (vô nghiệm).

Khi $x \neq 2$, ta có $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2} = x + 1 + \dfrac{3}{x-2}.$

Vì x, y là các số nguyên nên $x - 2$ là ước của 3. Từ đó, ta tìm được nghiệm nguyên của phương trình là

(3, 7); (1, −1); (5, 7); (−1, −1).

Bài toán 2. Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2(2x-y)(y-x)^2 = 15x - 7y + 7.$

(Thi tuyển sinh THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Lời giải. Đặt $a = 2x - y$, $b = y - x$ thì $15x - 7y = 8a + b$. Phương trình đã cho trở thành $2ab^2 = 8a + b + 7 \Leftrightarrow 2a(b^2 - 4) = b + 7.$

Nếu $b^2 - 4 = 0$ thì $2a(b^2 - 4) = 0, b + 7 \neq 0$ mâu thuẫn. Do đó $b^2 - 4 \neq 0$, suy ra

$2a = \dfrac{b+7}{b^2 - 4}.$

Do a nguyên nên $b + 7 \vdots b^2 - 4$, suy ra $(b+7)(b-7) - (b^2-4) \vdots b^2 - 4$ hay $45 \vdots b^2 - 4.$

Ta chú ý rằng $b^2 - 4 \geq -4$ nên $b^2 - 4 \in \{-3; -1; 1; 3; 5; 9; 15; 45\}$ hay $b^2 \in \{1; 3; 5; 7; 9; 13; 19; 49\}.$

Vì b^2 là số chính phương nên $b^2 \in \{1; 9; 49\}$, suy ra $b \in \{-7; -3; -1; 1; 3; 7\}$.

Mặt khác, ta có $a = \dfrac{b+7}{2(b^2-4)}$ là số nguyên, thử trực tiếp ta được các cặp số (a, b) là $(0, -7); (-1, -1); (1, 3)$.

Để ý rằng $x = a + b, y = a + 2b$ nên xét các trường hợp ta được các cặp số nguyên (x, y) là $(-7, -14); (-2, -3); (4, 7)$.

Bài tập tương tự. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - xy - 9x - 3y + 3 = 0$.

3. Đánh giá miền nghiệm hoặc điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên

Khi phương trình nghiệm nguyên có thể đưa về phương trình bậc hai theo một biến nào đó, ta có thể dùng điều kiện $\Delta \geq 0$ để phương trình có nghiệm, từ đó giới hạn giá trị của biến còn lại. Hoặc đưa về điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên (Δ là số chính phương), từ đó có thể đưa về dạng phương trình tích.

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - 2xy + 3y - x - 1 = 0$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Bình Phước)

Lời giải. Ta viết lại phương trình thành $x^2 - (2y+1)x + 3y - 1 = 0$. Xem đây là phương trình bậc hai ẩn x. Ta có $\Delta = 4y^2 - 8y + 5$. Với kết quả của biệt thức Δ vừa được xác định trên, ta không thể chặn miền giá trị của y khi $\Delta \geq 0$. Do đó, ta phải có điều kiện Δ là số chính phương, điều này tương đương tồn tại số tự nhiên k sao cho

$4y^2 - 8y + 5 = k^2 \Leftrightarrow (2y - 2 + k)(2y - 2 - k) = -1$.

Giải phương trình tích trên, ta có $y = 1$, từ đó tìm được $x = 1, x = 2$.

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình là (1, 1); (2, 1).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Hòa Bình)

Lời giải. Viết lại phương trình thành $x^2 + 2(y-1)x - 3y^2 - 10y - 3 = -7$. Xem đây là phương trình bậc hai ẩn x. Ta có $\Delta' = 4(y+1)^2$ nên $x = y + 3, x = -3y - 1$.

Do đó phương trình trên tương đương với $(x - y - 3)(x + 3y + 1) = -7$. Từ phương trình này, ta tìm được các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn là $(1, -3); (-3, 1); (3, 1); (7, -3)$.

Bài tập tương tự

Bài tập 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2y^2 - 2xy + 3x - 3y + 2 = 0$.

Bài tập 2. Tìm các số tự nhiên x, y thoả mãn $y^3 + 3y^2 + 3y + x^2 - 6x = 23$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Quảng Ninh)

4. Sử dụng đồng dư

Sử dụng đồng dư để loại nghiệm hoặc rút gọn giá trị cần kiểm tra.

Bài toán 1. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (x, y) thỏa mãn $x^4 + 227 = y^5$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Tiền Giang)

Lời giải. Nếu $x = 3$ thì $y^5 = 3^4 + 227 = 308$ nên không tồn tại số nguyên tố y thỏa mãn.

Nếu $x \neq 3$ thì $x^4 \equiv 1 \pmod 3$, suy ra $y^5 = x^4 + 227 \equiv 0 \pmod 3$, suy ra $y = 3$ (do y là số nguyên tố), dẫn đến $x^4 = 3^5 - 227 = 16$ nên $x = 2$ (do x là số nguyên tố).

Vậy có một cặp số (x, y) thỏa mãn là (2, 3).

Bài toán 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn

$25^y + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4^x + 4x^2 + 3x + 4)5^y$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên KHTN Hà Nội)

Lời giải. Viết lại phương trình thành

$5^y(5^y - 4x^2 - 3x - 3) - (4^x + 1)(5^y - 4x^2 - 3x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (5^y - 4x^2 - 3x - 3)(5^y - 4^x - 1) = 0$.

Trường hợp 1. $5^y = 4^x + 1$.

Với $x = 1$, suy ra $y = 1$ (thỏa mãn).

Với $x \geq 2$, ta có $5^y = 4^x + 1 \equiv 1 \pmod 8$ nên y chẵn, dẫn đến $5^y \equiv 1 \pmod 3$, suy ra $4^x \equiv 0 \pmod 3$ (vô lí).

Trường hợp 2. $5^y = 4x^2 + 3x + 3$.

Dễ thấy $5^y \equiv 4x^2 \equiv 1 \pmod 3$, suy ra y là số chẵn nên $4x^2 + 3x + 3$ là số chính phương.

Mặt khác $(2x)^2 < 4x^2 + 3x + 3 < (2x + 2)^2$ nên

$4x^2 + 3x + 3 = (2x + 1)^2$, suy ra $x = 2$, dẫn đến $y = 2$.

Vậy các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn là (1, 1); (2, 2).

Bài tập tương tự

Bài 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $2^m - 2 = n!$.

Bài 2. Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c sao cho $a^b + 1999 = c$.

5. Sử dụng phương pháp kẹp

Phương pháp này dựa vào một vài nhận xét sau đây: giữa hai số nguyên liên tiếp không có số nguyên nào khác; giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào khác; giữa hai số lập phương liên tiếp không có số lập phương nào khác.

Bài toán 1. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn $x(x - 2y) = y^3 - 3y^2 + 2y - 1$.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Hà Nội)

Lời giải. Viết lại phương trình dưới dạng $(x - y)^2 = y^3 - 2y^2 + 2y - 1 = (y - 1)(y^2 - y + 1)$.

Vì $y^2 - y + 1 > 0$ và $(x - y)^2 \geq 0$ nên $y \geq 1$.

Mặt khác, do $(y - 1, y^2 - y + 1) = 1$ nên $y - 1$ và $y^2 - y + 1$ đều là số chính phương.

Vì $y \geq 1$ nên $(y - 1)^2 < y^2 - y + 1 < (y + 1)^2$, suy ra $y^2 - y + 1 = y^2 \Leftrightarrow y = 1$.

Với $y = 1$ ta có $x(x - 2) = -1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy có duy nhất cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn là (1, 1).

Bài toán 2. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $8a^3 + 18ab + 1$ và $8b^3 + 18ab + 1$ đều là lập phương của một số nguyên.

(Thi tuyển sinh THPT chuyên Hải Phòng)

Lời giải. Ta có $8a^3 + 18ab + 1$ là số lập phương và $8a^3 + 18ab + 1 > (2a)^3$ nên $8a^3 + 18ab + 1 \geq (2a + 1)^3$, suy ra $3b \geq 2a + 1$ hay $2a \leq 3b - 1$.

Từ đó, ta có $(2b)^3 < 8b^3 + 18ab + 1$

$\leq 8b^3 + 9b(3b - 1) + 1 = 8b^3 + 27b^2 - 9b + 1$

$< (2b + 3)^3$ (do với b là số nguyên dương thì

$(2b + 3)^3 - (8b^3 + 27b^2 - 9b + 1)$

$= 9b^2 + 63b + 26 > 0$)

Do $8b^3 + 18ab + 1$ là số lập phương lẻ nên ta có $8b^3 + 18ab + 1 = (2b + 1)^3$, suy ra $3a = 2b + 1$.

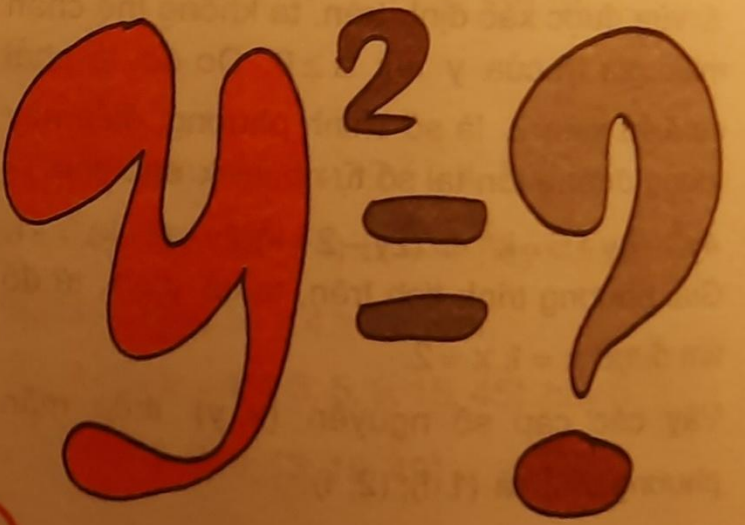
Chứng minh tương tự ta có $3b = 2a + 1$.

Từ đó ta tìm được $a = b = 1$. Thử lại ta thấy thỏa mãn đề bài và đó là các số cần tìm.

Bài tập tương tự

Bài 1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + (x - 1)^2 = y^4 + (y - 1)^4$.

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.



THÁCH ĐẤU

TRẬN ĐẤU THỨ HAI TRĂM MƯỜI TÁM

Người thách đấu: Võ Quốc Bá Cẩn *(Trường Archimedes Academy Trung Yên, Hà Nội).*

Bài toán thách đấu: Viết các số dạng $\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương không vượt quá 100 và $(a, b) = 1$, theo thứ tự tăng dần. Hỏi, số được viết liền ngay trước số $\frac{37}{69}$ là bao nhiêu?

Kết quả

TRẬN ĐẤU THỨ HAI TRĂM MƯỜI SÁU (TTT2 số 267)

Đề bài. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a+b)}{b+c}+\frac{b(b+c)}{c+a}+\frac{c(c+a)}{a+b}\geq a+b+c.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\left[\frac{a(a+b)}{b+c}+a+b\right]+\left[\frac{b(b+c)}{c+a}+b+c\right]$$

$$+\left[\frac{c(c+a)}{a+b}+c+a\right]\geq 3(a+b+c) \text{ hay}$$

$$(a+b+c)\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\right)\geq 3(a+b+c).$$

Bất đẳng thức cuối này hiển nhiên đúng, vì theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

HONG HA

Nhận xét. Với sự xuất hiện của các đại lượng $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ thì việc thêm bớt để xuất hiện nhân tử $a+b+c$ là một hướng đi rất tự nhiên và đây cũng là hướng đi của phần lớn các bạn gửi lời giải đến tòa soạn. Các võ sĩ sau xứng đáng đăng quang trong trận đấu này: *Phạm Anh Tuấn*, 8A, THCS Bạch Liêu, **Nghệ An**; *Trần Trung Nghĩa*, 8E, THCS Vĩnh Tường, **Phú Thọ**.

VÕ QUỐC BÁ CẨN

THÔNG BÁO

Xin chào tất cả các bạn đọc yêu quý của Toán Tuổi thơ!

Sau một kì nghỉ hè khá dài, một năm học mới đã đến. Toán Tuổi thơ phát hành số đặc biệt chào mừng năm học mới 2025 – 2026 với nhiều bài viết hay và hấp dẫn. Tất cả các chuyên mục có phần giải đề kì trước đều có chọn khen và thưởng những cá nhân, tập thể có bài làm tốt, chữ viết và trình bày sạch đẹp ở số báo đã phát hành trước 2 tháng. Vì thế số đầu năm học mới này, Toán Tuổi thơ chọn khen và thưởng các bạn giải bài ở TTT2 số 267 nên vẫn là các bạn ở lớp của năm học 2024 – 2025. Vậy các thầy cô giáo và các em học sinh lưu ý để đón nhận quà của Toán Tuổi thơ sắp tới.

Toán Tuổi thơ xin chúc các thầy cô giáo, các em học sinh, các bạn đọc của Toán Tuổi thơ trên mọi miền của đất nước có nhiều sức khỏe, nhiều niềm vui và niềm đam mê toán học để luôn đồng hành cùng Toán Tuổi thơ!

TTT



ÔNG BỤT LÀM SÚNG

NGUYỄN NHƯ MAI

1. Một thời tuổi trẻ

Ông Phạm Văn Mùi là một nhà giáo nghèo, dạy tại trường tiểu học Vĩnh Long. Ông sinh được cô con gái đầu lòng đặt tên là Nhẫn và người con trai thứ, tên là Phạm Quang Lễ. Nhưng về sau, người ta cứ viết nhầm là Phạm Quan Lễ.

Lễ được ba đưa theo đến trường để kèm cặp về môn toán, chữ Pháp, dạy đạo nghĩa làm người và lòng yêu nước.

Năm Lễ lên sáu thì ba mất. Ba trăng trối lại, dù bất cứ khó khăn thế nào cũng phải để Lễ học hành nên người.

Lễ được gửi ở nhờ gia đình thầy giáo dạy cùng trường với ba.

Năm 1926 cậu là một trong số rất ít học trò Vĩnh Long thi đỗ tiểu học hạng ưu.

Phạm Quang Lễ được cấp học bổng đi học tận Mỹ Tho, cách nhà hơn 100 cây số.

Bốn năm trung học đệ nhất cấp, Lễ đều đứng đầu lớp.



Vừa gặp dịp trường Trung học Đệ nhị cấp bản xứ, mang tên Petrus Trương Vĩnh Ký được thành lập tại Sài Gòn. Phạm Quang Lễ thuộc diện những học sinh xuất sắc nhất Nam Kỳ được tuyển chọn và cấp học bổng vào học ở đây.

Năm 1933, khi 20 tuổi, Phạm Quang Lễ đỗ đầu trong cuộc thi trung học cả hai bằng tú tài bản xứ và tú tài Tây.

Nhà nghèo, anh không có tiền ra Hà Nội học đại học. Để giúp đỡ gia đình và chờ thời cơ, anh xin làm một chân thư ký quèn ở tòa sứ Mỹ Tho. Hai năm vừa làm việc, anh vừa tự học, trau dồi thêm kiến thức và tiếng Pháp. Nhà báo Dương Văn Ngưu, một Việt kiều về nước tình cờ gặp Phạm Quang Lễ làm việc tại tòa sứ. Cảm phục chàng trai trẻ hiền lành, có tài, có chí, ông vận động một hội ái hữu xin được học bổng để Lễ sang Pháp du học.

2. Những năm du học

Phạm Quang Lễ muốn theo học chế tạo vũ khí để phục vụ đất nước sau này. Nhưng thực dân Pháp không cho phép dân thuộc địa theo học ngành này, anh phải đi đường vòng.

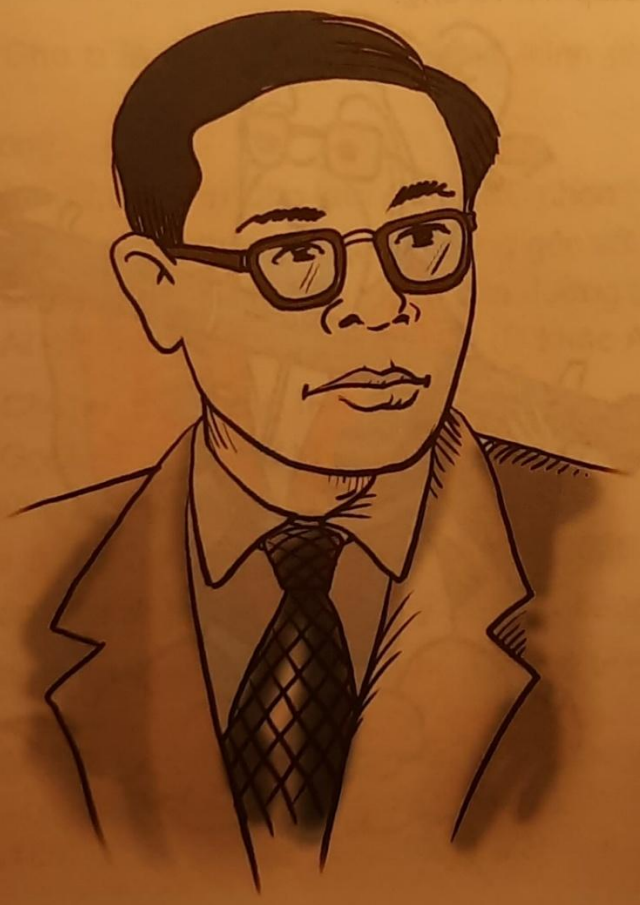
Đầu tiên anh thi đỗ để có học bổng học tiếp vào trường đại học quốc gia Cầu đường. Sau đó theo học nhiều trường đại học khác nhau để nắm được những kiến thức khoa học cơ bản, toán học, cơ học, hóa học và kỹ thuật. Phạm Quang Lễ đã thi lấy bằng cử nhân khoa học ở Trường Đại học Sorbonne, bằng kỹ sư Điện, chứng chỉ Trường Đại học Bách khoa, Trường Đại học Mỏ, Học viện Thống kê...

Khi đã có đủ những bằng cấp danh giá ấy, anh dễ dàng được tiếp nhận vào học tại Viện Khí động học và học viện Kỹ thuật hàng không. Đó là một bước tiệm cận đến sản xuất vũ khí.

Không thể tưởng tượng được một người làm sao có thể chiếm lĩnh được tri thức nhiều ngành khoa học kỹ thuật như vậy. Nhưng như thế chưa đủ. Muốn học chế tạo vũ khí, Phạm Quang Lễ phải hoạt động như một nhà "tình báo công nghệ".

Phạm Quang Lễ tự học tiếng Đức để đọc tài liệu nguyên bản về vũ khí của Đức. Năm 1939, anh xin vào làm việc tại Hãng Điện khí Thomson, từ đó chuyển sang Viện nghiên cứu hàng không và vũ khí của Pháp. Nhân cơ hội Đức chiếm đóng nước Pháp, năm 1942 anh sang Đức làm việc trong xưởng chế tạo máy bay.

Như một "điệp viên đơn tuyến", không có chỉ đạo và đường dây liên lạc nào, "nhà tình báo" Phạm Quang Lễ đã thu được những bí quyết quân sự về chế tạo vũ khí thuộc loại tuyệt mật.



3. Về nước

Năm 1946 Chủ tịch Hồ Chí Minh sang Pháp dự Hội nghị Fontailebleau.

Vài ngày trước khi về nước, Hồ Chủ tịch gặp riêng Phạm Quang Lễ và thông báo ngắn gọn:

- Cuộc đàm phán thất bại, Bác phải về nước, chú chuẩn bị cùng về có kịp không?

- Thưa cụ, tôi đã chuẩn bị mười một năm nay rồi, chỉ chờ ngày trở về thôi.

Kỹ sư Lễ lập tức làm đơn xin thôi việc ở hãng chế tạo máy bay với lương tháng tương đương 20 cây vàng.

Ông mang theo hơn 30 ngàn trang tài liệu quý đóng gói "ngoại giao" theo Bác xuống tàu về nước.

Đoàn tàu đưa Bác Hồ cập bến Hải Phòng. Tổng tư lệnh Võ Nguyên Giáp ôm chầm kỹ sư Phạm Quang Lễ và xúc động nói:

- Ở nhà nghe tin anh về với Bác mừng lắm!"

Vừa về đến Hà Nội, kỹ sư Phạm Quang Lễ được Thứ trưởng Bộ quốc phòng Tạ Quang Bửu đón lên Thái Nguyên thử đạn bazooka vừa cướp được của quân Nhật.

Ông được Bác phong cho làm Cục trưởng Cục quân giới. Để giữ bí mật, Bác đặt tên cho ông là Trần Đại Nghĩa. Bác giải thích:

- Trần là họ của anh hùng dân tộc Trần Hưng Đạo. Đại Nghĩa là nghĩa lớn vì đất nước, vì dân tộc.

Từ đó, ông chính thức được mang tên này suốt cuộc đời.

4. Cống hiến

Kháng chiến toàn quốc bùng nổ.

Công binh xưởng được thành lập ở Chiến khu Việt Bắc. Nhiệm vụ đầu tiên do kỹ sư Trần Đại Nghĩa đảm nhiệm là chế tạo súng bazooka.

Thép lấy từ đường ray xe lửa dùng để sản xuất các bộ phận súng ống.



Ta chiếm được một kho đạn đại bác của hải quân Pháp. Công nhân tháo dỡ để lấy thuốc nổ vô cùng nguy hiểm, đã có người hy sinh. Ngày 3-3-1947, súng bazooka lần đầu tiên ra trận đã tiêu diệt được hai xe tăng địch.

Trong chiến dịch Thu Đông 1947, bộ đội ta ẩn nấp bên bờ sông, dùng súng bazooka bắn chìm tàu chiến giặc trên sông Lô. Bazooka còn bắn được xe tăng, bắn sập lô cốt trú ẩn của quân Pháp, tiêu diệt cả toán lính đang hành quân…

Sau chiến thắng Sông Lô, kỹ sư Trần Đại Nghĩa được phong quân hàm Thiếu tướng cùng đợt đầu tiên với Đại tướng Võ Nguyên Giáp.

Cuộc kháng chiến ngày càng ác liệt. Tại an toàn khu, kỹ sư Trần Đại Nghĩa lại lao vào nghiên cứu chế tạo vũ khí mới. Ông làm việc quên ăn, quên ngủ giữa bốn bề thuốc súng và đạn dược.

Cục quân giới đã chế tạo thành công một loại vũ khí mới có tên là SKZ- súng không giật.

Để có thể đánh đòn chí mạng vào các điểm co cụm của địch, kỹ sư Trần Đại Nghĩa và tập thể Cục quân giới nghiên cứu tìm hiểu loại bom bay của quân Đức trong thế chiến thứ II.

Từ đó ta đã tạo ra loại bom bay có sức tấn công chẳng kém gì so với V1, V2.

Năm 1952, Đại hội Anh hùng và Chiến sĩ thi đua toàn quốc lần đầu tiên được tổ chức tại Chiến khu Việt Bắc. Kỹ sư Trần Đại Nghĩa vinh dự là vị trí thức đầu tiên được phong danh hiệu này.

Cuộc kháng chiến chống thực dân Pháp 9 năm kết thúc, Giáo sư Trần Đại Nghĩa được phân công đảm nhiệm nhiều lĩnh vực dân sự như thứ trưởng các Bộ công thương, Bộ công nghiệp nặng…

Tiếp đó, ông là người đặt nền móng cho nền khoa học nước nhà trong vị trí Chủ nhiệm ủy ban Khoa học Nhà nước và Viện trưởng Viện Khoa học Việt Nam (nay là Viện Hàn lâm khoa học và công nghệ Việt Nam).

Giáo sư, Viện sĩ Trần Đại Nghĩa qua đời năm 84 tuổi (1913- 1997). Có nhiều công lao với nước với dân, ông vẫn sống trong cốt cách bình dị.

