TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 580
Tháng 10 - 2025
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nikolai Ivanovich Lobachevsky
(1792 - 1856)



Trường đại học Kazan (Liên bang Nga)

Được quét bằng CamScanner

KHAI TRƯƠNG NHÀ SÁCH VÀ THIẾT BỊ TRƯỜNG HỌC NGUYỄN TRI PHƯƠNG

MÔ HÌNH MỚI TIẾP NỐI DÒNG CHẢY TRI THỨC

Ngày 16/9, Công ty CP. Sách và Thiết bị trường học TP. Hồ Chí Minh (đơn vị thành viên của NXBGDVN – STB) tưng bừng tổ chức khai trương Nhà sách và thiết bị trường học Nguyễn Tri Phương (mô hình mới) tại địa chỉ 223 Nguyễn Tri Phương, Phường An Đông, Thành phố Hồ Chí Minh – tiếp bước sứ mệnh phát hành sách giáo khoa đầy đủ, đồng bộ, kịp thời; đảm bảo đồ dùng dạy học chất lượng, phục vụ hiệu quả chương trình đổi mới giáo dục hiện nay.



Lễ cắt băng khai trương Nhà sách và thiết bị trường học Nguyễn Tri Phương (mô hình mới)

Tham dự buổi lễ có sự hiện diện của ban lãnh đạo Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN): ông Nguyễn Tiến Thanh – Chủ tịch HĐTV, Tổng Giám đốc; ông Phạm Văn Thắng – Thành viên HĐTV; các Phó Tổng Giám đốc: ông Đặng Thanh Hải, bà Phùng Ngọc Hồng và đại diện một số phòng, ban chuyên môn.

Về phía STB có ông Từ Trung Đan – Chủ tịch HĐTV; ông Nguyễn Công Dũng – Tổng Giám đốc cùng toàn thể lãnh đạo các phòng ban, cán bộ, nhân viên của công ty và đông đảo khách mời tham dự.

Phát biểu tại buổi lễ, Chủ tịch HĐTV NXBGDVN Nguyễn Tiến Thanh chia sẻ: *"Sự kiện ngày hôm nay là một sự tiếp nối truyền thống, đồng thời cũng thể hiện một khát vọng đổi mới của STB trong thời đại công nghệ hiện nay. Chúng tôi rất tự hào về những thành tựu của công ty, vì STB có một điều rất đặc biệt là nhiều thế hệ cán bộ công nhân viên cùng gắn bó, một tập thể rất đoàn kết, đồng lòng vượt qua khó khăn, thách thức đi tới tương lai".*

Cũng trong buổi lễ, đại diện lãnh đạo NXBGDVN và STB đã cùng nhấn nút triển khai trang thương mại điện tử stbbook.vn – website cung cấp đa dạng sản phẩm sách giáo khoa, sách tham khảo, văn phòng phẩm, đồ chơi, quà tặng, thiết bị trường học,... với thông tin rõ ràng, hình ảnh minh họa chân thực và nhiều tính năng hỗ trợ người dùng.

Qua nhiều năm không ngừng nâng cao chất lượng sản phẩm và dịch vụ, STB tự hào trở thành địa chỉ tin cậy, nhận được sự yêu mến của đông đảo khách hàng, từ các bậc phụ huynh muốn tìm những tài liệu hữu ích cho con trẻ, các bạn trẻ yêu sách, đến các nhân viên văn phòng cần tìm tài liệu, văn phòng phẩm phục vụ công việc,...

Trong dịp khai trương, nhiều sản phẩm như sách giáo dục, văn phòng phẩm, thiết bị giáo dục mầm non được giảm giá 10% cho đến hết tháng 9. Cá biệt có một số sản phẩm được giảm tới 20% đến hết năm 2025 hoặc một số đồ chơi mầm non được giảm tới 50% cho tới khi hết hàng.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Được quét bằng CamScanner

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

NGUYỄN NGỌC HÙNG
(GV THCS Hoàng Xuân Hãn, Hà Tĩnh)

Trong các kì thi học sinh giỏi, thi vào lớp 10 THPT chuyên, chúng ta gặp rất nhiều bài toán nếu chúng ta giải hay chứng minh theo phương pháp thông thường thì rất khó khăn và phức tạp, khi đó rất có thể phương pháp quy nạp toán học lại là công cụ đắc lực giúp chúng ta giải bài toán đó.

