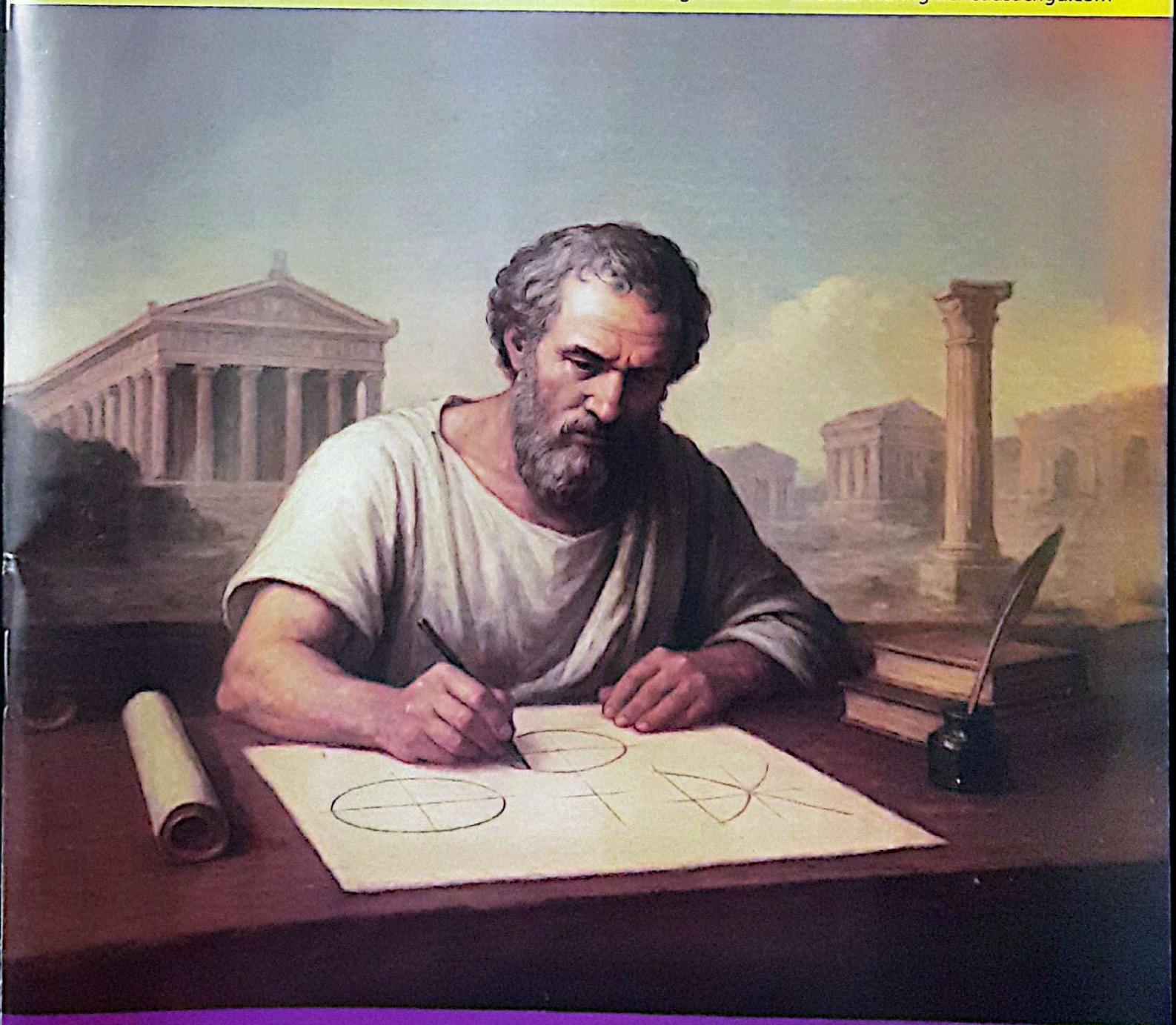
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 581
Tháng 11 - 2025
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học Hy Lạp cổ đại **Apollonius**

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM CHIA SẺ KỊP THỜI VỚI NGÀNH GIÁO DỤC TỈNH TUYÊN QUANG SAU MƯA LŨ

Ngày 17/10, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đồng hành cùng đoàn công tác của Bộ GD&ĐT do Thứ trưởng Lê Tấn Dũng dẫn đầu đã đến thăm và làm việc tại tỉnh Tuyên Quang về việc khắc phục hậu quả hai cơn bão số 10, 11.

Sau hai cơn bão số 10 và 11 vừa qua, ngành giáo dục tỉnh Tuyên Quang đã có 54 trường học bị nước lũ ngập sâu, sạt lở,... gây thiệt hại nghiêm trọng, ước tính trên 28 tỉ đồng.

Làm việc tại Sở GD&ĐT tỉnh Tuyên Quang, Thứ trưởng Lê Tấn Dũng đã chia sẻ với những khó khăn, mất mát mà thầy và trò các trường học ở Tuyên Quang đã trải qua trong đợt mưa lũ vừa qua. Thứ trưởng đánh giá cao sự sát sao, nhanh chóng vào cuộc của các cơ sở giáo dục trên địa bàn tỉnh Tuyên Quang để hạn chế tối đa thiệt hại. Thứ trưởng cũng đề nghị Sở có các giải pháp trước mắt và lâu dài để ổn định việc học, đảm bảo an toàn cho học sinh và giáo viên trên địa bàn, đảm bảo các em không thiếu sách giáo khoa khi trở lại trường học.

Nhằm hỗ trợ ngành giáo dục Tuyên Quang nhanh chóng khắc phục hậu quả thiên tai, Bộ GD&ĐT và Công đoàn Giáo dục Việt Nam đã trao tặng cho ngành Giáo dục đào tạo Tuyên Quang số tiền trị giá 300 triệu đồng.



Đoàn công tác Bộ GD&ĐT trao số tiền hỗ trợ cho Sở GD&ĐT tỉnh Tuyên Quang

Cùng chia sẻ khó khăn với các em học sinh của tỉnh, thông qua Sở GD&ĐT Tuyên Quang, NXBGDVN đã hỗ trợ các em số sách giáo khoa trị giá khoảng 100 triệu đồng.

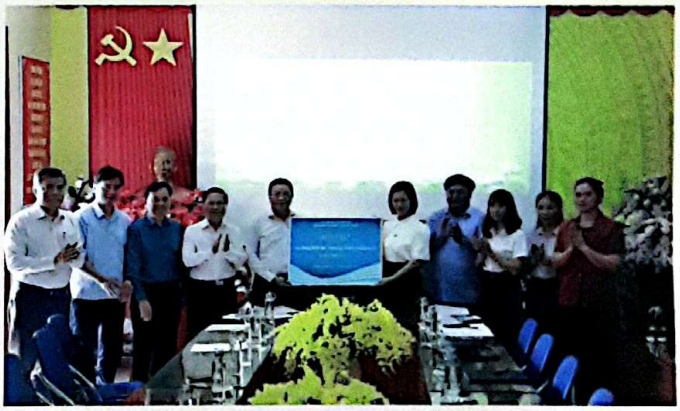
Ông Ngô Văn Hoan – Phó Tổng Giám đốc NXBGDVN bày tỏ: *"Sau mỗi đợt thiên tai, mưa lũ, việc giúp các em học sinh ở các vùng bị thiệt hại có lại sách vở để tiếp tục học là ưu tiên hàng đầu của NXBGDVN. Sách không chỉ là công cụ học tập mà còn là nguồn động viên tinh thần, tiếp sức cho thầy trò vượt qua khó khăn".*



Ông Ngô Văn Hoan – Phó Tổng Giám đốc NXBGDVN trao sách giáo khoa cho đại diện Sở GD&ĐT Tuyên Quang

Trước đó, đoàn công tác Bộ GD&ĐT đã đến thăm và động viên Trường Phổ thông Dân tộc Nội trú THCS&THPT Chiêm Hóa. Đây là ngôi trường có gần 490 học sinh nội trú. Trong đợt thiên tai vừa qua, khu kí túc xá của trường bị hư hỏng nặng, với 26 phòng hỏng toàn bộ hệ thống điện, nước, công trình vệ sinh và cửa ra vào. Khu vực nhà ăn, bếp, nhà đa năng và khu nhà công vụ cũng bị ảnh hưởng nghiêm trọng.

Nhằm giúp thầy và trò nhà trường nhanh chóng ổn định việc sinh hoạt và học tập, đoàn công tác đã tặng nhà trường 1 chiếc tivi và 1 loa kéo. Riêng NXBGDVN ủng hộ cho nhà trường số tiền mặt là 20 triệu đồng.



Đại diện NXBGDVN trao số tiền trị giá 20 triệu đồng cho Trường Phổ thông Dân tộc Nội trú THCS&THPT Chiêm

Hiện tại, NXBGDVN đang khẩn trương tiếp tục rà soát thiệt hại ở nhiều địa phương khác bị ảnh hưởng bởi mưa lũ vừa qua để có kế hoạch hỗ trợ kịp thời, lan tỏa tinh thần "tương thân tương ái" – không để học sinh nào bị bỏ lại phía sau.

BAN TRUYỀN THÔNG
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Được quét bằng CamScanner



KHAI THÁC BA TÍNH CHẤT QUEN THUỘC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN Ở BẬC THCS

BỦI MINH TRUNG
(GV THCS Nguyễn Văn Công, Vĩnh Long)

Phương trình nghiệm nguyên là bài toán số học hay và thường xuyên xuất hiện trong các đề thi HSG Toán THCS và đề thi vào chuyên Toán các tỉnh. Sau đây tác giả xin giới thiệu ba tính chất quen thuộc dùng để giải các phương trình nghiệm nguyên xuất hiện trong các đề thi HSG cấp THCS một số tỉnh trước khi sáp nhập.

• *Sử dụng tính chất bất đẳng thức:* dùng để đánh giá miền nghiệm của các biến, nếu số giá trị mà biến số có thể nhận không nhiều thì có thể dùng phương pháp thử trực tiếp để kiểm tra kết quả.

• *Sử dụng tính chất phương trình tích:* biến đổi phương trình nghiệm nguyên về dạng $f(x,y,z)\cdot g(x,y,z)\cdot h(x,y,z)=a$ với f, g, h là các biểu thức chứa biến và a là hằng số.

• *Sử dụng tính chất số học:* khi giải phương trình nghiệm nguyên cần vận dụng linh hoạt các tính chất số học như: chia hết, đồng dư, số chính phương, số nguyên tố,…

Thí dụ 1 (Đề HSG Toán tỉnh Bến Tre, năm học 2024 – 2025). *Tìm các số nguyên dương x,y,z thoả mãn:* $x^3-(x+y+z)^2=(y+z)^3+34$.

Lời giải. Đặt $t=y+z$ (với $t\in\mathbb{Z}, t\ge 2$).

PT có thể viết lại thành: $x^3-t^3=34+(x+t)^2$

$\Leftrightarrow (x-t)\left(x^2+xt+t^2\right)=34+\left(x^2+2xt+t^2\right)$ (*)

$\Leftrightarrow \left(x^2+xt+t^2\right)(x-t-1)=34+xt$ (1).

Vì $x^2+xt+t^2>0; 34+xt>0$ nên $x-t-1>0$ hay $x-t\ge 2$.

Từ (*) suy ra: $2(x^2+xt+t^2)\le 34+(x^2+2xt+t^2)$ hay $x^2+t^2\le 34$.

Khi đó $x^2\le 34$ mà $x-t\ge 2$ nên $x\ge 2+t\ge 4$ suy ra $x\in\{4;5\}$.

+ Với $x=4$ thì $t=2$ (vì $t\le x-2=2$), thay vào (1), không thoả mãn PT.

+ Với $x=5$ thì $t=3$ (vì $t\le x-2=3$ và $x-t-1>0$), thay vào (1), thoả mãn PT.

Khi $t=3$ thì $y+z=3$ suy ra:

$$(y;z)\in\{(1;2);(2;1)\}.$$

Vậy $(x;y;z)\in\{(5;1;2);(5;2;1)\}$..

Thí dụ 2 (Đề HSG Toán tỉnh Bình Dương, năm học 2024 – 2025). *Tìm nghiệm nguyên của phương trình:* $x^2+2y^2+2xy+3y-4=0$.

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại thành:

$$(x+y)^2+(y+4)(y-1)=0.$$

Vì $(x+y)^2\ge 0$ nên dấu "=" xảy ra khi

$$(y+4)(y-1)\le 0.$$

Suy ra $-4\le y\le 1$ hay $y\in\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$.

Thay các giá trị của y vào phương trình ta được:

y	-4	-3	-2	-1	0	1
x	4	5 và 1	Loại	Loại	2 và -2	-1

Vậy

$(x;y)\in\{(4;-4);(5;-3);(1;-3);(2;0);(-2;0);(-1;1)\}$.

Thí dụ 3 (Đề HSG Toán tỉnh Bình Phước, năm học 2024 – 2025). *Giải phương trình nghiệm nguyên:* $4x^2+8x-2=6xy+9y$.

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại thành:

$$\left(4x^2+12x+9\right)-(4x+6)-5=3y(2x+3)$$

Được quét bằng CamScanner

$\Leftrightarrow (2x-3y+1)(2x+3)=5.$

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}2x-3y+1=1\\2x+3=5\end{cases}$,

suy ra $(x;y)=\left(1;\frac{2}{3}\right)$ (loại).

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}2x-3y+1=5\\2x+3=1\end{cases}$,

suy ra $(x;y)=(-1;-2)$.

+ Trường hợp 3: $\begin{cases}2x-3y+1=-5\\2x+3=-1\end{cases}$,

suy ra $(x;y)=\left(-2;\frac{2}{3}\right)$ (loại).

+ Trường hợp 4: $\begin{cases}2x-3y+1=-1\\2x+3=-5\end{cases}$,

suy ra $(x;y)=(-4;-2)$.

Vậy $(x;y)\in\{(-1;-2);(-4;-2)\}$.

Thí dụ 4 (Đề HSG Toán tỉnh Gia Lai, năm học 2024 – 2025). *Giải phương trình nghiệm nguyên:* $3y^2-3^{x+1}=513$.

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại thành:

$$y^2=171+3^x=9\left(3^{x-2}+19\right) \text{ với } x\geq 2.$$

Ta có $y^2,9$ là số chính phương nên $3^{x-2}+19$ phải là số chính phương.

+ Nếu $x-2=2k+1$ là số lẻ thì

$$3^{x-2}+19=\left(3^{2k+1}+1\right)+18$$

chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

+ Nếu $x-2=2k$ là số chẵn thì

$$3^{x-2}+19=3^{2k}+19=t^2.$$

Suy ra $\left(t-3^k\right)\left(t+3^k\right)=19.$

Mà 19 là số nguyên tố, $t-3^k<t+3^k$ nên $\begin{cases}t-3^k=1\\t+3^k=19\end{cases}$, suy ra $\begin{cases}t=10\\k=2\end{cases}$. Vậy $(x;y)=(6;30)$.

Thí dụ 5 (Đề HSG Toán tỉnh Hà Giang, năm học 2024 – 2025). *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $2x^3+x^2+4xy-4x+2y-6=0$.

Lời giải. PT đã cho có thể viết thành:

$$\left(2x^3+x^2\right)+(4xy+2y)-(4x+2)-4=0$$

$\Leftrightarrow (2x+1)\left(x^2+2y-2\right)=4$. Vì $2x+1$ là số lẻ nên ta chỉ xét một số trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}2x+1=1\\x^2+2y-2=4\end{cases}$,

suy ra $(x;y)=(0;3)$ (thoả mãn).

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}2x+1=-1\\x^2+2y-2=-4\end{cases}$,

suy ra $(x;y)=\left(-1;\frac{-3}{2}\right)$ (loại).

Vậy $(x;y)=(0;3)$.

Thí dụ 6 (Đề HSG Toán Thành phố Hà Nội, năm học 2024 – 2025). *Tìm các số nguyên dương* $x;y$ *thoả mãn* $4x^3=y^3(x+y+2)$.

Lời giải. PT đã cho có thể viết thành:

$$\left(\frac{2x}{y}\right)^3=2(x+y+2).$$

Đặt $\frac{2x}{y}=k\in\mathbb{N}^*$, suy ra:

$$2x=ky \text{ và } k^3=yk+2y+4.$$

Khi đó: $y(k+2)=k^3-4=k^3+8-12$

$$=(k+2)\left(k^2-2k+4\right)-12$$

$$\Rightarrow (k+2)\left(k^2-2k+4-y\right)=12.$$

Mà $k+2\geq 3$ nên $k+2\in\{3;4;6;12\}$.

Thay các giá trị k vào PT ta tìm được:

$$(x;y)\in\{(1;1);(20;10);(415;83)\}.$$

Thí dụ 7 (Đề HSG Toán tỉnh Hải Dương, năm học 2024 – 2025). *Tìm tất cả các cặp số nguyên* $(x;y)$ *thoả mãn* $x^4+y^4=20y+2x^2y^2+1$.

Lời giải. PT đã cho có thể viết thành:

$$20y+1=\left(x^2-y^2\right)^2\geq 0.$$

Suy ra $y\geq 0$ và $20y+1$ là số chính phương lẻ.

Được quét bằng CamScanner

Xét $x, y > 0$ (vì PT có số mũ chẵn của x nên x và $-x$ đều là nghiệm), khi đó ta có:

$$(2xy)^2 < \left(x^2+y^2\right)^2 = 4x^2y^2 + 20y + 1$$

$$< 4x^2y^2 + 20xy + 25 = (2xy+5)^2.$$

+ Xét $4x^2y^2 + 20y + 1 = (2xy+1)^2$, suy ra:

$$20y = 4xy \text{ hay } \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

Với $y = 0$ ta được $x = 1; x = -1$.

Với $x = 5$ ta được $y^4 - 50y^2 - 20y + 624 = 0$ suy ra $y = 4; y = 6$.

+ Xét $4x^2y^2 + 20y + 1 = (2xy+3)^2$, suy ra:

$$20y + 1 = 12xy + 9 \text{ hay } y(5-3x) = 2.$$

Suy ra $y \in \{1, 2\}$ (y thuộc tập hợp các ước của 2 và $y > 0$).

Thay $y = 1; y = 2$ vào PT đều không thoả mãn. Vậy:

$$(x; y) \in \{(1;0);(-1;0);(5;4);(5;6);(-5;4);(-5;6)\}.$$

Thí dụ 8 (Đề HSG Toán tỉnh Hưng Yên, năm học 2024 – 2025). *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn phương trình:*

$$x^2y^2 - 4xy^2 - 2x^3 + 5x^2 + 4y^2 + 4x - 32 = 0.$$

Lời giải. PT đã cho có thể viết thành:

$$y^2\left(x^2 - 4x + 4\right) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 32.$$

Xét $x = 2$, thì $2.2^3 - 5.2^2 - 4.2 + 32 = 0$ hay $20 = 0$ (vô lí) nên $x = 2$ không thoả mãn PT.

Xét $x \neq 2$, ta có:

$$y^2 = \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 32}{x^2 - 4x + 4} = 2x + 3 + \frac{20}{(x-2)^2} \quad (1).$$

Khi đó: $(x-2)^2$ là số chính phương và ước của 20.

+ Trường hợp 1: $(x-2)^2 = 1$, suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Với $x = 3$ thì $y^2 = 29$ (loại).

Với $x = 1$ thì $y = 5$ hoặc $y = -5$.

+ Trường hợp 2: $(x-2)^2 = 4$, suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Với $x = 0$ thì $y^2 = 8$ (loại).

Với $x = 4$ thì $y = 4$ hoặc $y = -4$.

Vậy $(x; y) \in \{(1;5);(1;-5);(4;4);(4;-4)\}$.

Thí dụ 9 (Đề HSG Toán tỉnh Lai Châu, năm học 2024 – 2025). *Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\left(x^2+y\right)\left(y^2+x\right) = (x-y)^3$.*

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại thành:

$$x^2y^2 + 2y^3 + xy + 3xy(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow y\left[2y^2 + \left(x^2 - 3x\right)y + \left(x + 3x^2\right)\right] = 0.$$

Xét $y = 0$ suy ra $x \in \mathbb{Z}$ tùy ý.

Xét $y \neq 0$ suy ra:

$$2y^2 + \left(x^2 - 3x\right)y + \left(x + 3x^2\right) = 0 \quad (1).$$

Xem đây là PT bậc hai ẩn y, khi đó ta có:

$$\Delta = (x+1)^2 x(x-8).$$

Để (1) có nghiệm thì Δ phải là số chính phương hay $x(x-8) = a^2, (k \in \mathbb{Z})$. Suy ra:

$$(x-4-a)(x-4+a) = 16$$

và $(x-4-a);(x-4+a)$ cùng tính chẵn, lẻ:

$x-4+a$	-8	-4	2	4
$x-4-a$	-2	-4	8	4
$x-4$	-5	-4	5	4
x	-1	0	9	8

Thay lần lượt x vào PT ta tìm được các giá trị y.

Vậy

$$(x; y) \in \{(9;-6);(9;-21);(8;-10);(-1;-1);(t;0)\}$$

với $t \in \mathbb{Z}$.

Thí dụ 10 (Đề HSG Toán tỉnh Long An, năm học 2024 – 2025). *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.*

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại thành:

Được quét bằng CamScanner

$$\left(2y^2x-2y^2\right)+\left(x-x^2\right)+\left(y-xy\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(2y^2-x-y\right)=-1.$$

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}x-1=1\\2y^2-x-y=-1\end{cases}$,

suy ra $(x;y)=(2;1)$.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}x-1=-1\\2y^2-x-y=1\end{cases}$,

suy ra $(x;y)=(0;1)$.

Vậy $(x;y)\in\{(2;1);(0;1)\}$.

Thí dụ 11 (Trích đề HSG Toán 9 tỉnh Phú Thọ, năm học 2024 – 2025). *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $x^3-y^3+y^2+y=2$.*

Lời giải. PT có thể viết lại thành:

$$x^3=y^3-\left(y^2+y-2\right).$$

+ Với $y^2+y-2>0$, khi đó:

$$x^3=y^3-\left(y^2+y-2\right)<y^3$$

$$\Rightarrow x^3-(y-1)^3=2y^2-4y+3=2(y-1)^2+1>0$$

$\Rightarrow x^3>(y-1)^3$. Do đó $(y-1)^3<x^3<y^3$ (vô lí).

+ Với $y^2+y-2\le 0$, khi đó $(y+2)(y-1)\le 0$ hay $-2\le y\le 1$.

y	-2	-1	0	1
x	-2	1	$\sqrt[3]{2}$ (loại)	1

Vậy $(x;y)\in\{(1;1);(1;-1);(-2;-2)\}$.

Thí dụ 12 (Trích đề HSG Toán 9 tỉnh Quảng Nam, năm học 2024 – 2025). *Tìm hai số nguyên $x;y$ khác 0, có ước chung lớn nhất bằng 1 và thoả mãn $x^2+x=y^3+y^2$.*

Lời giải. PT có thể viết lại thành:

$$x(x+1)=y^2(y+1)\ \ (1).$$

Ta có: $x(x+1)\vdots y^2$, suy ra: $x+1\vdots y^2$

(vì $(x;y)=1$ nên $\left(x;y^2\right)=1$).

Do đó: $x+1=ky^2\ (k\in\mathbb{Z})$.

Thay vào (1): $k^2y^2=k+y+1$ (2).

Với $k=0$, suy ra: $x=-1;y=-1$ (thoả mãn (1)).

Với $k\ne 0$, từ (2) suy ra:

$$1=\frac{1}{ky^2}+\frac{1}{k^2y}+\frac{1}{k^2y^2}.$$

+ Với $|ky|=1$, từ (2) ta được: $k+y=0$.

Suy ra: $\begin{cases}k=-1\\y=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}k=1\\y=-1\end{cases}$. Ta được:

$\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ (thoả mãn) hoặc $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ (loại).

+ Với $|ky|=2$, từ (2) ta được: $k+y=3$.

Suy ra: $\begin{cases}k=1\\y=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}k=2\\y=1\end{cases}$. Ta được:

$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ (thoả mãn) hoặc $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ (thoả mãn).

+ Với $|ky|\ge 3$, ta được:

$$1=\frac{1}{ky^2}+\frac{1}{k^2y}+\frac{1}{k^2y^2}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}<1 \text{ (vô lí).}$$

Vậy $(x;y)\in\{(-2;1);(-1;-1);(1;1);(3;2)\}$.

Thí dụ 13 (Trích đề HSG Toán 9 tỉnh Sóc Trăng, năm học 2024 – 2025).

Tìm tất cả các số nguyên $x;y$ thoả mãn:

$$x(x+2)(2x+1)(2x+5)=y^2.$$

Lời giải. Phương trình đã cho có thể viết lại thành:

$\left(2x^2+5x\right)\left(2x^2+5x+2\right)=y^2$.

Đặt $t=2x^2+5x$ ta được $t(t+2)=y^2$ hay $(t+1)^2-y^2=1$, suy ra $(t+1+y)(t+1-y)=1$.

$t+1+y$	$t+1-y$	y	t	x
1	1	0	0	$x=0;x=\frac{-5}{2}$
-1	-1	0	-2	$x=-2;x=\frac{-1}{2}$

Vậy $(x;y)\in\{(0;0);(-2;0)\}$.

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 14 (Trích đề HSG Toán 9 tỉnh Sơn La, năm học 2024 – 2025). *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn phương trình:*

$$8x^2 - 3xy - 5y = 25.$$

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại thành:

$$y(3x+5) = 8x^2 - 25.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $3x+5 \neq 0$, khi đó: $y = \dfrac{8x^2-25}{3x+5}$.

Suy ra: $9y = \dfrac{72x^2-225}{3x+5} = 24x - 40 - \dfrac{25}{3x+5}$.