"ÔNG BỤT LÀM SÚNG", đây là câu nói xúc tích và xác đáng của Đại tướng Võ Nguyên Giáp nói về ông.





ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút

TRƯƠNG QUANG AN *(Quảng Ngãi)*

Bài 1. *(2,0 điểm)*

1) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Tính giá trị biểu thức $A=\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}$.

2) Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, chứng minh rằng không tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho $P(a)=b$, $P(b)=c$, $P(c)=a$.

Bài 2. *(2,0 điểm)*

1) Xét hệ phương trình $\begin{cases} y^2-(x+y)=m \\ x^2-(x+y)=m \end{cases}$ (với m là tham số), tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

2) Có 10 bạn (trong đó chỉ có một bạn tên An và một bạn tên Bảo) xếp ngẫu nhiên thành một hàng dọc, tính xác suất để trong đó nhất thiết có hai bạn An và Bảo phải đứng cạnh nhau.

Bài 3. *(2,0 điểm)*

1) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn tính chất $(2^n+1):n$.

2) Cho p là số nguyên tố, chứng minh phương trình $\frac{x^2+x}{y^2+y}=p^4$ không có nghiệm nguyên dương.

Bài 4. *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn ($AB<AC$) nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường thẳng đi qua I vuông góc với AI cắt BC tại T.

a) Chứng minh TI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.

b) AI cắt lại đường tròn (O) tại D (D khác A), đoạn TI cắt đường tròn (O) tại Q, QD cắt BC tại P. Chứng minh rằng $IP^2=PB\cdot PC$.

c) Gọi E, F theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (I) với AC, AB và N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng góc BNC là góc tù.

Bài 5. *(1,0 điểm)* Trên bảng có viết 2025 số nguyên dương từ 1 đến 2025. Mỗi lần ta được phép xóa đi hai số a, b tùy ý có trên bảng và thay bởi số $|a-b|$. Thực hiện cho tới khi trên bảng chỉ còn đúng một số là m. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của m.

Các bạn có thể đặt mua các ấn phẩm của tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: Toán học và Tuổi trẻ **(C168)**; Toán Tuổi thơ 1 **(C169)**; Toán Tuổi thơ 2 **(C169.1)**; Văn học và Tuổi trẻ **(C668)**; Văn Tuổi thơ **(C668.1)**.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN CHUYÊN

(Đề đăng trên TTT2 số 268)

TRẦN QUỐC LUẬT *(Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)*

Bài 1. 1) Do $ab=-1$ nên

$(a-b)^2=a^2+b^2+2$ và

$(a-b)^3=a^3-b^3+3a-3b.$

Suy ra $A=(a^2+b^2+2)(a^3-b^3+3a-3b)$

$-5(a^3-b^3+3a-3b)+5(a-b)-a^5+b^5$

$=a^2b^2(a-b)+3(a-b)(a^2+b^2)-3a^3+3b^3-4(a-b)$

$=a^2b^2(a-b)-3ab(a-b)-4(a-b)=0.$

2) Điều kiện xác định: $x\le 2$.

Đặt $t=\sqrt{2-x}$, $t\ge 0$ thì $x=2-t^2$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$\sqrt{(2-t^2)^2+3}+2=(t+1)(3-t^2)$, suy ra

$(2-t^2)^2-1=(t+1)(3-t^2)(\sqrt{(2-t^2)^2+3}-2).$

Suy ra $1-t=\sqrt{(2-t^2)^2+3}-2$ hoặc $t=\sqrt{3}$.

Suy ra $9-6t+t^2=t^4-4t^2+7$ hoặc $t=\sqrt{3}$.

Suy ra $(t-1)^2(t^2+2t-2)=0$ hoặc $t=\sqrt{3}$.

Suy ra $t=1$, $t=\sqrt{3}-1$ hoặc $t=\sqrt{3}$.

Suy ra $x=\pm 1$, $x=2\sqrt{3}-2$.

Thử lại ta được tập nghiệm $S=\left\{1;\,2\sqrt{3}-2\right\}$.

Bài 2. 1)Tổng số trận đội A thua là 8. Suy ra đội A đã thi đấu tất cả 16 trận.

1) Gọi giá bán rau của trang trại là $28+x$ (nghìn đồng/kg). Khi đó số tiền bán rau mà trang trại thu về mỗi ngày là

$T=(28+x)(1200-10x)+10x\cdot 4$

$=-10(x-48)^2+56640\le 56640$ (nghìn đồng).

3) Ta thấy số chính phương chia cho 5 thì sẽ chia hết hoặc có số dư 1 hoặc có số dư 4.

Tập $\left\{1^2;2^2;\ldots;20^2\right\}$ gồm 4 số chính phương chia hết cho 5, 8 số chính phương chia 5 dư 1 và 8 số chính phương chia 5 dư 4. Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2+4\cdot 8\cdot 8\cdot 6}{20\cdot 19\cdot 18}=\dfrac{13}{57}$.

Bài 3. a) Nếu $xyz\ge 1$ thì

$3-xy=x^2+y^2+z^2+xyz\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2}+xyz\ge 4,$

vô lí, suy ra $xyz<1$.

Ta có $x^2+y^2\ge 2xy$ nên $z^2+xyz+3xy\le 3$,

suy ra $xy\le\dfrac{3-z^2}{3+z}$.

Lại có $\dfrac{9-5z}{8}-\dfrac{3-z^2}{3+z}=\dfrac{3(z-1)^2}{8(3+z)}\ge 0$ nên

$xy\le\dfrac{3-z^2}{3+z}\le\dfrac{9-5z}{8}$, suy ra $8xy+5z\le 9$.

b) Do $xyz<1$ nên $\min\{x,y,z\}<1$.

Suy ra $P=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}$

$\ge\sqrt{x^2+y^2+z^2+xy+xyz}=\sqrt{3}.$

Khi $x=\sqrt{3}$, $y=z=0$ thì $P=\sqrt{3}$.

Vậy $\min P=\sqrt{3}$.

Nếu $z\ge 1$ ta có

$P=x+y+z\le\sqrt{2[(x+y)^2+z^2]}$

$\le\sqrt{2(x^2+y^2+z^2+xyz+xy)}=\sqrt{6}.$

Nếu $z<1$ thì

$(x+y)^2+z^2-3=xy(1-z)\le\dfrac{(x+y)^2}{4}(1-z).$

Suy ra $x+y\le 2\sqrt{\dfrac{3-z^2}{3+z}}\le 2\sqrt{\dfrac{9-5z}{8}}=\sqrt{\dfrac{9-5z}{2}}.$

Suy ra $P\le\sqrt{\dfrac{9-5z}{2}}+z<\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{9-5z}{2}+2\right)+z$

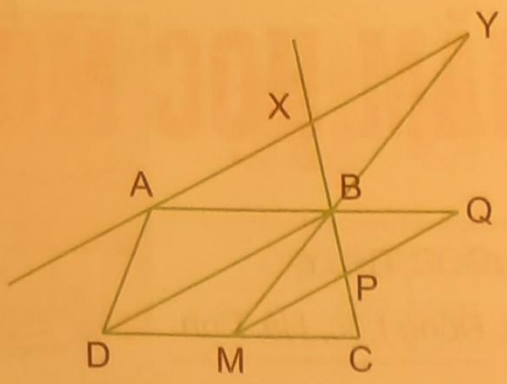
$=\left(1-\dfrac{5}{4\sqrt{2}}\right)z+\dfrac{13}{4\sqrt{2}}<\left(1-\dfrac{5}{4\sqrt{2}}\right)+\dfrac{13}{4\sqrt{2}}<\sqrt{6}.$

Do vậy ta luôn có $P\le\sqrt{6}$.

Khi $x=0$; $y=z=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ thì $P=\sqrt{6}$.

Vậy $\max P=\sqrt{6}$.

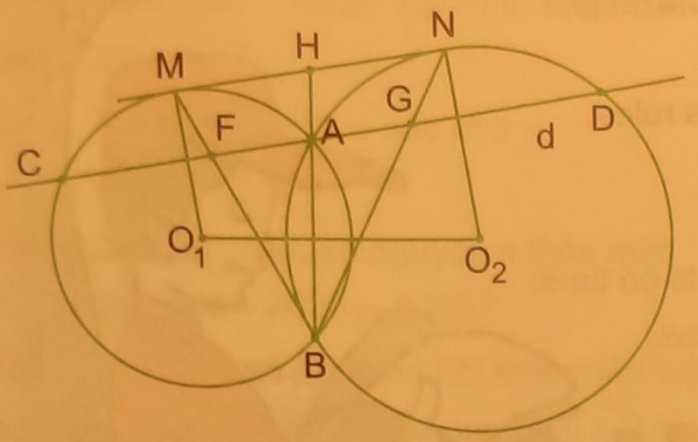
Bài 4. 1) Đường thẳng qua M song song với BD cắt BC, BA tại P, Q.



Khi đó P là trung điểm của BC và tứ giác BMCQ là hình bình hành. Ta có

$\frac{XA}{PQ} = \frac{BX}{BP} = \frac{XY}{PM}$ nên $XA = XY$.

2) Giả sử AB cắt MN tại H.



Ta có $\overset{\frown}{EMN} = \overset{\frown}{AMN}$, $\overset{\frown}{ENM} = \overset{\frown}{ANM}$ nên $\Delta EMN = \Delta AMN$ suy ra MN là trung trực của AE. Do $AE \perp MN$ nên $AE \perp FG$.

Ta có $HM^2 = HA \cdot HB = HN^2$ nên $HM = HN$. Do đó $AF = AG$. Lại có $AE \perp FG$ nên $EF = EG$.

Bài 5. 1) Ta có $n^2 = (x+1)^3 - x^3$ nên

$3(2x+1)^2 = (2n-1)(2n+1)$.

Do $(2n-1, 2n+1) = 1$ nên $\begin{cases} 2n-1 = 3m^2 \\ 2n+1 = l^2 \end{cases}$ hoặc

$\begin{cases} 2n-1 = m^2 \\ 2n+1 = 3l^2 \end{cases}$ với m, l là các số tự nhiên.

Nếu $\begin{cases} 2n-1 = 3m^2 \\ 2n+1 = l^2 \end{cases}$ thì $l^2 - 3m^2 = 2$, dẫn đến

$l^2 \equiv 2 \pmod 3$, vô lí.

Suy ra $\begin{cases} 2n-1 = m^2 \\ 2n+1 = 3l^2, \end{cases}$ dẫn đến m lẻ.

Đặt $m = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ ta có

$n = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$.

2) Lấy mỗi lỗ kim là tâm dựng một hình tròn bán kính 1 cm. Tổng diện tích của 31 hình tròn này sẽ là 31π nhỏ hơn diện tích của hình vuông cạnh 10 cm. Do đó phải có một điểm M trong hình vuông cạnh 10 cm (là hình vuông thu được từ hình vuông cạnh 12 cm đã cho bằng cách thu hẹp các chiều 1 cm) và không nằm trong 31 hình tròn bán kính được dựng như đã trình bày ở trên. Lấy điểm M làm tâm ta cắt một hình tròn bán kính 1 cm, thì hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông đã cho có cạnh dài 12 cm và không chứa một lỗ kim châm nào.

Bài 6. Cho $b = c = 0, a = 1$ ta được

$x^2 + mx + p \geq 0$ với mọi x.

Cho $x = -\frac{m}{2}$ ta được $m^2 \leq 4p$.

Cho $c = \frac{b^2}{4}$, $a = 1$ ta được

$4x^2 + [4m + 4b(n+1) + pb^2]x + 4p + b^2(n+1) + 4mb \geq 0$

với mọi x.

Cho $x = \frac{-pb^2}{8}$ được

$\frac{-p^2b^4}{16} - \frac{p(n+1)}{2}b^3 + \left(1 + n - \frac{pm}{2}\right)b^2 + 4mb + 4p \geq 0.$

Chia hai vế cho b^4 rồi cho b rất lớn ta có ngay $p = 0$. Suy ra $m = 0$.

Lại cho $x = \frac{-b(n+1)}{2}$ được

$b^2(-n^2 - n) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 0$. Khi đó, với mọi x thì

$g(x) \geq a\left[x + \frac{b(n+1)}{2a}\right]^2 + (1+n).\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a}(n+1)^2$

$\geq -n(1+n).\frac{b^2}{4a} \geq 0$

(do $f\left(\frac{-b}{2a}\right) \geq 0$ nên $c \geq \frac{b^2}{4a}$).

Vậy điều kiện cần tìm là $m = p = 0, -1 \leq n \leq 0$.



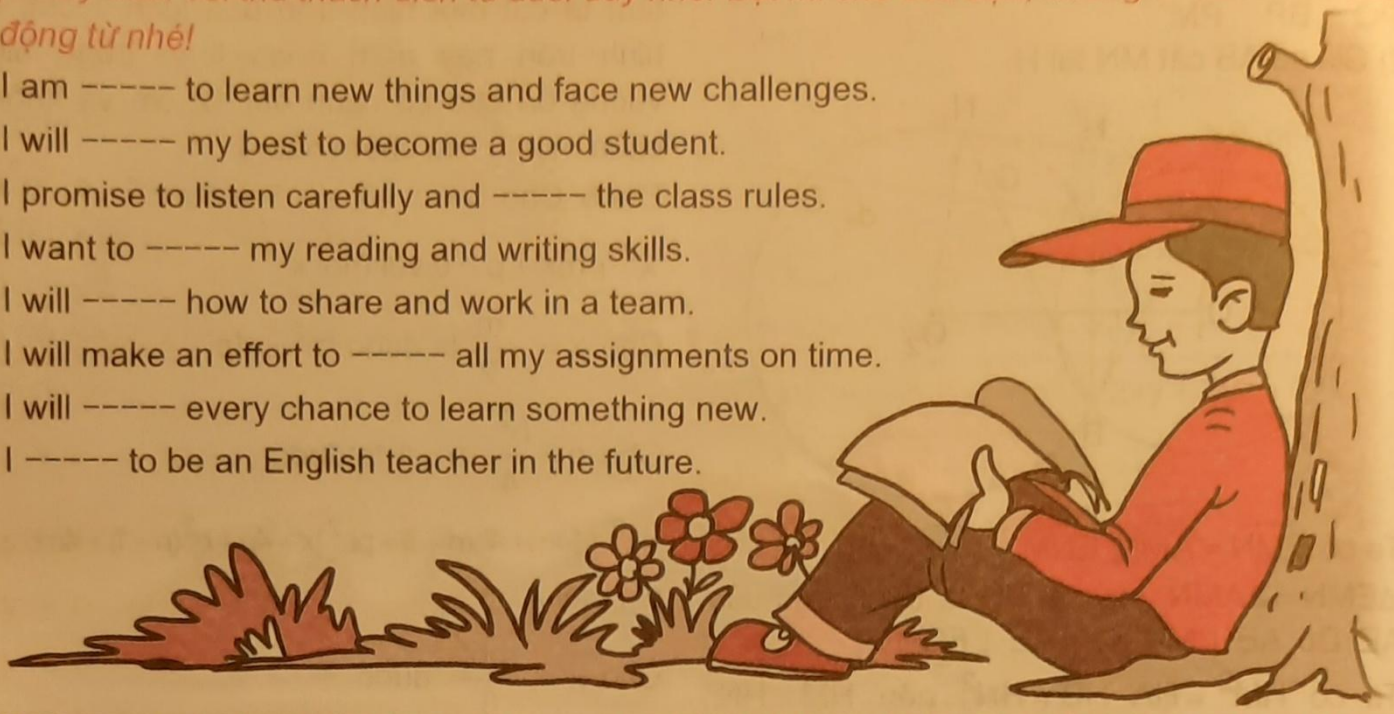
Kì này CHÀO NĂM HỌC MỚI!

TRẦN THỊ NGỌC THÚY

Trường TH Mỹ Lộc, Đồng Lộc, Hà Tĩnh

Chào mừng năm học mới các bạn yêu Toán Tuổi Thơ 2! Hãy cùng khởi động một năm học thật may mắn với thử thách điền từ dưới đây nhé! Bật mí cho các bạn, những từ còn thiếu đều là động từ nhé!

1. I am ----- to learn new things and face new challenges.
2. I will ----- my best to become a good student.
3. I promise to listen carefully and ----- the class rules.
4. I want to ----- my reading and writing skills.
5. I will ----- how to share and work in a team.
6. I will make an effort to ----- all my assignments on time.
7. I will ----- every chance to learn something new.
8. I ----- to be an English teacher in the future.



Kết quả THE JUNGLE QUEST (TTT2 số 267)

Answer:

1. (A) camel **2.** (An) owl
3. (An) octopus **4.** (A) snake
5. (A) polar bear **6.** (A) butterfly

Nhận xét. Các bạn sau có đáp án đúng và trình bày đẹp được thưởng kì này: *Phan Thị Phương Ly*, 8B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Lê Kim Ngân*, 7A1, THCS Quỳnh Thiện, Thị xã Hoàng Mai, **Nghệ An**; *Trầm Thị Ngọc Trâm*, *Hoàng Thanh Nhàn*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Song Thư*, 7A5, THCS Hương Canh, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**.

Các bạn sau được khen: *Lê Nguyễn Hoàng Ngân*, *Nguyễn Thị Thanh Sang*, 7A, *Nguyễn Lâm Anh*, *Nguyễn Kiều Diễm*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Trúc Chi*, 8B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**.

Chủ Vườn



KÌ 81

CAO NGỌC TOẢN
(TP. Huế)

LTS. *Từ năm học 2025-2026, chuyên mục "**Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ**" được đổi tên thành "**Góc Olympic**" để chuẩn bị cho Cuộc thi Olympic Văn - Toán Tuổi thơ toàn quốc năm 2026.*

Bài 1. Tìm số tự nhiên n sao cho

$n^7 + n^5 - 2n = 2424$.

Bài 2. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn

$|x + 2024| + |x - 2025| = 4049$?

Bài 3. Cho 100 số tự nhiên đôi một phân biệt $a_1, a_2, ..., a_{100}$ và mỗi số không chia hết cho 7. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai số a_i, a_j $(1 \le i, j \le 100)$ sao cho $a_i^6 - a_j^6$ chia hết cho 7.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là điểm trên cạnh BC sao cho MB = AB. Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt tia CB tại D. Chứng minh B là trung điểm của DM.

Bài 5. Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 4(x^3 + y^3) + 3z$.

Kết quả Kì 79 (TTT2 số 267)

CLB1. Ta có

$(a^2 - b^2)^2 = 2(a^4 + b^4) - (a^2 + b^2)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1^2 = 0.$

Suy ra $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$.

Do đó $M = (a^2)^5 + (b^2)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$.

CLB 2. Từ giả thiết ta có $0 \le \frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}, \frac{d}{4} \le 1$.

Do đó

$$P = 8\left(\frac{a}{4}\right) + 48\left(\frac{b}{4}\right)^2 + 256\left(\frac{c}{4}\right)^3 + 1280\left(\frac{d}{4}\right)^4$$

$$\le 8 \cdot \frac{a}{4} + 48 \cdot \frac{b}{4} + 256 \cdot \frac{c}{4} + 1280 \cdot \frac{d}{4}$$

$$\le 1280 \cdot \frac{a}{4} + 1280 \cdot \frac{b}{4} + 1280 \cdot \frac{c}{4} + 1280 \cdot \frac{d}{4} \le 1280.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 0, d = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1280.

CLB 3. Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. Theo giả thiết thì t là số nguyên và $t \ge 2$.

Ta có $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = t(t^2 - 3)$.

Do $x^3 + \frac{1}{x^3}$ là số nguyên tố và $t \ge 2$ nên $t^2 - 3 = 1$, suy ra $t = 2$, dẫn đến $x = 1$.

Với $x = 1$ thì $x^{2025} + \frac{1}{x^{2025}} = 2$ là số nguyên.

CLB 4. Gọi $d = (x, y)$ thì $x = dm, y = dn$ với $(m, n) = 1$.

Ta giả thiết, ta có $x^2 + y^2 - x \vdots xy$ nên

$d^2m^2 + d^2n^2 - dm \vdots d^2mn$

hay $dm^2 + dn^2 - m \vdots dmn$.

Suy ra $dm^2 + dn^2 - m \vdots d$, suy ra $m \vdots d$.

Cũng từ $dm^2 + dn^2 - m \vdots dmn$ ta có

$dm^2 + dn^2 - m \vdots m$, suy ra $dn^2 \vdots m$, suy ra $d \vdots m$ (do $(m, n) = 1$).

Từ $m \vdots d$, $d \vdots m$ và m, d nguyên dương, suy ra $m = d$, dẫn đến $x = d^2$ là số chính phương.

(Xem tiếp trang 30)



Các bạn hãy giải bài toán sau bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé!
Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

Problem 60(269+270). Find all primes a, b, c such that

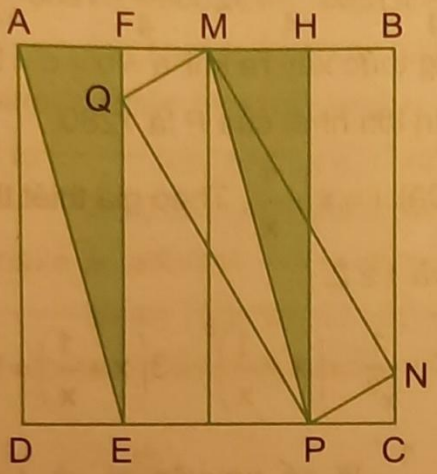
$$ab + bc + ca > abc.$$

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH

Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội

Kết quả Problem 56(267).

Setting $AF = MQ = x$, $MF = y$.



We have $\Delta MFQ = \Delta PCN \Rightarrow PC = MF = y$.

PH perpendicular to AB at H,

$\Delta MHP = \Delta AFE$

$\Rightarrow MH = AF = x.$

$\Rightarrow MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}MN$

$\Rightarrow \widehat{BMN} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{FMQ} = 30^\circ.$

$\Rightarrow y = FM = \frac{\sqrt{3}}{2}MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$

Because $x + y = \frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$

Answer: $AF = 2 - \sqrt{3}$.

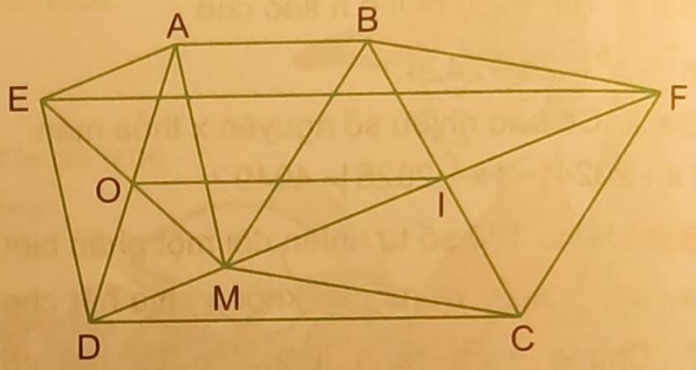
Nhận xét. Kì này không có bạn nào đưa ra lời giải đúng. Phần thưởng đành gác lại cho kì sau.

ĐỖ ĐỨC THÀNH

Kết quả Kì 79 (TTT2 số 267)

(Tiếp theo trang 29)

CLB 5.



Gọi O là giao điểm của AD và ME, I là giao điểm của BC và MF.

Khi đó O là trung điểm của AD, I là trung điểm của BC nên $OI = \frac{AB + CD}{2}$.

Nếu M thuộc đoạn thẳng OI thì

$$OI = OM + IM = \frac{ME}{2} + \frac{MF}{2} = \frac{EF}{2}$$

nên $EF = AB + CD$.

Nếu M không thuộc đoạn thẳng OI thì OI là đường trung bình của tam giác MEF nên $OI = \frac{EF}{2}$, suy ra $EF = AB + CD$.