Nguyên lý quy nạp toán học cho ta một phương pháp kiểm tra khẳng định $P(n)$ đúng hay sai với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với mỗi số tự nhiên n, khẳng định $P(n)$ là một mệnh đề toán học (mệnh đề). Ta nói mệnh đề này phụ thuộc số tự nhiên n.

Nguyên lý quy nạp toán học cho ta một phương pháp suy luận mạnh mẽ và hiệu quả để chứng minh nhiều mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên.

Nguyên lí quy nạp toán học

Giả sử với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$, $P(n)$ là một mệnh đề. Giả sử hai điều kiện sau thoả mãn:

i) *$P(1)$ đúng.*

ii) *Với mọi số tự nhiên $k \geq 1$, nếu $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng.*

Khi đó, $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Để chứng minh một mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta cần thực hiện hai bước:

Bước 1. Chỉ ra mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả sử mệnh đề đúng với số tự nhiên $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Từ đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, ta kết luận mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý. Đôi khi, ta cần chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$ với n_0 là số tự nhiên nào đó. Khi đó, trong chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học, ở bước 1 ta chỉ ra mệnh đề đúng với $n = n_0$ và ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề đúng với $n = k \geq n_0$.

Phương pháp quy nạp toán học được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau (số học, đại số, hình học, giải tích, ...). Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu một số ứng dụng trong chương trình môn Toán bậc Trung học cơ sở.

1. Chứng minh đẳng thức

Thí dụ 1. *Cho*

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}, \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng $S_n = \dfrac{n}{4n+1}$.

Lời giải. Với $n = 1$ thì $S_1 = \dfrac{1}{1\cdot 5} = \dfrac{1}{5}$ và $\dfrac{n}{4n+1} = \dfrac{1}{4\cdot 1+1} = \dfrac{1}{5}$ nên công thức $S_n = \dfrac{n}{4n+1}$ đúng với $n = 1$.

Giả sử công thức $S_n = \dfrac{n}{4n+1}$ đúng với $n = k \geq 1$, tức là $S_k = \dfrac{k}{4k+1}$. Ta sẽ chứng minh công thức trên đúng với $n = k + 1$, nghĩa là: $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{4(k+1)+1}$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{[4(k+1)-3][4(k+1)+1]} \\ &= S_k + \frac{1}{[4(k+1)-3][4(k+1)+1]} \\ &= \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)[4(k+1)+1]} \\ &= \frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)[4(k+1)+1]} = \frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)[4(k+1)+1]} \\ &= \frac{k+1}{4(k+1)+1}. \end{aligned}$$

Được quét bằng CamScanner

Theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức $S_n=\frac{n}{4n+1}$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Thí dụ 2. *Cho* $S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}$, *với* $n\in\mathbb{N}^*$. *Chứng minh rằng* $S_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot3^n}$.

Lời giải. Với $n=1$ thì $S_1=\frac{1}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot1+3}{4\cdot3}$ nên công thức $S_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot3^n}$ đúng với $n=1$.

Giả sử công thức $S_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot3^n}$ đúng với $n=k\geq1$, tức là $S_k=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot3^k}$. Ta sẽ chứng minh công thức trên đúng với $n=k+1$, nghĩa là: $S_{k+1}=\frac{3}{4}-\frac{2(k+1)+3}{4\cdot3^{k+1}}$. Thật vậy, ta có:

$$S_{k+1}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{k}{3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=S_k+\frac{k+1}{3^{k+1}}$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{3(2k+3)-4(k+1)}{4\cdot3^{k+1}}$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{2(k+1)+3}{4\cdot3^{k+1}}.$$

Theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức $S_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot3^n}$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Chứng minh chia hết

Thí dụ 3. *Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng* $2^{5n+3}+5^n\cdot3^{n+2}$ *chia hết cho* 17.

Lời giải. Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, ta xét mệnh đề $2^{5n+3}+5^n\cdot3^{n+2}$ chia hết cho 17. Ta cần chứng minh mệnh đề này đúng với $n\in\mathbb{N}$.