Để x, y nguyên thì:

$$3x+5 \in U(25) = \{-25;-5;-1;1;5;25\}.$$

Suy ra $x \in \{-10; -2; 0\}$, thay vào PT ta tìm được y tương ứng.

Vậy $(x;y) \in \{(-10;-31);(-2;-7);(0;-5)\}$.

Thí dụ 15 (Trích đề HSG Toán 9 tỉnh Tây Ninh, năm học 2024 – 2025). *Tìm tất cả các cặp nghiệm nguyên thoả mãn phương trình sau:*

$$2x^2 - yx + 3x + y - 4 = 0.$$

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại thành:

$$(x-1)y = 2x^2 + 3x - 4.$$

Với $x = 1$ ta được $0 = -4$ (vô lí).

Với $x \neq 1$ ta được:

$$y = \frac{2x^2+3x-4}{x-1} = 2x + 5 + \frac{1}{x-1}.$$

Để PT có nghiệm nguyên thì $x-1 \in \{-1;1\}$, suy ra $x \in \{0;2\}$.

+ Khi $x = 0$ thì $y = 4$.

+ Khi $x = 2$ thì $y = 10$.

Vậy $(x;y) \in \{(0;4);(2;10)\}$.

Thí dụ 16 (Trích đề HSG Toán 9 tỉnh Thanh Hóa, năm học 2024 – 2025).

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$(2x-y-2)^2 = 7(x-2y-y^2-1).$$

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại thành:

$$2(2x-y-2)^2 = 7(2x-y-2-2y^2-3y)$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-y-2)^2 = 7(2x-y-2) - 7(2y^2+3y).$$

Đặt $t = 2x-y-2$ $(t \in \mathbb{Z})$, ta được:

$$2t^2 - 7t + 7(2y^2+3y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16t^2 - 56t + 49 + 7(16y^2+24y+9) = 112$$

$$\Leftrightarrow (4t-7)^2 + 7(4y+3)^2 = 112.$$

Vì $(4t-7)^2 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{Z}$ nên

$$7(4y+3)^2 < 112 \text{ suy ra } \frac{-7}{4} < y < \frac{1}{4}.$$

Khi đó $y \in \{-1;0\}$.

+ Với $y = -1$ thì $(4t-7)^2 = 105$ (loại).

+ Với $y = 0$ thì $(4t-7)^2 = 49$, suy ra $t = \dfrac{7}{2}$ (loại) hoặc $t = 0$ (nhận), khi đó $x = 1$.

Vậy $(x;y) = (1;0)$.

Thí dụ 17 (Trích đề HSG Toán 9 tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2024 – 2025).

Tìm các số nguyên dương x, y, z thoả mãn:

$$3x^2 - 18y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x = 27.$$

Lời giải. PT có thể viết lại thành:

$$3(x-3)^2 + 2z^2 + 3(yz)^2 - 18y^2 = 54.$$

Vì $54 \vdots 3$ nên $\begin{cases} 2z^2 \vdots 3 \\ 0 < 2z^2 < 54 \end{cases}$, suy ra:

$$z^2 = 9 \text{ hay } z = 3.$$

Khi đó, $3(x-3)^2 + 18 + 27y^2 - 18y^2 = 54$ suy ra:

$$(x-3)^2 + 3y^2 = 12.$$

Ta có: $0 < 3y^2 \leq 12$, suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} y = 1, x = 6 \\ y = 2, x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy $(x;y;z) \in \{(6;1;3);(3;2;3)\}$.

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HƯNG YÊN

Năm học 2025-2026

Câu I. *Cho biểu thức*

$$M=\left(\frac{1}{x-4}+\frac{3\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}\right)\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{4\sqrt{x}}-2\right).$$

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M.

2) Đặt $N=M.\left(9x-2\sqrt{x}+4\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức N.

Lời giải.

1) Điều kiện xác định: $x>0;\ x\neq 4$.

$$M=\left(\frac{1}{x-4}+\frac{3\sqrt{x}+10}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}\right)\left(\frac{x-4\sqrt{x}+4}{4\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}.\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{4\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

2) Ta có: $N=M.\left(9x-2\sqrt{x}+4\right)=\dfrac{9x-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$

$$=9\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-2.$$

Suy ra: $N\geq 2\sqrt{9\sqrt{x}.\dfrac{4}{\sqrt{x}}}-2=2.6-2=10$ (Bất đẳng thức Cauchy).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $9\sqrt{x}=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ hay $x=\dfrac{4}{9}$ (thoả mãn).

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức N bằng 10.

Câu II. 1) *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d):y=x+m$ và parabol $(P):y=2x^2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ thỏa mãn*

$$\left(2x_1^2-x_2-m\right)^2+\left(2x_2^2-x_1-m\right)^2=4.$$

2) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^3+x^2-xy^2=2\sqrt{\left(x-y^2\right)^3} & (1)\\ 56x^2+20\left(x^2-y^2\right)=\sqrt[3]{4x(8x+1)}-2 & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. 1) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$2x^2=x+m\Leftrightarrow 2x^2-x-m=0\ (*).$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta=1+8m>0$, suy ra $m>\dfrac{-1}{8}$; $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (*) nên:

$$2x_1^2-x_1-m=0\Rightarrow 2x_1^2-x_2-m=x_1-x_2;$$

$$2x_2^2-x_2-m=0\Rightarrow 2x_2^2-x_1-m=x_2-x_1.$$

Do đó: $\left(2x_1^2-x_2-m\right)^2+\left(2x_2^2-x_1-m\right)^2=4$

$$\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_2-x_1\right)^2=4$$

$$\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=2.$$

Áp dụng hệ thức Viète cho (*) ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{1}{2}\\ x_1.x_2=-\dfrac{m}{2}\end{cases}.$$

Do đó $\dfrac{1}{4}+2m=2$ suy ra $m=\dfrac{7}{8}$ (thoả mãn).

2) Điều kiện: $x\geq y^2\geq 0$.

Từ phương trình (1) ta có:

$$x^3+x\left(x-y^2\right)-2\sqrt{\left(x-y^2\right)^3}=0.$$

Đặt $\sqrt{x-y^2}=u$, phương trình (1) thành:

Được quét bằng CamScanner

$x^3+xu^2-2u^3=0\Rightarrow(x-u)\left(x^2+xu+2u^2\right)=0.$

Suy ra $x=u$ (do PT $x^2+xu+2u^2=0$ vô nghiệm).

Do đó $y^2=x-x^2$ (3).

Thay vào (2) ta được:

$$96x^2-20x+2=\sqrt[3]{32x^2+4x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$96x^2-20x+2=\sqrt[3]{32x^2+4x}=\sqrt[3]{1.1.\left(32x^2+4x\right)}$$

$$\le\frac{32x^2+4x+2}{3}.$$

Do đó: $3\left(96x^2-20x+2\right)\le 32x^2+4x+2$

$$\Leftrightarrow(16x-2)^2\le 0.$$

Suy ra $x=\frac{1}{8}$.

Thay vào (3) ta được $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{8}$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là:

$$\left(\frac{1}{8};\frac{\sqrt{7}}{8}\right),\left(\frac{1}{8};-\frac{\sqrt{7}}{8}\right).$$

Câu III. 1) *Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình*

$$\left(x^2+3\right)y^2-(x-2y)(x+2y+1)=25x+2y+169.$$

2) *Một thùng có 40 quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có một số quả bóng màu đỏ, một số quả bóng màu xanh, còn lại là những quả bóng màu khác. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong thùng. Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ là $\frac{3}{10}$, xác suất để lấy được quả bóng màu xanh là $\frac{3}{8}$. Tìm số quả bóng có màu khác màu đỏ và màu xanh.*

Lời giải. 1) Ta có:

$$x^2y^2+3y^2-x^2-2xy-x+2xy+4y^2+2y=25x+2y+169$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+7y^2=x^2+26x+169$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+7\right)y^2=(x+13)^2.$$

- Nếu $y=0$ thì $x+13=0$ suy ra $x=-13$ (thoả mãn).

- Nếu $y\ne 0$ thì $x^2+7=\left(\frac{x+13}{y}\right)^2$.

Đặt $\frac{x+13}{y}=t,\left(t^2\ge 7\right)$, ta được $x^2+7=t^2$ mà x, y là số nguyên nên t cũng là số nguyên.

Do đó $(t-x)(t+x)=7$ suy ra $t-x$ và $t+x$ là các ước của 7.

Trường hợp 1:

$\begin{cases}t-x=1\\t+x=7\end{cases}$ nên $\begin{cases}t=4\\x=3\end{cases}$, suy ra: $y=4$ (thoả mãn).

Trường hợp 2:

$\begin{cases}t-x=7\\t+x=1\end{cases}$ nên $\begin{cases}t=4\\x=-3\end{cases}$, suy ra: $y=\frac{5}{2}$ (loại).

Trường hợp 3:

$\begin{cases}t-x=-1\\t+x=-7\end{cases}$ nên $\begin{cases}t=-4\\x=-3\end{cases}$, suy ra: $y=-\frac{5}{2}$ (loại).

Trường hợp 4: $\begin{cases}t-x=-7\\t+x=-1\end{cases}$ nên $\begin{cases}t=-4\\x=3\end{cases}$,

suy ra $y=-4$ (thoả mãn).

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là: $(-13;0),(3;4),(3;-4)$.

2) Chọn ngẫu nhiên một quả bóng trong thùng có 40 quả nên số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega)=40.$$

Gọi x, y lần lượt là số quả bóng màu đỏ và quả bóng màu xanh trong thùng, $x, y\in\mathbb{N}^*$; $x, y<40$.

Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ và màu xanh lần lượt là $\frac{x}{40}$ và $\frac{y}{40}$.

Theo giả thiết ta có:

Được quét bằng CamScanner

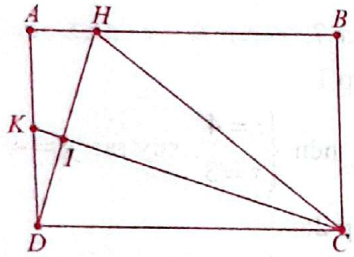
$$\begin{cases}\dfrac{x}{40}=\dfrac{3}{10}\\ \dfrac{y}{40}=\dfrac{3}{8}\end{cases}\text{ suy ra }\begin{cases}x=12\\ y=15\end{cases}\text{ (thoả mãn).}$$

Vậy trong thùng số quả bóng có màu khác màu đỏ và màu xanh là:

$$40-12-15=13\text{ (quả bóng).}$$

Câu IV. *Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB=9$ cm, $BC=6$ cm. Gọi K là trung điểm của AD. Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho $AH=2$ cm. Tính $\cos\widehat{HCK}$.*

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của CK và DH.

Do K là trung điểm của AD nên:

$$AK=DK=3\text{ cm.}$$

Xét hai tam giác ADH và DCK có:

$$\widehat{DAH}=\widehat{CDK}=90^\circ;$$

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AH}{DK}=\frac{2}{3}.$$

Suy ra $\Delta ADH\backsim\Delta DCK$ (c.g.c), từ đó ta có:

$$\widehat{ADH}=\widehat{DCK}.$$

Mà $\widehat{ADH}+\widehat{HDC}=90^\circ$ nên $\widehat{DCK}+\widehat{HDC}=90^\circ$.

Suy ra $\widehat{DIC}=90^\circ$ hay $DH\perp CK$.

Do $AH=2$ cm nên $BH=7$ cm.

ΔBCH vuông tại B nên:

$$CH=\sqrt{BH^2+BC^2}=\sqrt{85}\text{ (cm).}$$

ΔCDK vuông tại D nên:

$$CK=\sqrt{CD^2+DK^2}=3\sqrt{10}\text{ (cm).}$$

$CD^2=CI.CK$ nên $CI=\dfrac{CD^2}{CK}=\dfrac{27\sqrt{10}}{10}$ (cm).

ΔCIH vuông tại I nên:

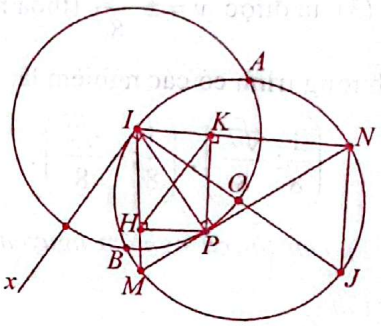
$$\cos\widehat{HCK}=\frac{CI}{CH}=\frac{27\sqrt{850}}{850}=\frac{27\sqrt{34}}{170}.$$

Câu V. *Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm I cố định nằm trên đường tròn $(O;R)$. Gọi A, B là các giao điểm của hai đường tròn $(O;R)$ và $(I;R)$, P là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I;R)$. Đường thẳng qua P và vuông góc với IP cắt đường tròn $(O;R)$ tại M,N. Kẻ PH vuông góc với IM tại H, PK vuông góc với IN tại K.*

1) Chứng minh rằng bốn điểm I,H,P,K cùng thuộc một đường tròn và HK vuông góc với OI.

2) Khi P thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I;R)$, tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IHK.

Lời giải.



1) Ta có: $\widehat{IHP}=90^\circ$ suy ra H nằm trên đường tròn đường kính IP.

$\widehat{IKP}=90^\circ$ suy ra K nằm trên đường tròn đường kính IP.

Suy ra bốn điểm I, H, P, K cùng thuộc đường tròn đường kính IP.

Kẻ tiếp tuyến Ix của $(O;R)$ tại I.

Ta có:

$$\widehat{MIx}=90^\circ-\widehat{MIO}=90^\circ-\frac{180^\circ-\widehat{MOI}}{2}=\frac{\widehat{MOI}}{2}.$$

Suy ra: $\widehat{INP}=\widehat{MIx}=\dfrac{\widehat{MOI}}{2}$ (1).

Được quét bằng CamScanner

$\widehat{INP} = \widehat{IPK}$ (cùng phụ với $\widehat{KPN}$) (2).

Lại có $\widehat{IPK} = \widehat{IHK}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IK}$ của đường tròn đường kính IP) (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\widehat{MIx} = \widehat{IHK}$, mà chúng ở vị trí so le trong nên $HK // Ix$.

Mà $Ix \perp OI$ nên $HK \perp OI$ (đpcm).

2) Xét ΔIHK và ΔINM có:

$\widehat{NIM}$ chung; $\widehat{IHK} = \widehat{INM}$ (cùng bằng $\widehat{IPK}$).

Suy ra $\Delta IHK \backsim \Delta INM$ (g.g). Từ đó ta có:

$$\frac{S_{\Delta IHK}}{S_{\Delta INM}} = \left(\frac{IK}{IM}\right)^2 = \left(\frac{IK.IN}{IM.IN}\right)^2 \quad (4).$$

Ta có $\Delta IKP \backsim \Delta IPN$ (g.g) nên $\frac{IK}{IP} = \frac{IP}{IN}$ suy ra:

$$IP^2 = IK.IN = R^2 \quad (5).$$

Kẻ đường kính IJ của $(O; R)$.

Xét ΔINJ và ΔIPM có:

$$\widehat{INJ} = \widehat{IPM} = 90^\circ;$$

$$\widehat{IJN} = \widehat{IMP} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{IN}.$$

Suy ra $\Delta INJ \backsim \Delta IPM$ (g.g). Suy ra $\frac{IN}{IP} = \frac{IJ}{IM}$, do đó: $IN.IM = IP.IJ = 2R^2$ (6).

Thay (5), (6) vào (4) ta được:

$$\frac{S_{\Delta IHK}}{S_{\Delta INM}} = \left(\frac{IK.IN}{IM.IN}\right)^2 = \left(\frac{R^2}{2R^2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Suy ra: $S_{\Delta IHK} = \frac{1}{4}S_{\Delta INM} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.IP.MN$

$$= \frac{R}{8}.MN \le \frac{R}{8}.2R$$

$$= \frac{R^2}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv O$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IHK bằng $\frac{R^2}{4}$ khi P trùng với O.

Câu VI. *Cho các số thực dương x,y,z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{\sqrt{2x^2+2xy+y^2}}{x+2y} + \frac{\sqrt{2y^2+2yz+z^2}}{y+2z} + \frac{\sqrt{2z^2+2zx+x^2}}{z+2x}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\sqrt{2x^2+2xy+y^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(x-y)^2+(3x+2y)^2} \ge \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(3x+2y)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(3x+2y).$$

Suy ra $\frac{\sqrt{2x^2+2xy+y^2}}{x+2y} \ge \frac{3x+2y}{\sqrt{5}(x+2y)}$ (1).

Tương tự ta có:

$$\frac{\sqrt{2y^2+2yz+z^2}}{y+2z} \ge \frac{3y+2z}{\sqrt{5}(y+2z)} \quad (2);$$

$$\frac{\sqrt{2z^2+2zx+x^2}}{z+2x} \ge \frac{3z+2x}{\sqrt{5}(z+2x)} \quad (3).$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta được:

$$P \ge \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3x+2y}{x+2y} + \frac{3y+2z}{y+2z} + \frac{3z+2x}{z+2x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(3 + \frac{2x}{x+2y} + \frac{2y}{y+2z} + \frac{2z}{z+2x}\right).$$

Ta có: $\frac{2x}{x+2y} + \frac{2y}{y+2z} + \frac{2z}{z+2x}$

$$= 2\left(\frac{x^2}{x^2+2xy} + \frac{y^2}{y^2+2yz} + \frac{z^2}{z^2+2zx}\right)$$

$$\ge 2.\frac{(x+y+z)^2}{x^2+2xy+y^2+2yz+z^2+2zx}.$$

Suy ra $P \ge \frac{1}{\sqrt{5}}(3+2) = \sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z > 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{5}$ khi $x = y = z > 0$.

PHẠM TRUNG KIÊN

(GV THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, Hưng Yên)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TP. HÀ NỘI

Năm học 2025 - 2026

Môn thi Toán (Chuyên Tin)

Thời gian làm bài: 150 *phút*

Câu I (*2,0 điểm*)

1) Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố A: "Tích của hai số chấm xuất hiện trên mặt xúc xắc trong hai lần gieo bằng 6".

2) Cho a,b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a+b=6$ và $a+\frac{4}{a}=b+\frac{4}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{a^2+1}$.

Câu II (*2,0 điểm*)

1) Cho a,b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{3}{b+2}=\frac{5}{c+4}$. Chứng minh abc chia hết cho 4.

2) Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn

$$x(x-2y)=y^3-3y^2+2y-1.$$

Câu III (*2,0 điểm*)

1) Với a,b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $a+b+c=12$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(a-\frac{4}{a}\right)^2+\left(b-\frac{4}{b}\right)^2+\left(c-\frac{4}{c}\right)^2$.

2) Cho a,b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $(a+2b)(2a+c)=(a^2-bc)^2$. Chứng minh $4ab+1$ là số chính phương.

Câu IV (*3,0 điểm*)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB<AC$), nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC, cắt đường tròn (O) tại điểm I (I khác A). Lấy điểm M thuộc cung nhỏ IC của đường tròn (O) sao cho $MB<MC$. Kẻ dây cung MN của đường tròn (O) sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng BC. Tia phân giác của góc ACB cắt hai đường thẳng AM và AN lần lượt tại hai điểm P và Q.

1) Chứng minh $CM.CQ=CP.NQ$.

2) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MQ với đường thẳng BC. Chứng minh đường thẳng PE song song với đường thẳng AN.

3) Gọi H là điểm đối xứng với điểm P qua đường thẳng BC. Gọi S là giao điểm của đường thẳng MI với đường thẳng BC. Chứng minh đường thẳng SH vuông góc với đường thẳng IQ.

Câu V (*1,0 điểm*)

Xét bảng ô vuông kích thước $n\times n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng bảng ô vuông đó có thể được phủ kín bởi hai loại mảnh ghép 1×1 và 8×8 sao cho không có hai mảnh ghép nào chồng lên nhau, số lượng hai loại mảnh ghép được dùng là bằng nhau và mỗi ô vuông nhỏ của các mảnh ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng.

1) Chứng minh n chia hết cho 5.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

(*GV THCS Giảng Võ 2, Hà Nội*)

Giới thiệu

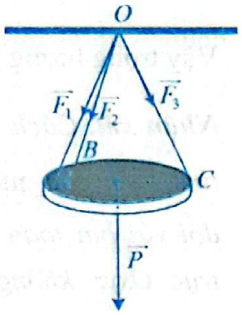
Được quét bằng CamScanner

ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ MÔ HÌNH HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU TRONG SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 12 BẰNG NHIỀU CÁCH

PHẠM VIỆT BÁC
(GV THPT Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

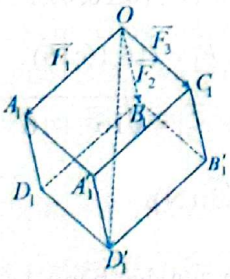
Sách giáo khoa Toán 12 đưa ra bài toán ứng dụng vectơ trong không gian để giải bài toán thực tế thông qua mô hình hình chóp tam giác đều. Để có cách nhìn rõ ràng hơn, tôi xin đưa ra một số cách giải bài toán làm ví dụ minh hoạ.

Thí dụ 1. *Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều và các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 16$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn đó.*



Lời giải.

Cách 1. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp (hình 2).



Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp ta có:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}.$$

Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 16$ (N) nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì vậy, hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 16. Suy ra, độ dài đường chéo OD_1' của hình lập phương đó bằng $16\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{P}$, với $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn.

Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là $|\vec{P}| = \left|\overrightarrow{OD_1'}\right| = 16\sqrt{3}$ (N).

Nhận xét. *Gắn hình tứ diện đều vào hình hộp trong trường hợp này giúp việc tính hợp lực $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{P}$ là đơn giản vì từ giả thiết suy ra hình hộp là hình lập phương. Tuy nhiên, nếu $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ không đôi một vuông góc với nhau, khi đó hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ không phải là hình lập phương thì việc tính $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{P}$ phức tạp hơn nhiều. Vậy nên còn có hướng giải nào khác để khắc phục nhược điểm của cách giải trên không?*

Cách 2. Gọi $\overrightarrow{F}$ là hợp lực của $\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2}; \overrightarrow{F_3}$. Ta có:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F};$$

$$\left|\overrightarrow{F}\right|^2 = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3})^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_3}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{F_3}\right).$$

Được quét bằng CamScanner

Vì $|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{F_2}|=|\overrightarrow{F_3}|=16\ (N)$ và $\overrightarrow{F_1};\overrightarrow{F_2};\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc nên:

$$\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{F_3}=0;$$

$$|\overrightarrow{F_1}|^2=|\overrightarrow{F_2}|^2=|\overrightarrow{F_3}|^2=16^2\ (\text{N}).$$

Do đó $|\overrightarrow{F}|^2=(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3})^2=|\overrightarrow{F_1}|^2+|\overrightarrow{F_2}|^2+|\overrightarrow{F_3}|^2$

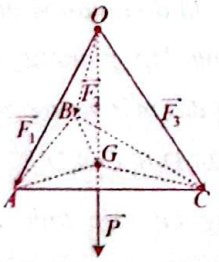
$$+2\left(\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{F_3}\right)=3.16^2.$$

Suy ra $|\overrightarrow{F}|=16\sqrt{3}$.

Vì đèn ở vị trí cân bằng nên trọng lượng của đèn $|\overrightarrow{P}|=|\overrightarrow{F}|=16\sqrt{3}$ (N). Vậy trọng lượng của đèn bằng $16\sqrt{3}$ N.

Nhận xét. *Nếu như $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ không vuông góc với nhau, để tính được $\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2};\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_3};\overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{F_3}$ chúng ta cần biết góc giữa các hợp lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$. Như vậy, so với cách 1, cách này đã khắc phục được. Tuy nhiên, nếu việc xác định góc giữa các hợp lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ khó khăn thì ta phải xử lý như thế nào?*

Cách 3.



Gọi A; B; C lần lượt là các điểm sao cho

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{F_1};\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{F_2};\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{F_3}.$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, M là trung điểm của BC, ta có:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\cdot\overrightarrow{OG}.$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$$

$$=3\cdot|\overrightarrow{OG}|=3OG.$$

$$OG^2=OA^2-AG^2=OA^2-\left(\frac{2}{3}\cdot AM\right)^2$$

$$=OA^2-\left(\frac{2}{3}\cdot AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=OA^2-\left(\frac{OA\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=16^2.\frac{3}{9}\Rightarrow OG=\frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}|=3OG=16\sqrt{3}.$$

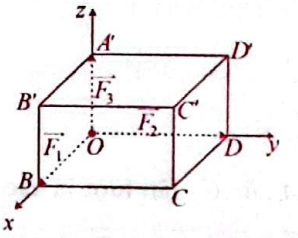
Vì đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{P}$, suy ra trọng lượng của đèn là:

$$|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}|=|\overrightarrow{P}|=16\sqrt{3}\ (\text{N}).$$

Vậy trọng lượng của đèn bằng $16\sqrt{3}$ N.

Nhận xét. *Cách giải này đã khắc phục được việc tính toán góc giữa các hợp lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$, nhưng đối với bài toán trên ta có thể gắn được vào hệ trục Oxyz không? Chúng ta cùng xem cách giải sau:*

Cách 4. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như vẽ sau.



Ta có: $B(16;0;0)$; $D(0;16;0)$; $A'(0;0;16)$.

Vì $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{F_1};\ \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{F_2};\ \overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{F_3}$;

$$\Rightarrow\overrightarrow{F_1}(16;0;0);\overrightarrow{F_2}(0;16;0);\overrightarrow{F_3}(0;0;16)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=(16;16;16)$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}|=\sqrt{16^2+16^2+16^2}=16\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{P}|=16\sqrt{3}\ (\text{N}).$$

Vậy trọng lượng của đèn bằng $16\sqrt{3}$ N.