Vậy độ dài đoạn thẳng EF không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt, được thưởng kì này: *Lê Thị Kim Ngân*, 7A1, THCS Quỳnh Thiện, Hoàng Mai; *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN QUANG TUẤN

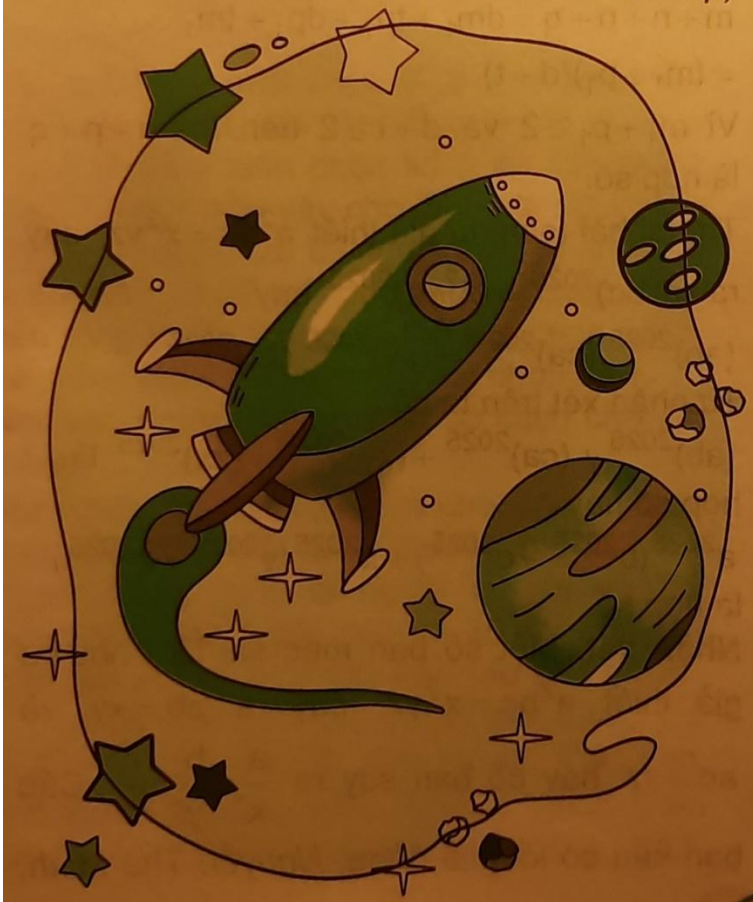
Rừng cười

● *Kì này*

Con gì?

Con gì xe cộ lại qua?
Con gì dào dạt vỗ bờ cát êm?
Con gì nước chảy êm đềm?
Con gì xuôi mái chèo đêm trăng đầy?
Con gì mát cỏ chiều nay?
Đàn trâu thong thả cuối ngày nghỉ ngơi?
Triều lên con gì đầy vơi?
Con gì thủy điện ở nơi đầu nguồn?
Con gì nhìn khắp bốn phương?
Con gì mang nặng yêu thương cuộc đời?
Bao nhiêu bí ẩn tuyệt vời?
Nằm trong con chữ của người Việt Nam!

LÊ THỊ XUÂN THỦY
(Trường THPT Lê Quý Đôn, Đống Đa, Hà Nội)



Kết quả (TTT2 số 267)

Con gì?

Con cò bay trong ca dao
Con gà trống gọi sáng xôn xao xóm làng
Con én báo hiệu xuân sang
Con tằm ăn lá nhả vàng óng tơ
Con ngáo ộp đem dọa trẻ thơ
Con rồng hút nước phun mưa, vô hình
Con người có trí thông minh
Được làm chúa tể hành tinh muôn đời
Con đom đóm đêm thắp đèn chơi
Con tàu chở người vượt biển năm châu
Con giun đuôi giống như đầu
Con sông ta phải bắc cầu vượt qua
Con tem chắp cánh thư xa
Con dao cau thoăn thoắt giúp bà bổ cau
Con sào chọc nước nông sâu
Con tàu vũ trụ bay tới vì sao xa vời
Con mắt lấp lánh ánh ngời
Cho em giàu cả đất trời bao la.

HONG HA

Nhận xét. Trẫm ban thưởng cho các thần dân sau đã trả lời đúng nhiều câu nhất, trình bày đẹp sáng tạo: *Nguyễn Thị Bảo Ngân*, 8A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Dương Ngô Minh Đức*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nghiêm Khánh Chi*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Song Thu*, 7A5, THCS Hương Canh, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Các bạn sau được khen: *Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, Hà Huy Tập; *Nguyễn Thị Ngọc Khuê*, 7A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Trúc Chi*, 8B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**.

VUA TẾU

Kết quả

Giải toán qua thư



Bài 1(267). Cho x là số thực thoả mãn $x^2 - x$ là một số nguyên khác 1 và $x^3 - 2x$ cũng là một số nguyên. Chứng minh rằng x là một số nguyên.

Lời giải. Xét $x^3 - 2x - (x^2 - x) = x^3 - x^2 - x$
$= x(x^2 - x - 1)$.

Đặt $n = x^3 - 2x - (x^2 - x)$ thì n là số nguyên.

Do $x^2 - x$ là một số nguyên khác 1 nên $x^2 - x - 1$ là số nguyên khác 0.

Đặt $m = x^2 - x - 1$ thì m là số nguyên khác 0. Khi đó ta có $mx = n$.

- Nếu $n = 0$ thì do m là số nguyên khác 0 nên $x = 0$ và x là số nguyên.
- Nếu $n \neq 0$ ta đặt $(m, n) = a$ lúc đó $m = ab$, $n = ac$ với các số nguyên a, b, c đều khác 0 và $(b, c) = 1$.

Thay vào đẳng thức $mx = n$ được $bx = c$.

Từ đó và từ $x^2 - x - 1 = m = ab$ ta có $ab^3 = b^2m = b^2(x^2 - x - 1) = b^2x^2 - b^2x - b^2$
$= c^2 - bc - b^2$, suy ra $c^2 = bc + b^2 + ab^3$
$= b(c + b + ab^2)$.

Do các số a, b, c đều là các số nguyên khác không thì số b phải là ước số của số c^2 nhưng vì $(b, c) = 1$ nên $|b| = 1$.

Từ $|b| = 1$ và từ $bx = c$, suy ra hoặc $b = 1$ thì $x = c$ là số nguyên, hoặc $b = -1$ thì $x = -c$ là số nguyên.

Nhận xét. Một số bạn biến đổi đến $mx = n$ với m và n đều là số nguyên, suy ra ngay x là số nguyên. Điều này không luôn đúng, chẳng hạn $2x = 3$. Các bạn sau có lời giải đúng, tuy một vài bạn còn thiếu sót nhỏ: *Ngô Hoàng Bách*, *Nguyễn Huy Long*, 7A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Thái Hữu Đạt*, 7A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Phan Khôi Nguyên*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Phan Phú Quý*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài 2(267). Cho các số nguyên dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a^2bc = x^2yz$. Hỏi $a^{2025}(b^{2025} + c^{2025}) + x^{2025}(y^{2025} + z^{2025})$ là số nguyên tố hay hợp số?

Lời giải. Ta chứng minh nhận xét sau: "Cho bốn số nguyên dương m, n, p, q thỏa mãn $mn = pq$ thì $m + n + p + q$ là hợp số".

Thật vậy, giả sử $(m, p) = d$ với $d > 1$ thì $m = dm_1$, $p = dp_1$ với $(m_1, p_1) = 1$. Từ giả thiết $mn = pq$, suy ra $m_1n = p_1q$

Vì $(m_1, p_1) = 1$ nên $q \vdots m_1$ hay $q = tm_1$ với $t \in \mathbb{N}^*$, suy ra $n = tp_1$. Từ đây ta có

$m + n + p + q = dm_1 + tp_1 + dp_1 + tm_1$
$= (m_1 + p_1)(d + t)$.

Vì $m_1 + p_1 \geq 2$ và $d + t \geq 2$ nên $m + n + p + q$ là hợp số.

Trở lại bài toán, từ giả thiết $a^2bc = x^2yz$, suy ra $(a^2bc)^{2025} = (x^2yz)^{2025}$ hay
$(ab)^{2025}.(ca)^{2025} = (xy)^{2025}.(zx)^{2025}$.

Từ nhận xét trên ta có
$(ab)^{2025} + (ca)^{2025} + (xy)^{2025} + (zx)^{2025}$ là hợp số hay
$a^{2025}(b^{2025} + c^{2025}) + x^{2025}(y^{2025} + z^{2025})$ là hợp số.

Nhận xét. Một số bạn mắc sai lầm như từ giả thiết $a^2bc = x^2yz$, suy ra $ab = xy$ và $ac = xz$ hay có bạn suy ra $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Thế Minh*,

7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; *Nguyễn Thị Huệ Phương*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Thái Hữu Đạt*, 7A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Đặng Văn Hoàng*, *Nguyễn Đình Sơn Lâm*, *Nguyễn Hà Vy*, 6A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Nguyễn Trần Gia Bảo*, 7B, *Thái Hải Nam*, *Trần Hải Phong*, 7C, *Phan Khôi Nguyên*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Nghệ An**; *Nguyễn Diệu Huyền*, 6D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN NGỌC HÂN

Bài 3(267). Hai người chơi một trò chơi như sau: Người chơi thứ nhất chọn một số bất kì trong bảy số sau: $-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$. Sau đó, người chơi thứ hai thêm vào số đó một trong bảy số trên. Tiếp theo, người chơi thứ nhất thêm vào tổng thu được một trong bảy số đã cho. Biết rằng ai lần đầu chọn số âm thì lần sau cũng phải chọn số âm, ai lần đầu chọn số dương thì lần sau cũng phải chọn số dương. Người nào tạo tổng là -30 hoặc 30 là người thắng cuộc. Hãy chứng tỏ rằng người chơi thứ hai luôn có cách thắng cuộc.

Lời giải. Nếu người thứ nhất chọn số dương thì người thứ hai chọn số dương sao tổng là 5 (chẳng hạn người thứ nhất chọn số 1 thì người thứ hai chọn số 4), cứ như vậy người thứ hai tạo được tổng là 10, 15, 20, 25, 30 và là người thắng cuộc

Nếu người thứ nhất chọn số âm thì người thứ hai chọn số 4, khi đó tổng là số dương. Người thứ hai luôn chọn số 4 để số dương tăng dần. Cứ như vậy cho đến lượt người thứ hai: Nếu tổng là 26 thì người thứ hai chọn số 4, nếu tổng là 27 thì người thứ hai chọn số 3, nếu tổng là 28 thì người thứ hai chọn số 2, nếu tổng là 29 thì người thứ hai chọn số 1.

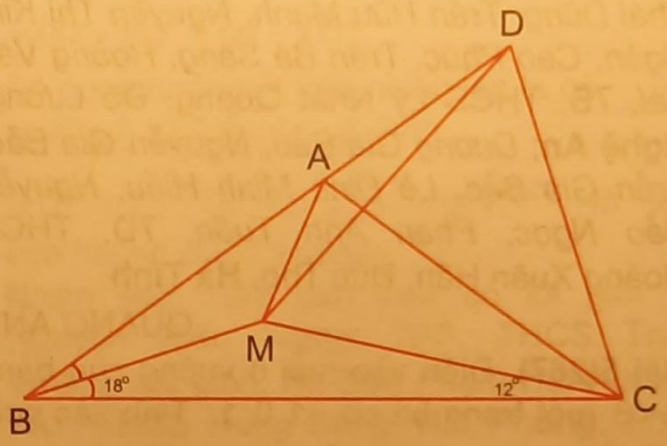
Như vậy người thứ hai luôn có cách chơi để thắng.

Nhận xét. Trong bảy số đã cho, số có giá trị tuyệt đối lớn nhất là số dương (số 4), nên người thắng cuộc là người tạo ra số 30. Người thứ hai muốn tạo số 30 thì cần tạo được số 25, cứ như vậy cần tạo các số 20, 15, 10, 5. Các bạn sau có lời giải đúng: *Đỗ Thiên Ân*, 6T, THCS Kim Đồng, Tân Lạc, **Hòa Bình**; *Vũ Bảo Linh*, AE7.1, THCS Nam Từ Liêm, **Hà Nội**; *Đặng Văn Hoàng*, 6A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Thái Hữu Đạt*, 7A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Thái Hải Nam*, 7C, *Phan Khôi Nguyên*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Thị Ngọc Trâm*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; *Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN PHÚC BÌNH

Bài 4(267). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 108^\circ$. Lấy điểm M nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBC} = 18^\circ$, $\widehat{MCB} = 12^\circ$. Tính số đo của góc MAB.

Lời giải. Vì góc BAC là góc lớn nhất của tam giác ABC nên $BC > BA$. Theo đó, luôn tồn tại điểm D thuộc tia đối của tia AB sao cho $BD = BC$.



Vì tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 108^\circ$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^\circ$. Kết hợp $\widehat{MBC} = 18^\circ$, suy ra $\widehat{MBA} = 18^\circ$.

Vậy tam giác BCD cân tại B và nhận tia BM là tia phân giác của góc CBD nên đường thẳng MB là đường trung trực của đoạn thẳng CD, suy ra $MD = MC$.

Tam giác BCD cân tại B có $\widehat{CBD} = 36^\circ$ nên $\widehat{BCD} = 72^\circ$. Kết hợp $\widehat{MCB} = 12^\circ$, suy ra $\widehat{MCD} = 60^\circ$.

Vậy tam giác MCD là tam giác đều nên $DC = MC$. (1)

Lúc này tam giác CAD có $\widehat{CAD} = 72^\circ$, $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} - \widehat{ACB} = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$, suy ra $\widehat{ADC} = 72^\circ$.

Vậy tam giác CAD cân tại C, suy ra $DC = AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MC = AC$, dẫn đến tam giác CMA cân tại C và có

$\widehat{MAC} = (180^o - \widehat{MCA}) : 2 = (180^o - 24^o) : 2 = 78^o$.

Từ đó suy ra

$\widehat{MAB} = \widehat{BAC} - \widehat{MAC} = 108^o - 78^o = 30^o$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: *Ngô Việt Hoàng*, 7A5, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**; *Nguyễn Vân Lam*, 7B8, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Bảo Châu*, *Tạ Minh Hằng*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Thái Hữu Đạt*, 7A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Lê Thị Kim Ngân*, 7A1, THCS Quỳnh Thiện, Hoàng Mai; *Thái Hải Nam*, *Trần Hải Phong*, *Trần Nguyên Phong*, 7C, *Phan Khôi Nguyên*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Thái Dũng*, *Trần Hữu Mạnh*, *Nguyễn Thị Kim Ngân*, *Cao Phúc*, *Trần Bá Sang*, *Hoàng Văn Tài*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Dương Gia Bảo*, *Nguyễn Gia Bảo*, *Trần Gia Bảo*, *Lê Đình Minh Hiếu*, *Nguyễn Bảo Ngọc*, *Phan Anh Tuấn*, 7D, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

QUANG ANH

Bài 5(267). Điền vào mỗi ô vuông của bảng 3×3 một trong ba số $-1, 0, 1$. Tính xác suất để tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo của bảng đều bằng 0.

Lời giải. Gọi ô (i, j) là ô nằm ở hàng i cột j.

+) Nếu không có hàng nào chứa toàn số 0. Để cách điền thỏa mãn thì bảng phải chứa đúng ba số 0, ba số 1 và ba số -1. Khi đó có ít nhất một đường chéo chính phải chứa ba số đôi một khác nhau. Xét cách điền ba số a, b, c đôi một phân biệt trên hàng đầu tiên và giả sử đường chéo chính đi qua ô (1, 1) chứa ba số đôi một khác nhau.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

Lưu ý là ở đường chéo chính chứa a cũng phải chứa c nên rõ ràng c chỉ có thể ở ô (2, 2), suy ra ô (3, 1) chứa c. Từ đó bảng phải điền là

a	b	c
...	...	...
...	...	...

Do tổng các số trên đường chéo chính bằng 0 nên $c = 0$. Suy ra (a, b) là $(1, -1)$ hoặc $(-1, 1)$. Từ đó số cách điền thỏa mãn yêu cầu là $2 \times 2 = 4$ vì có hai cách chọn điền (a, b) và hai cách chọn đường chéo chính.

+) Nếu có ít nhất một hàng chứa toàn số 0.

Xét hàng đầu tiên hoặc hàng thứ ba chứa toàn số 0. Khi đó ô (2, 2) điền số $a \neq 0$ thì ô (3, 1) và ô (3, 3) sẽ điền cùng một số $b \neq a, b \neq 0$ vô lí. Suy ra ô (2, 2) điền số 0, kéo theo ô (3, 3) cũng điền số 0. Từ đây dễ thấy toàn bộ bảng phải điền số 0.

Xét hàng thứ hai chứa toàn số 0. Khi đó bảng có dạng

a	...	c
0	0	0
$-c$	a	$-a$

Xét cột đầu tiên có tổng bằng 0 nên $a = c$. Như vậy hàng đầu tiên chứa hai số a nên $a = 0$. Từ đó toàn bộ bảng phải điền số 0.

Tóm lại trong trường hợp này có đúng một cách điền.

Xác suất cần tìm là $\frac{5}{3^9}$.

Nhận xét. Đây là bài toán xác suất. Để giải bài toán xác suất các bạn cần thực hiện các bước sau: Gọi tên biến cố, tính số phần tử của không gian mẫu, tính số kết quả thuận lợi cho biến cố xác suất cần tính sẽ là tỉ số của hai kết quả vừa tính ở trên (số kết quả thuận lợi/số phần tử của không gian mẫu). Có nhiều bạn gửi lời giải tới tòa soạn, một số bạn cho đáp số đúng nhưng lời giải quá vắn tắt chưa có lập luận. Các lời giải còn lại đều đúng, tuy nhiên các bạn lập luận còn dài dòng và còn gạch xoá. Khi trình bày lời giải gửi, các bạn nên trình bày cẩn thận, sạch đẹp. Các bạn sau đây có lời giải đúng và hoàn chỉnh: *Vũ Mạnh Anh*, 8E, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Thái Hữu Đạt*, 7A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Bùi*

Huy Khánh, 7A1, THCS Quỳnh Thiện, Hoàng Mai; *Trần Ngọc Quân*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài 6(267). Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+2=abc$, chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a^2-a+1}{3}}+\sqrt{\frac{b^2-b+1}{3}}+\sqrt{\frac{c^2-c+1}{3}} \le \frac{2}{3}(a+b+c)-1$.

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có $\sqrt{\frac{a^2-a+1}{3}}=\sqrt{\frac{a+1}{3}\cdot\frac{a^2-a+1}{a+1}}$

$\le \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{3}+\frac{a^2-a+1}{a+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{3}+a-2+\frac{3}{a+1}\right)$

$=\frac{2a}{3}-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a+1}$.

Tương tự, $\sqrt{\frac{b^2-b+1}{3}} \le \frac{2b}{3}-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{b+1}$;

$\sqrt{\frac{c^2-c+1}{3}} \le \frac{2c}{3}-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{c+1}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được

$\sqrt{\frac{a^2-a+1}{3}}+\sqrt{\frac{b^2-b+1}{3}}+\sqrt{\frac{c^2-c+1}{3}}$

$\le \frac{2}{3}(a+b+c)-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$. (1)

Từ giả thiết $a+b+c+2=abc$ ta có

$(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)$

$=(a+1)(b+1)(c+1)$

hay $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$.

Thay vào (1) ta được

$\sqrt{\frac{a^2-a+1}{3}}+\sqrt{\frac{b^2-b+1}{3}}+\sqrt{\frac{c^2-c+1}{3}}$

$\le \frac{2}{3}(a+b+c)-1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=2$.

Nhận xét. Chỉ có một bạn đưa ra lời giải đúng cho bài toán này, đó là bạn: *Nguyễn Triệu Minh Thư*, 8A2, THCS Sao Việt, Pleiku, **Gia Lai**.

ĐÀO VĂN NAM

Bài 7(267). Chứng minh rằng số $50^{30}(a^2+b^2)^4(c^2+d^2)^{2025}$ là tổng của hai số chính phương với a, b, c, d là số tự nhiên.

Lời giải. Ta có nhận xét sau: Nếu mỗi số m và n đều là tổng của hai số chính phương thì tích mn cũng là tổng của hai số chính phương.

Thật vậy, giả sử $m=x^2+y^2$ và $n=z^2+t^2$ với $x, y, z, t \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có

$mn=(x^2+y^2)(z^2+t^2)$

$=x^2z^2+x^2t^2+y^2z^2+y^2t^2$

$=x^2z^2+2xyzt+y^2t^2+x^2t^2-2xyzt+y^2z^2$

$=(xz+yt)^2+(xt-yz)^2$.

Áp dụng nhận xét trên nhiều lần ta có

$50^{30}(a^2+b^2)^4(c^2+d^2)^{2025}$

$=(7^2+1^2)^{30}(a^2+b^2)^4(c^2+d^2)^{2025}$ là tổng của hai số chính phương.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Kiều Trang*, 7A5, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**; *Phạm Hải Nguyên*, 7A1, THCS Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Phạm Mạnh Hải*, 8B, THCS Lê Quý Đôn, **Hải Dương**; *Trần Anh Đức*, 8A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

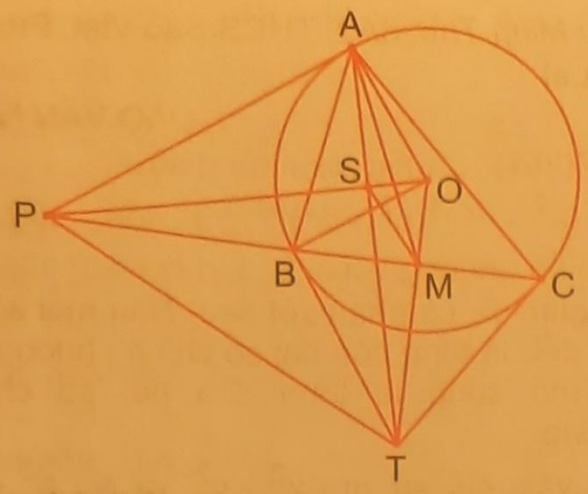
Bài 8(267). Cho tam giác ABC (AB < AC) nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Giả sử $BC(CA+AB)=AB^2+AC^2$. Chứng minh rằng OI, EF, BC đồng quy.

Lời giải. Ta có hai bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho bốn bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn $AB^2-AD^2=CB^2-CD^2$. Khi đó AC vuông góc với BD. Bổ đề này quen thuộc, bạn đọc tự chứng minh.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại P. Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Khi đó OP vuông góc AT.

Chứng minh. Gọi M là trung điểm của BC.



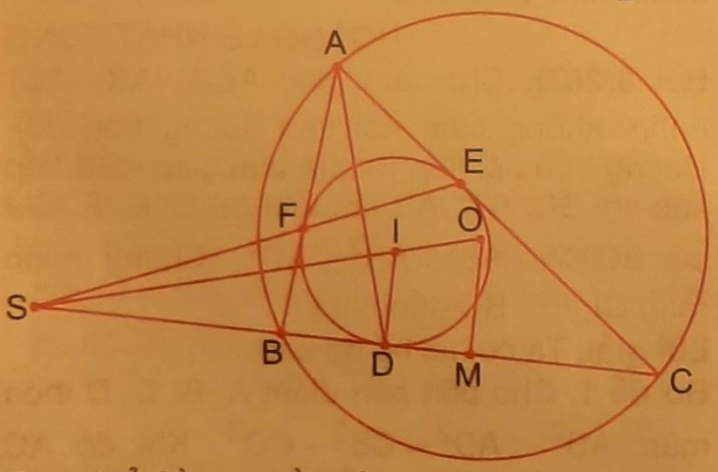
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OBT, đường cao BM ta có

$OM.OT = OB^2 = OA^2$ dẫn đến $\frac{OA}{OM} = \frac{OT}{OA}$ do đó tam giác OAM đồng dạng với tam giác OTA, dẫn đến $\widehat{OAM} = \widehat{OTA}$. Chú ý rằng, tứ giác OAPM nội tiếp đường tròn đường kính OP do đó $\widehat{OPM} = \widehat{OAM} = \widehat{OTA}$. Gọi AT cắt OP tại S thì tứ giác PSMT nội tiếp, dẫn đến $\widehat{PST} = 90^o$ nên OP vuông góc AT.