Với $n=0$ thì $2^3+5^0\cdot3^2=17$ chia hết cho 17. Vậy mệnh đề đúng với $n=0$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\geq0$, tức là $2^{5k+3}+5^k\cdot3^{k+2}$ chia hết cho 17. Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$, nghĩa là:

$$2^{5(k+1)+3}+5^{k+1}\cdot3^{k+1+2}=2^{5k+8}+5^{k+1}\cdot3^{k+3}$$

chia hết cho 17. Thật vậy, ta có:

$2^{5k+8}=2^{5k+3}\cdot2^5=2^{5k+3}\cdot(34-2)=2^{5k+3}\cdot34-2^{5k+3}\cdot2$;

$5^{k+1}\cdot3^{k+3}=5^k\cdot3^{k+2}\cdot15=5^k\cdot3^{k+2}\cdot17-5^k\cdot3^{k+2}\cdot2$.

Do đó: $2^{5k+8}+5^{k+1}\cdot3^{k+3}=2^{5k+3}\cdot34+5^k\cdot3^{k+2}\cdot17-2\left(2^{5k+3}+5^k\cdot3^{k+2}\right)$ chia hết cho 17. Vậy mệnh đề đúng với $n=k+1$, theo nguyên lí quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Thí dụ 4. *Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng* $(4n)!$ *chia hết cho* 24^n.

Lời giải. Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, ta xét mệnh đề $(4n)!$ chia hết cho 24^n. Ta cần chứng minh mệnh đề này đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Với $n=1$ thì $4!=24$ chia hết cho $24^1=24$. Vậy mệnh đề đúng với $n=1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\geq1$, tức là $(4k)!$ chia hết cho 24^k. Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$, nghĩa là: $(4(k+1))!$ chia hết cho 24^{k+1}. Thật vậy, ta có:

$(4(k+1))!=(4k+4)!=(4k)!(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)$

và $24^{k+1}=24^k\cdot24$.

Vì $(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)$ là tích 4 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3 và 8, do đó $(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)$ chia hết cho 24. Suy ra $(4(k+1))!$ chia hết cho 24^{k+1}.

Vậy mệnh đề đúng với $n=k+1$, theo nguyên lí quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

3. Chứng minh bất đẳng thức

Thí dụ 5. *Cho* $A_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$, *với* $n\in\mathbb{N}^*$. *Chứng minh rằng* $\sqrt{n}\leq A_n\leq2\sqrt{n}$.

Lời giải. Với $n=1$ thì $A_1=1$, khi đó $\sqrt{1}=A_1<2\sqrt{1}$ nên bất đẳng thức đúng với $n=1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\geq1$, tức là $\sqrt{k}\leq A_k\leq2\sqrt{k}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, nghĩa là: $\sqrt{k+1}\leq A_{k+1}\leq2\sqrt{k+1}$. Thật vậy, ta có:

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Mặt khác: $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}>0$,

Được quét bằng CamScanner

$$2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}>0.$$

Do đó $\sqrt{k+1}\le A_{k+1}\le 2\sqrt{k+1}$. Vậy bất đẳng thức đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, bất đẳng thức đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Thí dụ 6. *Cho* $B_n=(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)$, *với* $n\in\mathbb{N}^*$; $a_1, a_2, ..., a_n>0$. *Chứng minh rằng* $B_n\ge n^2$.

Lời giải. Với $n=1$ thì $B_1=a_1\cdot\frac{1}{a_1}=1$, khi đó $1=1^2$ nên bất đẳng thức đúng với $n=1$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\ge 1$, tức là: $B_k\ge k^2$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, nghĩa là: $B_{k+1}\ge(k+1)^2$. Thật vậy, ta có:

$$(a_1+a_2+...+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=(a_1+...+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_k}\right)+(a_1+...+a_k)\frac{1}{a_{k+1}}$$

$$+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_k}\right)+1$$

$$\ge k^2+\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_2}\right)+...+\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)+1$$

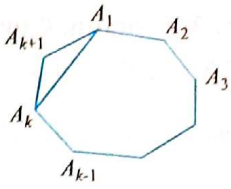
$\ge k^2+2k+1=(k+1)^2$. Vậy $B_{k+1}\ge(k+1)^2$. Do đó bất đẳng thức đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, bất đẳng thức đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

4. Chứng minh hình học

Thí dụ 7. *Trong mặt phẳng, cho đa giác* $A_1A_2A_3...A_n$ *có n cạnh* $(n\ge 3)$. *Gọi* S_n *là tổng số đo các góc trong của đa giác đã cho. Chứng minh rằng* $S_n=(n-2)\cdot 180^o$.