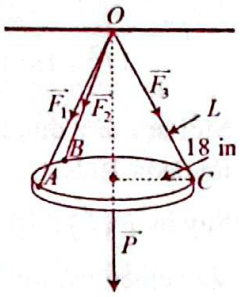
Nhận xét. *Cách giải trên được áp dụng khi $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau. Vậy nếu*

Được quét bằng CamScanner

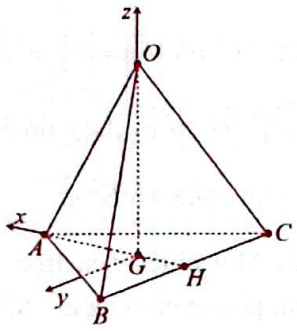
$\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một không vuông góc với nhau còn áp dụng được nữa không?

Bây giờ ta xét bài toán sau:

Thí dụ 2. *Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in (1 inch = 2,54 cm). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L. Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây (tính bằng inch), biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.*



Lời giải. Cách 1.



Vì tam giác ABC là tam giác đều, độ dài ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng $L > 0$.

Ta chọn hệ trục toạ độ $Gxyz$ như hình 6, với G là trọng tâm tam giác ABC và H là trung điểm cạnh BC, trong đó A, H nằm trên trục Gx và O nằm trên trục Gz.

Bán kính của chiếc đèn là 18 in nên $AG = 18$, suy ra: $AB = 18\sqrt{3}$ và $BH = HC = 9\sqrt{3}$.

Do đó, ta có:

$$G(0;0;0),\ A(18;0;0),$$

$$B\left(-9;9\sqrt{3};0\right),\ C\left(-9;-9\sqrt{3};0\right).$$

Xét tam giác vuông AOG, suy ra:

$$OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{L^2 - 18^2}$$

nên $O\left(0;0;\sqrt{L^2-18^2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = \left(18;0;-\sqrt{L^2-18^2}\right)$;

$$\overrightarrow{OB} = \left(-9;9\sqrt{3};-\sqrt{L^2-18^2}\right);$$

$$\overrightarrow{OC} = \left(-9;-9\sqrt{3};-\sqrt{L^2-18^2}\right).$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = L$ và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right|$.

Tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho

$$\overrightarrow{F_1} = c \cdot \overrightarrow{OA} = \left(18c;0;-c\sqrt{L^2-18^2}\right);$$

$$\overrightarrow{F_2} = c \cdot \overrightarrow{OB} = \left(-9c;9c\sqrt{3};-c\sqrt{L^2-18^2}\right);$$

$$\overrightarrow{F_3} = c \cdot \overrightarrow{OC} = \left(-9c;-9c\sqrt{3};-c\sqrt{L^2-18^2}\right).$$

Suy ra: $\vec{P} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \left(0;0;-3c\sqrt{L^2-18^2}\right)$,

trong đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên bóng đèn.

Mà trọng lượng của bóng đèn là 24 N nên

$$\left|\vec{P}\right| = 24 \Leftrightarrow 9c^2\left(L^2-18^2\right) = 24^2$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{8}{\sqrt{L^2-18^2}},\ \forall L \in (18;+\infty).$$

Vậy $F = \left|F_1\right| = \left|F_2\right| = \left|F_3\right| = \dfrac{8L}{\sqrt{L^2-18^2}}$.

Xét hàm số $F = \dfrac{8L}{\sqrt{L^2-18^2}}$ trên $(18;+\infty)$.

Ta có:

$$F' = \frac{-2592}{\left(L^2-18^2\right)\sqrt{L^2-18^2}} < 0,\ \forall L \in (18;+\infty).$$

Mỗi sợi dây được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.

Suy ra $F(L) \leq 10 \Leftrightarrow F(L) \leq F(30) \Leftrightarrow L \geq 30$.

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây bằng 30 in thoả mãn yêu cầu bài toán.

Được quét bằng CamScanner

Nhận xét. *Mặc dù* $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ *đôi một không vuông góc với nhau, nhưng nếu ta chọn hệ trục toạ độ* $Oxyz$ *phù hợp bài toán vẫn giải quyết được. Bây giờ ta sẽ áp dụng cách 2, cách 3 như ở thí dụ 1 để giải bài toán này.*

Cách 2. Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{F_3}$. Khi đó, hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA_1}$ cùng hướng, do đó tồn tại số $k>0$ sao cho: $\overrightarrow{OA_1}=k\cdot\overrightarrow{OA}$.

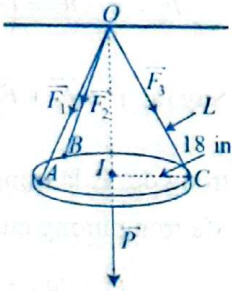
Tương tự, $\overrightarrow{OB_1}=k\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1}=k\cdot\overrightarrow{OC}$.

Suy ra, $F=\left|\overrightarrow{F_1}\right|=k\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|=k\cdot L$ (1).

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên:

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{P}.$$

Gọi I là tâm của chiếc đèn hình tròn. Vì tam giác ABC là tam giác đều nên I cũng là trọng tâm của tam giác. Sử dụng quy tắc trọng tâm trong tam giác ABC, ta được:



$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OI}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{k}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}\right)=3\overrightarrow{OI}$$

$$\Rightarrow\vec{P}=3k\cdot\overrightarrow{OI}.$$

Theo giả thiết bài toán, trọng lượng của chiếc đèn là $24\,\text{N}$, do đó $OI=\dfrac{8}{k}$. Mặt khác, xét hình chóp tam giác đều $O.ABC$, có OI vuông góc mới mặt phẳng đáy (ABC).

Khi đó:

$$OI=\sqrt{OA^2-AI^2}=\sqrt{L^2-18^2}=\sqrt{L^2-324}.$$

Suy ra: $\dfrac{8}{k}=\sqrt{L^2-324}$

hay $k=\dfrac{8}{\sqrt{L^2-324}}$.

Thay $k=\dfrac{8}{\sqrt{L^2-324}}$ vào (1), ta được công thức tính hàm số: $F=\dfrac{8L}{\sqrt{L^2-324}}$ (N).

Ta có:

$$F'=\frac{-2592}{\left(L^2-18^2\right)\sqrt{L^2-18^2}}<0,\forall L\in(18;+\infty).$$

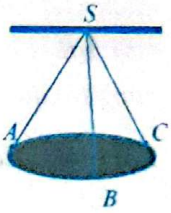
Mỗi sợi dây được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.

Suy ra $F(L)\le 10\Leftrightarrow F(L)\le F(30)\Leftrightarrow L\ge 30$.

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây bằng 30 in thoả mãn yêu cầu bài toán.

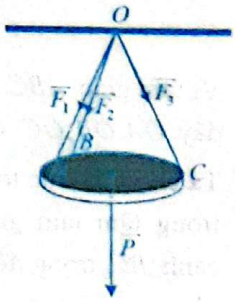
BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1. Một chiếc đĩa kim loại khối lượng 4,5 kg được treo bởi ba sợi dây không dãn SA, SB, SC sao cho $S.ABC$ là hình chóp đều và $\widehat{ASB}=60°$, các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây SA, SB, SC có $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$.

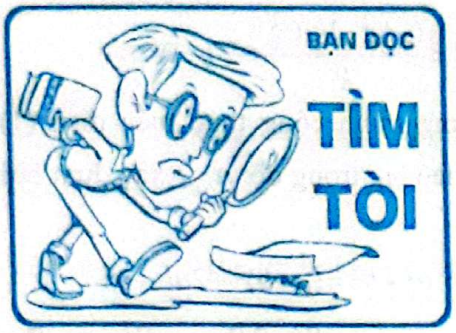


Tính $\left|\overrightarrow{F_1}\right|;\left|\overrightarrow{F_2}\right|;\left|\overrightarrow{F_3}\right|$. Lấy độ lớn của gia tốc trọng trường $\left|\vec{g}\right|=9{,}8\ (\text{m/s}^2)$.

Câu 2. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều và các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đều bằng L. Trọng lượng chiếc đèn là 27 N và bán kính chiếc đèn 0,5 m. Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N (chiều dài tính theo đơn vị xăngtimét và làm tròn kết quả đến một chữ số thập phân).



Được quét bằng CamScanner



CÔNG THỨC BIỂU DIỄN a^n+b^n QUA TỔNG $a+b$ VÀ TÍCH $a.b$

HOÀNG NGỌC MINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Khi còn là học sinh cấp hai, tôi được học cách giải hệ phương trình đối xứng loại 1 bằng cách đặt tổng và tích. Ta thấy rằng mọi đa thức đối xứng của 2 biến a và b đều biểu diễn được qua tổng $a+b$ và tích ab, đó là cơ sở cho phương pháp giải hệ phương trình đối xứng loại 1 nói trên. Để chứng minh điều này ta chỉ cần chứng minh rằng: "*Với mỗi số nguyên dương n, a^n+b^n có thể biểu diễn qua tổng $a+b$ và tích ab*". Bài toán đặt ra là: "*Tìm công thức biểu diễn a^n+b^n qua tổng $a+b$ và tích ab*". Đây chính là nội dung bài toán mà cô giáo dạy toán cấp hai đã đặt ra cho tôi. Hồi đó, với kiến thức còn hạn hẹp, tôi đã không giải quyết được bài toán này. Nhiều năm sau, khi đã trở thành một giáo viên dạy toán, tôi có dịp ôn lại kỉ niệm cũ với bạn bè, tôi nhớ lại bài toán này và đã giải quyết nó một cách trọn vẹn. Tôi muốn viết bài báo này để để dành tặng cho cô giáo dạy toán cấp hai của tôi-người đã thắp lên trong tôi tình yêu đối với toán học nói chung và với tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nói riêng.

Đặt $S=a+b, P=ab$, ta có các biểu diễn sau:

$$a^2+b^2 = S^2-2P;$$
$$a^3+b^3 = S^3-3PS;$$
$$a^4+b^4 = S^4-4PS^2+2P^2;$$
$$a^5+b^5 = S^5-5PS^3+5P^2S.$$

Một cách tổng quát ta có thể biểu diễn a^n+b^n dưới dạng sau:

$$a^n+b^n=\sum_{k=0}^{m}\alpha_{k,n}P^kS^{n-2k} \quad (1)$$

trong đó $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ và $\alpha_{k,n}$ là các hệ số phụ thuộc vào k và n.

(Kí hiệu $\lfloor x\rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x)

Ta có thể chứng minh khẳng định này bằng phương pháp quy nạp và dựa vào đẳng thức sau:

$$a^{n+1}+b^{n+1}=(a+b)(a^n+b^n)-ab(a^{n-1}+b^{n-1}) \quad (2).$$

Bây giờ ta cần xác định các hệ số $\alpha_{k,n}$ theo k và n. Ta thấy a,b là hai nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$. Giải phương trình này ta được hai nghiệm là $\frac{S\pm\sqrt{S^2-4P}}{2}$.

Suy ra: $a^n+b^n=\left(\frac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2}\right)^n+\left(\frac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2}\right)^n$.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$a^n+b^n=\frac{1}{2^n}\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^iS^{n-i}(\sqrt{S^2-4P})^i+\sum_{i=0}^{n}C_n^iS^{n-i}(-\sqrt{S^2-4P})^i\right]$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{m}C_n^{2i}S^{n-2i}(S^2-4P)^i$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{m}\left[C_n^{2i}S^{n-2i}\sum_{j=0}^{i}C_i^j(-4P)^jS^{2(i-j)}\right]$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}(-4)^jC_i^jC_n^{2i}P^jS^{n-2j}.$$

Như vậy:

$$\alpha_{k,n}=\frac{(-4)^k}{2^{n-1}}\sum_{i=k}^{m}C_i^kC_n^{2i}=(-1)^k2^{2k+1-n}\sum_{i=k}^{m}C_i^kC_n^{2i}.$$

Với số nguyên dương r, đặt $s=\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor, t=\left\lfloor\frac{r+1}{2}\right\rfloor$. Ta có:

$$\sum_{i=0}^{s}C_r^{2i}+\sum_{i=1}^{t}C_r^{2i-1}=\sum_{j=0}^{r}C_r^j=(1+1)^r=2^r;$$
$$\sum_{i=0}^{s}C_r^{2i}-\sum_{i=1}^{t}C_r^{2i-1}=\sum_{j=0}^{r}(-1)^jC_r^j=(1-1)^r=0.$$

Được quét bằng CamScanner

Từ đó ta tính được: $\sum_{i=0}^{s} C_r^{2i} = \sum_{i=1}^{t} C_r^{2i-1} = 2^{r-1}$.

Tính $\alpha_{0,n}$: $\alpha_{0,n} = 2^{1-n}\sum_{i=0}^{m} C_n^{2i} = 2^{1-n}\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_n^{2i} = 2^{1-n}\cdot 2^{n-1} = 1.$

Tính $\alpha_{1,n}$: $\alpha_{1,n} = -2^{3-n}\sum_{i=1}^{m} iC_n^{2i} = -2^{2-n}\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} nC_{n-1}^{2i-1}$

$$= -2^{2-n}\cdot n\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_{n-1}^{2i-1} = -2^{2-n}\cdot n\cdot 2^{n-2} = -n.$$

Tính $\alpha_{2,n}$: $\alpha_{2,n} = 2^{5-n}\sum_{i=2}^{m} C_i^2 C_n^{2i} = 2^{2-n}\sum_{i=2}^{m} 2i(2i-2)C_n^{2i}$

$$= 2^{2-n}\sum_{i=2}^{m} 2i(2i-1)C_n^{2i} - 2^{2-n}\sum_{i=2}^{m} 2iC_n^{2i}$$

$$= 2^{2-n}\sum_{i=2}^{m} n(n-1)C_{n-2}^{2i-2} - 2^{2-n}\sum_{i=2}^{m} nC_{n-1}^{2i-1}$$

$$= 2^{2-n}\cdot n(n-1)\cdot\sum_{i=2}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_{n-2}^{2(i-1)} - 2^{2-n}\cdot n\cdot\sum_{i=2}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_{n-1}^{2i-1}$$

$$= 2^{2-n}n(n-1)(2^{n-3} - C_{n-2}^0) - 2^{2-n}n(2^{n-2} - C_{n-1}^1)$$

$$= 2^{2-n}n(n-1)(2^{n-3}-1) - 2^{2-n}n(2^{n-2}-n+1)$$

$$= 2^{2-n}n\left[(n-1)\cdot 2^{n-3} - n + 1 - 2^{n-2} + n - 1\right]$$

$$= 2^{2-n}n\cdot 2^{n-3}(n-3) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Tương tự ta tính được: $\alpha_{3,n} = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$;

$$\alpha_{4,n} = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24};$$

$$\alpha_{5,n} = -\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{120}.$$

Tổng quát hóa, ta có:

$$\alpha_{k,n} = \frac{(-1)^k\cdot n}{k!}(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+1), \quad (3)$$

$$\forall 0 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Ta viết lại $\alpha_{k,n}$ dưới dạng sau: $\alpha_{k,n} = \frac{(-1)^k\cdot n\cdot C_{n-k}^k}{n-k}$.

Đặt biệt khi $n=2k$ thì

$$\alpha_{k,2k} = \frac{(-1)^k\cdot 2k\cdot C_k^k}{k} = 2\cdot(-1)^k.$$

Bây giờ ta chứng minh công thức biểu diễn (1) bằng quy nạp theo n, trong đó $\alpha_{k,n}$ xác định bởi (3).

Với $n=2$, ta có: $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$= S^2 - 2P = \alpha_{0,2}S^2 + \alpha_{1,2}P.$$

Với $n=3$, ta có: $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$= S^3 - 3PS = \alpha_{0,3}S^3 + \alpha_{1,3}PS.$$

Công thức (1) đúng với $n=2$ và $n=3$.

Giả sử (1) đúng đến n. Ta chứng minh (1) cũng đúng với $n+1$. Thật vậy, từ (2) suy ra:

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \alpha_{k,n+1}P^k S^{n+1-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \alpha_{k,n}P^k S^{n+1-2k} - \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \alpha_{j,n-1}P^{j+1}S^{n-1-2j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \alpha_{k,n}P^k S^{n+1-2k} - \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \alpha_{k-1,n-1}P^k S^{n+1-2k}.$$

Với $n=2m$, ta có: $\sum_{k=0}^{m} \alpha_{k,2m+1}P^k S^{2m+1-2k}$

$$= \alpha_{0,2m}S^{2m+1} + \sum_{k=1}^{m}(\alpha_{k,2m} - \alpha_{k-1,2m-1})P^k S^{2m+1-2k}.$$

Đồng nhất hệ số, ta thu được $\alpha_{0,2m+1} = \alpha_{0,2m}$ và

$$\alpha_{k,2m+1} = \alpha_{k,2m} - \alpha_{k-1,2m-1}, \ \forall 1 \le k \le m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Với $n=2m+1$, ta có: $\sum_{k=0}^{m+1} \alpha_{k,2m+2}P^k S^{2m+2-2k}$

$$= \alpha_{0,2m+1}S^{2m+2} + \sum_{k=1}^{m}(\alpha_{k,2m+1} - \alpha_{k-1,2m})P^k S^{2m+2-2k} - \alpha_{m,2m}P^{m+1}.$$

Đồng nhất hệ số, ta thu được:

$$\alpha_{0,2m+2} = \alpha_{0,2m+1}; \ \alpha_{m+1,2m+2} = -\alpha_{m,2m};$$

$$\alpha_{k,2m+2} = \alpha_{k,2m+1} - \alpha_{k-1,2m}, \ \forall 1 \le k \le m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Như vậy ta thu được:

Được quét bằng CamScanner

$$\alpha_{k,n+1}=\alpha_{k,n}-\alpha_{k-1,n-1}\ \ \forall 1\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor;$$

$$\alpha_{0,n+1}=\alpha_{0,n};\ \alpha_{n+1,2n+2}=-\alpha_{n,2n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Ta có $\alpha_{0,n+1}=\alpha_{0,n}=\ldots=\alpha_{0,2}=1$.

Với $1\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ thì $0\le k-1\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1=\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$

nên $\alpha_{k,n+1}=\alpha_{k,n}-\alpha_{k-1,n-1}$

$$=\frac{(-1)^k\cdot n}{k!}(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+2)(n-2k+1)$$

$$-\frac{(-1)^{k-1}(n-1)}{(k-1)!}(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+2)$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!}(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+2)[n(n-2k+1)+(n-1)k]$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!}(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+2)(n^2-kn+n-k)$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!}(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+2)(n+1)(n-k)$$

$$=\frac{(-1)^k(n+1)}{k!}(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+2).$$

Với n chẵn thì $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$.

Với n lẻ, đặt $n=2m+1$ thì $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=m=\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1$.

Khi đó với $k=\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor=m+1$, ta có:

$$\alpha_{m+1,2m+2}=-\alpha_{m,2m}=-2\cdot(-1)^m=2\cdot(-1)^{m+1}.$$

Như vậy công thức (1) cũng đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp công thức (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Ta đã thiết lập và chứng minh xong công thức biểu diễn a^n+b^n qua tổng $S=a+b$ và tích $P=ab$ sau đây: $a^n+b^n=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^k\cdot n\cdot C_{n-k}^k}{n-k}P^kS^{n-2k}$ (4).

Dựa vào mối liên hệ giữa các hệ số $\alpha_{k,n}$, ta cũng có thể tính các hệ số $\alpha_{k,n}$ bằng cách lập bảng giống như tam giác Pascal. Dưới đây là bảng các hệ số trong biểu diễn của a^n+b^n ứng với $n=1,2,\ldots,10$, trong đó hệ số $\alpha_{k,n}$ là số thứ $k+1$ trong dòng thứ n:

$n=1$	1					
$n=2$	1	−2				
$n=3$	1	−3				
$n=4$	1	−4	2			
$n=5$	1	−5	5			
$n=6$	1	−6	9	−2		
$n=7$	1	−7	14	−7		
$n=8$	1	−8	20	−16	2	
$n=9$	1	−9	27	−30	9	
$n=10$	1	−10	35	−50	25	−2

Các số trong bảng trên được xác định theo quy tắc sau:

+ Dòng thứ n có $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$ số.

+ Cột thứ nhất gồm toàn chữ số 1.

+ Với $n\ge 3, 2\le k\le\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$, số thứ k trong dòng thứ n bằng số thứ k trong dòng thứ $n-1$ trừ đi số thứ $k-1$ trong dòng thứ $n-2$.

+ Với $n=2m$, số cuối cùng của dòng thứ n tức là số thứ $m+1$ của dòng thứ $2m$ là $2.(-1)^m$.

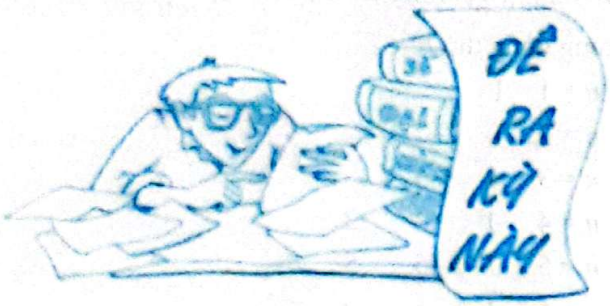
Dựa vào bảng trên ta có các biểu diễn sau:

$$a^4+b^4=S^4-4PS^2+2P^2$$
$$a^5+b^5=S^5-5PS^3+5P^2S$$
$$a^6+b^6=S^6-6PS^4+9P^2S^2-2P^3$$
$$a^7+b^7=S^7-7PS^5+14P^2S^3-7P^3S$$
$$a^8+b^8=S^8-8PS^6+20P^2S^4-16P^3S^2+2P^4$$
$$a^9+b^9=S^9-9PS^7+27P^2S^5-30P^3S^3+9P^4S$$
$$a^{10}+b^{10}=S^{10}-10PS^8+35P^2S^6-50P^3S^4+25P^4S^2-2P^5.$$

Đến bây giờ, việc tìm ra công thức (4) vẫn khiến tôi vô cùng phấn khích. Trước khi tìm ra nó, tôi đã nghĩ có thể nó sẽ khá phức tạp, có thể biểu diễn được nhưng biểu thức sẽ khá cồng kềnh hoặc không biểu diễn được một cách tường minh. Và rồi sau khi tìm ra và chứng minh nó một cách chặt chẽ, tôi đã ngỡ ngàng và thích thú trước sự gọn gàng và đẹp đẽ của nó.

Toán sơ cấp vẫn còn rất nhiều điều thú vị và đẹp đẽ đang chờ chúng ta khám phá.

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/581 (Lớp 6). Tìm ba chữ số cuối cùng của số $A=2003^{2004}$.

NGÔ VĂN HIỆP
(43B, Hàng Chuối, Hà Nội)

Bài T2/581 (Lớp 7). Cho tam giác đều ABC. Bên trong tam giác ABC lấy điểm M sao cho $\widehat{BMC}=120^0$, ngoài ra $MC = 2MB$. Tính số đo góc $\widehat{AMC}$.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS P. Bình Định, Gia Lai)

Bài T3/581. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^{2026}+y^{2026}=2027^{4052}(x+y).$$

NGUYỄN KIM SƠ
(TT Bồi dưỡng và Phát triển tài năng Toán học Nam Sáng - SMATH)

Bài T4/581. Cho ngũ giác đều cạnh bằng 8 cm. Hỏi có thể đặt vào trong ngũ giác đó 6 hình tròn có cùng bán kính 2,2 cm sao cho bất kỳ 2 hình tròn nào trong 6 hình tròn đó không có điểm trong chung không? (cho biết $1,3 < \tan 54^0 < 1,4$).

TRẦN HUY HƯNG
(Phòng GDTH, Sở GD&ĐT Nghệ An)

Bài T5/581. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^5+y^5=33 \end{cases}.$$

TRẦN VĂN TỎ
(SV K28D, khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội II)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/581. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^5+b^5+c^5=478298(a+b+c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b + c$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T7/581. Gọi a, b, c, d là độ dài bốn cạnh của một tứ giác lồi. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b-c}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c-d}}\geq 2\sqrt{2}.$$

NGÔ VĂN THÁI
(Tổ 9, P. Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

Bài T8/581. Cho tam giác ABC không tù, có trọng tâm G và trực tâm H. Kéo dài AG, BG, CG theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng

$$HA+HB+HC\leq GA_1+GB_1+GC_1.$$

PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T9/581. Ký hiệu a_k là hệ số của x^k $(0\leq k\leq 4n-1)$ trong khai triển thành đa thức của:

$$P(x)=(1+x+x^2+...+x^{2n-1})(1+x+x^2+...+x^n)^2.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho a_{2n} là lũy thừa nguyên dương của một số nguyên tố.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/581. Cho a là số thực dương và dãy số (x_n) được xác định bởi công thức truy hồi sau:

$$x_1 = 1 \text{ và } x_{n+1}=x_n+\frac{a}{\sum_{k=1}^{n}x_k} \text{ với } n\in\mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n=\frac{x_n}{\sqrt{\ln n}}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

NGUYỄN THỊ HIẾU NGUYÊN
(SV Đại học Y Dược TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/581. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x).f(y)+y^2f(xy),\ \forall x,y>0.$$

LÊ BÌNH MINH, NGUYỄN ANH VŨ
(Trường THPT chuyên Chu Văn An, Gia Lai)

Được quét bằng CamScanner

Bài T12/581. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M chạy trong tứ diện. Gọi N, P, Q theo thứ tự là giao điểm của BM, CM, DM và các mặt (ACD), (ABD), (ABC). Tìm vị trí của M để thể tích tứ diện $MNPQ$ lớn nhất.