Trở lại bài toán ban đầu

Gọi S là giao điểm của EF và BC. Theo bổ đề 2 thì IS $\perp$ AD.

Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó ta có $BD = p - b$, $AE = p - a$, $DM = \frac{b-c}{2}$.



Theo bổ đề 1 ta cần có

$OA^2 - OD^2 = IA^2 - ID^2$

$\Leftrightarrow OM^2 + MB^2 - OM^2 - MD^2 = IA^2 - IF^2$

$\Leftrightarrow MB^2 - MD^2 = AF^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{(b-c)^2}{4} = (p-a)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = (b + c - a)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 2bc - b^2 - c^2 = b^2 + c^2 + a^2 + 2bc - 2ab - 2ca$

$\Leftrightarrow 2(b^2 + c^2) = 2ab + 2ac$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a(b + c)$ (đúng theo giả thiết).

Vậy OI vuông góc với AD, suy ra O, I, S thẳng hàng và dẫn đến OI, BC, EF đồng quy.

Nhận xét. Bài toán này khó nên có ít bạn tham gia giải. Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Mạnh Đạt*, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**; *Nguyễn Tất Han*, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

LƯU CÔNG ĐÔNG

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Thái Hữu Đạt, 7A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; *Phan Khôi Nguyên*, 7D, *Thái Hải Nam*,7C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Lê Thị Thanh Bình*, 7A3, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Trần Anh Đức*, 8A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phạm Hải Nguyên*, 7A1, THCS Hồng Bàng, TP. Hải Phòng, **Hải Phòng**; *Ngô Việt Hoàng*, 7A5, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**; *Nguyễn Triệu Minh Thư*, 8A2, THCS Sao Việt, Pleiku, **Gia Lai**; *Nguyễn Thị Huệ Phương*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.





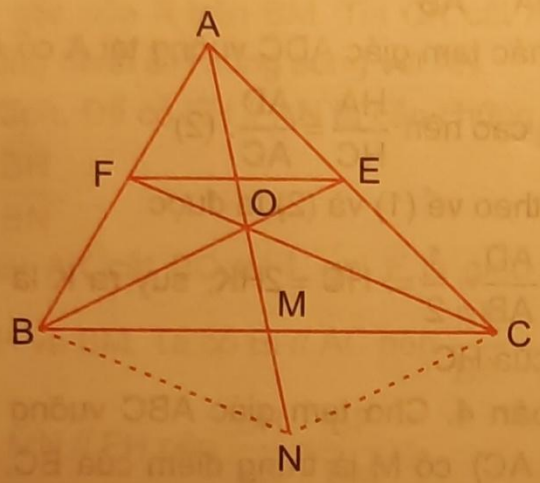
GIẢI TOÁN THẾ NÀO?

SỬ DỤNG MỘT TÍNH CHẤT QUEN THUỘC ĐỂ GIẢI TOÁN

TRẦN THANH HƯNG *(Trường THCS Võ Trứ, Đắk Lắk)*

Trong quá trình học và giải toán, rất có thể chúng ta đã gặp tính chất sau: Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. Trên đường thẳng AM lấy điểm O (O khác A và M). Tia BO cắt AC tại E, tia CO cắt AB tại F. Khi đó EF song song với BC.

Chứng minh. Lấy điểm N đối xứng với O qua M.

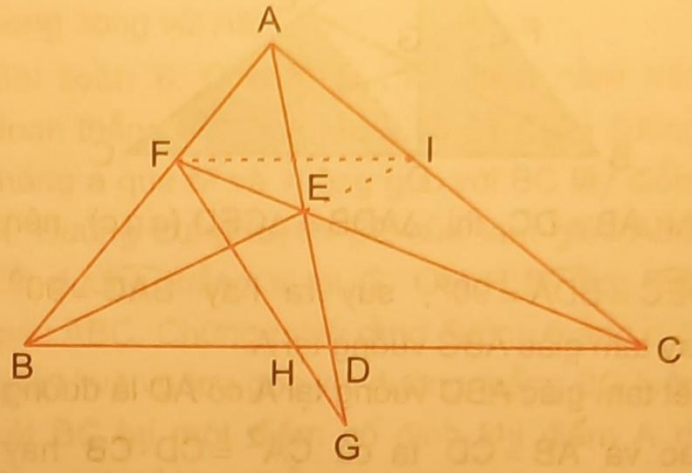


Dễ thấy tứ giác BOCN là hình bình hành nên OE // NC và OF // NB. Từ đó áp dụng định lí Thales ta có $\frac{AE}{AC}=\frac{AO}{AN}=\frac{AF}{AB}$. Từ đây suy ra EF song song với BC.

Tính chất trên giúp ta phân tích, định hướng và giải một số bài toán khá thuận lợi. Sau đây là một số bài toán áp dụng.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B}\neq 60^{\circ}$. Tia phân giác của góc B cắt đường trung tuyến AD tại E, tia CE cắt AB tại F. Trên tia AD lấy điểm G sao cho $AG=AB$. Gọi H là giao điểm của BC và FG. Chứng minh rằng $FE\cdot FC=FH\cdot FG$.

Lời giải. Kéo dài BE cắt AC tại I.



Theo tính chất mở đầu thì IF // BC nên ta có $\frac{FA}{FB}=\frac{IA}{IC}$.

Lại do BI là phân giác của góc ABC nên theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{IA}{IC}=\frac{BA}{BC}$.

Do đó $\frac{FA}{FB}=\frac{BA}{BC}$ hay $\frac{FA}{BA}=\frac{FB}{BC}$.

Theo giả thiết $AG=AB$ nên $\frac{FA}{AG}=\frac{FB}{BC}$.

Kết hợp với $\widehat{FAG}=\widehat{FBC}$, suy ra các tam giác FAG và FBC đồng dạng nên $\widehat{AGF}=\widehat{BCF}$. Từ đó suy ra các tam giác EGF và HCF đồng dạng nên $\frac{FE}{FH}=\frac{FG}{FC}\Rightarrow FE\cdot FC=FH\cdot FG$.

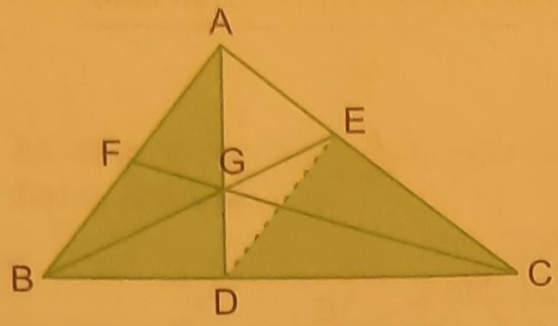
Bài toán 2. Cho tam giác ABC có đường cao AD, đường phân giác BE, đường trung tuyến CF đồng quy. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB=CD$. Khi đó hãy tính tỉ số $\frac{CB}{AB}$.

Lời giải. Theo tính chất mở đầu ta có

DE // AB và $\widehat{DEB} = \widehat{ABE} = \widehat{DBE}$, DB = DE, $\widehat{ABD} = \widehat{CDE}$.

Khi tam giác ABC vuông tại A thì do DE // AB nên $\widehat{DEC} = 90^o$.

Từ đó suy ra $\Delta ADB = \Delta CED$ (g.c.g) nên AB = CD.



Khi AB = DC thì $\Delta ADB = \Delta CED$ (c.g.c) nên $\widehat{DEC} = \widehat{BDA} = 90^o$, suy ra hay $\widehat{BAC} = 90^o$ hay tam giác ABC vuông tại A.

Xét tam giác ABC vuông tại A có AD là đường cao và AB = CD ta có $CA^2 = CD \cdot CB$ hay $CB^2 - AB^2 = AB \cdot CB$ hay

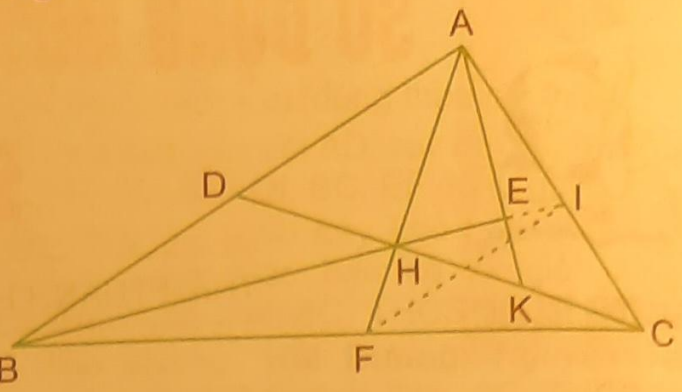
$$\left(\frac{CB}{AB}\right)^2 - \frac{CB}{AB} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{CB}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tỉ số $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gọi là tỉ số vàng, được ứng dụng nhiều trong kiến trúc và nghệ thuật.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên CD. Chứng minh rằng đường thẳng qua A và vuông góc với BH đi qua trung điểm của đoạn CH.

Phân tích. Ta thấy các tam giác AHC và DAC đồng dạng nên $\frac{HC}{HA} = \frac{AC}{AD}$. Ta phải chứng minh $\frac{HK}{HA} = \frac{AC}{2AD} = \frac{AC}{AB}$. Để có đẳng thức này ta nghĩ đến các tam giác AHK và BAC đồng dạng, tức cần chứng minh $\widehat{AKH} = \widehat{ACB}$. Mà $\widehat{AKH} = \widehat{AHE}$ nên dẫn đến việc chứng minh $\widehat{ACB} = \widehat{AHE}$. Tính chất mở đầu giúp ta chứng minh hai góc này bằng nhau rất dễ dàng.

Lời giải. Kéo dài BH cắt AC tại I.



Vì FI // AB nên FI ⊥ AC, suy ra các tam giác AHC và AIF đồng dạng nên ta có $\frac{AH}{AI} = \frac{AC}{AF}$.

Từ đây suy ra các tam giác AHI và ACF đồng dạng nên $\widehat{AHE} = \widehat{ACB}$, dẫn đến $\widehat{AKH} = \widehat{ACB}$.

Do đó các tam giác AHK và BAC đồng dạng nên $\frac{HK}{HA} = \frac{AC}{AB}$. (1)

Mặt khác tam giác ADC vuông tại A có AH là đường cao nên $\frac{HA}{HC} = \frac{AD}{AC}$. (2)

Nhân theo vế (1) và (2) ta được

$\frac{HK}{HC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow HC = 2HK$, suy ra K là trung điểm của HC.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có M là trung điểm của BC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho DB = DC. Lấy D' đối xứng với D qua A. Hai đường thẳng MA và BD' cắt nhau tại E. Chứng minh rằng BE = CA.

Phân tích. Kéo dài BA cắt EC tại F. Ta có FD' // BC nên $\frac{AD'}{AC} = \frac{FD'}{BC} = \frac{ED'}{EB}$

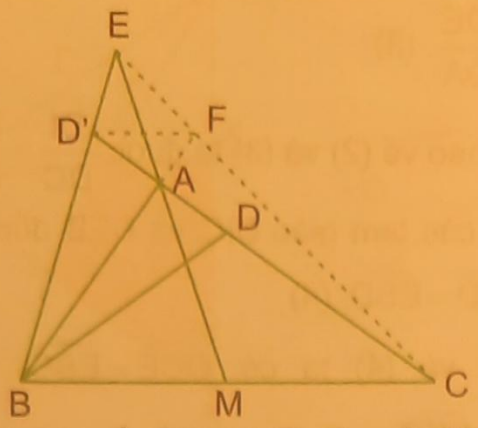
Từ đẳng thức này, để có BE = CA thì ta phải có AD' = ED' hay tam giác AD'E cân tại D'.

Lời giải. Tam giác AMC cân tại M nên $\widehat{MCA} = \widehat{MAC}$.

Tam giác BDC cân tại D nên $\widehat{BDD'} = 2\widehat{ACM} = 2\widehat{MAC} = 2\widehat{D'AE}$.

Tam giác BDD' cân tại B nên

$\widehat{BD'D} = \widehat{BDD'} = \widehat{2D'AE}$, suy ra $AD' = ED'$. (1)



Kéo dài BA cắt EC tại F. Ta có FD' // BC

$\Rightarrow \frac{AD'}{AC} = \frac{FD'}{BC} = \frac{ED'}{EB}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $BE = CA$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AC, N là trung điểm của HC, K là hình chiếu vuông góc của A trên BM. Tia CK cắt AB tại E. Chứng minh EH song song với AN.

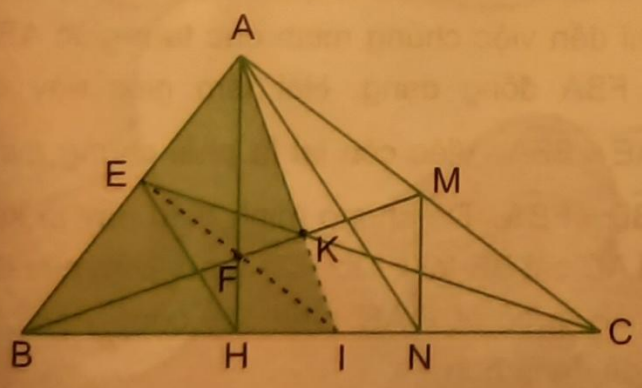
Phân tích. Để có EH // AN ta cần chứng minh $\frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BN}$.

Kéo dài AK cắt BC tại I, gọi F là giao điểm của AH và BM. Ta có EI // AC nên $\frac{BE}{BA} = \frac{BI}{BC}$.

Lại có MN // FH nên $\frac{BH}{BN} = \frac{BF}{BM}$.

Do đó ta phải có $\frac{BI}{BC} = \frac{BF}{BM}$ tức cần phải chỉ ra ba điểm E, I, F thẳng hàng. Điều này đúng vì F là trực tâm của tam giác ABI.

Lời giải. Gọi I là giao điểm của AK và BC.



Ta có EI // AC nên $\frac{BE}{BA} = \frac{BI}{BC}$. (1)

Gọi F là giao điểm của AH và BM thì F là trực tâm của tam giác ABI nên I, E, F thẳng hàng.

Do đó ta có $\frac{BI}{BC} = \frac{BF}{BM}$. (2)

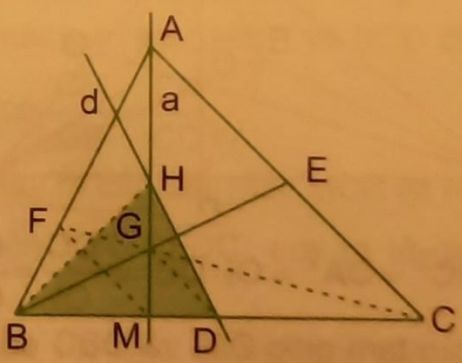
Vì MN là đường trung bình của tam giác AHC nên MN // AH, suy ra $\frac{BF}{BM} = \frac{BH}{BN}$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BN}$, suy ra EH song song với AN.

Bài toán 6. Cho M là một điểm nằm trên đoạn thẳng BC (M khác B và C). Trên đường thẳng a qua M và vuông góc với BC lấy điểm A. Đường trung tuyến BE của tam giác ABC cắt đường thẳng a tại G. Gọi H là trực tâm giác ABC. Chứng minh rằng đường thẳng d đi qua H và vuông góc với đường thẳng BG luôn cắt BC tại một điểm cố định khi điểm A di động trên đường thẳng a.

Phân tích. Vì ba điểm B, M, C cố định nên để có D cố định thì tỉ số $\frac{DM}{DC}$ không đổi. Kéo dài tia CG cắt AB tại F. Vì G nằm trên trung tuyến BE nên ta có FM // AC, suy ra $\frac{GM}{GA} = \frac{FM}{AC} = \frac{BM}{BC}$ không đổi. Để có $\frac{DM}{DC} = \frac{GM}{GA}$ ta đi chứng minh GD song song với AC.

Lời giải. Gọi D là giao điểm của đường thẳng d với đoạn BC.



Dễ thấy H là trực tâm của tam giác GBD nên $BH \perp GD$.

Lại do H là trực tâm của tam giác ABC nên $BH \perp AC$.

Từ đó suy ra GD // AC nên $\frac{DM}{DC}=\frac{GM}{GA}$. (1)

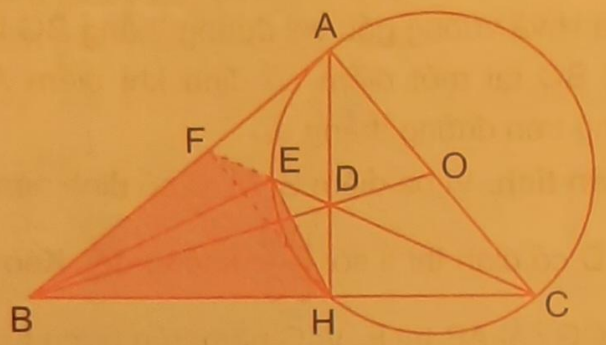
Kéo dài CG cắt AB tại F thì FM // AC nên $\frac{GM}{GA}=\frac{FM}{AC}=\frac{BM}{BC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DM}{DC}=\frac{BM}{BC}$ (không đổi).

Vì M, C cố định mà $\frac{DM}{DC}$ không đổi nên điểm D cố định. Từ đây ta có điều phải chứng minh.

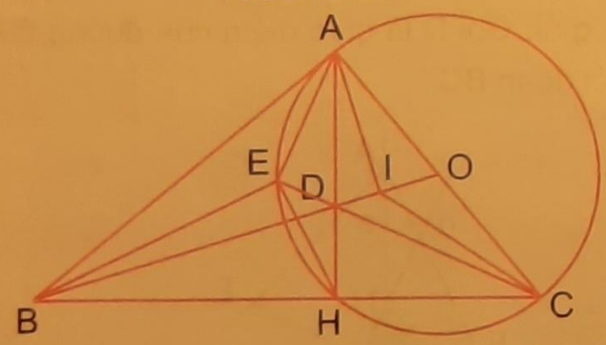
Bài toán 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường trung tuyến BO cắt đường cao AH tại D. Đường tròn đường kính AC cắt đường thẳng CD tại E. Chứng minh rằng $\widehat{BEH}=90^o$.

Lời giải 1. Gọi F là giao điểm của CE và AB thì FH // AC nên FH ⊥ AB.



Lại có $\widehat{HEC}=\widehat{HAC}=\widehat{HBA}$, suy ra tứ giác FEHB nội tiếp, dẫn đến $\widehat{BEH}=\widehat{BFH}=90^o$.

Lời giải 2. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên BO.



Ta có $OC^2=OA^2=OI\cdot OB\Rightarrow\frac{OC}{OI}=\frac{OB}{OC}$.

Do đó các tam giác OCI và OBC đồng dạng nên $\widehat{OCI}=\widehat{OBC}$. (1)

Các tam giác DIA và DHB đồng dạng nên $\frac{DI}{DH}=\frac{DA}{DB}$. (2)

Các tam giác DCH và DAE đồng dạng nên $\frac{DH}{DC}=\frac{DE}{DA}$. (3)

Nhân theo vế (2) và (3) ta được $\frac{DI}{DC}=\frac{DE}{DB}$, suy ra các tam giác DIC và DEB đồng dạng nên $\widehat{ICD}=\widehat{EBD}$. (4)

Từ (1) và (4) ta có $\widehat{OCE}=\widehat{EBC}$, suy ra $\widehat{AHE}=\widehat{EBC}$.

Do đó $\widehat{EBH}+\widehat{EHB}=\widehat{AHE}+\widehat{EHB}=90^o$

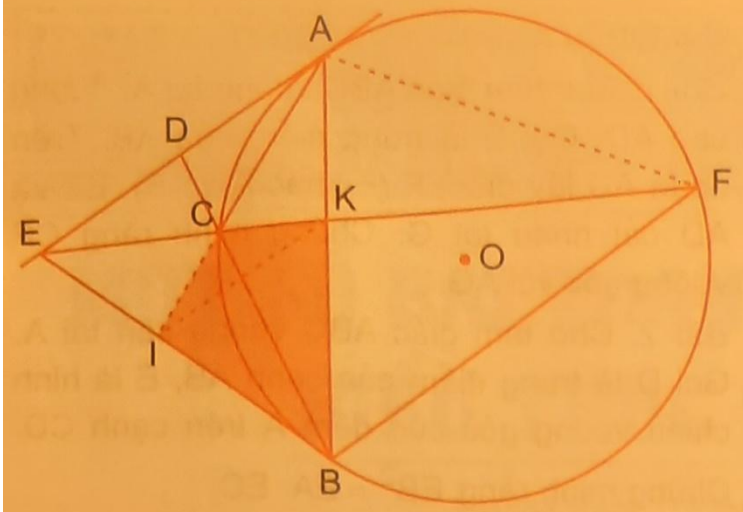
$\Rightarrow\widehat{BEH}=90^o$.

Nhận xét. Từ hai lời giải của bài toán trên cho thấy, lời giải 1 dễ dàng hơn trong việc định hướng, phân tích tìm lời giải. Lời giải 2 cũng khá hay nhưng việc vẽ thêm điểm I và tìm hướng giải phức tạp hơn. Từ đây ta thấy ưu thế của tính chất ta đang áp dụng.

Bài toán 8. Cho AB là một dây cung khác đường kính của đường tròn (O). C là một điểm nằm trên cung nhỏ AB. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC tại D. Lấy điểm E đối xứng với A qua D. Đường thẳng EC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng $BE+BF\geq 2BA$. Xác định vị trí điểm C để đẳng thức xảy ra.

Phân tích. Từ bất đẳng thức cần chứng minh ta liên tưởng đến bất đẳng thức quen thuộc $BE+BF\geq 2\sqrt{BE\cdot BF}$. Dẫn đến việc chứng minh $BA^2=BE\cdot BF$. Từ hệ thức này ta phải nghĩ đến việc chứng minh các tam giác ABE và FBA đồng dạng. Hai tam giác này có $\widehat{BAE}=\widehat{BFA}$. Việc còn lại là phải chứng minh $\widehat{ABE}=\widehat{FBA}$. Để chứng minh điều này ta kéo dài AC cắt BE tại I. Gọi K là giao điểm của CF và AB ta có IK // AE. Đến đây công việc còn lại dễ dàng hơn.

Lời giải. Kéo dài AC cắt BE tại I. Gọi K là giao điểm của CF và AB.



Ta có IK // AE nên $\widehat{KIA} = \widehat{EAI} = \widehat{ABC}$, suy ra tứ giác BICK nội tiếp nên $\widehat{ABE} = \widehat{FCA} = \widehat{FBA}$.