Lời giải. Với $n=3$, ta có tổng ba góc trong một tam giác bằng $S_3=(3-2)\cdot 180^o=180^o$. Vậy công thức $S_n=(n-2)\cdot 180^o$ đúng với $n=3$. Giả sử công thức $S_n=(n-2)\cdot 180^o$ đúng với $n=k\ge 3$, tức là $S_k=(k-2)\cdot 180^o$. Ta sẽ chứng minh công thức đúng với $n=k+1$, nghĩa là $S_{k+1}=(k-1)\cdot 180^o$.

Thật vậy, xét đa giác $k+1$ cạnh $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$, nối hai đỉnh A_1 và A_k ta được đa giác k cạnh $A_1A_2A_3...A_k$. Theo giả thiết quy nạp, tổng các góc của đa giác k cạnh này bằng $S_k=(k-2)\cdot 180^o$. Tổng các góc trong tam giác $A_{k+1}A_kA_1$ bằng 180^o nên tổng các góc trong đa giác $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ bằng:



$$S_k=(k-2)\cdot 180^o+180^o=(k-1)\cdot 180^o.$$

Vậy công thức đúng với $n=k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức đúng với mọi $n\in\mathbb{N}, n\ge 3$.

Thí dụ 8. *Trong mặt phẳng, cho n* $(n\ge 2)$ *đường thẳng, trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Gọi* S_n *là số giao điểm của n đường thẳng đã cho. Chứng minh rằng* $S_n=\frac{n(n-1)}{2}$.

Lời giải. Với $n=2$, ta có $S_2=1$ và $\frac{n(n-1)}{2}=1$ nên công thức $S_n=\frac{n(n-1)}{2}$ đúng với $n=2$.

Giả sử công thức $S_n=\frac{n(n-1)}{2}$ đúng với $n=k\ge 2$, tức là $S_k=\frac{k(k-1)}{2}$. Ta sẽ chứng minh công thức trên đúng với $n=k+1$, nghĩa là $S_{k+1}=\frac{(k+1)k}{2}$.

Thật vậy, gọi đường thẳng thứ $k+1$ là d. Theo giả thiết quy nạp, k đường thẳng đã cho cắt nhau tại $\frac{k(k-1)}{2}$ điểm. Mặt khác, do không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy nên đường thẳng d cắt k đường thẳng đó tại k điểm khác nhau và khác với S_k điểm kia. Do đó, số giao điểm của $k+1$ đường thẳng này là:

$$S_{k+1}=S_k+k=\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{k^2-k+2k}{2}=\frac{(k+1)k}{2}.$$

Vậy công thức đúng với $n=k+1$.

Được quét bằng CamScanner

Theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức đúng với mọi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5. Một số ứng dụng khác

Thí dụ 9. *Cho số nguyên dương n và số thực x thỏa mãn $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $A_n=x^n+\frac{1}{x^n}$ là một số nguyên.*

Lời giải. Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$ và $x+\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$, ta xét mệnh đề $A_n=x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$. Ta cần chứng minh mệnh đề này đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Với $n=1$ thì $A_1=x^1+\frac{1}{x^1}\in\mathbb{Z}$, với $n=2$ thì $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\in\mathbb{Z}$. Vậy mệnh đề đúng với $n=1$, $n=2$. Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\geq 2$, tức là $A_k=x^k+\frac{1}{x^k}\in\mathbb{Z}$. Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$, nghĩa là $A_{k+1}=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\in\mathbb{Z}$.

Thật vậy, ta có:

$$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}+x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}.$$

Suy ra:

$$A_{k+1}=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

Mà $x+\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$, theo giả thiết quy nạp thì $x^k+\frac{1}{x^k}\in\mathbb{Z}$, $x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\in\mathbb{Z}$, suy ra $A_{k+1}\in\mathbb{Z}$.