NGUYỄN MINH HÀ (*Hà Nội*)
VŨ PHƯƠNG THÚY
(*GV THPT chuyênĐHSP Hà Nội*)

Bài L1/581. Một bình khí nén bằng thép được dùng trong lặn biển được nạp không khí ở áp suất 200 atm tại nhiệt độ 17 °C. Bình được trang bị một van an toàn, van sẽ tự động xả khí nếu áp suất bên trong vượt quá 240 atm. Sau khi nạp bình được để trên boong tàu dưới trời nắng, khiến nhiệt độ của khối khí bên trong tăng lên. Coi không khí là khí lí tưởng và thể tích của bình không đổi. Cho hằng số boltzmann $k = 1{,}38.10^{-23}$ J/K. Xét tính đúng/sai của các phát biểu sau (có giải thích).

a) Khi nhiệt độ của bình đạt 47 °C, áp suất bên trong xấp xỉ 22,1 atm.

b) Van an toàn của bình sẽ kích hoạt khi nhiệt độ của khí bên trong đạt 384 °C.

c) Khi nhiệt độ tăng từ 17 °C đến 47 °C, động năng tịnh tiến trung bình của mỗi phân tử tăng khoảng 10,3%.

d) Nếu ban đầu người ta chỉ nạp khí vào bình đến áp suất 150 atm (ở 17 °C), thì nhiệt độ tối đa mà bình có thể chịu được trước khi van an toàn kích hoạt sẽ cao hơn so với trường hợp nạp đến áp suất 200 atm.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/581. Dùng một proton có động năng 5,45 MeV bắn vào hạt nhân ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ đứng yên. Phản ứng tạo ra hạt alpha (α) và hạt nhân X. Hạt α bay ra theo phương vuông góc với phương tới của proton và có động năng 4 MeV. Khi tính động năng của các hạt, lấy khối lượng các hạt tính theo đơn vị khối lượng nguyên tử bằng số khối của chúng. Tính năng lượng toả ra của phản ứng.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/581 (Grade 6). Find the last three digits of the number $A = 2003^{2004}$.

Problem T2/581 (Grade 1). Given an equilateral triangle ABC. Inside triangle ABC, take point M so that $\widehat{BMC} = 120^0$, $MC = 2MB$. Calculate the measurement of the angle $\widehat{AMC}$.

Problem T3/581. Find all positive integral solutions of the equation

$$x^{2026} + y^{2026} = 2027^{4052}(x+y).$$

Problem T4/581. Given a regular pentagon with the length of each side 8 cm. Can we place 6 circles with radius 2.2 cm inside that pentagon so that any 2 of the 6 circles do not have a common interior point? (given that $1.3 < \tan 54^0 < 1.4$).

Problem T5/581. Solve the following system of equations: $\begin{cases} x+y=3 \\ x^5+y^5=33 \end{cases}$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/581. Let a, b, c be positive integers satisfying $a^5+b^5+c^5 = 478298(a+b+c)$. Find the minimum value of the expression $S = a + b + c$.

Problem T7/581. Let a, b, c, d be the lengths of the four sides of a convex quadrilateral. Prove that

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a-b}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b-c}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c-d}} \geq 2\sqrt{2}.$$

Problem T8/581. Given a non-obtuse triangle ABC with the centroid G and the orthocenter H. Extend AG, BG, CG to intersect the circumcircle of triangle ABC at A_1, B_1, C_1 respectively. Prove that $HA + HB + HC \leq GA_1 + GB_1 + GC_1$.

(*Xem tiếp trang 45*)

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/577. *Tìm số tự nhiên x nhỏ nhất biết x chia cho 7 dư 1, $2x$ chia cho 11 dư 3, $3x$ chia cho 13 dư 4.*

Lời giải. Từ giả thiết đề bài ta có $x-1$ chia hết cho 7; $2x-3$ chia hết cho 11; $3x-4$ chia hết cho 13; hay là $6x-6$ chia hết cho 7; $6x-9$ chia hết cho 11; $6x-8$ chia hết cho 13. Ta đi tìm số nguyên m sao cho $6x+m$ chia hết cho cả ba số 7; 11; 13. Số m như thế cần có dạng

$$m=-6+7t=-9+11u=-8+13v,$$

trong đó t, u, v đều là các số nguyên.

Ta xét đẳng thức: $-6+7t=-8+13v$ (*), hay là $7t+2=13v$ hay $v=7(2v-t)-2$. Chọn được $v=5$ và $2v-t=1$ thỏa mãn đẳng thức (*), từ đó $t=2v-1=9$, còn xét $-6+7t=-9+11u$, hay là $11u=7t+3$, với $t=9$ thì $11u=66$, nên $u=6$, dẫn đến $m=-6+7t=-9+11u=-8+13v=57$. Từ đó $6x+57$ chia hết cho cả ba số 7, 11, 13 mà ba số 7, 11, 13 là ba số nguyên tố nên ba số này nguyên tố cùng nhau, do đó $6x+57$ chia hết cho tích $7.11.13=1001$, hay là $6x+57=1001k$ (**) với k là số nguyên dương vì $6x+57\geq 57$.

Ta thấy $3(2x+19)=1001k$ mà ƯCLN $(3, 1001)=(3, 7.11.13)=1$ nên k chia hết cho 3, số nguyên dương k nhỏ nhất là $k=3$, suy ra $2x+19=1001$, hay là $2x=982$ và $x=491$ là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn (**). Thử lại cho kết quả đúng.

Nhận xét. Có thể thay việc xét đẳng thức (*) đầu tiên bằng cách xét đẳng thức $-6+7t=-8+13v$ hoặc $-9+11u=-8+13v$ rồi xét đẳng thức còn lại (nếu số cuối cùng trong ba số t, u, v không là số nguyên thì chọn bộ số khác), cũng dẫn đến kết quả. Tương tự, một số bạn chứng tỏ $x-1$ chia hết cho 7, $x+4$ chia hết cho 11, $x+3$ chia hết cho 13, dẫn đến $x+510$ chia hết cho tích $7.11.13=1001$, cũng cho kết quả đúng. Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ**: *Nguyễn Linh An*, 6A6, THCS Yên Lạc, xã Yên Lạc; **Thanh Hóa**: *Lê Minh Huy*, 6B2, THCS liên cấp Đông Bắc Ga, phường Đông Thọ; **Quảng Ngãi**: *Trần Phạm Minh Thúy*, THCS Hành Trung, xã Nghĩa Hành; *Trần Văn Phụng*, *Trần Gia Bảo*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, xã Đình Cương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/577. *Tìm số nguyên dương n sao cho $2n+9$ là số nguyên tố và $\dfrac{2n+1}{3n+1}$ là bình phương của một số hữu tỷ.*

Lời giải. Do n là số nguyên dương nên dễ thấy $2n+1$ và $3n+1$ cũng là các số nguyên dương. Giả sử tồn tại số nguyên dương n để $\dfrac{2n+1}{3n+1}$ là bình phương của một số hữu tỉ, khi đó tồn tại hai số nguyên dương a và b sao cho $(a,b)=1$ và

$$\frac{2n+1}{3n+1}=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2n+1}{3n+1}=\frac{a^2}{b^2} \quad (1).$$

Vì $(a,b)=1$ nên $(a^2,b^2)=1$ (2).

Gọi d là ước chung lớn nhất của $2n+1$ và $3n+1$ (với d là số nguyên dương). Suy ra: $2n+1 \vdots d$ và $3n+1 \vdots d \Rightarrow [3(2n+1)-2(3n+1)] \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$. Do đó $d=1$ hay $(2n+1,3n+1)=1$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$2n+1=a^2 \text{ và } 3n+1=b^2 \quad (4).$$

Từ (4) suy ra $n=b^2-a^2$ (5). Mặt khác, từ (4) ta có:

$$\begin{cases} 6n+3=3a^2 \\ 6n+2=2b^2 \end{cases} \Rightarrow 1=3a^2-2b^2 \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra:

$$2n+9=2\left(b^2-a^2\right)+9\left(3a^2-2b^2\right)$$

$$=(5a)^2-(4b)^2=(5a-4b)(5a+4b).$$

Do a và b là các số nguyên dương nên $5a-4b$ là số nguyên, $5a+4b$ là số nguyên dương.

Được quét bằng CamScanner

Kết hợp với $2n+9$ là số nguyên tố, $5a-4b<5a+4b$, suy ra $5a-4b=1$, $5a+4b$ là số nguyên tố.

Vì $5a-4b=1$ nên $b=\dfrac{5a-1}{4}$ (7). Thay (7) vào (6) ta được:

$$3a^2-2\left(\frac{5a-1}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow a^2-10a+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=9\end{array}\right.$$

- Với $a=1$ thì $n=0$, khi đó $2n+9=9$, không là số nguyên tố (loại).
- Với $a=9$ thì $n=40$, khi đó: $2n+9=89$ là số nguyên tố và $3n+1=121=11^2$, $2n+1=81=9^2$ nên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy chỉ có $n=40$ là số nguyên dương cần tìm.

Nhận xét. Bài này được các bạn tham gia giải với nhiều cách giải khác nhau, một số bạn đưa ra cách giải hơi dài nhưng giải đúng. Một số bạn là học sinh lớp 8, 9 có gửi bài tham gia, tuy nhiên lần sau các em tham gia đúng bài tập của khối lớp mình đang học nhé. Các bạn sau có lời giải tương đối tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Vũ Khang* và *Nguyễn Hữu Bách*, 7T, THCS Lương Thế Vinh (cơ sở Tân Triều); *Dương Đức Anh*, 7M, THCS Ngô Sĩ Liên, phường Cửa Nam; **Nghệ An:** *Nguyễn Thái Dũng*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Nguyễn Linh An*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/577. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n^2}$ là một số nguyên.*

Lời giải. Gọi ƯCLN$(m, n) = d$ $(d\in\mathbb{N}^*)$, khi đó tồn tại $a, b\in\mathbb{N}^*$ sao cho $m= ad$, $n= bd$ với ƯCLN$(a, b) =1$. Ta có:

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{m}{n^2}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b^2d}=\frac{a^2bd+b^3d+a^2}{ab^2d}\in\mathbb{N}\ (1).$$

Suy ra $(a^2bd+b^3d+a^2)\vdots b\Rightarrow a^2\vdots b$. Mà $(a, b) = 1$ nên $b = 1$, kết hợp với (1) ta có:

$$(a^2d+d+a^2)\vdots ad\ (2)\Rightarrow(a^2d+d+a^2)\vdots a\Rightarrow d\vdots a.$$

Đặt $d = ak$ $(k\in\mathbb{N}^*)$, kết hợp với (2) thì được:

$$(a^3k+ak+a^2)\vdots a^2k\Rightarrow(a^2k+k+a)\vdots ak\ (3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a^2k+k+a)\vdots a\\(a^2k+k+a)\vdots k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\vdots a\\a\vdots k\end{cases}\Rightarrow k=a.$$

Thay $k = a$ vào (3), ta được:

$$(a^3+2a)\vdots a^2\Rightarrow(a^2+2)\vdots a\Rightarrow 2\vdots a.$$

Do $a\in\mathbb{N}^*$ nên $a = 1$ hoặc $a = 2$.

+ Với $a = 1$, $b =1$ thì $k = a =1$. Khi đó $m = ad = 1$; $n = bd = 1$. Kiểm tra thấy $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n^2}=3$ là số nguyên (thoả mãn).

+ Với $a = 2$, $b =1$ thì $k = a = 2$; $d = ak = 2.2 = 4$. Khi đó $m = ad = 8$; $n = bd = 4$. Kiểm tra thấy $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n^2}=3$ là số nguyên (thoả mãn).

Vậy $(m, n) = (1, 1)$ và $(m, n) = (8; 4)$.

Nhận xét. Có nhiều bạn tham gia giải bài này và đa số giải theo cách trên. Một số bạn giải như sau:

$$P=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{m}{n^2}=\frac{m^2n+n^3+m^2}{mn^2}\Rightarrow Pmn=m^2+n^2+\frac{m^2}{n}.$$

Do P là số nguyên nên Pmn phải là số nguyên, suy ra $m^2\vdots n$, Từ đó $n\in\{1;m;m^2\}$. Rồi cũng dẫn đến quả. Tuy nhiên, suy luận này không đúng, chẳng hạn với $m = 6$, $n = 3$ thì $6^2\vdots 3$ nhưng $3\notin\{1;6;6^2\}$. Tuyên dương các bạn sau có lời tốt:

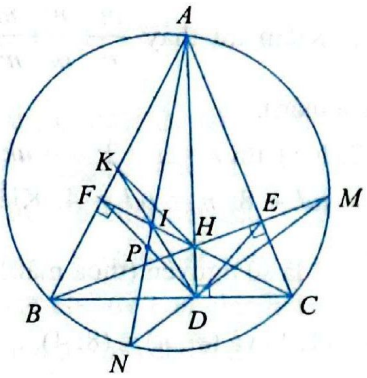
Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Phú Thọ**: *Chu Ngọc Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích; **Nghệ An**: *Nguyễn Thu Thủy*, 8D, THCS Đặng Thai Mai; *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Hàng Châu; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH&THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Gia Linh*, 8A, THCS Cẩm Xuyên, *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, Thành Sen; **Ninh Bình**: *Trịnh Gia Huy*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, Hoa Lư; **TP. Hồ Chí Minh**: *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa;

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Được quét bằng CamScanner

Bài T4/577. *Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi M là giao điểm của BH và đường tròn (O) (M khác B), N là giao điểm của MD và đường tròn (O) (N khác M), I là giao điểm của AN và HF, K là giao điểm của DI và AB. Chứng minh rằng HK song song với DF.*

Lời giải.



Dễ thấy E là trung điểm HM. Gọi P là giao điểm của hai đường DF và AN. Ta có tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\widehat{FAD}=\widehat{HED}$. Các tứ giác $CDHE$ và $CDFA$ nội tiếp nên

$$\widehat{DHE}=\widehat{DFA}=180^\circ-\widehat{ACB}.$$

Từ đó $\Delta AFD \backsim \Delta EHD$ (g.g), ta có:

$$\frac{AF}{EH}=\frac{DF}{DH} \quad (1).$$

Mặt khác, từ $\widehat{FAP}=\widehat{HMD}$ và $\widehat{PFA}=\widehat{DHM}$, suy ra $\Delta AFP \backsim \Delta MHD$ (g.g), ta có:

$$\frac{AF}{MH}=\frac{PF}{DH} \Leftrightarrow \frac{AF}{2HE}=\frac{PF}{DH} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $DF = 2PF$, hay P là trung điểm DF. Áp dụng định lí Ceva cho tam giác AFD có AP, DK, FH đồng quy tại I ta có:

$$\frac{PD}{PF}.\frac{KF}{KA}.\frac{HA}{HD}=1 \Leftrightarrow \frac{KA}{KF}=\frac{HA}{HD}.$$

Theo định lí Thales đảo ta có $HK // DF$.

Nhận xét. 1) Một số bạn kết luận $HK // DF$ dựa vào bổ đề hình thang.

2) Các bạn dưới đây cho lời giải tốt:

Quảng Trị: *Nguyễn Chính Quân*, 8/3, THCS Đồng Hải; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, Thành Sen; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Hùng Châu; **Lâm Đồng:** *Trần Đức Hiếu*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/577. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}$.*

Lời giải. Giả thiết tương đương với

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1.$$

Đặt $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$, ta có: $a,b,c>0$;

$ab+bc+ca=1$ và $S=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$\frac{b^2}{a}+a\geq 2b;\ \frac{c^2}{b}+b\geq 2c;\ \frac{a^2}{c}+c\geq 2a.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên và rút gọn, ta được:

$$S=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\geq a+b+c.$$

Do đó $S^2\geq (a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=3\Rightarrow S\geq\sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}.$$

Vậy $\min S=\sqrt{3}$, giá trị đó đạt được khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{3}$.

Nhận xét. 1) Ta có: $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\geq 0$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$, đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2) Một số bạn áp dụng BĐT

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

để suy ra $S=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\geq\frac{(b+c+a)^2}{a+b+c}=a+b+c.$

3) Có thể trình bày lời giải bằng cách khác như sau: Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

Được quét bằng CamScanner

$$\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\ge\frac{2}{y};\ \frac{y}{z^2}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{z};\ \frac{z}{x^2}+\frac{1}{z}\ge\frac{2}{x}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên, suy ra:

$$S=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow S^2\ge\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\ge3\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=3\Rightarrow S\ge\sqrt{3}.$$

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

TP. Hồ Chí Minh: *Lê Nguyễn Tuyết Minh*, 8A6, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên; **Ninh Bình:** *Trịnh Gia Huy*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, P. Hoa Lư; **Hà Nội:** *Nguyễn Phương Linh*, THCS Mỹ Hưng, Thanh Oai, *Hà Sỹ An*, 8A3, THCS Nguyễn Trãi A, Thường Tín, *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Kiên Giang:** *Đào Đức Phúc Nguyên*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Rạch Giá; **Lâm Đồng:** *Trần Đức Hiếu*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Cần Thơ:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Cần Thơ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, P. Thành Sen; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH&THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3, GIBS, TP. Graz.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/577. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{x}-3\sqrt{y}+\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}=0 & (1)\\ (x+1)\left(-y+4\sqrt[4]{xy^3}\right)=x^3+x^2+4 & (2)\end{cases}\quad (I).$$

Lời giải. (Của *Hà Sĩ An* và nhiều bạn khác)

ĐK: $\begin{cases}0\le x\le2\\ 0\le y\le2\end{cases}$ (II). Với điều kiện (II) ta có:

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x\cdot1}+\sqrt{(2-x)\cdot1}\le\frac{x+1}{2}+\frac{(2-x)+1}{2}=2.$$

Vậy $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\le2$.

Nếu $2\ge y>1$ thì $3\sqrt{y}>3$ và $0\le\sqrt{2-y}<1$ nên

$$3\sqrt{y}-\sqrt{2-y}>2.$$

Vậy (1) không có nghiệm với $y>1$.

Với $0\le y\le1$ và $0\le x\le2$ xét:

$$x+3y=x+y+y+y\ge4\sqrt[4]{xy^3}.$$

Suy ra:

$$4\sqrt[4]{xy^3}-y\le x+3y-y=x+2y\le x+2\ (\text{vì } 0\le y\le1).$$

Vậy: $(x+1)\left(-y+4\sqrt[4]{xy^3}\right)\le(x+1)(x+2)$

$$=x^2+3x+2\le x^3+x^2+4.$$

Thật vậy, với mọi $0\le x\le2$ ta có:

$$\left(x^3+x^2+4\right)-\left(x^2+3x+2\right)=x^3-3x+2$$

$$=(x+2)\left(x^2-2x+1\right)=(x+2)(x-1)^2\ge0$$

Suy ra: $x^3+x^2+4\ge x^2+3x+2$.

Do đó (2) xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Vậy hệ đã cho có duy nhất một cặp nghiệm là $x=1;y=1$. Thử lại (I) nghiệm đúng.

Nhận xét. 1) Tất cả các bạn đều sử dụng bất đẳng thức. Tuy nhiên, người ra đề đề nghị cách sử dụng đạo hàm, không phù hợp với học sinh lớp dưới.

2) Một bạn đã dùng cách đặt ẩn phụ: Vì $0\le x\le2,0\le y\le2$ nên đặt $x=2\cos^2t$, $y=2\sin^2t$. Không thể đặt như trên x và y là hai ẩn độc lập, đặt vậy là vô hình chung ta đã ràng buộc x và y thỏa mãn thêm một phương trình $x+y=2$, mặc dù "may mắn" là đáp số đúng.

3) Bài này quen thuộc nên nhiều bạn tham gia giải và giải đúng. **An Giang**: *Đào Đức Phúc Nguyên* 11T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Đà Nẵng**: *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên, TP. Đà Nẵng; **Hà Nội**: *Hà Sĩ An*, 8A3, THCS Nguyễn Trãi A, xã Thường Tín, *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; *Nguyễn Kim Thành*, 11 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, phường Thành Sen; *Nguyễn Trung Hải* 11T1, *Phan Viết Lê Huy*, 10 Toán 2, *Bùi Tùng Lâm* 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng**: *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Nghệ An**: *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Diễn; *Nguyễn Thu Thủy*, 8D, THCS Đặng Thai Mai; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Phú Thọ:** *NguyễnViết Cường*, 10A1, THPT Hạ Hòa; **Quảng Trị:** *Lê Ánh Dương*, 12 Toán 2, *Nguyễn Văn Hợp*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; *Nguyễn Hữu Vĩnh Thịnh*,

Được quét bằng CamScanner

12A1, THPT Vĩnh Linh; **TP. Hồ Chí Minh**: *Phan Duy Nguyễn*, 11TN1, THPT Trưng Phú, Củ Chi; *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Tháp:** *Hồ Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. Có một bạn không ghi tên.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/577. *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d ta luôn có:*

$$\frac{abc+bcd+cda+dab}{a+b+c+d} \le \frac{1}{4}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)} \le \frac{(a+b+c+d)^2}{16}.$$

Lời giải. Đặt $A=abc+bcd+cda+dab$, ta có:

$$A=ab(c+d)+cd(a+b) \le \frac{1}{4}(a+b)^2(c+d)+\frac{1}{4}(c+d)^2(a+b) = \frac{1}{4}(a+b)(c+d)(a+b+c+d).$$

Tương tự ta có: $A \le \frac{1}{4}(a+c)(b+d)(a+b+c+d)$

và $A \le \frac{1}{4}(a+d)(b+c)(a+b+c+d)$.

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta thu được:

$$A^3 \le \frac{1}{64}(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)(a+d)(b+c)(a+b+c+d)^3.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{abc+bcd+cda+dab}{a+b+c+d} = \frac{A}{a+b+c+d} \le \frac{1}{4}\sqrt[3]{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)(a+d)(b+c)}.$$

Lại có: $(a+b)(c+d).(a+c)(b+d).(a+d)(b+c)$

$$\le \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2.\left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2.\left(\frac{a+d+b+c}{2}\right)^2$$

hay

$$(a+b)(c+d).(a+c)(b+d).(a+d)(b+c) \le \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^6.$$

Suy ra:

$$\frac{1}{4}\sqrt[3]{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)(a+d)(b+c)} \le \frac{(a+b+c+d)^2}{16}.$$

Chứng minh hoàn tất.

Nhận xét. Đây là một bài toán bất đẳng thức có vẻ ngoài khá cồng kềnh nhưng lại tương đối dễ. Bất đẳng thức thứ hai có thể chứng minh ngắn gọn hơn bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 6 số. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Tĩnh: *Nguyễn Anh Dũng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Phúc Vĩnh Nguyên*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **An Giang:** *Đào Đức Phúc Nguyên*, 11T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phan Duy Nguyễn*, 11TN1, THPT Trưng Phú, Củ Chi; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Vĩnh Thịnh*, 12A1, THPT Vĩnh Linh; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Tiền Giang:** *Đỗ Nhật Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz;

Ngoài ra còn có bạn *Vũ Đức Duy*, công ty TNHH Thuế và Tư vấn PWC Việt Nam cũng tham gia giải bài và có lời giải đúng.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T8/577. *Ký hiệu a, b, c là độ dài các cạnh và S là diện tích tam giác ABC. Hãy chứng minh rằng:* $a^2\cos\frac{A}{2}+b^2\cos\frac{B}{2}+c^2\cos\frac{C}{2} \ge 6S$.

Lời giải. Cách 1. Do $\sin\frac{B+C}{2}>0$ nên

$$\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2} \ge \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2}(\sin B+\sin C).$$

Tương tự ta thu được:

$$a^2.\cos\frac{A}{2}+b^2.\cos\frac{B}{2}+c^2.\cos\frac{C}{2} \ge \frac{a^2}{2}.(\sin B+\sin C)+\frac{b^2}{2}.(\sin A+\sin C)+\frac{c^2}{2}.(\sin A+\sin B)$$

$$= \frac{1}{2}\sin A.(b^2+c^2)+\frac{1}{2}\sin B.(a^2+c^2)+\frac{1}{2}\sin C.(a^2+b^2) \ge bc.\sin A+ac.\sin B+ab.\sin C = 2S+2S+2S=6S.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Cách 2 (dựa theo lời giải của bạn *Nguyễn Chánh Thiện*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**).

Được quét bằng CamScanner

Gọi l_a, h_a lần lượt là độ dài đường phân giác và đường cao ứng với đỉnh A. Theo công thức tính độ dài đường phân giác và đường cao, ta có:

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2},\ h_a=\frac{2S}{a}.$$

Mà $l_a\ge h_a$ nên $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\ge\frac{2S}{a}$. Suy ra:

$$\cos\frac{A}{2}\ge\frac{S(b+c)}{abc}.$$

Tương tự: $\cos\frac{B}{2}\ge\frac{S(a+c)}{abc}$, $\cos\frac{C}{2}\ge\frac{S(a+b)}{abc}$ nên bài toán đưa về chứng minh:

$$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\ge 6abc.$$

Kết quả này hiển nhiên đúng theo BĐT Cauchy. Dấu đẳng thức xảy ra khi giác ABC đều.

Nhận xét. Hầu hết các lời giải gửi về tòa soạn đều đúng. Ngoài hai lời giải trên, có thể sử dụng hệ quả của định lý côsin, công thức Hêrông để đưa về BĐT đại số. Ngoài bạn *Thiện*, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt: **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Khang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Trị:** *Hoàng Hà Uyên Nhi*, 10T1; *Lê Ánh Dương*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; *Nguyễn Hữu Vĩnh Thịnh*, 12A1, THPT Vĩnh Linh; **Hà Tĩnh:** *Bùi Tùng Lâm*, 10T1; *Nguyễn Trung Hải*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đường Minh Bằng*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tôn; *Phan Duy Nguyễn*, THPT Trung Phú, Củ Chi; **Gia Lai:** *Lương Xuân Nghĩa*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; thị xã Hoàng Mai; **Đắk Lắk:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 12T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Viết Cường*, 11A1, THPT Hạ Hòa.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/577. *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $11x^2-3xy+y^2=9$, đồng thời $x^2-3xy+y^2$ là một số nguyên tố.*

Lời giải. Đặt $x^2-3xy+y^2=p$ với p là số nguyên tố. Ta có: $11x^2-3xy+y^2=9\Leftrightarrow 10x^2+p=9$ (*).