Kết hợp với $\widehat{BAE} = \widehat{BFA}$ ta được các tam giác ABE và FBA đồng dạng, suy ra

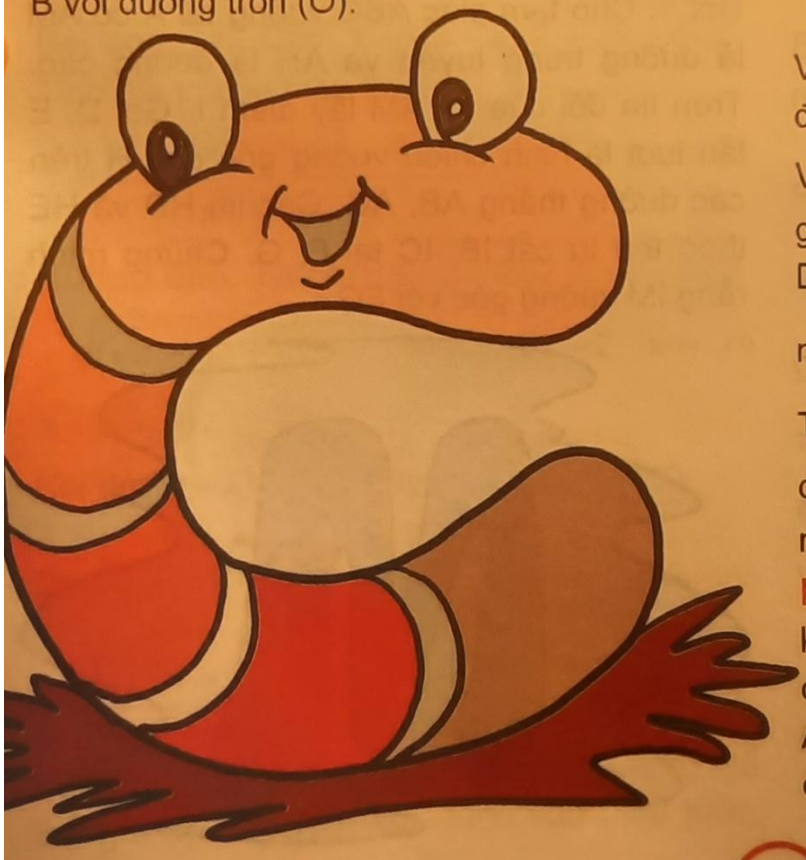
$$\frac{BA}{BF} = \frac{BE}{BA} \Rightarrow BA^2 = BE \cdot BF.$$

Từ đó ta có $BE + BF \geq 2\sqrt{BE \cdot BF} = 2BA$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $BE = BF$

$\Leftrightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BFE} = \widehat{BAC}$ hay $\widehat{BEK} = \widehat{BAI}$ hay hình thang AEIK nội tiếp, suy ra AEIK là hình thang cân. Suy ra tam giác BAE cân tại B.

Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi C là giao điểm của trung tuyến BD của tam giác ABE cân tại B với đường tròn (O).

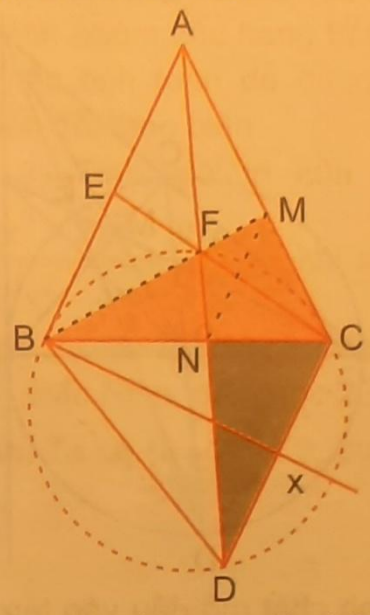


Bài toán 9. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ tia Bx vuông góc với BA. Gọi D là điểm đối xứng với C qua Bx, E là trung điểm của cạnh AB, F là giao điểm của CE và AD. Chứng minh tứ giác BDCF nội tiếp.

Phân tích. Kéo dài tia BF cắt AC tại M, gọi N là giao điểm của AD và BC, ta đi chứng minh các tam giác MBC và NDC đồng dạng để suy ra $\widehat{FBC} = \widehat{FDC}$.

Với MN // AB // CD ta dễ dàng suy ra được $\widehat{NCD} = \widehat{MCB}$ và $\frac{CM}{CN} = \frac{CB}{CD}$.

Lời giải. Gọi N là giao điểm của AD và BC, M là giao điểm của BF và AC.



Vì MN // AB nên các tam giác MNC và ABC đồng dạng.

Vì CD // AB nên $\widehat{BCD} = \widehat{ABC}$, suy ra các tam giác cân ABC và BCD đồng dạng.

Do đó các tam giác MCN và BCD đồng dạng nên ta có $\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CD}$.

Từ đó suy ra các tam giác MCB và NCD đồng dạng nên $\widehat{FBC} = \widehat{FDC}$, suy ra tứ giác BDCF nội tiếp.

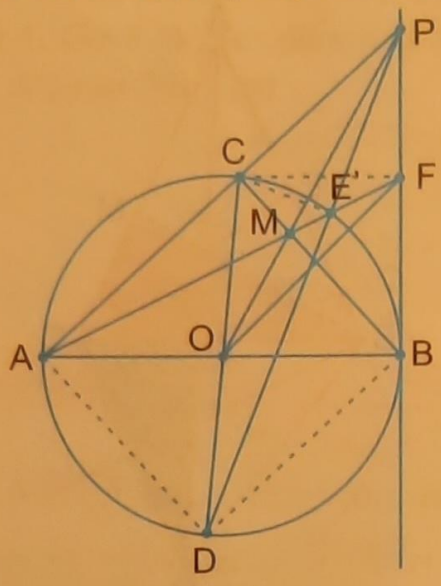
Bài toán 10. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. P là một điểm trên tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) (P khác B). Đường thẳng AP cắt đường tròn (O) tại C khác A. D là điểm đối xứng của C qua O. Đường thẳng DP cắt

đường tròn (O) lần thứ hai tại E. Chứng minh rằng AE, BC, PO đồng quy tại M.

(Trích đề VMO năm 2011)

Phân tích. Gọi M là giao điểm của PO và CB. Kéo dài tia AM cắt PD tại E', cắt PB tại F. Ta đi chứng minh E' thuộc (O). Khi đó phải có $E'C \perp E'D$. Nhờ tính chất mở đầu ta thấy được $CF \perp FP$. Đến đây ta phải chứng minh tứ giác CE'FP nội tiếp, để có điều này ta lại nghĩ đến $\widehat{CPE'} = \widehat{CFE'}$ hay $\widehat{APD} = \widehat{BAF}$. Do đó ta cần chứng minh các tam giác APD và BAF đồng dạng.

Lời giải. Gọi M là giao điểm của PO và CB. Kéo dài tia AM cắt PD tại E', cắt PB tại F.



Áp dụng tính chất mở đầu vào tam giác APB có trung tuyến PO ta có CF // AB nên $CF \perp PB$.

Dễ thấy các tam giác BFC, BCP, ACB, ABP đồng dạng nên ta có $\frac{BF}{BC} = \frac{BC}{BP} = \frac{AB}{AP}$, suy ra $\frac{BF}{AB} = \frac{BC}{AP} = \frac{AD}{AP}$ (do tứ giác ACBD là hình chữ nhật), dẫn đến các tam giác APD và BAF đồng dạng, suy ra $\widehat{APD} = \widehat{BAF}$, dẫn đến $\widehat{CPE'} = \widehat{CFE'}$ nên tứ giác CPFE' nội tiếp, suy ra $\widehat{CE'P} = \widehat{CFP} = 90^o$.

Từ đó suy ra tứ giác ACE'D nội tiếp hay $E' \in (O)$ do đó E và E' trùng nhau. Vậy AE đi qua M hay AE, BC, PO đồng quy tại M.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD. Gọi E là trung điểm của AB. Trên đoạn AD lấy điểm F (F khác A và B), BF và AD cắt nhau tại G. Chứng minh rằng CF vuông góc với AG.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi D là trung điểm của cạnh AB, E là hình chiếu vuông góc của đểm A trên cạnh CD. Chứng minh rằng $EB^2 = EA \cdot EC$.

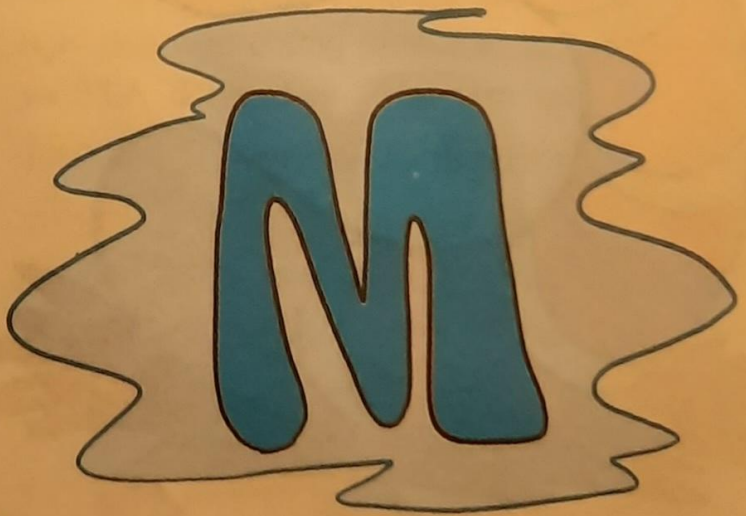
Bài 3. Cho tam giác ABC có AD là đường trung tuyến. Gọi M là trung điểm của AD. Các tia BM và CM lần lượt cắt AC, AB tại E và F. Chứng minh rằng

$$\frac{ME}{BM - ME} + \frac{MF}{CM - MF} = 1.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM cắt phân giác BD tại E. Chứng minh rằng $\frac{EB}{ED} - \frac{BC}{BA} = 1$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD, đường phân giác BE và đường cao CF đồng quy tại G. Đường thẳng qua B và vuông góc với BC cắt đường thẳng CF tại I. Chứng minh rằng AI song song với BE.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có AM là đường trung tuyến và AH là đường cao. Trên tia đối của tia AM lấy điểm I. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng AB, AC. Các tia HD và HE theo thứ tự cắt IB, IC tại F, G. Chứng minh rằng IM vuông góc với FG.



MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN

PHẠM VĂN TƯỞNG *(TP. Hồ Chí Minh)*
NGUYỄN VĂN BẢN *(Trường THCS Thanh Yên, Điện Biên)*

Trong các kì thi HSG lớp 9, thi tuyển sinh vào lớp 10 của một số trường THPT chuyên thường có các dạng toán tính giá trị của biểu thức có ràng buộc thêm một số điều kiện nào đó và thường được chia thành hai dạng là Biểu thức có liên quan đến căn thức và Biểu thức không chứa căn thức. Các bài toán dạng này thường là sử dụng các phép biến đổi đồng nhất, sử dụng tính chất của các hằng đẳng thức, tính chất của dãy tỷ số bằng nhau,... Bài viết này chúng tôi xin giới thiệu tới bạn đọc một số dạng toán liên quan đến tính giá trị của biểu thức có liên quan đến căn thức.

Bài toán 1. Cho $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$T=\frac{x^4+4x^3-12x^2+8x+1}{x^2+4x-13}$$

Hướng dẫn. Ta có $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}$

$=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2}=3\sqrt{2}-2$, suy ra

$x+2=3\sqrt{2}$.

Khi đó $(x+2)^2=18$ hay $x^2+4x-14=0$.

Do đó $T=\dfrac{x^4+4x^3-12x^2+8x+1}{x^2+4x-13}$

$=\dfrac{x^2(x^2+4x-14)+2(x^2+4x-14)+29}{x^2+4x-14+1}=29.$

Với dạng toán này, chúng ta lưu ý không thể thế giá trị của biến tìm được vào biểu thức, như vậy sẽ rất cồng kềnh, thậm chí không thể tính toán được nếu số mũ quá lớn. Do đó, ta sẽ tìm cách nhóm các hạng tử thành từng nhóm để việc tính toán dễ dàng nhất dựa vào việc biến đổi theo biến.

Bài toán 2. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x^4-2x^3+3x^2-38x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ khi $x=2+\sqrt{3}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, tỉnh Bắc Ninh, năm học 2019 – 2020)

Hướng dẫn. Ta có $(x-2)^2=3$, suy ra

$x^2-4x+1=0$.

Do đó $x^4-2x^3+3x^2-38x+5$

$=(x^4-4x^3+x^2)+(2x^3-8x^2+2x)$

$+(10x^2-40x+10)-5=-5$.

Từ đó ta tính được $A=-\dfrac{5}{2}$.

Bài toán 3. Cho biểu thức $P=x^5-2x^4-7x^3-2x^2+4x+15$. Tính giá trị biểu thức P khi $x=\dfrac{-7}{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

Hướng dẫn. Ta có

$$x=\frac{-7}{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=\frac{-7}{\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}}=\frac{-7}{2\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{-7(2\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}=1-2\sqrt{2}, \text{ suy ra}$$

$1-x=2\sqrt{2}$ hay $x^2-2x-7=0$.

Do đó $P = x^5 - 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 4x + 15$
$= x^3(x^2 - 2x - 7) - 2(x^2 - 2x - 7) + 1 = 1.$

Bài toán 4. Cho

$$f(x) = \left(\frac{x^5 + 13x^3 - 32x^2 + 12x - 31}{x^3 + 12x - 33}\right)^{2025}.$$

Tính f(a) với $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn. Với $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$

ta có $a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16 - 8\sqrt{5})(16 + 8\sqrt{5})} \cdot a$

hay $a^3 + 12a - 32 = 0.$

Do đó $f(a) = \left(\frac{a^5 + 13a^3 - 32a^2 + 12a - 31}{a^3 + 12a - 33}\right)^{2025}$

$$= \left[\frac{a^2(a^3 + 12a - 32) + (a^3 + 12a - 32) + 1}{(a^3 + 12a - 32) - 1}\right]^{2025} = -1.$$

Bài toán 5. Cho

$f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 2043.$

Tính f(a) biết $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1.$

Hướng dẫn. Ta có

$a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$

$= \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{(2\sqrt{5} + 1)^3}} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + 1$

$= \sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, suy ra

$a^2 = 7 + 2\sqrt{10}$ hay $(a^2 - 7)^2 = 40$ hay

$a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. Do đó

$f(a) = a^5 + 2a^4 - 14a^3 - 28a^2 + 9a + 2043$

$= (a^5 - 14a^3 + 9a) + (2a^4 - 28a^2 + 18) + 2025$

$= a(a^4 - 14a^2 + 9) + 2(a^4 - 14a^2 + 9) + 2025 = 2025.$

Bài toán 6. Cho $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}}$. Tính giá trị biểu thức $T = (4x^5 + 4x^4 - x^3 + 1)^{2026}$

$$+\left(\sqrt{4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x + 3}\right)^3 + \left(\frac{1 - \sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + 2x}}\right)^{2025}.$$

Hướng dẫn.

Ta có $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2},$

suy ra $2x + 1 = \sqrt{2},$ suy ra $4x^2 + 4x - 1 = 0.$

Do đó

$4x^5 + 4x^4 - x^3 + 1 = x^3(4x^2 + 4x - 1) + 1 = 1,$

$4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x + 3$

$= x^3(4x^2 + 4x - 1) - x(4x^2 + 4x - 1)$

$+(4x^2 + 4x - 1) + 4 = 4,$

$$\frac{1 - \sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2 + 2x}} = \frac{1 - \sqrt{2}x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 2x = 1.$$

Vậy $T = 1^{2026} + (\sqrt{4})^3 + 1^{2025} = 10.$

Có những bài toán chúng ta cần phải biến đổi khéo léo giả thiết và thế vào biểu thức để tính được giá trị của biểu thức như bài toán dưới đây:

Bài toán 7. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 5x + 3} - 6}{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 7x + 3}} \text{ tại } x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}.$$

Hướng dẫn.

Ta có $(\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 1,$

suy ra $\sqrt[3]{2}x = x + 1,$ suy ra $2x^3 = (x + 1)^3$ hay

$x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$

Do đó $P = \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 5x + 3} - 6}{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 7x + 3}}$

$$= \frac{\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + x^2 + 5x + 3} - 6}{\sqrt{3x^2 + 3x + 1 - 2x^2 - 7x + 3}}$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2 + 8x + 4} - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{\sqrt{4(x + 1)^2} - 6}{\sqrt{(x - 2)^2}}$$

$$= \frac{2|x + 1| - 6}{|x - 2|} = \frac{2(x + 1) - 6}{x - 2} = \frac{2x - 4}{x - 2} = 2$$

(do $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} > 2$).

Có những bài toán ngoài biến đổi giả thiết, ta phải biến đổi biểu thức để phù hợp với giả thiết rồi mới thế vào như bài toán sau:

Bài toán 8. Cho $a > 0$ thỏa mãn điều kiện $4a^2 + \sqrt{2}(a-1) = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$.

Hướng dẫn. Từ $4a^2 + \sqrt{2}(a-1) = 0$ suy ra $a^2 = \dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{4}$ hay $a^4 = \dfrac{a^2-2a+1}{8}$.

Cũng từ giả thiết cho ta $0 < a < 1$.

Do đó $T = \dfrac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$

$= \dfrac{(a+1)\left(\sqrt{a^4+a+1}+a^2\right)}{\left(\sqrt{a^4+a+1}-a^2\right)\left(\sqrt{a^4+a+1}+a^2\right)}$

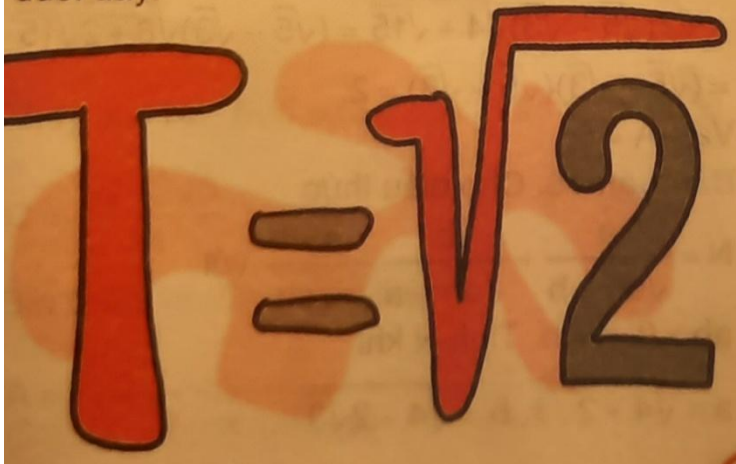
$= \sqrt{a^4+a+1}+a^2$

$= \sqrt{\dfrac{a^2-2a+1}{8}+a+1}+\dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{4}$

$= \sqrt{\dfrac{a^2+6a+9}{8}}+\dfrac{1-a}{2\sqrt{2}} = \dfrac{a+3}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1-a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Bài toán này, dễ nhận ra giả thiết là một phương trình bậc hai ẩn a. Do đó, dễ dẫn tới việc giải phương trình này để tìm ra giá trị cụ thể của a và thế vào biểu thức. Điều này sẽ dẫn tới hai vấn đề: Thứ nhất, phương trình có hai nghiệm a_1, a_2 trong khi biểu thức là một hàm số không chẵn, không lẻ, dẫn tới phải thế hai lần. Thứ hai, khi thế a vào biểu thức có chứa mũ 4 sẽ rất khó tính ra kết quả.

Nếu biểu thức yêu cầu tính giá trị đơn giản, ta có thể thế trực tiếp giá trị của biến (sau khi rút gọn) vào biểu thức và tính như bài toán dưới đây:



Bài toán 9. Cho

$x = \sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

$+\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{14-5\sqrt{3}}\right)$.

Tính giá trị của biểu thức $T = x^2 - 14x + 45$.

Hướng dẫn. Ta có

$x = \sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

$+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}$

$= \sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

$+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}$, suy ra

$x-6 = \sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}} < 0$.

Suy ra $(x-6)^2 = 8-2\sqrt{16-10+2\sqrt{5}}$

$= 8-2\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = 6-2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2$.

Suy ra $x-6 = 1-\sqrt{5}$ hay $x = 7-\sqrt{5}$.

Do đó $T = x^2-14x+45$

$= (7-\sqrt{5})^2-14(7-\sqrt{5})+45$

$= 54-14\sqrt{5}-98+14\sqrt{5}+45 = 1$.

Bài toán 10. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + y^3 - 3(x+y)$, biết rằng $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$.

(Trích đề thi HSG lớp 9, tỉnh Bình Định, năm học 2018 – 2019)

Hướng dẫn. Ta có $x^3 = 3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}$

$+3\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}\cdot x = 6+3x$.

$y^3 = 17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}$

$+3\sqrt[3]{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}\cdot y = 34+3y$.

Vậy $A = 6+3x+34+3y-3(x+y) = 40$.

Bài toán 11. Tính giá trị của biểu thức $Q = \dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ khi $x = 2020-2\sqrt{2019}$.

(Trích đề thi vào lớp 10, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, tỉnh Kon Tum, năm học 2019 – 2020)

Hướng dẫn. Điều kiện xác định: $x \geq 0, x \neq 4$.

Ta có $x = (\sqrt{2019} - 1)^2$ nên $\sqrt{x} = \sqrt{2019} - 1$.

$$Q = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2} = 2\sqrt{x} + 1$$

$$= 2(\sqrt{2019} - 1) + 1 = 2\sqrt{2019} - 1.$$

Bài toán 12. Tính giá trị biểu thức $P = x^3(x^2 + 3x + 9)^3$ khi

$$x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{3}} - 1.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên toán, tỉnh Tiền Giang, năm học 2019 – 2020)

Hướng dẫn. Ta có

$$x + 1 = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow (x + 1)^3 = 4 - 6(x + 1) \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 9x = -3.$$

$$P = x^3(x^2 + 3x + 9)^3 = (x^3 + 3x^2 + 9x)^3 = -27.$$

Bài toán 13. Tính giá trị biểu thức $B = (x^2 + 4x - 2)^{2019}$ tại

$$x = \frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}{\sqrt{21 + 4\sqrt{5}} + 3}.$$

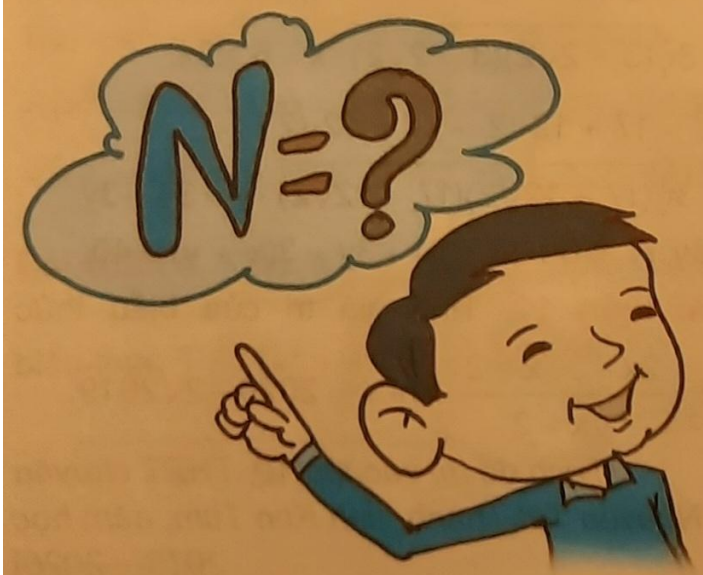
(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên toán, tỉnh Sơn La, năm học 2019 – 2020)

Hướng dẫn. Ta có

$$x = \frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}{\sqrt{21 + 4\sqrt{5}} + 3} = \frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{(\sqrt{3} + 1)^3}}{\sqrt{(2\sqrt{5} + 1)^2} + 3}$$

$$= \frac{2}{2(\sqrt{5} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = \sqrt{5} - 2.$$

Suy ra $x^2 + 4x - 2 = -1$. Do đó $B = -1$.





Bài toán 14. Cho biểu thức

$$A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a + 1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1}\right)$$

với $a \geq 0$. Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 2027 - 2\sqrt{2026}$.

Hướng dẫn. Ta có

$$A = \frac{a - 2\sqrt{a} + 1}{a + 1} : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{2\sqrt{a}}{(a + 1)(\sqrt{a} + 1)}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{a + 1} : \frac{a + 1 - 2\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + 1)(a + 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - 1)^2(\sqrt{a} + 1)(a + 1)}{(a + 1)(\sqrt{a} - 1)^2} = \sqrt{a} + 1.$$

Khi $a = 2027 - 2\sqrt{2026} = (\sqrt{2026} - 1)^2$ thì $A = \sqrt{2026}$.

Bài toán 15. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + a\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$ với

$a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị của A khi

$a = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$..

Hướng dẫn. Rút gọn A ta được $A = 4a$.

$$a = \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{(4 + \sqrt{15})^2(4 - \sqrt{15})}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{4 + \sqrt{15}} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$$

$$= (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 2.$$

Vậy $A = 8$.