Vậy mệnh đề đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Thí dụ 10. *Một người gửi số tiền A (đồng) vào ngân hàng với lãi suất $r\%$/năm. Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Chứng minh rằng số tiền nhận được (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sau n (năm) là $T_n=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi.*

Lời giải. Sau 1 năm, số tiền vốn và lãi thu được là:

$$A+A.\frac{r}{100}=A\left(1+\frac{r}{100}\right) \text{ (đồng).}$$

Với $n=1$ thì $T_1=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^1$, tức là công thức $T_n=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ đúng với $n=1$. Giả sử công thức trên đúng với $n=k\geq 1$, tức là $T_k=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^k$. Ta chứng minh công thức trên đúng với $n=k+1$, nghĩa là $T_{k+1}=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{k+1}$.

Thật vậy, số tiền vốn và lãi có được sau $k+1$ (năm) là: $A\left(1+\frac{r}{100}\right)^k+A\left(1+\frac{r}{100}\right)^k.\frac{r}{100}$

$$=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^k\left(1+\frac{r}{100}\right)=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{k+1},$$

tức là $T_{k+1}=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{k+1}$ (đồng). Vậy công thức đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Thí dụ 11. *Cho dãy số chia thành từng nhóm như sau*: (1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), (11; 12; 13; 14; 15), …

Tính tổng $S_1+S_3+S_5+...+S_{2n-1}$, với S_k là tổng những số của nhóm thứ k.

Lời giải. Số đầu tiên của nhóm thứ k bằng:

$$[1+2+...+(k-1)]+1=\frac{k(k-1)}{2}+1.$$

Tổng của k số ở nhóm thứ k bằng:

$$S_k=\frac{k}{2}.\left[\frac{k(k-1)}{2}+1+\frac{(k+1)k}{2}\right]=\frac{k^3+k}{2}.$$

Bằng quy nạp toán học, ta chứng minh:

$S_1+S_3+S_5+...+S_{2n-1}=n^4$ (*), với $n\in\mathbb{N}^*$.

Với $n=1$, ta có $S_1=1=1^4$ nên công thức (*) đúng với $n=1$. Giả sử công thức (*) đúng với $n=t\geq 1$, tức là $S_1+S_3+S_5+...+S_{2t-1}=t^4$.

Được quét bằng CamScanner

Ta chứng minh công thức (*) đúng với $n = t + 1$, nghĩa là $S_1+S_3+S_5+...+S_{2t+1}=(t+1)^4$.

Thật vậy, ta có:

$$S_1+S_3+S_5+...+S_{2t+1}=(S_1+S_3+S_5+...+S_{2t-1})+S_{2t+1}$$

$$=t^4+\frac{(2t+1)^3+(2t+1)}{2}=t^4+(2t+1)(2t^2+2t+1)$$

$$=t^4+4t^3+6t^2+4t+1=(t+1)^4.$$

Vậy công thức (*) đúng với $n=t+1$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức (*) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Thí dụ 12. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình* $x^y+y^z+z^x=2(x+y+z)$.

Lời giải. • Nếu ba số x, y, z đều không nhỏ hơn 2 thì $x^y+y^z+z^x\ge x^2+y^2+z^2\ge 2(x+y+z)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=2$.

• Nếu tồn tại ít nhất một số nhỏ hơn 2, chẳng hạn $z=1$ khi đó $x^y=2x+y+1$ (*).

+ Nếu có ít nhất một số nhỏ hơn 4:

Với $y=2$ thì $x=3$ và khi $x=3$ thì $y=2$.

Với $y=3$ thì $x=2$ và khi $x=2$ thì $y=3$.

+ Nếu cả hai số x, y đều không nhỏ hơn 4.

Từ $(x-4)(y-4)\ge 0$, suy ra :

$$xy\ge 2x+2y+2(x+y-8)\ge 2x+2y>2x+y+1 \quad (**).$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $x^y>xy$ thì $x^y>2x+y+1$ sẽ vô nghiệm

Với $y=4$ thì $x^4=x\cdot x^3>4x$. Giả sử $x^y>xy$ đúng với mọi $y=k\ge 4$, tức là $x^k>xk$. Ta có:

$$x^{k+1}=x\cdot x^k>x\cdot x\cdot k\ge x\cdot 4k=x(k+3k)>x(k+1).$$

Vậy $x^y>xy$ đúng với $y=k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, thì $x^y>xy$ đúng với mọi $x\ge 4, y\ge 4$.

Do đó phương trình có nghiệm nguyên dương $(x; y; z)$ là: (2; 2; 2), (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1).