Nếu $x=0$ thì từ (*) suy ra $p=9$, vô lý vì p là số nguyên tố.

Nếu $x\ne 0$ thì VT(*) $\ge 10>9$.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. 1) Bài toán trên khá đơn giản nên hầu hết các bạn đều có lời giải đúng. Các bạn có thể tiếp tục khai thác bài toán sau (bài toán gốc của tác giả đề toán): *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $11x^2-xy+y^2=9$, đồng thời $x^2-3xy+y^2$ là một số nguyên tố.*

2) Các bạn có lời giải đúng là: **Hà Nội:** *Hà Sĩ An*, 8A3, THCS Nguyễn Trãi, xã Thường Tín; *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; *Nguyễn Kim Thành*, 11 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thanh Mai*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích; xã Vạn Xuân; *Nguyễn Viết Cường*, 11A1, THPT Hạ Hòa; **Thanh Hóa:** *Lê Phú Đạt*, 9B, THCS Thị trấn Cành Nàng, Bá Thước; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Văn*, 11A1, THPT Yên Thành 2; *Nguyễn Thái Dũng*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Anh Dũng*, *Nguyễn Trung Hải*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, *Ngô Bùi Anh Khoa*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, phường Thành Sen; **Quảng Trị:** *Nguyễn Chính Quân*, 8^2, THCS Đồng Hải; *Hoàng Hà Uyên Nhi*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên, TP. Đà Nẵng; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, *Phạm Quang Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **An Giang:** *Đào Đức Phúc Nguyên*, 11T1, *Nguyễn Hoài Nhanh*, *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Long An:** *Lê Nguyễn Anh Thư*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Tiền Giang:** *Võ Đặng Quang Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Tháp:**

Được quét bằng CamScanner

Hồ Thành Đạt, 11T1, *Nguyễn Đức Phát*, *Huỳnh Phúc Vĩnh Nguyên*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phan Duy Nguyễn*, 11TN1, THPT Trung Phú, Củ Chi; **Cần Thơ:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Cần Thơ; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz;

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/577. *Cho dãy số* (x_n) *thỏa mãn*

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{8}{x_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Với mỗi số nguyên dương n, ta đặt:

$$a_n = \frac{x_n + \sqrt{x_n^2 - 16}}{2}, b_n = \frac{x_n - \sqrt{x_n^2 - 16}}{2}.$$

1) Chứng minh dãy số (a_n) *là dãy số giảm và dãy số* (b_n) *là dãy số tăng.*

2) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Lời giải (của bạn *Bùi Tùng Lâm*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**)

1) Bằng quy nạp dễ chứng minh: $x_n \geq 4, \forall n \geq 1$.

Từ đó: $x_{n+1} - x_n = \dfrac{8}{x_n} - \dfrac{x_n}{2} \leq \dfrac{8}{4} - \dfrac{4}{2} = 0$. Do đó (x_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 4, do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Chuyển qua giới hạn trong hệ thức truy hồi của dãy (x_n) ta được: $L = \dfrac{L}{2} + \dfrac{8}{L} \Rightarrow L = 4$.

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 16}}{2}$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 - 16}} \geq 0, \forall x \geq 4.$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $[4; +\infty)$. Ta có $a_n = f(x_n)$.

Vì $x_n \geq 4, (x_n)$ là dãy số giảm nên

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n.$$

Vậy (a_n) là dãy số giảm.

Tương tự xét hàm số: $g(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 16}}{2}$, ta có:

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{x^2 - 16}} \leq 0, \forall x \geq 4.$$

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên $[4; +\infty)$.

Ta có $b_n = g(x_n)$. Vì $x_n \geq 4, (x_n)$ là dãy số giảm nên $g(x_{n+1}) \geq g(x_n) \Leftrightarrow b_{n+1} \geq b_n$.

Vậy (b_n) là dãy số tăng.

2) Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(4) = 2$;

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(4) = 2.$$

Nhận xét. Bài này được nhiều bạn tham gia giải với một số cách giải khác nhau. Các bạn có lời giải tốt là: **Gia Lai:** *Lương Xuân Nghĩa*, 10, THPT Chi Lăng; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Hợp*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** *Mạc Vĩnh Lộc*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT Lương Văn Chánh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phan Duy Nguyễn*, 11TN1, THPT Trung Phú, Củ Chi, *Đường Minh Bằng*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Đồng Tháp:** *Hồ Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/577. *Cho hàm số* $f(x)$ *xác định và liên tục trên đoạn* $[0, 1]$ *và có đạo hàm trên khoảng* $(0, 1)$ *thỏa mãn điều kiện* $f(0) = f(1) > 0$. *Chứng minh rằng tồn tại số* $c \in (0,1)$ *sao cho*

$$f'(c) + 2cf(c) < 2f(1) \quad (1).$$

Lời giải. (Dựa theo ý của đa số các bạn)

$g(x) := f(x)e^{x^2}$ là hàm liên tục trên đoạn $[0,1]$, có đạo hàm trên khoảng $(0; 1)$ và

$$g'(x) = e^{x^2}(f'(x) + 2xf(x)).$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho:

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(c)$$

hay $e^{c^2}(f'(c) + 2cf(c)) = f(1)(e - 1)$

Được quét bằng CamScanner

$$\Leftrightarrow f'(c)+2cf(c)=\frac{f(1)(e-1)}{e^{c^2}} \quad (2).$$

Do $e-1<2$ và $e^{c^2}>1$ nên từ (2) suy ra:

$$f'(c)+2cf(c)=\frac{f(1)(e-1)}{e^{c^2}}<f(1)(e-1)<2f(1).$$

Vậy (1) được chứng minh.

Nhận xét. Đây là dạng toán đơn giản về ứng dụng định lý Lagrange để chứng minh BĐT. Đa số các bạn giải theo cách đã trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bình Phước: *Hồ Dương Đức Đạt*, 11T11, THPT chuyên Bình Long; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; **Gia Lai:** *Lương Xuân Nghĩa*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Tùng Duy*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, *Ngô Bửu Anh Khoa*, 11T1, *Phan Viết Lê Huy*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **An Giang:** *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/577. *Cho tứ diện $OXYZ$ và số $k>0$. Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn YZ, ZX, XY. Các điểm A, B, C theo thứ tự chạy trên các đoạn OX, OY, OZ sao cho:*

$$V_{AXNP}+V_{BYPM}+V_{CZMN}=k.$$

Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ chạy trên một mặt phẳng cố định.

Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Trong không gian cho điểm O, vectơ $\vec{a}$ và số k. Khi đó tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}.\vec{a}=k$ là một mặt phẳng.*

Phép chứng minh bổ đề 1, không trình bày ở đây.

Bổ đề 2. *Cho các đường thẳng $x'x, y'y, z'z$ không đồng phẳng và đồng quy tại O, cho các số a, b, c. Các điểm A, B, C theo thứ tự chạy trên $x'x, y'y, z'z$ sao cho $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=1$. Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ chạy trên một mặt phẳng cố định.*

Chứng minh. Gọi I là tâm mặt cầu $OABC$, gọi $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ theo thứ tự là vectơ đơn vị định hướng các đường thẳng $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$, gọi H, K, L theo thứ tự là hình chiếu của I trên $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ Theo định lí hình chiếu, dễ thấy:

$$\overrightarrow{OI}.(a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3})=a\overrightarrow{OI}.e_1+b\overrightarrow{OI}.e_2+c\overrightarrow{OI}.e_3$$

$$=a.\overrightarrow{OH}+b.\overrightarrow{OK}+c.\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}.$$

Do đó, theo bổ đề 1, I chạy trên một mặt phẳng cố định.

Trở lại giải bài toán T12.

Trong lời giải này, kí hiệu V_{OUVW} chỉ thể tích của tứ diện $OUVW$.

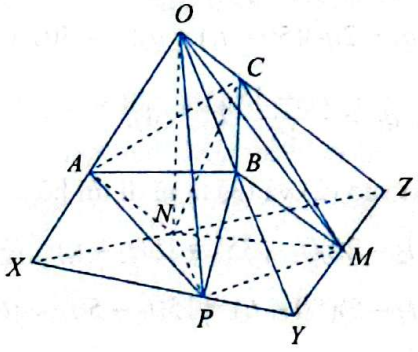
Dễ thấy: $k=V_{AXNP}+V_{BYPM}+V_{CZMN}$

$$=V_{OXNP}\frac{V_{AXNP}}{V_{OXNP}}+V_{OYPM}\frac{V_{BYPM}}{V_{OYPM}}+V_{OZMN}\frac{V_{CZMN}}{V_{OZMN}}$$

$$=V_{OXNP}\frac{AX}{OX}+V_{OYPM}\frac{BY}{OY}+V_{OZMN}\frac{CZ}{OZ}$$

$$=V_{OXNP}\left(1-\frac{OA}{OX}\right)+V_{OYPM}\left(1-\frac{OB}{OY}\right)+V_{OZMN}\left(1-\frac{OC}{OZ}\right).$$

Do đó: $\dfrac{\frac{V_{OXNP}}{OX}.OA+\frac{V_{OYPM}}{OY}.OB+\frac{V_{OZMN}}{OZ}.OC}{V_{OXNP}+V_{OYPM}+V_{OZMN}-k}=1.$



Được quét bằng CamScanner

Vậy, theo bổ đề 2, tâm mặt cầu ngoại tiếp I của tứ diện $OABC$ chạy trên một mặt phẳng cố định.

Nhận xét. Bài toán này khó, không có bạn nào tham gia giải.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/577. *Có hai bình, mỗi bình đựng một chất lỏng nào đó. Một học sinh lần lượt múc từng ca chất lỏng ở bình 2 trút vào bình 1 và ghi lại nhiệt độ khi cân bằng ở bình 1 sau mỗi lần trút: 20°C, 35°C, rồi bỏ sót mất một lần không ghi, rồi 50°C. Hãy tính nhiệt độ khi có cân bằng nhiệt ở lần bị bỏ sót không ghi, và nhiệt độ của mỗi ca chất lỏng lấy từ bình 2 trút vào. Coi nhiệt độ và khối lượng của mỗi ca chất lỏng lấy từ bình 2 đều như nhau. Bỏ qua sự trao đổi nhiệt với môi trường.*

Lời giải. Theo đề bài, nhiệt độ ở bình 1 tăng dần chứng tỏ nhiệt độ mỗi ca chất lỏng trút vào cao hơn nhiệt độ bình 1 và mỗi ca chất lỏng trút vào lại truyền cho bình 1 một nhiệt lượng.

Gọi q_1 là nhiệt dung tổng cộng của bình 1 và các chất lỏng sau lần trút thứ nhất (ở 20°C), q_2 là nhiệt dung của mỗi ca chất lỏng trút vào, t_2 là nhiệt độ mỗi ca chất lỏng đó và t_x là nhiệt độ bị bỏ sót không ghi.

Ta có các phương trình cân bằng nhiệt ứng với 3 lần trút cuối:

$$q_1(35-20) = q_2(t_2-35) \quad (1);$$

$$(q_1+q_2)(t_x-35) = q_2(t_2-t_x) \quad (2);$$

$$(q_1+2q_2)(50-t_x) = q_2(t_2-50) \quad (3).$$

Từ (1) : $q_1 = \dfrac{t_2-35}{15}.q_2$ (4).

Thay (4) vào (2) và (3) ta sẽ đi tới hệ :

$$(t_2-20)(t_x-35) = 15(t_2-t_x) \quad (5);$$

$$(t_2-5)(50-t_x) = 15(t_2-50) \quad (6).$$

Giải hệ (5) và (6) ta sẽ được:

$$t_2 = 80^\circ\text{C};\ t_x = 44^\circ\text{C}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Lê Khánh Hà, Trương Khánh Toàn, Đinh Văn Trường*, 11 lý, *Đặng Văn Mạnh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

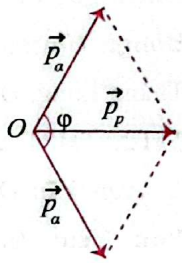
ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/577. *Hạt prôtôn có động năng $W_{đp} = 2$ MeV bắn vào hạt nhân ^7_3Li đang đứng yên, sau phản ứng thu được hai hạt α có cùng động năng $W_{đ\alpha} = 8{,}2$ MeV. Cho khối lượng hạt nhân $m_p = 1{,}007$ amu; $m_{Li} = 7{,}014$ amu; $m_{He} = 4{,}002$ amu. Tính góc hợp bởi hướng chuyển động của hai hạt α.*

Lời giải. Phương trình phản ứng hạt nhân:

$$^1_1\text{p} + {}^7_3\text{Li} \to 2\,{}^4_2\text{He}$$

Giản đồ vectơ mô tả mối liên hệ về động của các hạt tham gia phản ứng hạt nhân và các hạt sản phẩm như hình dưới:



Từ hình vẽ ta có:

$$\vec{p}_p = \vec{p}_\alpha + \vec{p}'_\alpha\ ;\ \vec{p}_\alpha = \vec{p}'_\alpha\ ;\ \left(\vec{p}_\alpha\ ;\vec{p}'_\alpha\right) = \varphi.$$

$$\Rightarrow p_p^2 = 2p_\alpha^2 + 2p_\alpha^2\cos\varphi$$

$$= 2p_\alpha^2(1+\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow m_p W_{đp} = 2m_\alpha W_{đ\alpha}(1+\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{m_p W_{đp}}{2m_\alpha W_{đ\alpha}} - 1 = \frac{1{,}007.2}{2.4{,}002.8{,}2} - 1$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = -0{,}9693.$$

Vậy $\varphi \approx 165^o46'$.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng: *Đặng Văn Mạnh*, 11 Toán 1; *Trương Khánh Toàn, Đinh Văn Trường*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Được quét bằng CamScanner



ỨNG DỤNG MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG TRÒN ĐỂ CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM ĐỒNG VIÊN, THẲNG HÀNG VÀ CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

NGUYỄN CỬU HUY
(Hiệu trưởng Trường THPT Trần Phú, Đà Nẵng)

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày một vài tính chất thú vị của đường tròn và mối quan hệ của nó để chứng minh các điểm đồng viên, các điểm thẳng hàng và các đường thẳng đồng quy đối với một số bài toán thường xuất hiện tại các kì thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế. Việc chứng minh các định lí, bổ đề sử dụng dưới đây dành cho bạn đọc.

1. PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI ĐƯỜNG TRÒN, CỰC VÀ ĐỐI CỰC

Định lí 1.1 (định lí về mối tương giao dây cung). *Cho (C) là một đường tròn và P là một điểm không nằm trên (C). Nếu (d) là một đường thẳng qua P và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A và B, thì đại lượng $PA\cdot PB$ chỉ phụ thuộc vào (C) và điểm P mà không phụ thuộc vào đường thẳng (d). Nói cách khác, nếu có một đường thẳng khác qua P mà cắt (C) tại A' và B' thì*

$$PA\cdot PB = PA'\cdot PB'.$$

Trong trường hợp P nằm ngoài đường tròn, thì $PA\cdot PB = PT^2 = OP^2 - R^2$, trong đó O và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn, PT là tiếp tuyến của đường tròn tại điểm T. Trường hợp P nằm trong đường tròn thì $PA\cdot PB = R^2 - OP^2$.

Định lí 1.2 (định lí đảo về mối tương giao dây cung). *Nếu các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại P và $PA\cdot PB = PC\cdot PD$, thì các điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn.*

Định nghĩa 1.1 (phương tích của một điểm đối với đường tròn). *Cho đường tròn (C) tâm O và bán kính R. Phương tích của điểm P đối với đường tròn (C) là số $OP^2 - R^2$.*

Phương tích của P là âm nếu P ở trong (C), bằng không nếu P nằm trên (C), và dương nếu P ở bên ngoài (C). Trong trường hợp này, ta có:

$$\left|OP^2 - R^2\right| = PA\cdot PB.$$

Định nghĩa 1.2. *Cho đường tròn (C_1) tâm O_1, bán kính R_1 và đường tròn (C_2) tâm O_2, bán kính R_2. Trục đẳng phương của hai đường tròn (C_1) và (C_2) là đường thẳng vuông góc với O_1O_2. Trục đẳng phương của ba đường tròn phân biệt là đồng quy hoặc song song với nhau. Nếu đồng quy, thì giao điểm của ba trục đó được gọi là tâm đẳng phương.*

Định nghĩa 1.3. *Cho đường tròn (C) tâm O và một điểm P khác O, cho P' là điểm nghịch đảo của P đối với đường tròn (C), nghĩa là, P' là một điểm trên tia OP sao cho $OP\cdot OP' = R^2$, trong đó R là bán kính của (C). Đường thẳng l vuông góc với OP và đi qua P' được gọi là đối cực của điểm P đối với (C), và điểm P được gọi là cực của l đối với (C).*

Định lí 1.3 (định lí La Hire). *Cho x, y lần lượt là các đối cực của X và Y. Khi đó X nằm trên đường thẳng y khi và chỉ khi Y nằm trên đường thẳng x.*

Bổ đề 1.1 (định lí 4 điểm). *Cho A, B, P, Q là bốn điểm phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó $AB\perp PQ$ khi và chỉ khi $PA^2 - PB^2 = QA^2 - QB^2$.*

Bổ đề 1.2. *Cho (C) là một đường tròn và P, Q là các điểm khác tâm của (C). Nếu đối cực của P*

Được quét bằng CamScanner

đối với (C) đi qua Q thì đối cực của Q đối với (C) đi qua P.

Bổ đề 1.3. *Cho (C) là một đường tròn và P là một điểm nằm ngoài (C). Từ P vẽ các tiếp tuyến PX và PY của đường tròn (C), X và Y là các tiếp điểm. Gọi P' là giao điểm của OP với XY, $OP \perp XY$. Khi đó đối cực l của P là đường thẳng XY.*

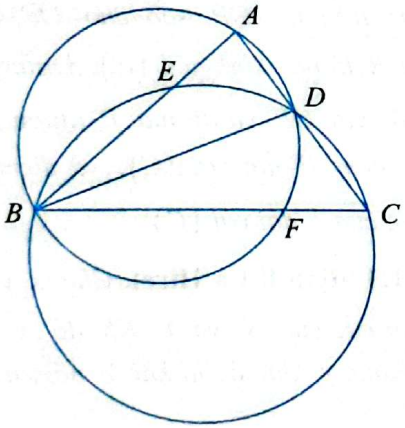
Bổ đề 1.4. *Cho x, y, z lần lượt là các đối cực của các điểm phân biệt X, Y, Z. Khi đó $Z = x \cap y$ khi và chỉ khi $z = XY$.*

Bổ đề 1.5. *Cho bốn điểm W, X, Y, Z nằm trên đường tròn. Khi đó, đối cực l của $P = XY \cap WZ$ là đường thẳng đi qua $Q = WX \cap ZY$ và $R = XZ \cap YW$.*

2. MỘT VÀI THÍ DỤ

Thí dụ 2.1. *Cho BD là phân giác của góc B trong tam giác ABC với D nằm trên cạnh AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDC cắt AB tại E, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt BC tại F. Chứng minh rằng $AE = CF$.*

Lời giải.



Theo định 1.1, ta có $AE \cdot AB = AD \cdot AC$, hay

$$AE = \frac{AD \cdot AC}{AB} \quad (1).$$

Tương tự, ta có $CF \cdot CB = CD \cdot CA$ và do đó

$$CF = \frac{CD \times CA}{CB} \quad (2).$$

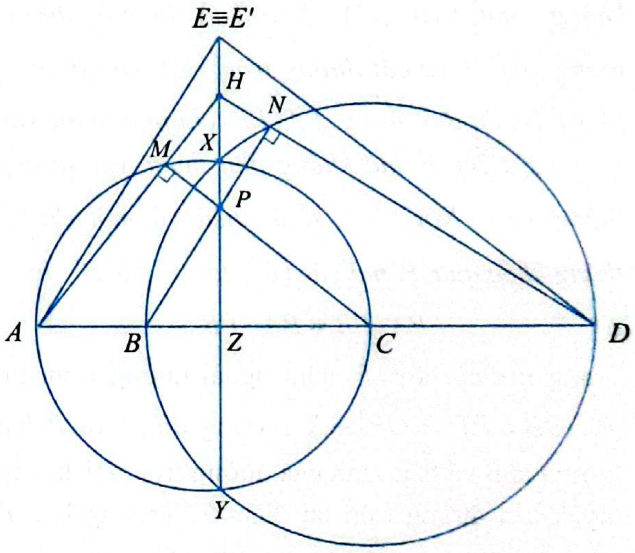
Chia (1) cho (2), ta nhận được:

$$\frac{AE}{CF} = \frac{AD \cdot CB}{AB \cdot CD} = 1,$$

đẳng thức này là đúng vì $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CB}$ theo định lí đường phân giác (đpcm).

Thí dụ 2.2 (IMO 1995-1). *Cho A, B, C, D là bốn điểm phân biệt theo thứ tự nằm trên một đường thẳng. Các đường tròn với đường kính AC và BD cắt nhau tại các điểm X, Y. Đường thẳng XY cắt BC tại điểm Z. Gọi P là một điểm trên đường thẳng XY khác điểm Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại các điểm C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại các điểm B và N. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, DN và XY là đồng quy.*

Lời giải.



Vẽ DE song song với CM cắt XY tại E, vẽ AE' song song với BN cắt XY tại E'. Ta khẳng định rằng $E = E'$. Thật vậy, ta có:

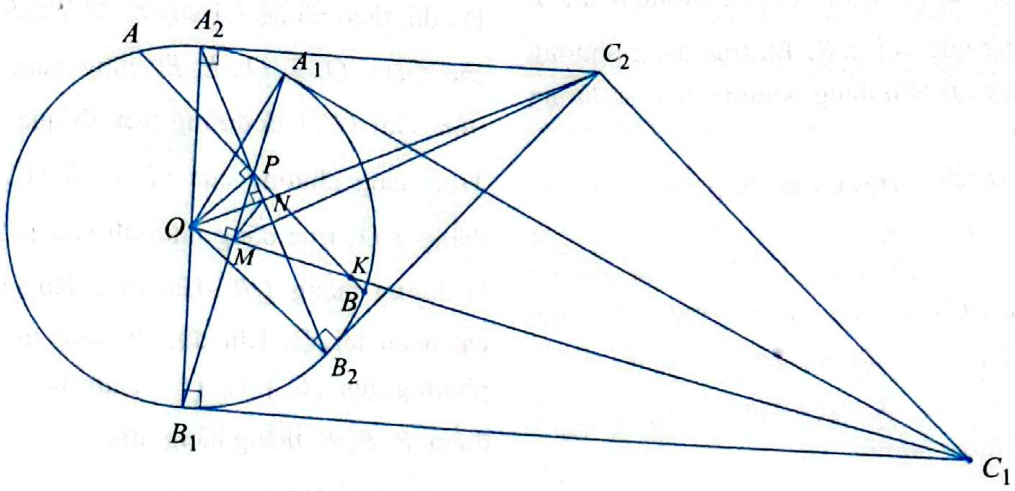
$$\frac{ZE'}{ZE} = \frac{ZE'}{ZP} \cdot \frac{ZP}{ZE} = \frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{ZC}{ZD} \quad (3).$$

Theo định lí 1.1, $ZA \cdot ZC = ZX \cdot ZY = ZB \cdot ZD$. Do đó, từ (3) có $ZE = ZE'$ và như vậy $E \equiv E'$. Do AM, DN, XY là các đường cao của tam giác ADE nên chúng đồng quy (đpcm).

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 2.3. *Cho AB là một dây cung của đường tròn mà không phải là đường kính. Các dây cung A_1B_1 và A_2B_2 cắt nhau tại trung điểm P của AB. Gọi các tiếp tuyến của đường tròn tại A_1 và B_1 cắt nhau tại C_1. Tương tự, gọi các tiếp tuyến của đường tròn tại A_2 và B_2 cắt nhau tại C_2. Chứng minh rằng C_1C_2 song song với AB.*

Lời giải.



Gọi O là tâm của đường tròn, OC_1 cắt A_1B_1 tại M, OC_2 cắt A_2B_2 tại N, OC_1 cắt AB tại K. Rõ ràng, OM và ON lần lượt là các đường trung trực của A_1B_1 và A_2B_2. Vì vậy, $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 90^0$, nên các điểm O, M, P, N nằm trên đường tròn. Điều này kéo theo:

$$\widehat{ONM} = \widehat{OPM} = 90^0 - \widehat{MOP} = \widehat{OKA}.$$

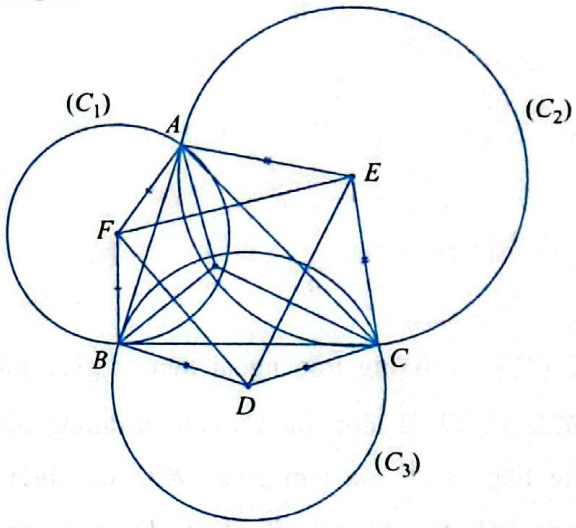
Tiếp theo, ta khẳng định rằng các điểm M, C_1, C_2, N nằm trên đường tròn. Trước hết, ta giả sử khẳng định là đúng, suy ra $\widehat{OC_1C_2} = \widehat{ONM} = \widehat{OKA}$ và do đó $C_1C_2 \,//\, AB$. Ta chỉ ra các điểm M, C_1, C_2, N nằm trên đường tròn. Để ý rằng ΔOA_1C_1 và ΔOB_2C_2 là hai tam giác vuông, nên

$$OM \cdot OC_1 = OA_1^2 = OB_2^2 = ON \cdot OC_2.$$

Do đó, theo định lí 1.2, các điểm M, C_1, C_2, N nằm trên đường tròn (đpcm).