Bài toán 16. Cho biểu thức

$$N = \frac{a}{\sqrt{ab} + b} + \frac{b}{\sqrt{ab} - a} - \frac{a + b}{\sqrt{ab}}$$ với

$ab > 0, a \neq b$. Tính N khi

$a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}, b = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn. Ta có

$$N=\frac{a(\sqrt{ab}-a)+b(\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{ab}+b)(\sqrt{ab}-a)}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+b^2-a^2}{ab+b\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}-ab}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+(b-a)(b+a)}{\sqrt{ab}(b-a)}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(a+b)(\sqrt{ab}+b-a)}{\sqrt{ab}(b-a)}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(a+b)(\sqrt{ab}+b-a)-(b^2-a^2)}{\sqrt{ab}(b-a)}$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+b^2-a^2-b^2+a^2}{\sqrt{ab}(b-a)}$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(b-a)}=\frac{a+b}{b-a}=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}=-\sqrt{3}.$$

Bài toán 17. Cho biểu thức

$$Q=\frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$$ với $x\geq 0, x\neq 9$. Tính giá trị của Q khi $x=14-6\sqrt{5}$.

Hướng dẫn.

$$Q=\frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+8\sqrt{x}-3x-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}=\frac{(x+8)(\sqrt{x}-3)}{(x+8)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}.$$

Thay $x=14-6\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^2$ vào Q ta được

$$Q=\frac{58-2\sqrt{5}}{11}.$$

Bài toán 18. Cho biểu thức

$$A=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{5}{x-\sqrt{x}-6}-\frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}}$$ với $x\geq 0, x\neq 9$. Tính giá trị của biểu thức A biết

$$x=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3+\sqrt{29+12\sqrt{5}}}+10}.$$

(Trích đề thi HSG huyện Điện Biên, năm học 2020 – 2021)

Hướng dẫn.

$$A=\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{5}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-3-5+(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}=\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}.$$

$$x=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3+\sqrt{(2\sqrt{5}+3)^2}}+10}$$

$$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}+10}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}-1+10}=3.$$

Thay $x=3$ vào biểu thức A ta được

$$A=\frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+2}=5-2\sqrt{3}.$$

Bài toán 19. Cho biểu thức

$$P=\frac{(a+1)^2(a-2)+(a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{(a-1)^2(a+2)+(a^2-1)\sqrt{a^2-4}}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$$

Với $a<-2$ hoặc $a>2$. Tính giá trị của biểu thức P khi $a=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}+5.$

Hướng dẫn. Đặt

$$t=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}>0$$ ta có

$$t^2=2\left(\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\right)^2=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1}=4$$

suy ra $t=2$ dẫn đến $a=7$.

Với $a=7>2$ ta có

$$P=\frac{(a+1)\sqrt{a-2}\left[(a+1)\sqrt{a-2}+(a-1)\sqrt{a+2}\right]}{(a-1)\sqrt{a+2}\left[(a-1)\sqrt{a+2}+(a+1)\sqrt{a-2}\right]}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$$

$$=\frac{a+1}{a-1}=\frac{7+1}{7-1}=\frac{4}{3}.$$

Bài toán 20. Cho biểu thức

$$A=\frac{\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}}{\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}+1}}$$ với $x>2$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}$.

Hướng dẫn. Ta có

$$A=\frac{\sqrt{(\sqrt{x-2}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}+2)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{x}\right)^2}}$$

$$=\frac{x\left(\left|\sqrt{x-2}-2\right|+\sqrt{x-2}+2\right)}{x-2}.$$

Với $2<x<6$ thì

$$A=\frac{x(2-\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}+2)}{x-2}=\frac{4x}{x-2}.$$

Với $x\geq 6$ thì

$$A=\frac{x(\sqrt{x-2}-2+\sqrt{x-2}+2)}{x-2}=\frac{2x\sqrt{x-2}}{x-2}.$$

Ta có $x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}}{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3}}=\frac{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=3.$$

Do đó $A=\frac{4\cdot 3}{3-2}=12$.

Bài toán 21. Cho đa thức $P(x)=x^5-3x^4+4x^3+ax^2+3x-3$ trong đó a là số thực. Tính P(1) biết $P(1+\sqrt[3]{2})=0$.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, tỉnh Hải Dương, năm học 2025 – 2026)

Hướng dẫn. Ta có

$$P(x)=x^5-3x^4+4x^3+ax^2+3x-3$$

$$=(x^2+1)(x^3-3x^2+3x-3)+(a+6)x^2$$

Đặt $k=1+\sqrt[3]{2}$ thì ta có $(k-1)^3=2$ hay $k^3-3k^2+3k-3=0$.

Từ $P(1+\sqrt[3]{2})=0$ tức $P(k)=0$

$$\Leftrightarrow (k^2+1)(k^3-3k^2+3k-3)+(a+6)k^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=-6.$$

Suy ra $P(x)=x^5-3x^4+4x^3-6x^2+3x-3$ và ta có được $P(1)=-4$.

Bài toán 22. Cho biểu thức

$$Q=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}-\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-4\sqrt{x}+3}$$ với $x\geq 0, x\neq 1, x\neq 9$. Tính giá trị của biểu thức Q khi $x=11+6\sqrt{2}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2025 – 2026)

Hướng dẫn. Rút gọn được $Q=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.

Thay $x=11+6\sqrt{2}=(3+\sqrt{2})^2$ vào biểu thức Q ta được $Q=\sqrt{2}+1$.

Bài toán 23. Cho a, b là các số thực dương khác nhau thỏa mãn $a-b=\sqrt{2025-b^2}-\sqrt{2025-a^2}$. Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+b^2$.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, tỉnh Phú Thọ, năm học 2025 – 2026)

Hướng dẫn. Ta có

$$(a-b)\left(\sqrt{2025-b^2}+\sqrt{2025-a^2}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2025-b^2}-\sqrt{2025-a^2}\right)\left(\sqrt{2025-b^2}+\sqrt{2025-a^2}\right)$$

$$=a^2-b^2$$

$$\Rightarrow a+b=\sqrt{2025-b^2}+\sqrt{2025-a^2}$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{2025-b^2}.$$

Từ đó suy ra $A=a^2+b^2=2025$.

Bài toán 24. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{xz}+\sqrt{z}+1}.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, tỉnh Bạc Liêu, năm học 2025 – 2026)

Hướng dẫn. Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$, ta có

$$P = \frac{\sqrt{xz}}{\sqrt{xyz}+\sqrt{xz}+\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{yxz}}{\sqrt{xyz^2}+\sqrt{yxz}+\sqrt{xz}} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{xz}+\sqrt{z}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{xz}}{1+\sqrt{xz}+\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{z}+1+\sqrt{xz}} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{xz}+\sqrt{z}+1} = 1.$$

Bài toán 25. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $(a-b)(a+b)=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sqrt{(4a+5)^2+9b^2} - \sqrt{(4a-5)^2+9b^2}.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, TP Hồ Chí Minh, năm học 2025 – 2026)

Hướng dẫn. Từ $(a-b)(a+b)=1$ ta có

$b^2 = a^2 - 1$, suy ra $a > 1$. Khi đó

$$P = \sqrt{25a^2+40a+16} - \sqrt{25a^2-40a+16}$$

$$= \sqrt{(5a+4)^2} - \sqrt{(5a-4)^2} = 5a+4-5a+4 = 8.$$

Kết luận. Với dạng bài Tính giá trị của biểu thức có chứa căn, thường thì không quá khó nhưng đôi khi gây "hoảng" vì sự cồng kềnh và phức tạp của nó, tuy vậy kết quả sau khi tính toán thường là gọn gàng và khá đẹp. Đối với các bài toán dạng này, việc đầu tiên là ta cần xem xét điều kiện xác định của các biểu thức có trong bài (nếu cần), bước tiếp theo ta cần rút gọn các biểu thức cồng kềnh có trong đó, thường thì căn bậc hai thì ta nghĩ đến bình phương của một biểu thức nào đó dưới căn, căn bậc ba thì ta thường nghĩ tới lập phương của một biểu thức nào đó dưới căn,...đôi khi việc rút gọn là không cần thiết mà ta có thể bóc tách các đa thức trong biểu thức đã cho để thuận tiện hơn trong quá trình tính toán.

Một số bài tập tự luyện

Bài 1. Cho $x = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}-2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = (3x^4 - x^2 - 1)^{2025}$.

Bài 2. Cho $x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = (1+3x^3-3x^5)^{2025}$.

Bài 3. Cho $x = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của $T = (x^4+x^3-x^2-2x-1)^{2025}$.

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{4(x+1)x^{2026} - 2x^{2025} + 2x + 1}{2x^2+3x}$$ với

$$x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}.$$

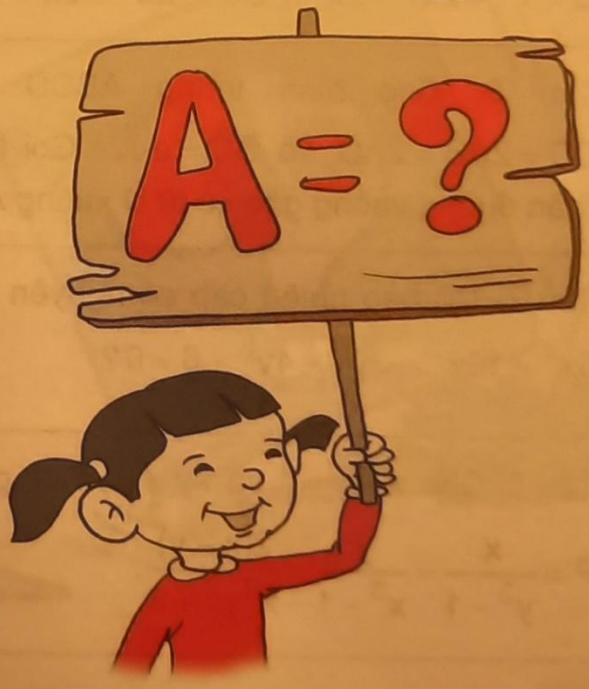
Bài 5. Cho $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{x^4-4x^3+x^2+6x+12}{x^2-2x+12}$.

Bài 6. Tính giá trị của biểu thức

$$T = (10x^2-30x+11)^{2026} + \frac{(2x^2-6x+3)^{2025}}{x^5-3x^4+x^3-1}$$

khi $x = \dfrac{\sqrt{41-12\sqrt{5}}+\sqrt{29-12\sqrt{5}}}{2}$.

Bài 7. Cho $x = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{10}+3\sqrt{5}-2\sqrt{2}-3}{\sqrt{5}-1}}$. Tính giá trị của $A = \dfrac{x^{2026}+3x-1-x^{2024}(2x+1)}{x^3-3x^2+2x+1}$.



ĐỀ TỰ LUYỆN OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ

ĐỀ THI CÁ NHÂN TRUNG HỌC CƠ SỞ

Thời gian làm bài: ***60 phút***

Từ câu 1 đến câu 12 chỉ ghi đáp số; câu 13, 14 và 15 viết lời giải đầy đủ.

Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Huế

ĐỀ BÀI	ĐÁP SỐ
Câu 1. Tìm đa thức $h(x)$ có bậc 4, hệ số của bậc cao nhất là 1, biết $h(1)=2, h(2)=5, h(4)=17, h(-3)=10$.	
Câu 2. Tìm dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$.	
Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC>AB)$ có đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HA=HD$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E. Tính độ dài đoạn BE theo $m=AB$.	
Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $3x^2+3xy-17=7x-2y$?	
Câu 5. Cho số thực x thỏa mãn $x^2+x=1$. Tính giá trị biểu thức $Q=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.	
Câu 6. Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết $CD=2AB=2AD$ và $BC=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Tính số đo góc HDI.	
Câu 7. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $5x^4+10x^2+2y^6+4y^3-6=0$?	
Câu 8. Cho $x+y=1$ và $xy\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{x}{y^3-1}-\dfrac{y}{x^3-1}+\dfrac{2(x-y)}{x^2y^2+3}$.	

Câu 9. Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{x^2+3x}{x^3+3x^2+9x+27}+\frac{3}{x^2+9}\right):\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6x}{x^3-3x^2+9x-27}\right)$$ với $x\neq\pm3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để P nhận giá trị là số nguyên?

Câu 10. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD; I và J theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng DH và BC. Tính số đo của góc AIJ.

Câu 11. Cho biết $\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}.$$

Câu 12. Tìm tất cả các cặp số thực (x, y) thỏa mãn đẳng thức

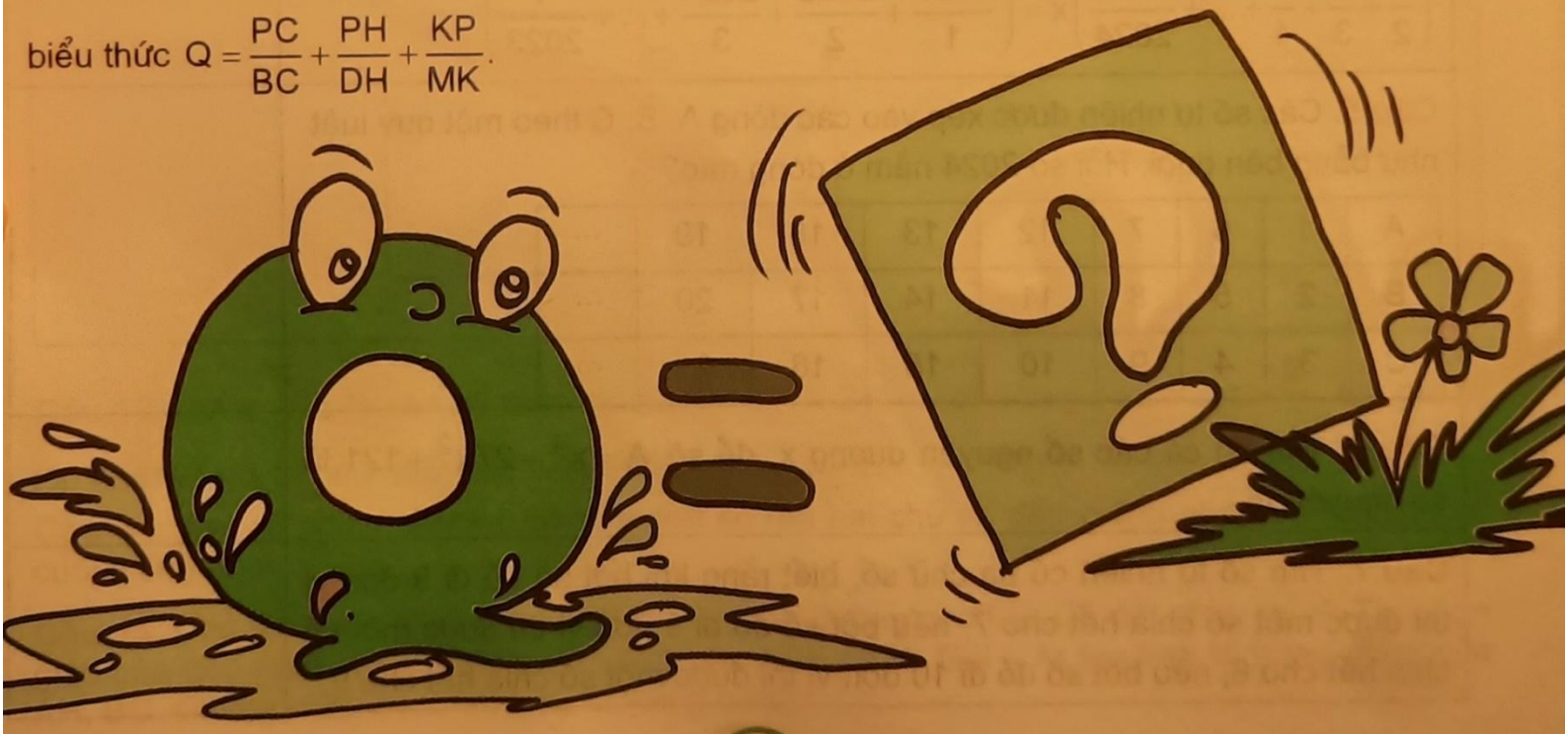
$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$

Câu 13. Chứng minh rằng $A=\left[n^3(n^2-7)^2-36n\right]\vdots7$ với mọi số nguyên n.

Câu 14. Với x, y là các số thực, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=xy(x-2)(y+6)+12x^2-24x+3y^2+18y+2045.$

Câu 15. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia CD, lấy điểm M bất kì (CM < CD). Vẽ hình vuông CMNP (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H, MP cắt BD tại K. Tính giá trị của biểu thức $Q=\frac{PC}{BC}+\frac{PH}{DH}+\frac{KP}{MK}$.



ĐỀ THI CÁ NHÂN TRUNG HỌC CƠ SỞ

Thời gian làm bài: *60 phút*

Từ câu 1 đến câu 12 chỉ ghi đáp số; câu 13, 14 và 15 viết lời giải đầy đủ.

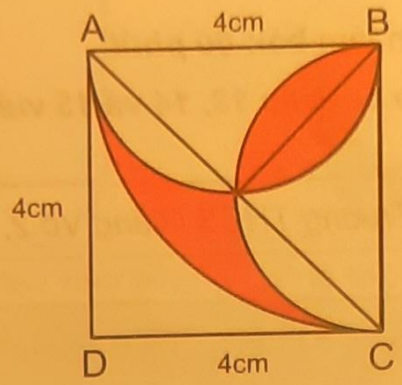
Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Hồ Chí Minh

ĐỀ BÀI	ĐÁP SỐ
Câu 1. Cho $x+y+z=0$. Tính $A=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$.	
Câu 2. Tìm số nguyên x biết: $\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert+\lvert x-3\rvert+\ldots+\lvert x-100\rvert=2500$.	
Câu 3. Tính $\left(\dfrac{1}{1013}+\dfrac{1}{1014}+\dfrac{1}{1015}+\ldots+\dfrac{1}{2024}\right):\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{5\cdot6}+\ldots+\dfrac{1}{2023\cdot2024}\right)$.	
Câu 4. Tìm x biết: $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2024}\right)x=\left(\dfrac{2023}{1}+\dfrac{2022}{2}+\dfrac{2021}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2023}\right)$	
Câu 5. Các số tự nhiên được xếp vào các dòng A, B, C theo một quy luật như bảng bên dưới. Hỏi số 2024 nằm ở dòng nào?	
Câu 6. Tìm tất cả các số nguyên dương x, để số $A=x^4-27x^2+121$ là số nguyên tố.	
Câu 7. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng khi bớt số đó đi 8 đơn vị thì được một số chia hết cho 7, nếu bớt số đó đi 9 đơn vị thì được một số chia hết cho 8, nếu bớt số đó đi 10 đơn vị thì được một số chia hết cho 9.	

A	1	6	7	12	13	18	19	...
B	2	5	8	11	14	17	20	...
C	3	4	9	10	15	16	21	...

Câu 8. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $(n+5)(n+6)$ chia hết cho 6n.

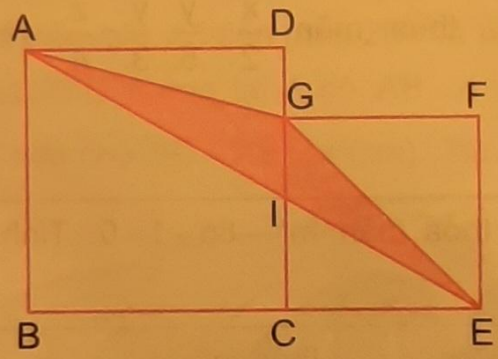
Câu 9. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4 cm. Vẽ nửa đường tròn đường kính AB, nửa đường tròn đường kính BC và đường tròn tâm B bán kính BA. Tính diện tích phần tô đậm trong hình vẽ sau:



Câu 10. Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Tính giá trị của tổng $\frac{AH}{AD}+\frac{BH}{BE}+\frac{CH}{CF}$.

Câu 11. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại M và N. Biết $S_{AOB}=9\ cm^2$, $S_{COD}=16\ cm^2$. Tính S_{ABCD}.

Câu 12. Cho hai hình vuông ABCD và CEFG như hình vẽ sau. Biết EF = 12 cm. Tính diện tích tam giác AEG.



Câu 13. Với x, y, z là các số thực thỏa mãn $2x^2+2y^2+4z^2+3xy+xz+2yz=\frac{3}{2}$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+y+z$.

Câu 14. Tìm số chính phương có bốn chữ số mà hai chữ số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau.

Câu 15. Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC), các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Tia phân giác của góc ABE cắt tia phân giác của góc ACF tại K. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH, BC. Chứng minh ba điểm I, K, M thẳng hàng.

ĐỀ TỰ LUYỆN OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ

ĐỀ THI CÁ NHÂN TRUNG HỌC CƠ SỞ

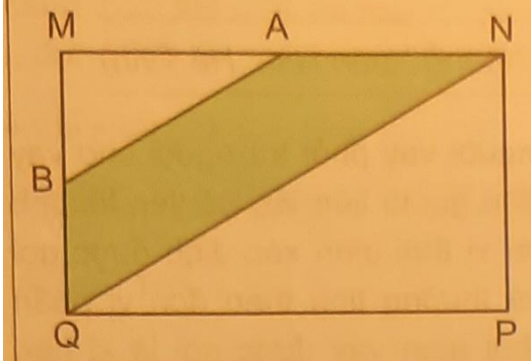
Thời gian làm bài: *60 phút*

Từ câu 1 đến câu 12 chỉ ghi đáp số; câu 13, 14 và 15 viết lời giải đầy đủ.

NGUYỄN NGỌC HÂN *(Trường THCS Giảng Võ 2, Hà Nội)*

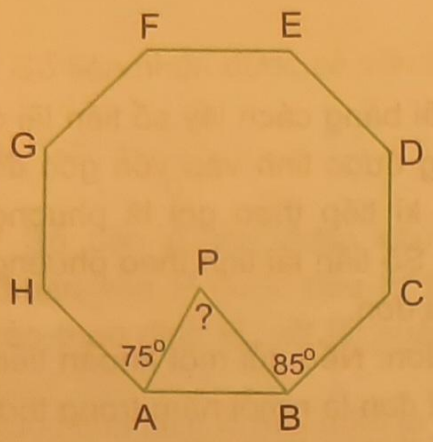
ĐỀ BÀI	ĐÁP SỐ
Câu 1. Tìm chữ số tận cùng của số 2024^{2025}.	
Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên n thỏa mãn $(n^2-3)(n^2-36)<0$?	
Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên dương n không vượt quá 2024 sao cho $A=n^4+2n^3+4n-4$ có giá trị là hợp số?	
Câu 4. Cho các chữ số a, b, c, d, e, f, với a và d khác 0 thỏa mãn $\overline{defabc}=6\cdot\overline{abcdef}$. Tính $M=a+b+c+d+e+f$.	
Câu 5. Cho bốn chữ số 0; 2; 5; 7. Có bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau gồm cả bốn chữ số trên?	
Câu 6. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}, \frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ và $x-y+2z=1$. Tính $x+y+z$.	
Câu 7. Cho các số nguyên tố m, n thỏa mãn $m^2-8n-1=0$. Tính $m+n$.	
Câu 8. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^2+2y^2-3xy+2x-4y+3=0$?	
Câu 9. Tính giá trị của biểu thức $T=\lvert b-a+1\rvert-\lvert a-b-3\rvert$ với $a<0$ và $ab<0$.	
Câu 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+xy+4x+5y+998$.	

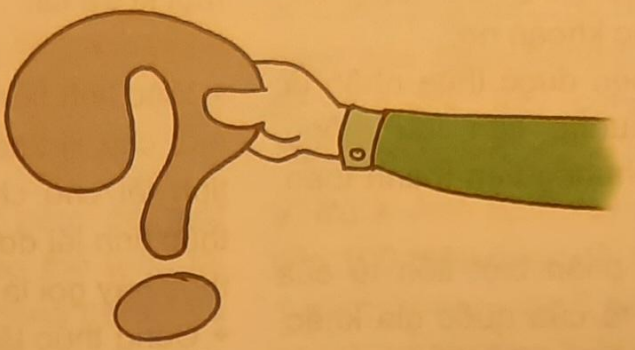
Câu 11. Cho hình chữ nhật MNPQ. Gọi A, B lần lượt là trung điểm của các cạnh MN, MQ như hình vẽ. Diện tích phần tô đậm chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích của hình chữ nhật?