Thí dụ 13. *Chứng minh rằng số được thành lập bởi* 3^n *chữ số giống nhau thì chia hết cho* 3^n *với n là số nguyên dương.*

Lời giải. Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, ta xét mệnh đề $\underbrace{aaa...aa}_{3^n \text{ số } a}\vdots 3^n$. Ta cần chứng minh mệnh đề này đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Với $n=1$ ta có $\overline{aaa}=111a\vdots 3^1$ nên mệnh đề đúng với $n=1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\ge 1$, tức là $\underbrace{aaa...aa}_{3^k \text{ số } a}\vdots 3^k$. Với $n=k+1$, ta có:

$$\underbrace{aaa...aa}_{3^{k+1} \text{ số } a}=\underbrace{aaa...aa}_{3^k \text{ số } a}\underbrace{aaa...aa}_{3^k \text{ số } a}\underbrace{aaa...aa}_{3^k \text{ số } a}$$

$$=\underbrace{aaa...aa}_{3^k \text{ số } a}\cdot\left(10^{2\cdot 3^k}+10^{3^k}+1\right)\vdots 3^k\cdot 3=3^{k+1}.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

b) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$;

c) $1+4+9+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

d) $1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{n-1}=2^n-1$.

2. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $4^n+15n-1$ chia hết cho 9;

b) 13^n-1 chia hết cho 6;

c) $(n^2)!$ chia hết cho $(n!)^n$.

d) $3^{2^{4n+1}}+2$ chia hết cho 11.

3. Cho $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Chứng minh rằng

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

4. Cho số thực a thỏa mãn $|a|\ne 1$. Chứng minh rằng

$$S_n=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+...+\frac{2^n}{1+a^{2^n}}=\frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}},$$

với $n\in\mathbb{N}^*$.

5. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng:

a) $1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{3n+1}<2$.

b) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot...\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(Xem tiếp trang 45)

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC NINH

Năm học 2025-2026

Câu 1. 1) *Không dùng máy tính, chứng minh rằng biểu thức* $A=\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}-\dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ *có giá trị là một số nguyên.*

2) *Tính giá trị của biểu thức*

$$\left(x^3+4x^2-23x+2\right)^{2025}$$

khi $x=3\sqrt{3}-2$.

HD-Đáp số. 1) $A=-1$. 2) 2^{2025}.

Câu 2. 1) *Giải phương trình*

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8.$$

2) *Giải hệ phương trình* $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7\\y^2+yz+z^2=19.\\z^2+zx+x^2=13\end{cases}$

HD-Đáp số. 1) $x=4$.

2) Xét hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7 & (1)\\y^2+yz+z^2=19 & (2).\\z^2+zx+x^2=13 & (3)\end{cases}$

Lấy PT(3) trừ cho PT(1) theo từng vế, ta được:

$$z^2+zx+x^2-x^2-xy-y^2=13-7$$

$$\Leftrightarrow z^2+zx-xy-y^2=6\Leftrightarrow(z-y)(x+y+z)=6\ (4).$$

Lấy PT(3) trừ cho PT(2) theo vế, ta được:

$$z^2+zx+x^2-y^2-yz-z^2=13-19$$

$$\Leftrightarrow zx+x^2-y^2-yz=-6\Leftrightarrow(x-y)(x+y+z)=-6\ (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra: $x+y+z\neq0, x-y\neq0, z-y\neq0$

và $\dfrac{(z-y)(x+y+z)}{(x-y)(x+y+z)}=\dfrac{6}{-6}\Leftrightarrow\dfrac{z-y}{x-y}=-1$

$$\Leftrightarrow z-y=y-x\Leftrightarrow z=2y-x\ (6).$$

Bây giờ, ta thế $z=2y-x$ vào (2) ta thu được:

$$x^2-5xy+7y^2=19\ (7).$$

Từ (1) và (7) suy ra:

$$7(x^2-5xy+7y^2)=19(x^2+xy+y^2)$$

$$\Leftrightarrow-12x^2-54xy+30y^2=0\Leftrightarrow(2x-y)(x+5y)=0.$$

- TH1: $2x-y=0\Leftrightarrow y=2x$. Thay $y=2x$ vào (7) ta có: $19x^2=19$ hay $x=\pm1$. Từ đây ta tìm được: $(x;y;z)=(1;2;3)$ hoặc $(x;y;z)=(-1;-2;-3)$.
- TH2: $x+5y=0\Leftrightarrow x=-5y$. Thay $x=-5y$ vào (7) ta được: $57y^2=19$ hay $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ta tìm được:

$$(x;y;z)=\left(\frac{-5}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\text{ hoặc }(x;y;z)=\left(\frac{5}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{-7}{\sqrt{3}}\right).$$