Thí dụ 2.4 (USAMO 1997). *Cho tam giác ABC, vẽ bên ngoài tam giác ABC các tam giác cân BCD, CAE, ABF với các cạnh đáy tương ứng BC, CA, AB. Chứng minh các đường thẳng đi qua A, B, C lần lượt vuông góc với các đường thẳng EF, FD, DE là đồng quy.*

Lời giải.



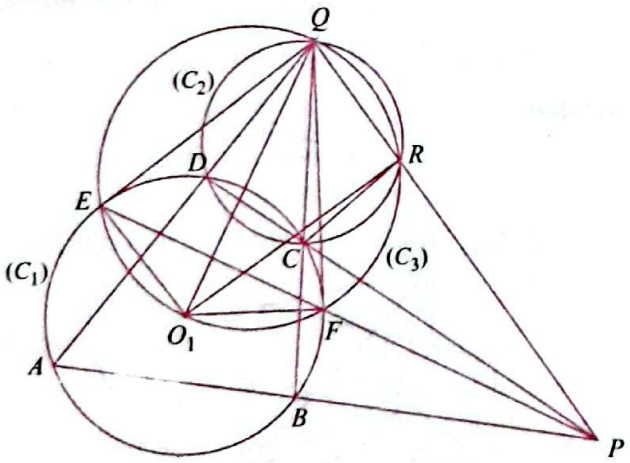
Gọi (C_1) là đường tròn với tâm D, bán kính DB; (C_2) là đường tròn với tâm E, bán kính EC; (C_3) là đường tròn với tâm F, bán kính FA. Ta khẳng định rằng ba đường thẳng cần chứng minh là đồng quy chính là các trục đẳng phương của ba cặp đường tròn $((C_1),(C_2)), ((C_2),(C_3))$ và $((C_3),(C_1))$. Vì A là một trong số các giao điểm của các đường tròn (C_2) và (C_3), nên trục đẳng phương

Được quét bằng CamScanner

của (C_2) và (C_3) là một đường thẳng đi qua A vuông góc với đường thẳng nối các tâm E và F. Tương tự, trục đẳng phương của (C_3) và (C_1) là đường thẳng đi qua B vuông góc FD, và trục đẳng phương của (C_1) và (C_2) là đường thẳng đi qua C vuông góc với DE. Ba trục đẳng phương này đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn (đpcm).

Thí dụ 2.5 (CMO 1997). *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn. Giả sử các đường thẳng AB và DC cắt nhau tại P và các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại Q. Từ Q kẻ hai tiếp tuyến QE và QF đến đường tròn, trong đó E, F là các tiếp điểm. Chứng minh rằng các điểm P, E, F là thẳng hàng.*

Lời giải.



Gọi (C_1) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác giác $ABCD$ và O_1 là tâm của nó. Giả sử đường tròn ngoại tiếp (C_2) của tam giác QCD cắt đường thẳng PQ tại Q và R. Khi đó các điểm P, R, C, B nằm trên đường tròn bởi vì $\widehat{PRC} = \widehat{QDC} = \widehat{ABC}$. Ta chứng tỏ rằng $O_1R \perp PQ$ theo bổ đề 1.1 nêu trên. Thật vậy, áp dụng định lí 1.1, ta có:

$$O_1P^2 - R_1^2 = PC \cdot PD = PR \cdot PQ \quad (1)$$

và $O_1Q^2 - R_1^2 = QC \cdot QB = QR \cdot QP$ (2),

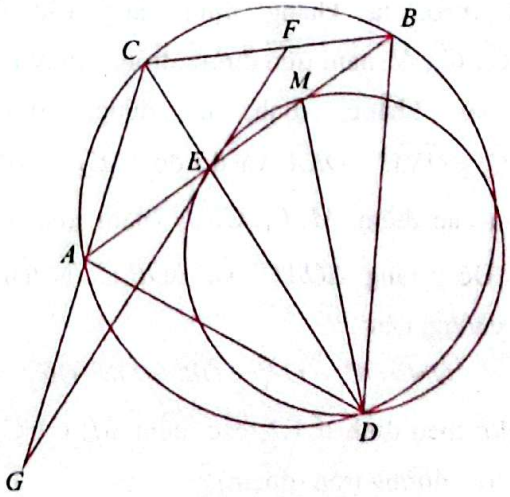
trong đó R_1 là bán kính của đường tròn (C_1). Lấy (1) trừ cho (2), ta nhận được:

$$\begin{aligned} O_1P^2 - O_1Q^2 &= PR \cdot PQ - QR \cdot QP \\ &= PQ \cdot (PR - QR) \\ &= (PR + QR)(PR - QR) \\ &= PR^2 - QR^2. \end{aligned}$$

Do đó, theo bổ đề 1.1 suy ra $O_1R \perp PQ$, nghĩa là các điểm Q, F, O_1, E, R cũng nằm trên đường tròn. Gọi (C_3) là đường tròn đi qua 5 điểm này. Trục đẳng phương của (C_1) và (C_2) là đường thẳng CD, trục đẳng phương của (C_2) và (C_3) là đường thẳng QR. Hai trục đẳng phương này cắt nhau tại P. Khi đó, P nằm trên trục đẳng phương của (C_3) và (C_1), tức là EF. Vậy các điểm P, E, F thẳng hàng (đpcm).

Thí dụ 2.6 (IMO 1990-1). *Các dây cung AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại một điểm E ở bên trong đường tròn. Gọi M là một điểm nằm bên trong đoạn thẳng EB. Đường thẳng tiếp xúc tại E của đường tròn đi qua D, E và M lần lượt cắt các đường thẳng BC và AC tại F và G. Nếu $\frac{AM}{AB} = t$, hãy tìm $\frac{EG}{EF}$ theo t.*

Lời giải.



Để ý rằng $\widehat{MAD} = \widehat{ECF}$ và $\widehat{AMD} = \widehat{DEG} = \widehat{CEF}$ suy ra: $\Delta AMD \sim \Delta CEF$ và có $\frac{EF}{CE} = \frac{MD}{AM}$.

Do đó: $EF = \frac{MD \cdot CE}{AM}$ (1).

Được quét bằng CamScanner

Tương tự, vì $\widehat{GCE} = \widehat{DBM}$

và $\widehat{CEG} = \widehat{CEA} + \widehat{AEG} = \widehat{DEM} + \widehat{BEF}$

$= \widehat{DEM} + \widehat{MDE} = \widehat{BMD}$

nên $\Delta CEG \sim \Delta BMD$. Suy ra:

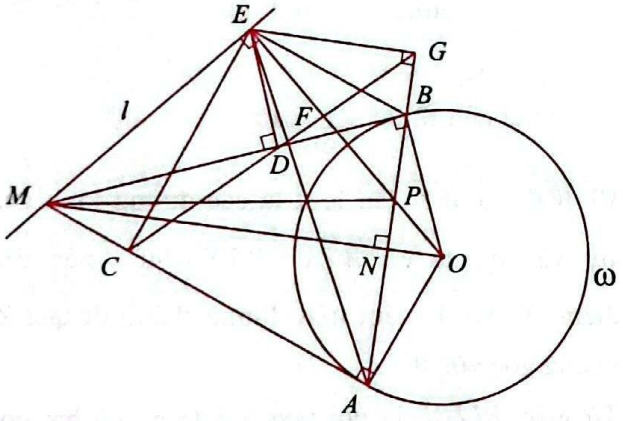
$$\frac{GE}{CE} = \frac{DM}{BM} \text{ hay } GE = \frac{DM \cdot CE}{BM} \quad (2).$$

Chia (2) cho (1), ta nhận được:

$$\frac{GE}{EF} = \frac{AM}{BM} = \frac{t}{1-t}.$$

Thí dụ 2.7. *Một đường thẳng l không cắt đường tròn ω với tâm O. Cho E là một điểm trên l sao cho OE vuông góc với l. Cho M là một điểm bất kỳ trên l khác điểm E. Các tiếp tuyến kẻ từ M đến đường tròn ω tiếp xúc tại các điểm A và B. Gọi C là một điểm trên MA sao cho EC vuông góc với MA. Gọi D là một điểm trên MB sao cho ED vuông góc với MB. Đường thẳng CD cắt OE tại F. Chứng minh rằng vị trí của điểm F không phụ thuộc vào M.*

Lời giải.



Do MA, MB là các tiếp tuyến của đường tròn ω tại A và B, nên ta nhận được $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^0$ và $OM \perp AB$. Gọi N, P lần lượt là các giao điểm của AB với OM và OE. Vì M, E, P, N nằm trên đường tròn đường kính MP nên $OP.OE = ON \cdot OM = OB^2 = r^2$, trong đó r là bán kính của ω. Do đó P là một điểm cố định (P là cực của l).

Gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ E lên AB.

Do $\widehat{OBM} = \widehat{OAM} = \widehat{OEM} = 90^0$ nên O, B, M, E, A nằm trên đường tròn, vì vậy theo định lí Simson, các điểm C, D, G thẳng hàng.

Vì A, C, E, G nằm trên đường tròn đường kính AE nên nhận được:

$$\widehat{EGF} = \widehat{EGC} = \widehat{EAC} = \widehat{EAM} \quad (1).$$

Lại do O, M, E, A nằm trên đường tròn và OM song song EG nên ta có:

$$\widehat{EAM} = \widehat{EOM} = \widehat{OEG} = \widehat{FEG} \quad (2).$$

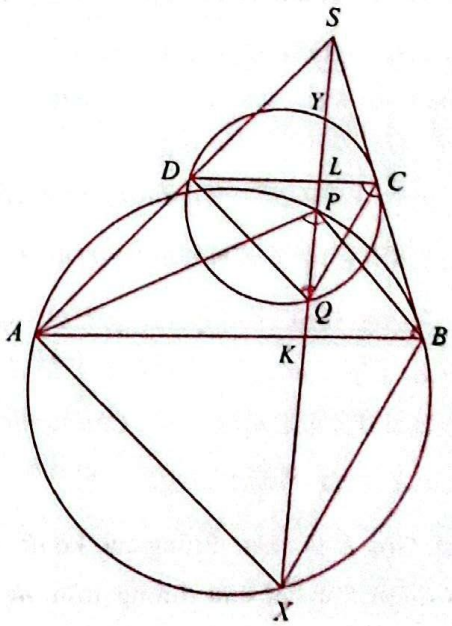
Từ (1) và (2) có: $\widehat{EGF} = \widehat{FEG}$ (3).

Vì $\widehat{EGP} = 90^0$ nên có: $\widehat{FGP} = \widehat{FPG}$ (4).

Từ (3) và (4) ta có $EF = FG = FP$. Như vậy F là trung điểm của EP. Do đó F là một điểm cố định (đpcm).

Thí dụ 2.8 (IMOSL-2006). *Cho $ABCD$ là một hình thang với các cạnh song song $AB > CD$. Các điểm K và L lần lượt nằm trên các đoạn thẳng AB và CD sao cho $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Giả sử có các điểm P và Q nằm trên đoạn thẳng KL thỏa mãn $\widehat{APB} = \widehat{BCD}$ và $\widehat{CQD} = \widehat{ABC}$. Chứng minh rằng các điểm P, Q, B, C nằm trên đường tròn.*

Lời giải.



Được quét bằng CamScanner

Vì $AB \parallel CD$ và do $\frac{AK}{KB}=\frac{DL}{LC}$ nên dễ dàng suy ra các đường thẳng AD, BC và KL có một điểm chung S. Xét các giao điểm thứ hai X và Y của đường thẳng SK với các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP và CDQ tương ứng. Vì $APBX$ là tứ giác nội tiếp và $AB \parallel CD$ nên ta có:

$$\widehat{AXB}=180^0-\widehat{APB}=180^0-\widehat{BCD}=\widehat{ABC}.$$

Điều này chứng tỏ BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP tại B. Tương tự, BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDQ tại C. Do đó:

$$SP\cdot SX=SB^2 \text{ và } SQ\cdot SY=SC^2.$$

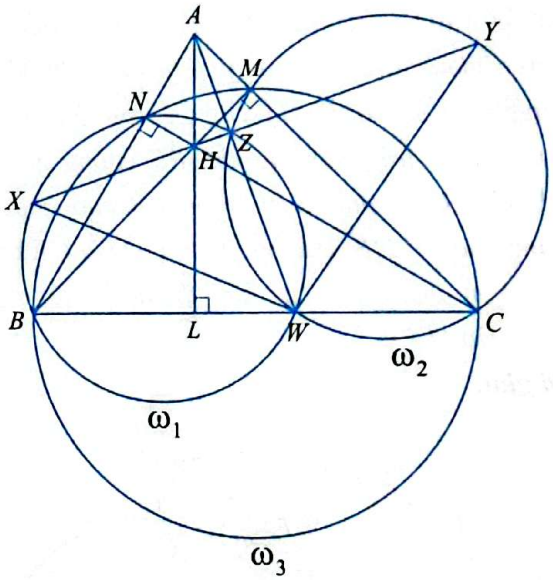
Gọi h là phép vị tự với tâm S và tỉ số $\frac{SC}{SB}$. Vì $h(B)=C$, nên h biến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP thành đường tròn ngoại tiếp tam giác CDQ. Cũng vậy, h biến AB thành CD, và dễ dàng suy ra rằng $h(P)=Y$, $h(X)=Q$, ta nhận được $\frac{SP}{SY}=\frac{SB}{SC}=\frac{SX}{SQ}$.

Đẳng thức $SP\cdot SX=SB^2$ và $\frac{SQ}{SX}=\frac{SC}{SB}$ kéo theo $SP\cdot SQ=SB\cdot SC$, điều này tương đương với P,Q,B và C là nằm trên đường tròn (đpcm).

Thí dụ 2.9 (IMOSL-2013). *Cho ABC là một tam giác nhọn với trực tâm H và W là một điểm trên cạnh BC. Gọi M và N lần lượt là chân các đường cao kẻ từ B và C. Gọi ω_1 là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN và X là một điểm trên ω_1 sao cho WX là đường kính. Tương tự, gọi ω_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM và Y là điểm trên ω_2 sao cho WY là đường kính. Chứng minh rằng các điểm X,Y,H thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi L là chân đường cao kẻ từ A và Z là giao điểm thứ hai của đường tròn ω_1 và ω_2 khác W. Ta chứng tỏ rằng X,Y,Z và H cùng nằm trên một đường thẳng.

Vì $\widehat{BNC}=\widehat{BMC}=90^0$ nên các điểm B,C,N và M nằm trên đường tròn và ký hiệu đường tròn này là ω_3. Nhận thấy rằng đường thẳng WZ là trục đẳng phương của ω_1 và ω_2, CM là trục đẳng phương của đường tròn ω_2 và ω_3. Do đó $A=BN\cap CM$ là tâm đẳng phương của ba đường tròn, nên WZ đi qua điểm A.



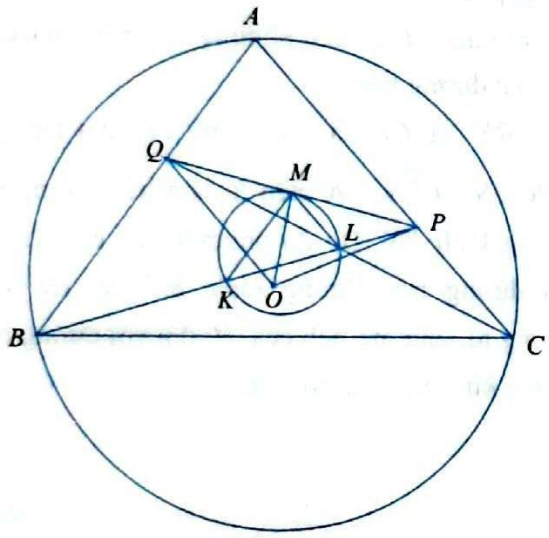
Vì WX và WY lần lượt là các đường kính của ω_1 và ω_2, ta có $\widehat{WZX}=\widehat{WZY}=90^0$, nên các điểm X và Y nằm trên đường thẳng đi qua Z, vuông góc với WZ.

Tứ giác $BLHN$ là nội tiếp bởi vì nó có hai góc đối vuông. Theo phương tích của điểm A đối với các đường tròn ω_1 và $BLHN$ ta tìm được $AL\cdot AH=AB\cdot AN=AW\cdot AZ$. Nếu H nằm trên đường thẳng AW thì dẫn đến $H=Z$. Mặt khác, do $\frac{AZ}{AH}=\frac{AL}{AW}$ các tam giác AHZ và AWL là đồng dạng. Khi đó, $\widehat{HZA}=\widehat{WLA}=90^0$, vì vậy điểm H cũng nằm trên đường thẳng XYZ (đpcm).

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 2.10 (IMOSL-2009). *Cho ABC là một tam giác với tâm đường tròn ngoại tiếp O. Các điểm P và Q lần lượt nằm bên trong các cạnh CA và AB. Đường tròn k đi qua các trung điểm của các đoạn thẳng BP, CQ và PQ. Chứng minh rằng nếu đường thẳng PQ là tiếp tuyến của đường tròn k thì $OP = OQ$.*

Lời giải.



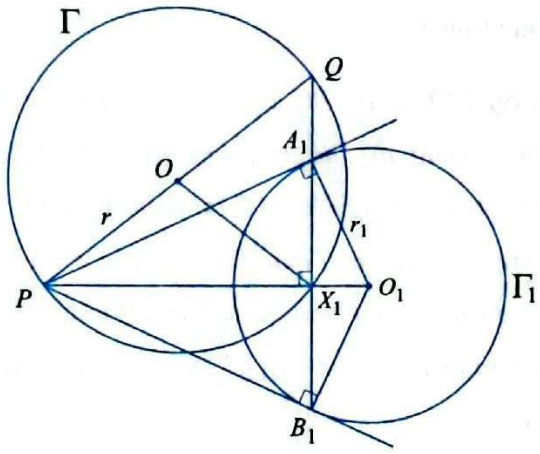
Gọi K, L, M lần lượt là các trung điểm của BP, CQ, PQ. Vì $CA \parallel LM$, ta có $\widehat{LMP} = \widehat{QPA}$. Vì k tiếp xúc đoạn thẳng PQ tại M nên ta tìm được $\widehat{LMP} = \widehat{LKM}$. Như vậy $\widehat{QPA} = \widehat{LKM}$. Tương tự từ $AB \parallel MK$ có $\widehat{PQA} = \widehat{KLM}$. Do đó, các tam giác APQ và MKL là đồng dạng, nên ta có:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{\frac{QB}{2}}{\frac{PC}{2}} = \frac{QB}{PC}$$

hay $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$, điều này có nghĩa là phương tích của các điểm P và Q đối với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là bằng nhau, tức là $OP = OQ$ (đpcm).

Thí dụ 2.11 (APMO-2009). *Cho ba đường tròn $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ được cho trong mặt phẳng mà không phủ lên nhau và nằm bên ngoài lẫn nhau. Với mỗi một điểm P trong mặt phẳng, nằm bên ngoài ba đường tròn, ta chọn 6 điểm $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ như sau: Với mỗi $i = 1,2,3$, A_i, B_i là các điểm phân biệt trên đường tròn Γ_i sao cho các đường thẳng PA_i và PB_i đều là tiếp tuyến của Γ_i. Điểm P được gọi là ngoại lệ nếu trong cách vẽ có ba đường thẳng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 là đồng quy. Chứng minh rằng mọi điểm ngoại lệ của mặt phẳng, nếu tồn tại, đều nằm trên cùng một đường tròn.*

Lời giải.



Với mỗi $i = 1,2,3$, gọi O_i là tâm và r_i là bán kính của đường tròn Γ_i. Gọi P là một điểm ngoại lệ, và gọi ba đường thẳng tương ứng là A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy tại điểm Q. Vẽ đường tròn Γ đường kính PQ. Gọi O và r lần lượt là tâm và bán kính của Γ. Ta khẳng định rằng tất cả các điểm ngoại lệ nằm trên Γ.

Thật vậy, vẽ PO_1 cắt A_1B_1 tại X_1. Do $PO_1 \perp A_1B_1$, nên ta có X_1 nằm trên Γ. Do PA_1 là tiếp tuyến của Γ_1, nên tam giác PA_1O_1 là tam giác vuông và đồng dạng với tam giác $A_1X_1O_1$. Suy ra: $\frac{O_1X_1}{O_1A_1} = \frac{O_1A_1}{O_1P}$ hay $O_1X_1 \cdot O_1P = O_1A_1^2 = r_1^2$.

Mặt khác, $O_1X_1 \cdot O_1P$ cũng là phương tích của O_1 đối với đường tròn Γ, vì vậy:

$$r_1^2 = O_1X_1 \cdot O_1P = (O_1O - r)(O_1O + r) = O_1O^2 - r^2$$

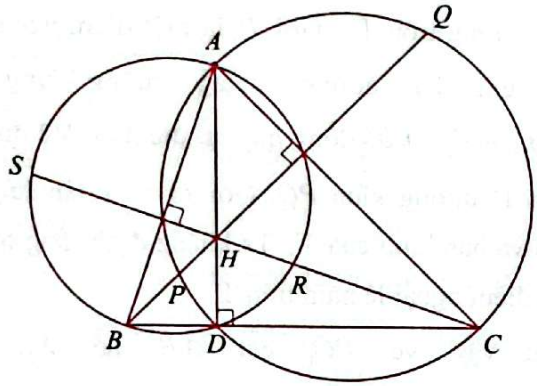
và do đó: $r^2 = OO_1^2 - r_1^2 = (OO_1 - r_1)(OO_1 + r_1)$.

Được quét bằng CamScanner

Như vậy, r^2 là phương tích của O đối với đường tròn Γ_1. Bằng cách tương tự, r^2 cũng là phương tích của O đối với Γ_2 và Γ_3. Khi đó O phải là tâm đẳng phương của ba đường tròn đã cho. Vì r là căn bậc hai của phương tích của O đối với ba đường tròn đã cho, không phụ thuộc vào điểm P, nên suy ra tất cả các điểm ngoại lệ nằm trên đường tròn Γ.

Thí dụ 2.12. *Cho ABC là một tam giác nhọn. Một đường thẳng đi qua B vuông góc với AC cắt đường tròn đường kính AC tại điểm P và Q, một đường thẳng khác đi qua C vuông góc với AB cắt đường tròn đường kính AB tại điểm R và S. Chứng minh rằng các điểm P,Q,R,S nằm trên đường tròn.*

Lời giải.



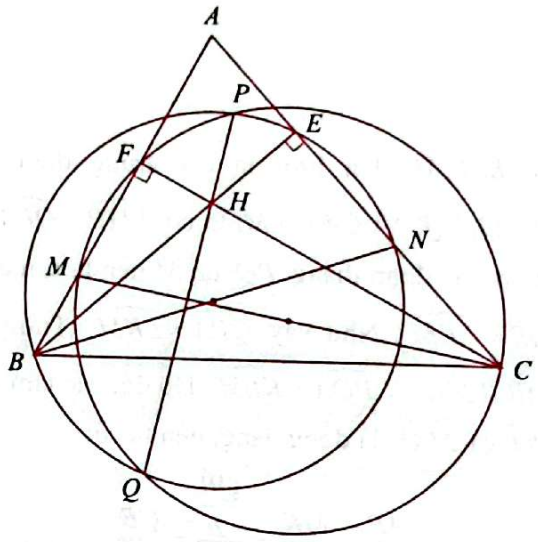
Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ A lên BC và gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Vì $\widehat{ADB}=90^0$, nên đường tròn đường kính AB đi qua điểm D, vì vậy $HS\cdot HR=HA\cdot HD$ theo phương tích của một điểm. Tương tự, đường tròn đường kính AC đi qua D và có $HP\cdot HQ=HA\cdot HD$. Do đó $HP\cdot HQ=HR\cdot HS$, theo định lí đảo về phương tích của điểm, thì các điểm P,Q,R,S nằm trên đường tròn (đpcm).

Thí dụ 2.13. *Cho ABC là một tam giác nhọn với trực tâm H. Các điểm M và N lần lượt nằm trên các cạnh AB và AC. Các đường tròn đường kính BN và CM cắt nhau tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng các điểm P, Q, H thẳng hàng.*

Lời giải. Ta chỉ cần chứng tỏ H nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn, vì vậy chỉ cần chỉ ra rằng H có các phương tích bằng nhau đối với hai đường tròn.

Gọi BE và CF là hai đường cao của tam giác ABC. Vì $\widehat{BEN}=90^0$ nên E nằm trên đường tròn đường kính BN. Do đó phương tích của H đối với đường tròn đường kính BN là $HB\cdot HE$. Tương tự, phương tích của H đối với đường tròn đường kính CM là $HC\cdot HF$.



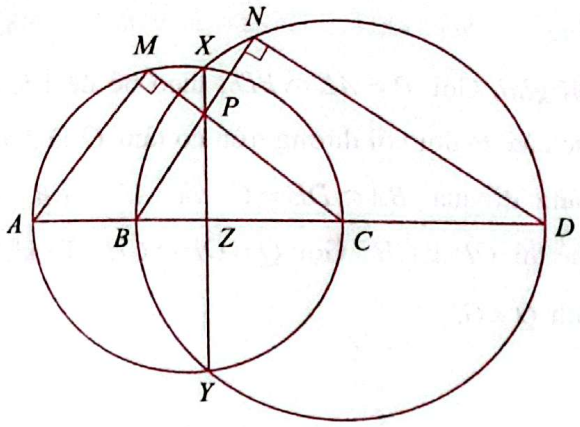
Vì $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^0$ nên các điểm B,C,E,F nằm trên một đường tròn, do đó $HB\cdot HE=HC\cdot HF$. Từ đây suy ra H có các phương tích bằng nhau đối với hai đường tròn đường kính AB và BC (đpcm).