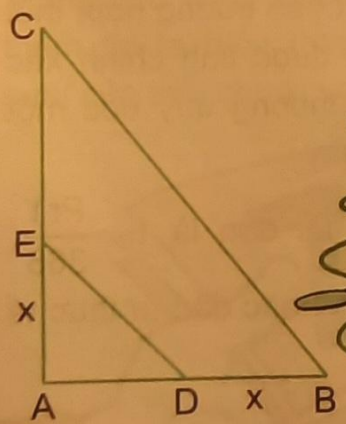
Câu 12. Cho bát giác đều như hình vẽ, P là một điểm nằm trong đa giác sao cho $\widehat{PAH} = 75^o$, $\widehat{PBC} = 85^o$. Tính số đo góc APB.





Câu 13. Cuối năm học, 200 học sinh tiêu biểu của trường được nhà trường cho đi xem phim. Cô giáo mua 200 vé hết 3 365 000 đồng. Trong các vé đã mua này có một số vé được giảm giá 25%. Giả thiết giá gốc mỗi vé (khi không giảm giá) là một số nguyên dương. Hỏi nếu không có vé nào được giảm giá, số tiền mua 200 vé là bao nhiêu?

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Các điểm D, E lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = AE = x$ (cm). Tìm x để diện tích tứ giác BDEC nhỏ nhất.





Câu 15. Với x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $3x^2 + 2y^2 = 56$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 4x^2 + 2xy + y^2$.



TIỀN TỆ VÀ LÃI SUẤT

NGUYỄN NGỌC HÙNG *(Trường THCS Hoàng Xuân Hãn, Hà Tĩnh)*

Trong các "Hoạt động thực hành và trải nghiệm" ở Toán 8 và Toán 9, các em đã làm quen với các bài toán lãi suất và một số vấn đề khác liên quan đến tài chính. Bài viết này giúp chúng ta hiểu rõ hơn về "Tiền tệ và lãi suất".

1. Tiền tệ

– Tiền (tiền tệ) là bất cứ phương tiện nào được thừa nhận chung để trao đổi hàng hoá, dịch vụ hoặc để trả các khoản nợ.

Các chức năng của tiền được thừa nhận là: thước đo giá trị, phương tiện lưu thông, phương tiện cất giữ, phương tiện thanh toán, tiền tệ thế giới.

– Đơn vị tiền tệ: Khi phân biệt tiền tệ của quốc gia này với tiền tệ của quốc gia khác, người ta dùng cụm từ "đơn vị tiền tệ".

Đơn vị tiền tệ của nhiều quốc gia có thể có tên gọi riêng. Ví dụ: Việt Nam đồng, Nhân dân tệ,... hoặc có cùng một tên gọi như đô la (Dollar) và để phân biệt các đơn vị tiền tệ đó, người ta thường phải gọi kèm tên quốc gia sử dụng đồng tiền như đô la Úc, đô la Mỹ, ... Với sự hình thành của các khu vực tiền tệ thống nhất, ngày nay có nhiều quốc gia dùng chung một đơn vị tiền tệ như đồng Euro.

Trong các hoạt động buôn bán, giao dịch thương mại quốc tế, người ta thường phải đổi từ tiền tệ của quốc gia này sang tiền tệ của quốc gia khác. Việc trao đổi này được thực hiện dựa trên tỉ giá giữa hai loại tiền tệ.

– Tỉ giá là tỉ lệ quy đổi giá trị một đơn vị tiền tệ này sang một đơn vị tiền tệ khác.

2. Lãi suất

– Lãi suất của một chu kì là tỉ lệ phần trăm giữa tiền lãi thu được ở cuối chu kì và tiền vốn cho vay từ đầu chu kì đó.

Khi đi vay, người vay phải trả người cho vay một khoản tiền gọi là tiền lãi. Số tiền lãi tính theo một đơn vị thời gian xác định được gọi là lãi suất và thường tính theo đơn vị phần trăm (%). Thời gian vay được gọi là kì hạn vay. Thời gian định kì trả lãi được gọi là kì trả lãi (kì tính lãi). Kì hạn vay tính theo số kì trả lãi gọi là số chu kì vay. Mỗi chu kì vay bằng một kì trả lãi.

– Lãi đơn:

+ Việc tính tiền lãi bằng cách lấy số tiền lãi ở mỗi chu kì không được tính vào vốn gốc để tính lãi cho chu kì tiếp theo gọi là phương thức tính lãi đơn. Số tiền lãi tính theo phương thức này gọi là lãi đơn.

+ Công thức lãi đơn: Nếu gửi một khoản tiền vốn P với lãi suất đơn là r mỗi năm trong thời hạn t năm, thì số tiền lãi L được nhận là $L = Prt$.

Số tiền A được nhận sau t năm là tổng số tiền vốn P ban đầu và số tiền lãi được nhận, và bằng $A = P + L = P(1 + rt)$.

Chú ý. Lãi đơn chủ yếu được dùng cho các khoản gửi hoặc đầu tư ngắn hạn thường là dưới một năm. Trong một số trường hợp, thời gian gửi hoặc đầu tư t được tính chính xác theo ngày và người ta thường quy ước một năm tài chính có 365 ngày.

Khi đó công thức tính lãi đơn là $L = \frac{Prt}{365}$, trong đó t là số ngày gửi hoặc đầu tư thực tế của khoản gửi đó.

– Lãi kép:

Việc tính tiền lãi bằng cách lấy số tiền lãi của chu kì trước nhập vào vốn để tính lãi cho chu kì tiếp theo gọi là phương thức tính lãi kép.

Số tiền lãi tính theo phương thức này gọi là lãi kép.

Giả sử gửi một khoản tiền vốn P vào ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất năm là r, được tính lãi n kì trong một năm.

+ Lãi suất của mỗi kì là $\frac{r}{n}$.

+ Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau 1 kì là $A_1 = P\left(1+\frac{r}{n}\right)$.

+ Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau 2 kì là $A_2 = P\left(1+\frac{r}{n}\right)+P\left(1+\frac{r}{n}\right)\frac{r}{n} = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^2$.

...

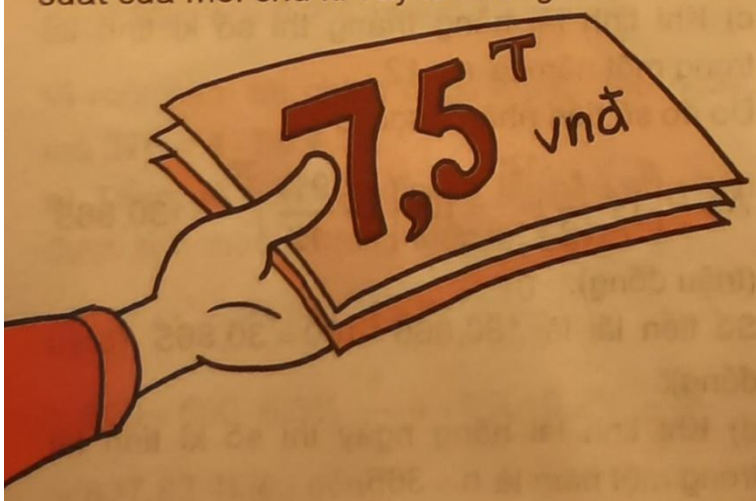
+ Số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì là $A_n = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$.

+ Số tiền A thu được sau t năm do một khoản vốn P được đầu tư theo thể thức lãi kép theo định kì, với lãi suất hằng năm r và được tính lãi n kì mỗi năm là $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Chú ý. Trong công thức lãi kép, số tiền A thường được gọi là giá trị tương lai và P được gọi là giá trị hiện tại của tài khoản.

Lãi kép thường được sử dụng cho các khoản gửi tiết kiệm hoặc các khoản đầu tư trung và dài hạn.

Trong các ví dụ dưới đây, nếu không nói gì thêm thì ta hiểu trong suốt kì hạn vay, lãi suất của mỗi chu kì vay là không đổi.



Ví dụ 1. Theo Ngân hàng Nhà nước Việt Nam vào ngày 28/05/2025. Ngân hàng bán ra 1 USD với giá 26 270 VND và mua vào 1 USD với giá 25 910 VND. Xét hai giao dịch sau trong ngày 28/05/2025.

a) Ông A mua 15 USD từ ngân hàng. Hỏi ông phải trả bao nhiêu VND?

b) Công ty B bán 100 000 USD cho ngân hàng. Hỏi công ty B thu được bao nhiêu VND?

Lời giải. a) Ông A cần mua 15 đô la Mỹ từ ngân hàng nên ngân hàng sẽ áp dụng tỉ giá bán cho ông A. Vậy ông A cần trả $15 \cdot 26270 = 394050$ (VND).

b) Công ty B bán 100 000 đô la Mỹ cho ngân hàng nên ngân hàng sẽ áp dụng tỉ giá mua để quy đổi. Vậy công ty B sẽ thu được $100000 \cdot 25910 = 2591000000$ (VND).

Ví dụ 2. Anh Bình vay một ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng, lãi suất 8%/năm, kì trả lãi 1 năm, kì hạn vay 5 năm. Tính tiền lãi sau 5 năm theo phương thức tính:

a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

Lời giải. Ta có $P = 100$ (triệu đồng), $r = 8\%$, $t = 5$.

a) Tiền lãi tính theo phương thức tính lãi đơn là $L = Prt = 100 \cdot 8\% \cdot 5 = 40$ (triệu đồng).

b) Tiền lãi tính theo phương thức tính lãi kép là $L = P\left[(1+r)^n - 1\right] = 100\left[(1+8\%)^5 - 1\right]$

$\approx 46,933$ (triệu đồng).

Ví dụ 3. Bác An cho một tổ chức tín dụng vay 100 triệu đồng trong thời hạn 9 tháng với lãi suất đơn là 10% mỗi năm. Tính số tiền lãi và tổng số tiền bác An nhận được sau 9 tháng.

Lời giải. Ta có $P = 100$ (triệu đồng), $r = 10\%$, $t = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ (năm).

Số tiền lãi bác An nhận được là $L = Prt = 100 \cdot 10\% \cdot \frac{3}{4} = 7,5$ (triệu đồng).

Tổng số tiền bác An nhận được là $A = P + L = 100 + 7,5 = 107,5$ (triệu đồng).

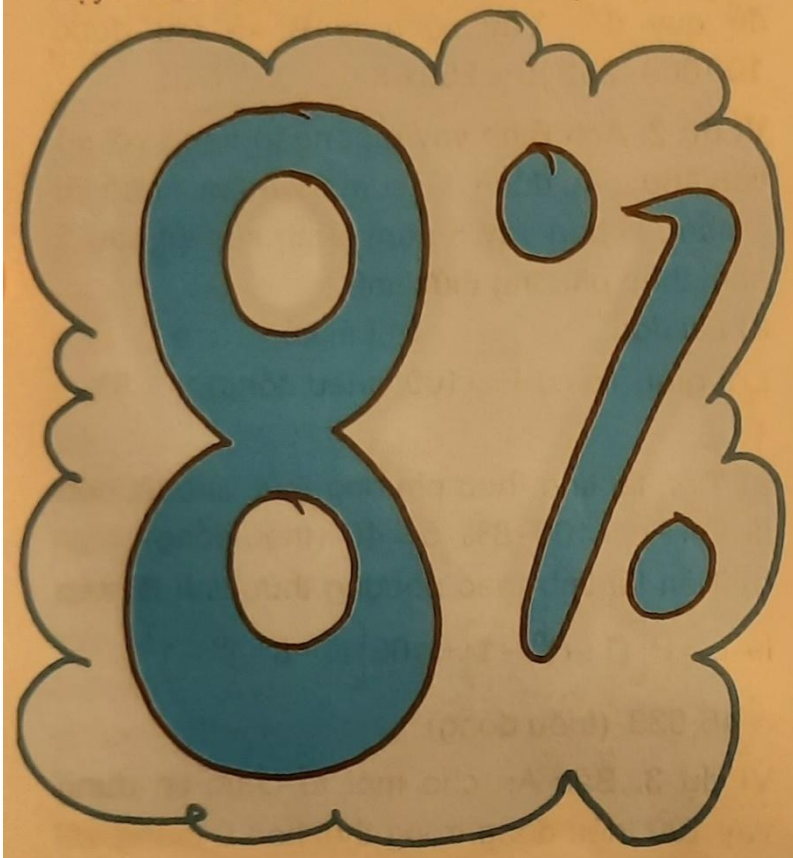
Ví dụ 4. Ông Sơn cho một tổ chức tín dụng vay 50 triệu đồng trong thời hạn 6 tháng theo thể thức lãi đơn. Lãi suất năm của khoản cho vay này là bao nhiêu nếu số tiền ông Sơn nhận được sau 6 tháng là 52 triệu đồng?

Lời giải. Ta có $P = 50$ triệu đồng, $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (năm), $A = 52$ (triệu đồng).

Số tiền nhận được là $A = P + L$, suy ra $L = A - P = 52 - 50 = 2$ (triệu đồng).

Từ $L = Prt$, suy ra $r = \frac{L}{Pt} = \frac{2}{50 \cdot \frac{1}{2}} = 8\%$.

Vậy lãi suất năm của khoản cho vay này là 8%.



Ví dụ 5. Anh Hùng muốn tích lũy được 105 triệu đồng trong thời gian ngắn hạn t ngày. Anh Hùng đã gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất đơn là 11% một năm. Tìm thời gian gửi t ngày, biết một năm tài chính được lấy là 365 ngày.

Lời giải. Ta có $P = 100$ (triệu đồng), $A = 105$ (triệu đồng), $r = 11\%$.

Do đó $L = A - P = 5$ (triệu đồng).

Theo công thức $L = \frac{Prt}{365}$, suy ra

$$t = \frac{365 \cdot L}{Pr} = \frac{365 \cdot 5}{100 \cdot 11\%} \approx 165,9.$$

Vậy sau 166 ngày gửi thì 100 triệu đồng sẽ tích lũy được 105 triệu đồng.

Ví dụ 6. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng theo thể thức lãi kép với lãi suất năm là 9% thì số tiền nhận được sau 3 năm là bao nhiêu nếu việc tính lãi diễn ra:

a) Hằng năm? b) Hằng quý?

c) Hằng tháng? d) Hằng ngày?

Tính số tiền lãi nhận được trong mỗi trường hợp.

Lời giải. Ta có $P = 100$ (triệu đồng), $r = 9\%$, $t = 3$ (năm).

a) Khi tính lãi hằng năm thì số kì tính lãi trong một năm là $n = 1$.

Do đó số tiền nhận được là

$$A = P(1+r)^t = 100(1+9\%)^3 \approx 129,503 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền lãi là

$129,503 - 100 = 29,503$ (triệu đồng).

b) Khi tính lãi hằng quý thì số kì tính lãi trong một năm là $n = 4$.

Do đó số tiền nhận được là

$$A = P\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4t} = 100\left(1+\frac{9\%}{4}\right)^{12} \approx 130,605$$

(triệu đồng).

Số tiền lãi là $130,605 - 100 = 30,605$ (triệu đồng).

c) Khi tính lãi hằng tháng thì số kì tính lãi trong một năm là $n = 12$.

Do đó số tiền nhận được là

$$A = P\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t} = 100\left(1+\frac{9\%}{12}\right)^{36} \approx 130,865$$

(triệu đồng).

Số tiền lãi là $130,865 - 100 = 30,865$ (triệu đồng).

d) Khi tính lãi hằng ngày thì số kì tính lãi trong một năm là $n = 365$.

Do đó số tiền nhận được là

$$A = P\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365t} = 100\left(1+\frac{9\%}{365}\right)^{1095} \approx 130,992$$

(triệu đồng).

Số tiền lãi là $130,992 - 100 = 30,992$ (triệu đồng).

Ví dụ 7. Cho vay với vốn gốc 500 triệu đồng, lãi suất 6%/năm, kì trả lãi 3 tháng, kì hạn vay 2 năm. Tính tiền lãi sau 2 năm theo phương thức tính:

a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

Lời giải. Ta có $P = 500$ (triệu đồng), $r = 6\%$, $t = 2$ (năm).

a) Tiền lãi theo phương thức tính lãi đơn là $L = Prt = 500 \cdot 6\% \cdot 2 = 60$ (triệu đồng).

b) Số tiền nhận được là

$$A = P\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4t} = 500\left(1+\frac{6\%}{4}\right)^{8} \approx 563,246$$

(triệu đồng).

Do đó tiền lãi theo phương thức tính lãi kép là $563,246 - 500 = 63,246$ (triệu đồng).

Ví dụ 8. Bà Lan gửi 600 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,3%/năm, kì hạn 3 tháng. Nếu rút trước kì hạn thì ngân hàng sẽ tính theo lãi suất không kì hạn là 0,2%/năm cho số ngày gửi thêm. Tính tổng số tiền cả vốn và lãi bà Lan nhận được sau 370 ngày gửi tiền vào ngân hàng theo phương thức tính:

a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

Lời giải. Ta có $P = 600$ (triệu đồng), $r = 6,3\%$, $r' = 0,2\%$, $n = 4$, $t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Vì một năm tài chính được lấy là 365 ngày, mà $370 = 4 \cdot 90 + 10$.

a) Tổng số tiền cả vốn và lãi bà Lan nhận được tính theo phương thức lãi đơn là

$$A = P + L = P + Prt \cdot 4 + Pr' \cdot \frac{10}{365}$$

$$= 600 + 600 \cdot 6,3\% \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 + 600 \cdot 0,2\% \cdot \frac{10}{365}$$

$$\approx 637,83 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Tổng số tiền cả vốn và lãi bà Lan nhận được tính theo phương thức lãi kép là

$$A = 600\left(1+\frac{6,3\%}{4}\right)^{4}\left(1+\frac{0,2\%}{365}\right)^{10} \approx 638,74$$

(triệu đồng).

Ví dụ 9. Ông Hòa gửi 50 triệu đồng tiền tiết kiệm kì hạn 6 tháng ở một ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất là 5,8%/năm. Tính số tiền ông Hòa nhận được sau hai kì hạn liên tiếp.

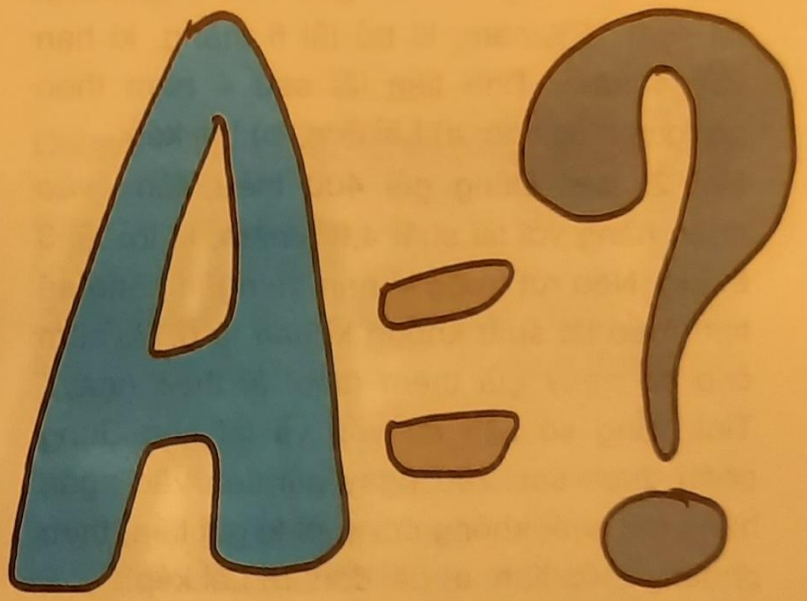
Lời giải. Ta có $P = 50$ (triệu đồng), $r = 5,8\%$, $t = \frac{6 \cdot 2}{12} = 1$.

Khi tính lãi 6 tháng thì số kì tính lãi trong một năm là $n = 2$.

Do đó số tiền ông Hòa nhận được sau hai kì hạn liên tiếp là

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 50\left(1+\frac{5,8\%}{2}\right)^{2} \approx 52,942$$

(triệu đồng).



Ví dụ 10. Bác Xuân vay 20 triệu đồng của một ngân hàng để làm kinh tế. Trong một năm đầu bác chưa trả được nên số tiền lãi trong năm đầu được chuyển thành vốn để tính lãi năm sau. Sau 2 năm bác An phải trả là 23,54 triệu đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm đầu? Biết rằng trong năm sau ngân hàng đã giảm 30% lãi suất.

Lời giải. Ta có $P = 20$ (triệu đồng)

$t = 1,\ t' = 1.$

Gọi r là lãi suất năm đầu, với $r > 0$. Lãi suất năm thứ hai là $r - 30\%r = 0,7r.$

Số tiền bác Xuân phải trả sau năm thứ nhất là $A_1 = P(1+r) = 20(1+r)$ (triệu đồng).

Số tiền bác Xuân phải trả sau năm thứ hai là:

$A_2 = A_1(1+0,7r) = 20(1+r)(1+0,7r)$

$= 14r^2 + 34r + 20.$

Theo bài ra, ta có phương trình

$14r^2 + 34r + 20 = 23,54$ hay

$14r^2 + 34r - 3,54 = 0.$

Giải phương trình, ta tìm được $r_1 = 0,1$ (thỏa mãn), $r_2 = -\dfrac{177}{70}$ (loại).

Vậy lãi suất cho vay của ngân hàng trong năm đầu là 10%.

Bài tập tương tự

Bài 1. Cho vay với vốn gốc 250 triệu đồng, lãi suất 12%/năm, kì trả lãi 6 tháng, kì hạn vay 4 năm. Tính tiền lãi sau 4 năm theo phương thức tính: a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

Bài 2. Bác Dũng gửi 400 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 4,8%/năm, kì trả lãi 3 tháng. Nếu rút trước kì hạn thì ngân hàng sẽ tính theo lãi suất không kì hạn là 0,1%/năm cho số ngày gửi thêm (tính lãi theo ngày). Tính tổng số tiền cả vốn và lãi bác Dũng nhận được sau 290 ngày gửi tiền vào ngân hàng (lãi suất không đổi suốt kì gửi tiền) theo phương thức tính: a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

Bài 3. Ông An gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép với kì hạn 1 năm, lãi suất 8%/năm. Sau 5 năm, ông An rút toàn bộ gốc và lãi. Tính số tiền ông An nhận được.

Bài 4. Tìm lãi suất đơn (tính theo năm), biết số tiền vốn ban đầu là 900 triệu đồng và số tiền lãi thu được trong thời hạn 6 tháng là 54 triệu đồng.

Bài 5. Ngân hàng A đấu giá lô trái phiếu Chính phủ có mệnh giá 100 tỉ đồng, thời hạn 9 tháng với mức giá sẵn lòng trả là 96 tỉ đồng. Giả sử cuộc đấu giá thành công như mong muốn thì ngân hàng A sẽ được hưởng lãi suất bao nhiêu, nếu tính theo hình thức lãi suất đơn.

Bài 6. Tính số tiền bác An thu được sau 5 năm nếu số tiền 200 triệu đồng được gửi ngân hàng với lãi suất 9% một năm theo thể thức:

a) Tính lãi kép hằng năm;

b) Tính lãi kép hằng quý.

Tính số tiền lãi tương ứng trong mỗi trường hợp.

Bài 7. Cô Hoa gửi 100 triệu đồng tiền tiết kiệm kì hạn 6 tháng ở một ngân hàng (theo thể thức lãi kép) với lãi suất là 5,8%/năm. Hỏi cô Hoa phải gửi ít nhất bao nhiêu kì hạn liên tiếp để nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi khi thanh toán ít nhất là 120 triệu đồng, biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong 4 năm liền?