Thí dụ 2.14 (IMO-1995). *Cho A, B, C và D theo thứ tự là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng. Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại X và Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC*

Được quét bằng CamScanner

tại C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại B và N. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, DN và XY đồng quy.

Lời giải.



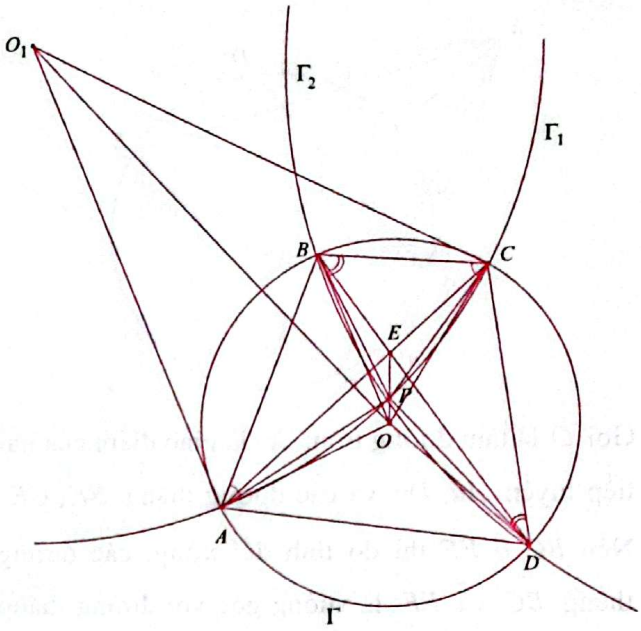
Theo phương tích của một điểm, ta có $PM \cdot PC = PX \cdot PY = PN \cdot PB$ nên các điểm B, C, M, N nằm trên đường tròn. Để ý rằng $\widehat{AMC} = \widehat{BND} = 90^0$ nên

$\widehat{MND} = 90^0 + \widehat{MNB} = 90^0 + \widehat{MCA} = 180^0 - \widehat{MAD}.$

Vậy các điểm A, D, N, M nằm trên đường tròn. Vì AM, DN, XY là ba trục đẳng phương của các đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $AMXC$, $BXND$ và $AMND$ nên chúng đồng quy tại tâm đẳng phương.

Thí dụ 2.15 (HKMO-2006). *Một tứ giác lồi $ABCD$ với $AC \neq BD$ nội tiếp trong một đường tròn tâm O. Cho E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Nếu P là một điểm bên trong $ABCD$ sao cho $\widehat{PAB} + \widehat{PCB} = \widehat{PBC} + \widehat{PDC} = 90^0$, chứng minh rằng các điểm O, P và E thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$, các tam giác PAC, PBD với các tâm O, O_1 và O_2. Trước hết, ta chứng tỏ rằng đối cực của O_1 đối với Γ là đường thẳng AC. Vì OO_1 vuông góc với AC, nên theo bổ đề 1.3, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\widehat{AOC} + \widehat{AO_1C} = 180^0$.



Thật vậy, ta có:

$\widehat{APC} = 360^0 - \left(\widehat{PAB} + \widehat{PCB} + \widehat{ABC}\right)$

$= 270^0 - \widehat{ABC} = 90^0 + \widehat{ADC}.$

và $\widehat{AO_1C} = 2\left(180^0 - \widehat{APC}\right) = 2\left(90^0 - \widehat{ADC}\right)$

$= 180^0 - 2\widehat{ADC} = 180^0 - \widehat{AOC}.$

Tương tự, đối cực của O_2 đối với Γ là đường thẳng BD. Theo bổ đề 1.4, vì $E = AC \cap BD$, nên đối cực của E đối với Γ là đường thẳng O_1O_2. Vì vậy $OE \perp O_1O_2$.

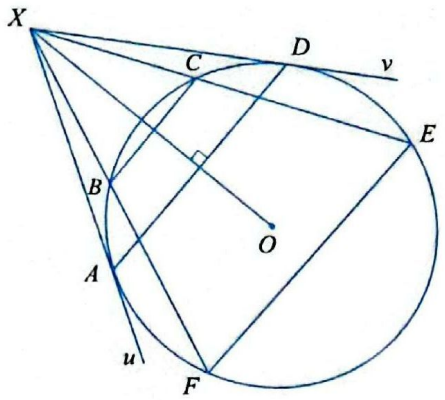
Trong số $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$, có hai trục đẳng phương đôi một là các đường thẳng AC và BD. Điều này suy ra E là tâm đẳng phương. Vì Γ_1, Γ_2 giao nhau tại P, nên PE là trục đẳng phương của Γ_1, Γ_2, suy ra $PE \perp O_1O_2$. Kết hợp với $OE \perp O_1O_2$ (do chứng minh trên), nên O, P và E thẳng hàng (đpcm).

Thí dụ 2.16 (Au-PoMO-1998). *Cho các điểm phân biệt theo thứ tự A, B, C, D, E, F nằm trên một đường tròn. Các tiếp tuyến của đường tròn tại*

Được quét bằng CamScanner

các điểm A và D, các đường thẳng BF và CE đồng quy. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC, EF hoặc song song hoặc đồng quy.

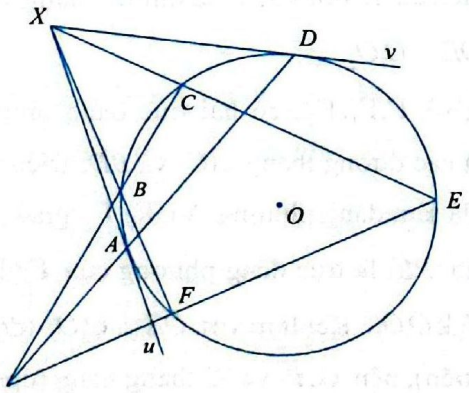
Lời giải.



Gọi O là tâm đường tròn; X là giao điểm của hai tiếp tuyến Au, Dv và các đường thẳng BF, CE. Nếu $BC \,//\, EF$ thì do tính đối xứng, các đường thẳng BC và EF là vuông góc với đường thẳng OX. Vì $AD \perp OX$, nên ta nhận được:

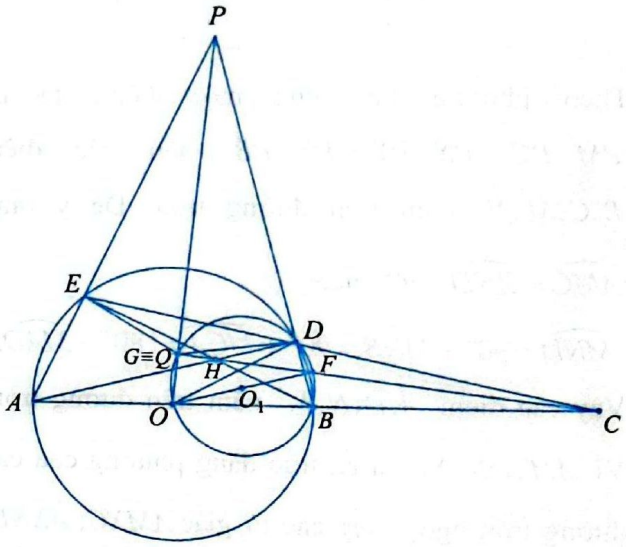
$$BC \,//\, EF \,//\, AD.$$

Nếu đường thẳng BC và EF cắt nhau, thì theo bổ đề 1.5, đối cực của $X = CE \cap BF$ đi qua $BC \cap EF$. Vì các tiếp tuyến tại A và D giao nhau tại X, nên theo bổ đề 1.3, đối cực của X là đường thẳng AD. Do đó AD, BC và EF là đồng quy trong trường hợp này.



Thí dụ 2.17 (CWMO-2006). *Cho AB là đường kính của đường tròn tâm O. Cho C là một điểm nằm trên cạnh kéo dài AB. Một đường thẳng qua C cắt đường tròn tâm O tại D và E. Cho OF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BOD với tâm O_1. Đường thẳng CF cắt đường tròn ngoại tiếp một lần nữa tại G. Chứng minh rằng các điểm O, A, E, G nằm trên đường tròn.*

Lời giải. Gọi $P = AE \cap BD$, theo bổ đề 1.5, đối cực của P đối với đường tròn có tâm O là đường thẳng đi qua $BA \cap DE = C$ và $AD \cap EB = H$. Thế thì $OP \perp CH$. Gọi $Q = OP \cap CH$. Ta khẳng định $Q \equiv G$.



Ta có $P = BD \cap OG$. Khi đó:

$$PE \cdot PA = PD \cdot PB = PG \cdot PO,$$

nên suy ra O, A, E, G nằm trên đường tròn. Để chứng tỏ $Q \equiv G$, ta thấy:

$$\widehat{PQH} = \widehat{PDH} = \widehat{PEH} = 90^0,$$

suy ra P, E, Q, H, D nằm trên đường tròn. Khi đó:

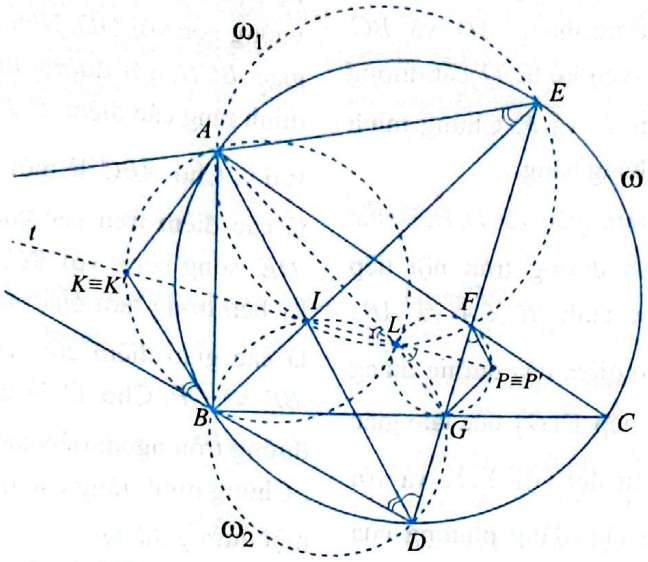
$$\widehat{PQD} = \widehat{PED} = \widehat{DBO},$$

suy ra Q, D, B, O nằm trên đường tròn. Do đó, $Q = G$ vì cả hai đều là giao điểm (khác O) của đường tròn ngoại tiếp tam giác BOD với đường tròn đường kính OC (đpcm).

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 2.18 (IMOSL-2011). *Cho ABC là một tam giác với tâm đường tròn nội tiếp I và đường tròn ngoại tiếp ω. Cho D và E lần lượt là các giao điểm thứ hai của ω với các đường thẳng AI và BI. Dây cung DE cắt AC tại điểm F và BC tại điểm G. Cho P là giao điểm của đường thẳng đi qua F song song với AD và đường thẳng đi qua G song song với BE. Giả sử các tiếp tuyến của ω tại A và B cắt nhau tại điểm K. Chứng minh rằng ba đường thẳng AE, BD và KP hoặc song song hoặc đồng quy.*

Lời giải.



Vì $\widehat{IAF} = \widehat{DAC} = \widehat{BAD} = \widehat{BED} = \widehat{IEF}$ nên tứ giác $AIFE$ nội tiếp và ký hiệu đường tròn ngoại tiếp của nó là ω_1. Tương tự, tứ giác $BDGI$ nội tiếp và ký hiệu đường tròn ngoại tiếp của nó là ω_2.

Đường thẳng AE là trục đẳng phương của ω và ω_1, và đường thẳng BD là trục đẳng phương của ω và ω_2. Gọi t là trục đẳng phương của ω_1 và ω_2. Ba đường thẳng này cắt nhau tại tâm đẳng phương của ba đường tròn, hoặc chúng song song với nhau. Ta sẽ chỉ ra rằng t chính là đường thẳng PK.

Gọi L là giao điểm thứ hai của ω_1 và ω_2, vì vậy $t = IL$ (nếu hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì $L = I$ và t là tiếp tuyến chung).

Gọi đường thẳng t cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABL và FGL tại $K' \neq L$ và $P' \neq L$ tương ứng. Sử dụng góc định hướng ta có:

$$\left(\widehat{AB,BK'}\right) = \left(\widehat{AL,LK'}\right) = \left(\widehat{AL,LI}\right) = \left(\widehat{AE,EI}\right)$$
$$= \left(\widehat{AE,EB}\right) = \left(\widehat{AB,BK}\right),$$

vì vậy $BK' // BK$. Tương tự ta có $AK' // AK$, và do đó $K' \equiv K$. Tiếp theo, ta có:

$$\left(\widehat{P'F,FG}\right) = \left(\widehat{P'L,LG}\right) = \left(\widehat{IL,LG}\right) = \left(\widehat{ID,DG}\right)$$
$$= \left(\widehat{AD,DE}\right) = \left(\widehat{PF,FG}\right)$$

do đó $P'F // PF$ và tương tự $P'G // PG$. Vì vậy $P' \equiv P$. Điều này có nghĩa là t đi qua K và P (đpcm).

3. MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho ABC là một tam giác và D, E lần lượt là các điểm trên các cạnh AB và AC sao cho DE song song với BC. Cho P là một điểm bất kỳ bên trong tam giác ADE, F và G lần lượt là các giao điểm của DE với các đường thẳng BP và CP. Cho Q là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PDG và PFE. Chứng minh rằng các điểm A, P, Q thẳng hàng.

Bài 2. Cho D và E lần lượt là hai điểm trên các cạnh AB và AC của tam giác ABC sao cho $DB = BC = CE$, và cho F là giao điểm của các đường thẳng CD và BE. Chứng minh rằng tâm

Được quét bằng CamScanner

đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC, trực tâm H của tam giác DEF và trung điểm M của cung BAC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là thẳng hàng.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn. Giả sử các đường thẳng AB và DC cắt nhau tại P và các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại Q. Các tiếp tuyến kẻ từ Q cắt đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ tại E và F. Chứng minh rằng các điểm P,E,F là thẳng hàng.

Bài 4. Cho ABC là một tam giác và D,E,F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\gamma(I)$ của tam giác với các cạnh BC,CA và AB. Cho X_1 và X_2 là các giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn ngoại tiếp $\Gamma(O)$ của tam giác ABC. Định nghĩa tương tự đối với Y_1,Y_2 và với Z_1,Z_2. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn DX_1X_2, EY_1Y_2 và FZ_1Z_2 nằm trên đường thẳng OI.

Bài 5. Cho ABC là một tam giác với đường tròn ngoại tiếp Γ và P là một điểm bên trong tam giác. Cho M là trung điểm của cạnh BC và các đường thẳng AP,BP,CP lần lượt cắt BC,CA,AB tại X,Y,Z. Đường thẳng YZ cắt Γ tại các điểm U và V. Chứng minh rằng M,X,U,V nằm trên đường tròn.

Bài 6. Cho ABC là một tam giác và X,Y là các điểm trong mặt phẳng của tam giác sao cho $AX:BX:CX=AY:BY:CY$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng XY.

Bài 7. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và P là giao điểm của hai đường chéo. Xét các đường phân giác của các góc $\widehat{APB},\widehat{BPC},\widehat{CPD},\widehat{DPA}$. Các đường phân giác này lần lượt cắt các cạnh AB,BC,CD,DA tại các điểm $P_{ab},P_{bc},P_{cd},P_{da}$ và phần kéo dài cùng các cạnh lần lượt tại các điểm $Q_{ab},Q_{bc},Q_{cd},Q_{da}$. Chứng minh rằng các trung điểm của các cạnh $P_{ab}Q_{ab},P_{bc}Q_{bc},P_{cd}Q_{cd},P_{da}Q_{da}$ là thẳng hàng.

Bài 8. Cho O và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Cho D là chân đường vuông góc kẻ từ C lên AB. Cho E là một điểm trên đường thẳng BC sao cho ED vuông góc với OD. Nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác BCH cắt đường thẳng AB tại F, thì chứng minh rằng các điểm E,F,H là thẳng hàng.

Bài 9. Cho ABC là một tam giác và D,E lần lượt là các điểm trên các cạnh AB và AC sao cho DE song song với BC. Cho P là một điểm bất kỳ bên trong tam giác ADE, và cho F,G lần lượt là các giao điểm của DE với các đường thẳng BP và CP. Cho Q là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PDG và PFE. Chứng minh rằng các điểm A,P và Q nằm trên một đường thẳng.

Bài 10. Cho ABC là một tam giác và ω là đường tròn nội tiếp của nó. Ký hiệu D,E,F lần lượt là các giao điểm của ω với các cạnh BC,CA,AB. Cho $T\in AD\cap\omega, M\in BT\cap\omega, N\in CT\cap\omega$. Cho p_1 là một đường tròn tiếp xúc với ω tại T, và p_2 là một đường tròn tiếp xúc với ω tại D sao cho p_1 và p_2 giao nhau trên day cung (XY). Chứng minh rằng X,Y,M,N nằm trên cùng một đường tròn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Mathematical Excalibur, Volume 11, Number 4, 2006.

[2]. The International Mathematical Olympiad 1995 (IMO 1990, 1995).

[3]. The International Mathematical Olympiad Shortlisted Problems 2011 (IMOSL 2009, 2011, 2013).

[4]. Asian Pacific Mathematics Olympiad (APMO 2009).

[5]. United States of America Mathematical Olympiad 1997 (USAMO 1997).

Được quét bằng CamScanner

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN và VẬT LÝ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ năm học 2024 - 2025

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2024 - 2025 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2024 đến tháng 8 năm 2025. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu Toán và Vật lý cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài rất sôi nổi. **Giải Xuất sắc** về môn Toán thuộc về bạn: ***Nguyễn Chánh Thiện***, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**. **Giải Nhất** môn Vật lý thuộc về bạn: ***Trương Minh Phúc***, 12 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2025 - 2026. Sau đây là danh sách **60** bạn đoạt giải Toán và **6** bạn đoạt giải Vật lý năm học 2024 - 2025.

MÔN TOÁN

☆ **Giải Xuất sắc (1 giải)**

Nguyễn Chánh Thiện, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**.

☆ **Giải Nhất (7 giải)**

1. *Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**.
2. *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo**.
3. *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**.
4. *Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
5. *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai, **Hà Nội**.
6. *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên Đại học Sư phạm, **Hà Nội**.
7. *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, **Nghệ An**.

☆ **Giải Nhì (13 giải)**

1. *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng**.
2. *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải, Tiền Hải, **Thái Bình**.
3. *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu, **Nghệ An**.
4. *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.
5. *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
6. *Nguyễn Duy Phúc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
7. *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.
8. *Trần Đức Phát*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
9. *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, xã Hành Đức, **Quảng Ngãi**.
10. *Đặng Đinh Minh Trí*, 8CT, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền, **Hải Phòng**.
11. *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**.
12. *Đỗ Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.
13. *Nguyễn Gia Bảo*, 10 Toán 1, THPT chuyên Trần Văn Giàu, **Long An**.

☆ **Giải Ba (19 giải)**

1. *Nguyễn Tất Han*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
2. *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
3. *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10 Toán 2, THPT chuyên Trần Văn Giàu, **Long An**.
4. *Thái Đức Huy*, 10 Toán 2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**.
5. *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**.
6. *Nguyễn Thái Dũng*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
7. *Nguyễn Công Lĩnh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
8. *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.

Được quét bằng CamScanner

9. *Cái Hoàng Quốc Khánh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**.
10. *Bùi Hữu Anh Quân*, 6E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
11. *Trần Khưu Nhật Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**.
12. *Trần Lê Trọng Phúc*, 10 Toán 1, THPT chuyên Trần Văn Giàu, **Long An**.
13. *Nguyễn Phạm Minh Phú*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh.**
14. *Hoàng Văn Nhân*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
15. *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
16. *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
17. *Trần Nhất Nguyên*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh**.
18. *Đặng Thành Trung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.
19. *Trần Việt Tùng*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**.

☆ Giải Khuyến khích (20 giải)

1. *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình, **Thái Bình**.
2. *Chu Đức Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.
3. *Nguyễn Quang Anh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
4. *Nguyễn Trọng Nhân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Long An, **Long An**.
5. *Nguyễn Thanh Mai*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ**.
6. *Đỗ Tiến Dũng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa – Vũng Tàu**.
7. *Nguyễn Minh Hiếu*, 10A7, THPT Chi Lăng, **Gia Lai**.
8. *Trương Đình Quốc Anh*, 6E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương **Nghệ An**.
9. *Nguyễn Phương Hoa*, 6A2, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai, **Hà Nội**.
10. *Võ Tiến Phát*, 10A1, THPT Nguyễn Thông, **Long An**.
11. *Nguyễn Tất Thuận*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
12. *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, **Nghệ An**.
13. *Nguyễn Trí Hiền*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**.
14. *Lê Khắc Trí Nguyên*, 10E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh**.
15. *Nguyễn Minh Tiến*, 10 Toán 1, THPT chuyên Trần Văn Giàu, **Long An**.
16. *Trần Hoàng Bách*, 10 Toán 2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**.
17. *Nguyễn Tuấn Khải*, 10A2, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An**.
18. *Nguyễn Đức Mạnh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**.
19. *Đinh Trí Dũng*, 6E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
20. *Lương Xuân Nghĩa*, 10A7, THPT Chi Lăng, **Gia Lai**.

MÔN VẬT LÝ

☆ Giải Nhất (1 giải)

Trương Minh Phúc, 12 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

☆ Giải Nhì (2 giải)

1. *Lê Thị Hồng Nga*, 12H, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.
2. *Lê Khánh Duy*, 10E5, TH, THCS&THPT Lê Thánh tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh**.

☆ Giải Ba (3 giải)

1. *Phạm Xuân Khánh*, 12A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa, **Đồng Nai**.
2. *Đặng Hoàng Lương*, 12A1, THPT Yên Thành 2, **Nghệ An**.
3. *Ngô Bảo Long*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

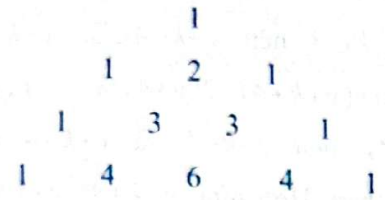
Các bạn đoạt giải Toán và Vật lý nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại (024) 35121607 để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 122

Problem. *Consider the Pascal triangle*



If we push the numbers in each line together for form the new numbers, what will we get and why?

Solution. If we push the numbers in each line together we will get the sequence 1, 11, 121, 1331, 14641,...

This is the power sequence of 11: 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4, ...

We know that the Pascal triangle consists of the coefficients of Newton binomial expansions.

Consider the concrete expansion

$$(10+1)^3 = 1.10^3 + 3.10^2 + 3.10^1 + 1.10^0 = 1331.$$

Hence we can see the numbers in the line n^{th} in the Pascal triangle correspond to the coefficient of 10^i in the expansion of $(10+1)^n$. Therefore we will get the power sequence of 11.

Remark: This problem is proposed by teacher *Nghiêm Xuân Lực*, Thang Long High School, 44 Ta Quang Buu, Bach Mai, Hanoi.

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

Pascal triangle : *tam giác Pascal (tam giác số, có quy luật)*

power sequence : *dãy lũy thừa*

coefficient : *hệ số*

Newton binomial expansion : *khai triển nhị thức Newton*

correspond : *tương ứng*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 120

BÀI TOÁN. *Mỗi học sinh của lớp* 12A *là bạn của đúng 7 học sinh lớp* 12B, *và mỗi học sinh lớp* 12B *là bạn của đúng 6 học sinh lớp* 12A. *Biết rằng tổng số học sinh của hai lớp là 65, hãy tính số học sinh của mỗi lớp.*

Lời giải. Giả sử lớp 12A có m học sinh và lớp 12B có n học sinh. Xét ma trận M kích thước $m \times n$ (một bảng hình chữ nhật gồm m hàng và n cột). Ký hiệu a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j. Ta quy ước:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu học sinh thứ } i \text{ của lớp 12A và học sinh thứ } j \text{ của lớp 12 B là bạn của nhau.} \\ 0 \text{ nếu ngược lại} \end{cases}$$

Theo giả thiết, trong mỗi hàng của ma trận có đúng 7 số 1 (vì mỗi học sinh lớp 12A là bạn của đúng 7 học sinh lớp 12B), và trong mỗi cột có đúng 6 số 1 (vì mỗi học sinh của lớp 12B là bạn của đúng 6 học sinh của lớp lớp 12A).

Vì vậy: $7m = 6n$ (1).

Mặt khác, tổng số học sinh là: $m + n = 65$ (2).

Từ (1) và (2), ta tìm được: $m = 30$ và $n = 35$.

Chú thích. Bài toán này được đề xuất bởi thầy *Nguyễn Mạnh Quyền*, Trường THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, Đắk Nông. Cách giải đầu tiên được giới thiệu trong số trước.

Nhận xét. Các bạn: *Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo**; *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh các bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 101. *Giải phương trình nghiệm nguyên:* $x^2+xy-2y+1=0$.

Lời giải. *Cách 1. Đưa về phương trình ước số*

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ ta có:

$$x^2+xy-2y+1=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4+y(x-2)=-5$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+y+2)=-5 \ (*).$$

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ ta có $x-2\in\mathbb{Z}, x+y+2\in\mathbb{Z}$. Kết hợp với (*) ta thấy chỉ xảy ra 4 trường hợp sau:

$$\begin{cases}x-2=-1\\x+y+2=5\end{cases};\quad \begin{cases}x-2=1\\x+y+2=-5\end{cases};$$

$$\begin{cases}x-2=-5\\x+y+2=1\end{cases};\quad \begin{cases}x-2=5\\x+y+2=-1\end{cases}.$$

Suy ra tất cả các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là: $(1;2), (-3;2), (3;-10), (7;-10)$.

Cách 2. Đưa về phương trình ước số

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ ta có:

$$x^2+xy-2y+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4x^2+4xy+y^2\right)-\left(y^2+8y+16\right)=-20$$
$$\Leftrightarrow (2x+y)^2-(y+4)^2=-20$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+y+2)=-5.$$

Đến đây giải tiếp như cách 1.

Cách 3. Sử dụng điều kiện chính phương của biệt thức Δ

Xét phương trình: $x^2+xy-2y+1=0$ (1).

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$, xem phương trình (1) là phương trình bậc hai theo ẩn x. Ta có: $\Delta=y^2+8y-4$.

Phương trình (1) có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $\Delta=y^2+8y-4$ là số chính phương, tức là:

$$y^2+8y-4=k^2 \ (\text{với } k\in\mathbb{N})$$
$$\Leftrightarrow (y+4)^2-k^2=20$$
$$\Leftrightarrow (y-k+4)(y+k+4)=20 \ (*).$$

Vì $y\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}$ nên $y-k+4\in\mathbb{Z}$, $y+k+4\in\mathbb{Z}$. Do $(y-k+4)+(y+k+4)=2(y+4)$ là số nguyên chẵn và do (*) nên $y-k+4$ và $y+k+4$ cùng là số nguyên chẵn. Hơn nữa $y-k+4\le y+k+4$ nên chỉ xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}y-k+4=-10\\y+k+4=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-10\\k=4\end{cases}$.

Với $y=-10$ phương trình (1) trở thành:

$$x^2-10x+21=0\Leftrightarrow (x-3)(x-7)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=7\end{array}\right.$$

TH2: $\begin{cases}y-k+4=2\\y+k+4=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\k=4\end{cases}$.

Với $y=2$ phương trình (1) trở thành:

$$x^2+2x-3=0\Leftrightarrow (x-1)(x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$$

Vậy tất cả các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là: $(1;2), (-3;2), (3;-10), (7;-10)$.

Cách 4. Biểu diễn ẩn này theo ẩn kia

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ ta có:

$$x^2+xy-2y+1=0\Leftrightarrow y(2-x)=x^2+1 \ (*).$$

Với $x=2$, phương trình (*) trở thành:

$$x^2+1=0 \ (\text{vô nghiệm}).$$

Với $x\neq 2$, phương trình (*) tương đương với:

$$y=\frac{x^2+1}{2-x}\Leftrightarrow y=-x-2-\frac{5}{x-2}.$$

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $-x-2\in\mathbb{Z}$. Vì vậy $y\in\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\frac{5}{x-2}\in\mathbb{Z}$, do đó $x-2$ là ước của 5.

Do đó $x\in\{-3;1;3;7\}$. Suy ra tất cả các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là:

$$(1;2), (-3;2), (3;-10), (7;-10).$$

Được quét bằng CamScanner

Cách 5. Vận dụng định lí Viète

Xét phương trình: $x^2+xy-2y+1=0$ (1).

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$, xem phương trình (1) là phương trình bậc hai theo ẩn x. Giả sử phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó, theo định lí Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-y \\ x_1.x_2=-2y+1 \end{cases} (*).$$

Do $y\in\mathbb{Z}$ và (*) nên ta suy ra $x_1\in\mathbb{Z}, x_2\in\mathbb{Z}$.

Từ (*) suy ra:

$$x_1x_2-2(x_1+x_2)=1 \Leftrightarrow (x_1-2)(x_2-2)=5.$$

Do đó chỉ xảy ra hai trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x_1-2=-1 \\ x_2-2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-3 \end{cases}$. Suy ra $y=2$.

TH2: $\begin{cases} x_1-2=1 \\ x_2-2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=7 \end{cases}$. Suy ra $y=-10$.

Thay lại phương trình ta thấy tất cả các cặp số $(1;2), (-3;2), (3;-10), (7;-10)$ đều thỏa mãn phương trình (1). Vậy tất cả các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là:

$$(1;2), (-3;2), (3;-10), (7;-10).$$

NGUYỄN TRI PHƯƠNG

(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Nhận xét. Bạn *Trần Gia Phú*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** đóng góp 5 cách giải; hai bạn: *Lê Phước Quý*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Trị**, *Vũ Đức Duy*, CTy TNHH Thuế và Tư vấn PWC Việt Nam mỗi bạn đóng góp 2 cách giải; ba bạn: *Phạm Đinh Minh Long*, 11A1, *Phạm Trần Hiếu Đan*, *Huỳnh Quốc Trọng Tín*, 11E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông mỗi bạn đóng góp 1 cách giải; bạn *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đóng góp 3 cách giải. Các cách giải đều tương tự như những cách giải trên của bạn *Trần Văn Hạnh*, người giới thiệu bài toán. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 103 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31/12/2025.

BÀI TOÁN 103. *Giải phương trình:*

$$\frac{x^4+4}{x^2-2}-5x=0.$$

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

****

PROBLEMS . . . *(Tiếp theo trang 19)*

Problem T9/581. Denote a_k the coefficient of x^k $(0\le k\le 4n-1)$ in the polynomial expansion of

$$P(x)=(1+x+x^2+...+x^{2n-1})(1+x+x^2+...+x^n)^2.$$

Find all positive integers n such that a_{2n} is a prime power.

Problem T10/581. Let a be a positive real number and the sequence (x_n) is determined by the following recurrence formula

$$x_1=1 \text{ and } x_{n+1}=x_n+\frac{a}{\sum_{k=1}^{n}x_k} \text{ with } n\in\mathbb{N}^*.$$

Let $y_n=\frac{x_n}{\sqrt{\ln n}}$. Prove that sequence (y_n) converges and find the limit of this sequence.

Problem T11/581. Find all functions $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ satisfying

$$f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x).f(y)+y^2f(xy), \forall x,y>0.$$

Problem T12/581. Given a tetrahedron $ABCD$ and point M moving inside the tetrahedron. Let N, P, Q be the intersection points of BM, CM, DM and the planes (ACD), (ABD), (ABC) respectively. Find the position of M so that the volume of the tetrahedron $MNPQ$ is the maximal.

NGUYEN PHU HOANG LAN

(University of Education, VNU, Hanoi)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 109 (Kvant). *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}.$$

Lời giải. ***Cách 1.*** Nhân hai vế của phương trình thứ hai với i và cộng vào phương trình thứ nhất ta được: $x+iy+\dfrac{3x-y-(x+3y)i}{x^2+y^2}=3$

$$\Leftrightarrow x+iy+\frac{3(x-iy)}{x^2+y^2}-\frac{i(x-iy)}{x^2+y^2}=3 \quad (*).$$

Đặt $z=x+iy$, thì: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$. Khi đó phương trình (*) trở thành:

$$z+\frac{3-i}{z}=3\Leftrightarrow z^2-3z+(3-i)=0.$$

Vì vậy: $z=\dfrac{3\pm\sqrt{-3+4i}}{2}=\dfrac{3\pm(1+2i)}{2}$

hay $\left[\begin{array}{l} z=2+i \\ z=1-i \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} (x;y)=(2;1) \\ (x;y)=(1;-1) \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm:

$$(x;y)=(2;1) \text{ và } (x;y)=(1;-1).$$

Cách 2. Nhân phương trình thứ nhất với y và phương trình thứ hai với x và cộng lại ta được:

$$2xy+\frac{(3x-y)y-(x+3y)x}{x^2+y^2}=3y\Leftrightarrow 2xy-1=3y.$$

Suy ra $y\neq 0$ và $x=\dfrac{3y+1}{2y}$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có: $y-\dfrac{\dfrac{3y+1}{2y}+3y}{\left(\dfrac{3y+1}{2y}\right)^2+y^2}=0$

$$\Leftrightarrow y\left(\left(\frac{3y+1}{2y}\right)^2+y^2\right)-\frac{3y+1}{2y}-3y=0$$

$$\Leftrightarrow y.\left(\frac{9y^2+6y+1}{4y^2}+y^2\right)-\frac{6y^2+3y+1}{2y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4y^4+9y^2+6y+1}{4y}-\frac{6y^2+3y+1}{2y}=0$$

$$\Leftrightarrow 4y^4-3y^2-1=0\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm 1.$$

Với $y=1$ ta có: $x=\dfrac{3.1+1}{2.1}=2.$

Với $y=-1$ ta có: $x=\dfrac{3.(-1)+1}{2.(-1)}=1.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm:

$$(x;y)=(2;1) \text{ và } (x;y)=(1;-1).$$

Nhận xét. Sử dụng số phức để giải hệ phương trình đã cho là một cách giải độc đáo. Ý tưởng này xuất phát từ chính cấu trúc các phương trình trong hệ. Các ẩn x, y đứng riêng và ở tử số có tính "đối xứng", và ở mẫu số của phân thức đều là x^2+y^2, là bình phương môđun của số phức $z=x+iy$. Hoan nghênh các bạn: *Lê Phước Quý*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Trị**; *Nguyễn Phúc Thiên An*, 11E1, *Nguyễn Quốc An*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã có lời giải đúng cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31/12/2025.

BÀI TOÁN 111. *Gọi (L) là tiếp tuyến của đường tròn (C) và M là một điểm trên (L). Hãy tìm quỹ tích các điểm P thỏa mãn tính chất: tồn tại hai điểm R, Q trên (L) sao cho $RM=QM$ và tam giác PQR nhận (C) là đường tròn nội tiếp.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

(Đề đăng trên TH&TT số 577, tháng 7 năm 2025)

Phân tích sai lầm. Kết quả Minh chọn chưa đúng. Bạn *Minh* đã không đặt điều kiện $(4^a+m)(4^b+m)\neq 0$ và do đó không kiểm tra điều kiện sau khi tìm được $m=\pm 2$.

Lời giải đúng. ĐK: $\begin{cases}4^a+m\neq 0\\4^a+m\neq 0\end{cases}$ (*).

Ta có: $a+b=1\Leftrightarrow b=1-a$. Khi đó:

$$\frac{4^a}{4^a-2}+\frac{4^b}{4^b-2}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{4^a+m.4^a+4+m.4^{1-a}}{4+m.4^a+m.4^{1-a}+m^2}=1\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2.$$

Với $m=2$ bài toán được thoả mãn.

Với $m=-2$, khi đó $\frac{4^a}{4^a-2}+\frac{4^b}{4^b-2}=1$ không được thoả mãn với $a=b=\frac{1}{2}$. Kết quả đúng: Chọn **C**.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn: *Trần Gia Phú*, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**, *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

SAI Ở ĐÂU NHỈ ?



BÀI TOÁN. *Trong bài kiểm tra có câu hỏi trắc nghiệm: Từ các chữ số 0, 1, 2 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số là bội số của 3 và bé hơn 2.10^8.*

A. 2961 **B.** 2187

C. 2916 **D.** 2178.

Bạn Huy chọn đáp án C và giải như sau:

Xét các số thỏa mãn yêu cầu bài toán có dạng:

$$\overline{A=a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$$

trong đó các $a_i\in\{0;1;2\}$ và các a_i không đồng thời bằng 0.

Vì $A<2.10^8$ nên $a_1\in\{0;1\}\Rightarrow a_1$ có 2 cách chọn.

Các số từ a_2 đến a_8 mỗi số đều có 3 cách chọn.

Chữ số a_9 chỉ có 1 cách chọn (Vì nếu $a_1+...+a_8$ chia cho 3 dư 0 thì chọn $a_9=0$, dư 1 thì chọn $a_9=2$ và dư 2 thì chọn $a_9=1$).

Suy ra có tất cả là $2.3^7=4374$ số.

Xét các số dạng $\overline{0a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$:

Có 2 cách chọn $a_2\in\{1;2\}$;

Các chữ số từ a_3 đến a_8 mỗi số đều có 3 cách chọn;

Chữ số a_9 chỉ có 1 cách chọn (vì nếu $a_2+...+a_8$ chia cho 3 dư 0 thì chọn $a_9=0$, dư 1 thì chọn $a_9=2$ và dư 2 thì chọn $a_9=1$).

Các số dạng này có: $2.3^6=1458$.

Do đó số các số lập được thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $4374-1458=2916$.

Khi thu bài thầy giáo nhìn kết quả của Huy và bảo kết quả của Huy không đúng. Huy xem lời giải mà không phát hiện ra chỗ sai. Theo bạn lời giải của Huy sai ở đâu?

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 581 (11.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35082701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập*: TS. TRẦN HỮU NAM** ***Thư kí Tòa soạn*: CN. VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Bùi Minh Trung – Khai thác ba tính chất quen thuộc để giải phương trình nghiệm nguyên ở bậc THCS.

6 Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Hưng Yên, năm học 2025 – 2026.

10 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hà Nội, môn thi Toán (chuyên Tin), năm học 2025 – 2026.

11 **Diễn đàn dạy học toán**
Phạm Việt Bắc – Ứng dụng vectơ trong không gian để giải bài toán thực tế về mô hình hình chóp tam giác đều trong sách giáo khoa Toán 12 bằng nhiều cách.

15 **Bạn đọc tìm tòi**
Hoàng Ngọc Minh – Công thức biểu diễn $a^n + b^n$ qua tổng $a + b$ và tích a.b.

18 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/581, ..., T12/581, L1/581, L2/581.

20 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/577, ..., T12/577, L1/577, L2/577

29 **Phương pháp giải toán**
Nguyễn Cửu Huy – Ứng dụng tính chất của đường tròn để chứng minh các điểm đồng viên, thẳng hàng và các đường thẳng đồng quy.

41 **Kết quả *Cuộc thi giải Toán và Vật lý* trên Toán học và Tuổi trẻ năm học 2024 - 2025.**

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 122 – Bài dịch số 120.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 101 – Đề bài toán 103.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 109. Đề bài toán 111.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

TRƯỜNG THPT ĐÔ LƯƠNG 2...

(Tiếp theo bìa 4)



Các thầy, cô tổ Toán – Tin

Với sự nỗ lực hết mình của thầy Hiệu trưởng *Nguyễn Cảnh Lương* cùng các thầy giáo cô giáo và hơn 800 học sinh, phong trào dạy và học của trường ngày càng được nâng cao trên mọi phương diện. Các thầy giáo cô giáo tích cực trong hoạt động chuyên môn như nghiên cứu sáng tạo đồ dùng dạy học, đúc rút sáng kiến kinh nghiệm, tổ chức và tham gia thi giáo viên giỏi cấp trường, giáo viên giỏi cấp tỉnh, học sinh thi học sinh giỏi cấp tỉnh đạt kết quả cao, số học sinh giỏi toàn diện, học sinh tiên tiến tăng lên nhanh chóng, ... đã khẳng định chất lượng giáo dục của Nhà trường.

Hai mươi năm chuyển mình cùng đất nước, Trường THPT Đô Lương 2 đã bắt nhịp cùng ngành giáo dục của tỉnh nhà vươn cao, vươn xa trên hành trình vẻ vang sự nghiệp trồng người ở vùng đất học Bạch Ngọc - Đô Lương.

TOẢ SÁNG

Từ năm học 1996 - 1997 đến nay, trải qua gần ba mươi năm với các thế hệ hiệu trưởng nối tiếp là thầy *Nguyễn Cảnh Lương* (1992 - 1999), thầy *Nguyễn Duy Đào* (1999 - 2003), thầy *Nguyễn Thanh Long* (2003 - 2014), thầy *Nguyễn Đình Vỹ* (2014 - 2023) và nay là thầy *Trần Văn Trung*, trường không ngừng phát triển mạnh mẽ về số lượng và chất lượng, quy mô trường lớp ngày càng tăng, sự nghiệp giáo dục khởi sắc, địa bàn tuyển sinh ngày càng mở rộng. Quy mô của nhà trường thời điểm đỉnh cao tới 51 lớp vào các năm 2003 - 2005. Từ những nhà tranh vách đất đến nay trường được xây dựng khang trang. Khuôn viên của trường rộng rãi, bằng phẳng với diện tích hơn 36231 m^2, trường có 41 phòng học kiên cố, trong đó 36 phòng học văn hóa phục vụ tốt cho công tác giảng dạy và 5 phòng học chức năng. Có 14 phòng làm việc của Hiệu vụ, nhân viên và các tổ chức đoàn thể, có một nhà đa chức năng hiện đại, có hội trường, khu nhà để xe cho giáo viên và học sinh. Thư viện gần một vạn đầu sách giáo khoa và sách tham khảo, có hai phòng vi tính để thực hành, sân bóng đá, sân cầu lông, bóng chuyền, bóng bàn, bóng rổ...

Năm học 2024 - 2025 trường có 36 lớp với tổng số 1582 học sinh, có 90 cán bộ, viên chức, người lao động. Chi bộ gồm 69 đảng viên gồm 5 tổ Đảng luôn làm tốt vai trò định hướng, cố vấn cho mọi hoạt động của nhà trường, nhiều năm liền đạt danh hiệu *Chi bộ trong sạch vững mạnh*, có 5 đảng viên được BTV Tỉnh uỷ Nghệ An tặng *Bằng khen* hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ tiêu biểu. Các tổ chức đoàn thể như Công đoàn, Đoàn thanh niên hoạt động đều và rất hiệu quả, góp phần quan trọng vào thành tích chung của nhà trường. Dịp Kỷ niệm 50 năm thành lập, trường đón nhận *Bằng khen* của Thủ tướng Chính phủ (tháng 11/2015) và Quyết định công nhận *Trường đạt chuẩn Quốc gia* (tháng 11/2022).

Với bề dày lịch sử và những thành tích đạt được trong sự nghiệp giáo dục hướng tới Lễ kỷ niệm 60 năm ngày thành lập trường ngày 8/8/2025 Chủ tịch nước đã có QĐ số 1536/QĐ-CTN về việc tặng thưởng *Huân chương Lao động hạng Ba* cho tập thể Trường THPT Đô Lương 2, đây là một phần thưởng vô cùng cao quý, là động lực to lớn để tập thể cán bộ giáo viên, nhân viên và học sinh nỗ lực phấn đấu trong chặng đường nối tiếp xây đắp thêm bề dày sự nghiệp giáo dục của nhà trường.

Gần 60 năm xây dựng và trưởng thành, trường Đô Lương 2 đã ba lần đổi tên và ghi danh Trường THPT Đô Lương 2 từ năm 1996 cho đến bây giờ. Các thế hệ thầy cô nối tiếp nhau: 6 Hiệu trưởng, 11 Bí thư chi bộ, 10 Chủ tịch Công đoàn... và gần 300 lượt thầy cô giáo đã nỗ lực hết mình bằng trí tuệ, tâm huyết và niềm tin đã và đang nuôi dưỡng, đào tạo 59 thế hệ học sinh với hàng vạn học sinh trưởng thành trên khắp mọi miền Tổ quốc góp sức xây dựng quê hương đất nước. Trong số đó nhiều người đã giữ những vai trò trọng trách cao của nước nhà như: nguyên Thứ trưởng Bộ Thương mại *Lê Danh Vĩnh*; nguyên Thứ trưởng Bộ TT&TT *Nguyễn Minh Hồng*; nguyên Cục trưởng Cục Khoa học - Quân sự, Bộ Quốc phòng, phó GS.TS *Cao Tiến Hinh*; nguyên Vụ trưởng Vụ giáo dục Mầm non, Bộ GD&ĐT *Nguyễn Bá Minh*; nguyên Phó Cục trưởng Cục Thông tin và và Đối ngoại, Bộ TT&TT *Bùi Sỹ Hoa*, và rất nhiều người thành công trên nhiều lĩnh vực khác...

Trong hành trình phát triển của mình, trường như dòng sông Lam vừa hiền hòa vừa mãnh liệt, biết cách vượt qua những thác ghềnh để vươn mình ra biển lớn hòa mình vào đại dương mênh mông. Những thành công của các thế hệ học sinh trên mọi miền Tổ quốc đã chứng minh cho thế và lực của nhà trường ngày càng đi lên. Với thế tựa núi nhìn sông vững chãi, hôm nay chúng ta tin tưởng thế hệ thầy và trò Trường THPT Đô Lương 2 sẽ viết tiếp những trang vàng đẹp nhất của nhà trường, tạo bệ phóng cho các em học sinh vươn tới tầm cao của ước mơ, chắp cánh cho các em bay cao, bay xa trong quá trình hội nhập của đất nước, trong sự phát triển trên t

Được quét bằng CamScanner

TRƯỜNG THPT ĐÔ LƯƠNG 2

60 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN (1965 - 2025)



Thầy *Trần Văn Trung*
Bí thư chi bộ – Hiệu trưởng nhà trường



Hội đồng Giáo dục nhà trường năm học 2025–2026

Có một dòng sông chảy qua thời gian, chảy qua hoài niệm, chảy qua những thăng trầm để góp sức xây đời - đó là chặng đường 60 năm rất đỗi tự hào của tập thể cán bộ, giáo viên, công nhân viên và học sinh Trường THPT Đô Lương 2. Trên hành trình ấy, nhiều thế hệ cán bộ, giáo viên, công nhân viên đã gắn bó và cống hiến tâm huyết cả cuộc đời mình, đã đi qua bao nhiêu bến bờ, dấu mốc thời gian để góp phần làm nên "kỳ tích 60 năm" hôm nay ...

KHỞI NGUỒN

Trường trung học phổ thông Đô Lương 2 được thành lập tháng 9.1965; đóng trên địa bàn xóm 2 xã Bạch Ngọc, tỉnh Nghệ An. Nơi đây thuộc làng Bạch Đường có từ thời Lý, nằm phía tả ngạn sông Lam, cách trung tâm tỉnh Nghệ An khoảng 70 km, là một vùng địa linh, phong cảnh hữu tình, có nền văn minh sớm, người dân nổi tiếng với truyền thống trung tín và hiếu học. Hội đồng nhà trường ban đầu gồm 15 thầy giáo trong đó thầy *Trần Canh* làm Phó Hiệu trưởng phụ trách phân hiệu, thầy *Cao Tiến Đăng* là Bí thư Chi bộ. Học sinh chủ yếu là con em các xã Ngọc, Lam, Bồi, Nam, Bắc, Đặng, Giang, Hồng, Tràng, Bài... Trường có ba khối 8, 9, 10 gồm 6 lớp. Trong những năm tháng chiến tranh thầy trò cùng nhân dân đào hào sâu bao quanh, dựng lán tranh tre để học và có khi học trong nhà thờ của dân.

Năm học 1966 - 1967, chiến tranh ngày càng ác liệt, để có địa thế an toàn và trung tâm, trường chuyển về chòm Hy Sinh và chòm Dũng Cảm xã Lam Sơn. Thầy *Trần Cường* làm hiệu trưởng đầu tiên của trường, thầy *Cao Tiến Đăng* là Phó hiệu trưởng và Bí thư chi bộ. Những năm học từ 1967 đến năm 1974, các lớp "Toán đặc biệt" của tỉnh về học tập tại đây gồm 6 khóa, do các thầy giáo: *Nguyễn Khắc Tuệ, Nguyễn Duy Tĩnh, Nguyễn Tiến Lễ* đảm nhận dạy chuyên Toán, các môn khác do giáo viên của trường trực tiếp giảng dạy.

Hòa chung không khí của cả nước ra trận, từ tháng 2/1968 trở đi, có hàng trăm học sinh và một số thầy giáo của trường đã xếp bút nghiên lên đường chiến đấu góp phần không nhỏ trong cuộc kháng chiến chống Mỹ cứu nước cũng như sự nghiệp thống nhất và bảo vệ hòa bình đất nước sau này. Đặc biệt có 80 liệt sĩ (gồm 1 thầy giáo và 79 HS) trong đó có ba người được Đảng và Nhà nước phong tặng danh hiệu *Anh hùng các lực lượng vũ trang nhân dân*, đó là anh hùng *Nguyễn Quốc Thất* (quê ở Đà Sơn), anh hùng *Hoàng Hữu Thanh* (quê Bồi Sơn), anh hùng *Lê Hữu Hòe* (quê Lam Sơn). Sự cống hiến và hy sinh anh dũng của các anh đã tô đậm thêm truyền thống yêu nước vẻ vang của dân tộc, là niềm tự hào của quê hương và mái trường THPT Đô Lương 2 yêu dấu.

VƯƠN LÊN

Từ năm 1975 đến năm 1996, gánh chịu hậu quả nặng nề của chiến tranh và thời kì quá độ, đời sống nhân dân hết sức khó khăn. Ngành Giáo dục Nghệ Tĩnh nói chung, Trường cấp 3 Đô Lương 2 nói riêng không nằm ngoài thử thách ấy. Năm học 1991 - 1992, số học sinh giảm sút, từ chỗ trường có 18 lớp đã thu hẹp dần và trở về con số xuất phát ban đầu là 6 lớp. Tuy nhiên, thực hiện lời dạy của Bác Hồ: *"Dù khó khăn gian khổ đến mấy cũng phải dạy tốt, học tốt"*, từ năm học 1991 - 1992 đến năm học 1995 - 1996, trường sáp nhập với trường cấp 2 Bồi Sơn và trường cấp 2 Lam Sơn lấy tên chung là Trường PTTH cấp 2, 3 Đô Lương 2. Đến năm học 1996 - 1997, số lớp tăng lên đánh dấu bước khởi sắc, vươn mình của ngành giáo

(Xem tiếp trang 3)

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT11M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2025
Giá: [illegible] đồng
Hai mươi hai [illegible] đồng

Được quét bằng CamScanner