Bài 8. Ông Sáu gửi một số tiền vào ngân hàng theo mức lãi suất tiết kiệm với kì hạn một năm là 6%. Tuy nhiên sau thời hạn một năm ông Sáu không đến nhận tiền lãi mà để thêm một năm nữa mới lĩnh. Khi đó số tiền lãi có được sau năm đầu tiên sẽ được ngân hàng cộng dồn vào số tiền gửi ban đầu để thành số tiền gửi cho năm kế tiếp với mức lãi suất cũ. Sau 2 năm ông Sáu nhận được số tiền là 112 360 000 đồng kể cả gốc lẫn lãi. Hỏi ban đầu ông Sáu đã gửi bao nhiêu tiền?





BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KÌ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ NĂM 2025

NGUYỄN DUY KHƯƠNG *(CLB Toán Lim - Hà Nội)*

Kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 66 được tổ chức từ ngày 10-20/7/2025 tại thành phố Sunshine Coast, bang Queensland, Úc, với sự tham gia của hơn 639 thí sinh đến từ 113 đoàn đại diện cho các quốc gia và vùng lãnh thổ. Đây là lần thứ hai Úc đăng cai tổ chức IMO, sau lần đầu tiên vào năm 1988. Đoàn Việt Nam với 6 thành viên tham dự đã đạt kết quả toàn đoàn đứng thứ 9 về tổng điểm. Kết quả chi tiết bao gồm: 2 huy chương vàng, 3 huy chương bạc, 1 huy chương đồng. Đặc biệt, năm nay bài toán Hình học ở vị trí thứ hai là của Việt Nam đề xuất. Đây là lần thứ tư Việt Nam có bài toán được chọn vào đề thi chính thức của IMO, sau các năm 1977, 1982 và 1987.

Bài toán (P2 IMO 2025). Cho các đường tròn Ω và Γ có tâm tương ứng là M và N sao cho bán kính của Ω nhỏ hơn bán kính của Γ. Giả sử các đường tròn Ω và Γ cắt nhau tại các điểm phân biệt A và B. Đường thẳng MN cắt Ω tại điểm C và cắt Γ tại điểm D, sao cho thứ tự các điểm trên đường thẳng đó lần lượt là C, M, N, D. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. Đường thẳng AP cắt lại Ω tại điểm E khác A. Đường thẳng AP cắt lại Γ tại điểm F khác A. Gọi H là trực tâm của tam giác PMN. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua H và song song với AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

Lời giải.

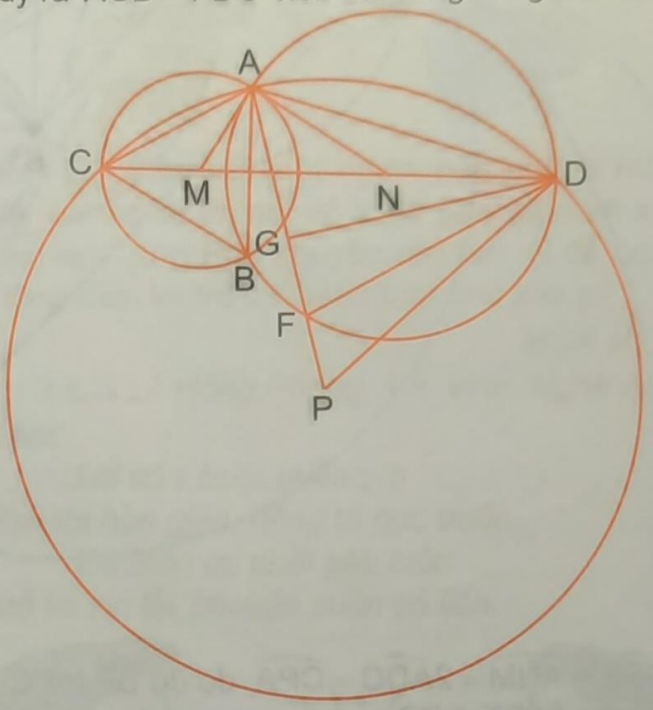
Trước hết ta chứng minh DF song song với AC.

Tam giác ACD nội tiếp đường tròn tâm P có AB vuông góc với CD nên $\widehat{BAC} = \widehat{PAD}$.

Kẻ đường cao DG của tam giác ADF ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ - \widehat{BAC} = 90^\circ - \widehat{PAD} = \widehat{ADG}$.

Lại có $\widehat{ADC} = \widehat{FDG}$ nên $\widehat{ADG} = \widehat{FDC}$.

Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{FDC}$ nên DF song song với AC.



Chứng minh tương tự ta cũng có CE song song với AD.

Quay trở lại bài toán.

Gọi AP cắt MN tại S.

Ta có $\widehat{MSB} = 90^\circ - \widehat{ABS} = 90^\circ - \widehat{BAS} = \widehat{MEB}$, suy ra các điểm M, S, E, B cùng thuộc một đường tròn.

Gọi ME cắt NF tại K.

Từ DF // AC và CE // AD ta có NF // AM và ME // AN. Do đó $\widehat{EKF} = 180^\circ - \widehat{MAN}$.

Gọi CD cắt BE, BF theo thứ tự tại T, J.

Để ý $\widehat{SAT} = \widehat{SBE} = \widehat{SME}$ nên các điểm A, M, E, T cùng thuộc một đường tròn.

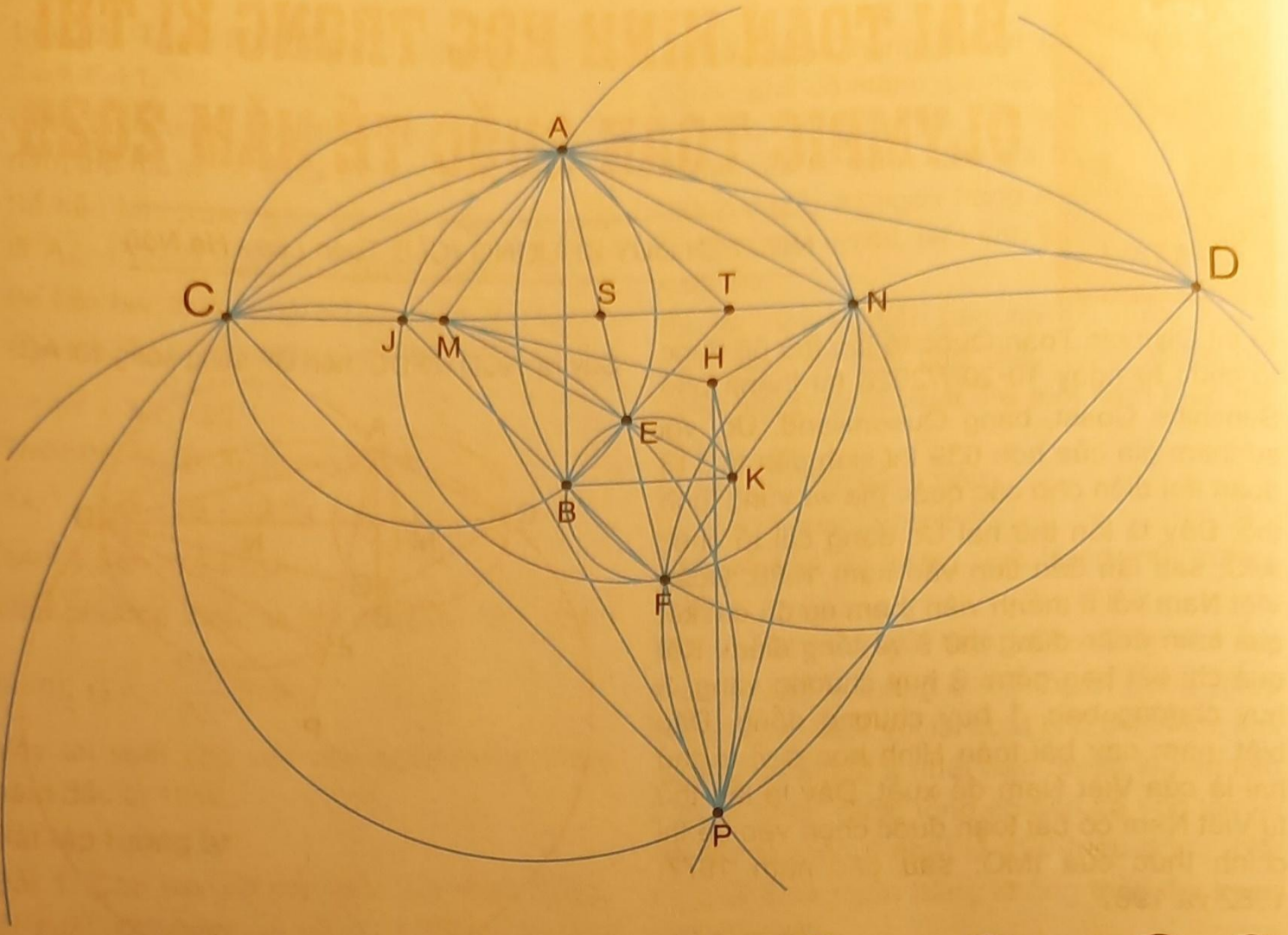
Tương tự các điểm A, N, F, J cùng thuộc một đường tròn.

Do đó $\widehat{EBF} = 180^\circ - \widehat{BEF} - \widehat{BFE}$

$= 180^\circ - \widehat{AMN} - \widehat{ANM} = \widehat{MAN}$.

Vậy ta có $\widehat{EKF} + \widehat{EBF} = 180^\circ$ suy ra E, B, F, K cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó ta thu được



$\widehat{BFE} = \widehat{ANM} = 2\widehat{ADC} = \widehat{CPA}$ do đó BF // PC.
Tương tự BE // PD.

Khi đó $\widehat{EPC} = \widehat{BFE} = \widehat{ANM} = \widehat{EMN}$, suy ra C, M, E, P cùng thuộc một đường tròn. Tương tự D, N, F, P cùng thuộc một đường tròn.

Vì thế $\widehat{EPM} = \widehat{HMN} = \widehat{HPN}$, suy ra EP đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN.

Ta có $\widehat{MAE} = \widehat{BTJ} = \widehat{BJT} = \widehat{FJN} = \widehat{FAN}$, suy ra AP là phân giác của góc MAN.

Ta quy về bài toán mới: Cho tam giác PMN nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm. Dựng điểm A thuộc PO sao cho AP là phân giác của góc MAN. Dựng các điểm E và F thuộc PO sao cho ME // AN và NF // AM. ME cắt NF tại K. Chứng minh HK song song với PO.

Chứng minh. Ta cần chứng minh HK là phân giác của góc MKN.

Từ AO là phân giác của góc MAN và OM = ON suy ra tứ giác ONAM nội tiếp.

Ta có

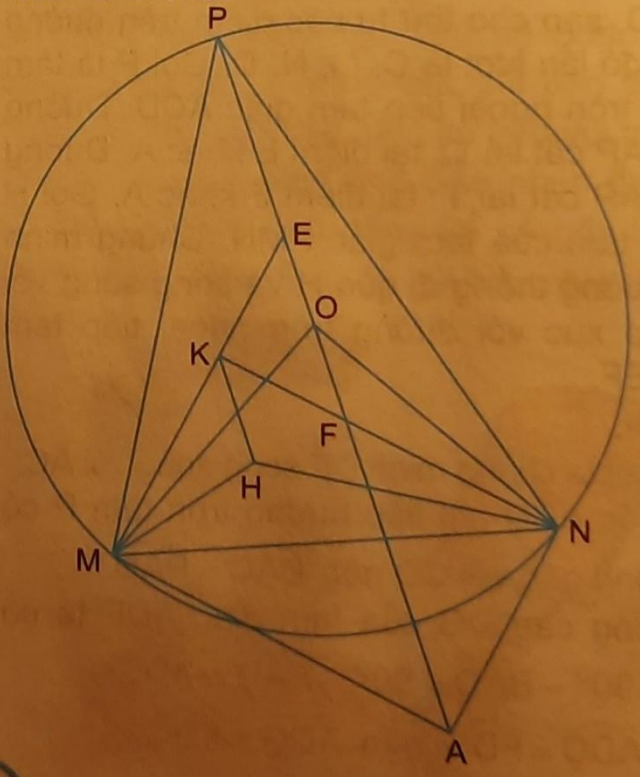
$\widehat{HME} = \widehat{EMN} - \widehat{HMN} = \widehat{ANM} - (90^o - \widehat{PNM})$

$= 180^o - 2\widehat{PNM} - 90^o + \widehat{PNM} = 90^o - \widehat{PNM} = \widehat{HMN}$.

Tương tự thì $\widehat{HNF} = \widehat{HNM}$.

Từ đó KH là phân giác góc MKN.

Để ý MK // AN, NK // AM và KH là phân giác của góc MKN, AO là phân giác của góc MAN nên KH // AO.



Thì thầm... Thì thầm thôi...

Tuổi hồng... xin cứ tuổi hồng
Chuyện gì quá sớm... xin không trả lời



Hỏi: Năm học mới 2025 - 2026 đã đến rồi. Chúng em rất muốn anh Phó cho biết những điểm nhấn, ấn tượng của năm học này ạ.

TRẦN K. L
(THCS Lê Quý Đôn, Q.1, TP. Hồ Chí Minh)

Đáp:

Giáo khoa dạy học trọn vòng
Mọi điều tốt đẹp như mong muốn rồi.
Học sinh ở khắp nơi nơi
Miễn trừ học phí, tuyệt vời đó em.

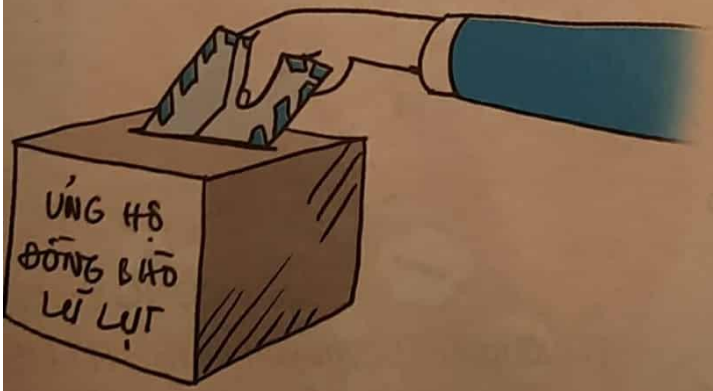


Hỏi: Em có khoản tiền tiết kiệm tích góp qua nhiều năm. Hằng năm, em thường dùng làm thiện nguyện, nhất là vào dịp bão lũ, thiên tai. Có nhiều bạn đồng tình, khuyến khích, nhưng cũng có những bạn lại bảo em hay "làm màu". Nghe các bạn ấy nói, em rất buồn. Em muốn anh Phó cho em lời khuyên về điều này ạ.

NGÔ T. L
(THCS Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương, Hải Dương)

Đáp:

Món tiền tiết kiệm lâu nay
Đem làm thiện nguyện đẹp thay tấm lòng.
Dù ai có nói lộn sòng
Tấm lòng trong sáng càng trong sáng mà.





Hỏi: Em thân với một người bạn nhưng mới đây em có lỡ lời nói vô ý để bạn giận và xa lánh em. Anh Phó khuyên em làm gì để bạn thông cảm và trở lại thân nhau như xưa ạ?

HỨA H. L
(THCS Lê Hồng Phong, TP. Vinh, Nghệ An)

Đáp:

Lời vô ý buột miệng ra
Bạn thì hờn giận, riêng ta gợn buồn.
Đã thân thì phải gặp luôn
Mở lời xin lỗi, chuyện suôn sẻ liền.



Hỏi: Dịp đầu năm học này, lớp em có một vài bạn trai dùng điện thoại thông minh chụp ảnh các bạn gái, ghép hình đùa cợt. Em thấy ấm ức và đề nghị không được làm như thế, nhưng các bạn ấy không nghe. Chúng em phải làm gì để các bạn ấy không đùa giỡn như vậy nữa hở anh Phó?

VŨ G. B
(THCS Trần Phú, TP. Pleiku, Gia Lai)

Đáp:

Chụp hình, ghép ảnh của ai
Đưa ra đùa cợt là sai trái rồi.
Khuyên bạn, bạn chẳng nghe lời
Nhờ thầy cô "chỉnh", ắt thời dừng ngay.

ANH PHÓ GÕ



CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(269+270). Hai số 8^{2025} và 125^{2025} viết liền nhau trong hệ thập phân thì được số mới có bao nhiêu chữ số?

CAO NGỌC TOẢN

(Trường THPT Tam Giang, TP. Huế)

Bài 2(269+270). Hai bạn A và B chơi một trò chơi như sau: A chơi trước, lần lượt hai bạn điền ngẫu nhiên một số từ 1 đến 100^2 vào bảng ô vuông cỡ 100×100. Điểm của A là tổng lớn nhất trong 100 hàng, điểm của B là tổng lớn nhất trong 100 cột, ai có điểm lớn hơn thì thắng. Hỏi A hay B có chiến lược thắng hay họ sẽ hòa?

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

(P. An Nhơn, Gia Lai)

Bài 3(269+270). Tìm tất cả các số nguyên dương x, y và số tố lẻ p sao cho $p^x = y(y+2)$.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(Trường THCS Phường Bình Định, Gia Lai)

Bài 4(269+270). Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 40^o$, $\widehat{ACB} = 30^o$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $MA = NC = BC$. Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác vuông.

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(Trường THCS Hoàng Xuân Hãn, Hà Tĩnh)

CÁC LỚP THCS

Bài 5(269+270). Xét bảng ô vuông cỡ 7×7. Hỏi phải tô màu ít nhất bao nhiêu ô vuông đơn vị của bảng sao cho mọi hình vuông cỡ 2×2 đều chứa ít nhất một ô được tô màu?

NGUYỄN TIẾN LÂM

(CLB Toán A1, Hà Nội)

Bài 6(269+270). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c > \sqrt[3]{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[3]{ab^2-2}}{(b+2c)^2}+\frac{\sqrt[3]{bc^2-2}}{(c+2a)^2}+\frac{\sqrt[3]{ca^2-2}}{(a+2b)^2} \le \frac{a+b+c}{27}.$$

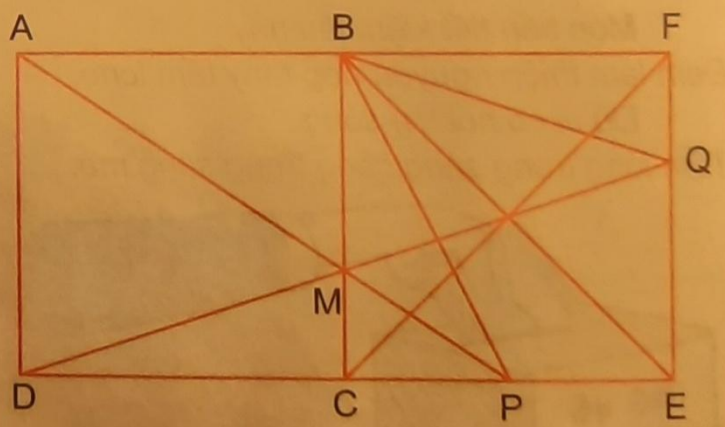
HOÀNG ĐAN *(CLB Cmath Hà Nội)*

Bài 7(269+270). Với x, y là các số thực thỏa mãn $1 \le x, y \le 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x+y)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$.

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

(Trường THCS Đa Tốn, Hà Nội)

Bài 8(269+270). Cho hai hình vuông ABCD và BCEF có chung cạnh BC. Gọi P nằm trên đoạn CE và Q nằm trên đoạn EF sao cho AP và DQ cắt nhau trên BC. Chứng minh rằng $\widehat{PBQ} = 45^o$.



LƯU CÔNG ĐÔNG

(Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

HONG HA®

THƯƠNG HIỆU VPP SỐ 1 VIỆT NAM

LOVE CHÚNG MÌNH RẤT RẤT VUI

HÓA ĐƠN TỪ 150.000Đ SẢN PHẨM HỒNG HÀ
NHẬN NGAY TÚI MÙ SIÊU BẤT NGỜ



cùng KHÁM PHÁ
chúng mình tại

HONG HA®

TRỤ SỞ CHÍNH
Cơ sở I: 25 Lý Thường Kiệt, Cửa Nam, HN
Cơ sở II: 672 Ngô Gia Tự, Việt Hưng, HN
Tel: 024.36523330 * Fax: 024.36524157
Email: congty@vpphongha.com.vn
Website: www.vpphonghaonline.com.vn

CHI NHÁNH ĐÀ NẴNG
Số 23-25 Yên Thế, An Khê,
Thành phố Đà Nẵng.
Điện thoại: 0236 3649 046
Fax: 0236 3649 046

CHI NHÁNH TP.HCM
Số 618 Trần Đại Nghĩa, Tân Tạo,
Thành phố Hồ Chí Minh.
Điện thoại: 028 3756 2158
Fax: 028.3756 2157

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CP ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI

BẠN CÓ ĐANG GẶP KHÓ KHĂN VÌ ÔN TẬP THIẾU ĐỊNH HƯỚNG VÀ KHÔNG CÓ PHẢN HỒI KỊP THỜI?





ÔN LUYỆN THÔNG MINH

Chìa khoá giúp bạn tự học chủ động

Là ứng dụng học tập trực tuyến dành cho học sinh từ lớp 1 đến lớp 12; hỗ trợ học sinh tự ôn luyện, củng cố kiến thức, đánh giá kết quả theo lộ trình cá nhân hoá, nội dung bám sát Chương trình GDPT 2018; đồng thời từng bước hình thành khả năng tự học cho học sinh.

1 Kho học liệu số đồ sộ – Chất lượng chuẩn mực

Khai thác kho học liệu đồ sộ, bao quát từ cơ bản đến nâng cao, được biên soạn bởi đội ngũ tác giả, chuyên gia giàu kinh nghiệm, đảm bảo chất lượng theo quy trình làm sách của NXBGDVN và được thẩm định bởi Viện KHGDVN.

2 Tích hợp LMS – học như ở trường

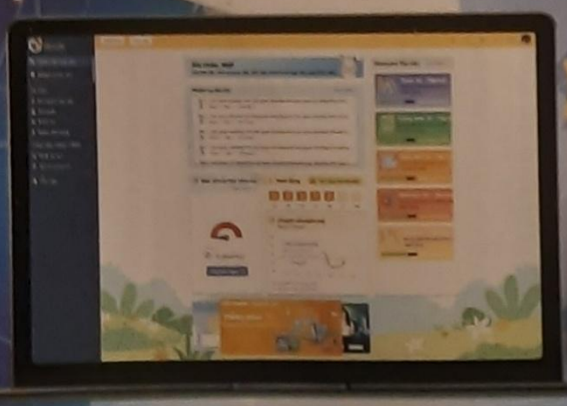
Tham gia lớp học trực tuyến, làm bài tập và kiểm tra theo nhiệm vụ giáo viên giao.

3 Cá nhân hoá lộ trình ôn luyện

Công nghệ AI phân tích kết quả, gợi ý kiến thức cần ôn tập, giúp học đúng trọng tâm, đặt mục tiêu và duy trì thói quen học tập.

4 Động lực học tập bền vững

Khuyến khích tinh thần học tập tích cực với bảng xếp hạng, điểm thưởng, đổi quà.



5 Báo cáo thông minh & nhắc nhở học tập

Theo dõi tiến trình học, nhận thông báo tháo gỡ vướng mắc và nhắc nhở học tập mỗi ngày cùng trợ lí ảo.

6 Đa nền tảng – học mọi lúc, mọi nơi

Truy cập dễ dàng, đồng bộ dữ liệu học tập trên mọi thiết bị, giúp học sinh học tập liên tục, không gián đoạn.

QUÉT MÃ ĐỂ TRẢI NGHIỆM

Google Play
App Store
Windows

KẾT NỐI VỚI CHÚNG TÔI

hoclieu.vn
Học liệu
1900 636 011
hotro@hoclieu.vn
Zalo OA: Học liệu

Giá: 36 000 đồng