Vậy HPT đã cho có bốn nghiệm:

$$(1;2;3),(-1;-2;-3),\left(\frac{-5}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{7}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{5}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{-7}{\sqrt{3}}\right).$$

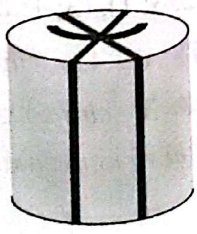
Câu 3. 1) *Cho tam giác nhọn* MAB *nội tiếp đường tròn* (O), *đường cao* MH. *Gọi* E *và* F *lần lượt là hình chiếu vuông góc của* H *trên* MA, MB. *Qua* M *kẻ đường thẳng vuông góc với* EF *và cắt* AB *tại* D.

a) *Chứng minh rằng* $\widehat{EMD}=\widehat{BHF}$ *và ba điểm* M, O, D *thẳng hàng.*

b) *Chứng minh rằng* $\dfrac{MA}{MB}=\sqrt{\dfrac{AH}{BH}\cdot\dfrac{AD}{BD}}$.

2. *Cho tam giác nhọn* ABC *nội tiếp đường tròn* (O) *và có các đường cao* AD, BE, CF. *Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác* ABC *để biểu thức* $\dfrac{AB+BC+CA}{AD+BE+CF}$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

3) *Bạn Nga dùng một dây vải màu để buộc một gói quà có dạng hình trụ (như hình vẽ). Hình trụ có bán kính đáy* 5cm *và diện tích xung quanh* $376{,}8\text{cm}^2$. *Biết rằng cần* 10cm *dây vải dùng để thắt nơ, giao điểm của hai vòng dây vải là tâm các đường tròn đáy của gói quà. Hỏi bạn Nga cần phải chọn dây vải có chiều dài ít nhất là bao nhiêu (lấy* $\pi\approx3{,}14$*)?*



Được quét bằng CamScanner

HD-Đáp số. 1.a) Tứ giác $MEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính MH (vì $\widehat{MEH}=\widehat{MFH}=90°$).

Suy ra $\widehat{MHF}=\widehat{MEF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MF). Lại có:

$\widehat{MHF}+\widehat{FHB}=90°=\widehat{MEF}+\widehat{EMD}\Rightarrow\widehat{FHB}=\widehat{EMD}$ (1).

Ta có: $\widehat{AMB}=180°-\widehat{EHF}=\widehat{EHA}+\widehat{FHB}$,

suy ra: $\widehat{EMD}+\widehat{DMB}=\widehat{FHB}+\widehat{EHA}$ (2).

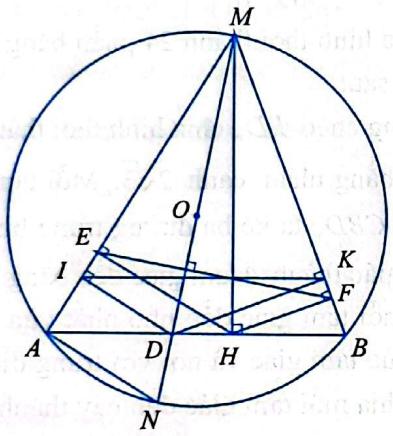
Từ (1) và (2) ta được: $\widehat{EHA}=\widehat{DMB}$.

Gọi N là giao điểm của MD với (O) $(N\neq M)$.

Ta có $\widehat{DMB}=\widehat{NAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung NB), suy ra: $\widehat{EHA}=\widehat{NAB}$, do đó: $AN//HE$.

Mà $HE\perp MA$ nên $NA\perp MA$, hay $\widehat{MAN}=90°$.

Suy ra AN là đường kính của đường tròn, vì vậy MD đi qua điểm O. Vậy ba điểm M, O, D thẳng hàng.



b) Kẻ $DI\perp MA, DK\perp MB$. Ta có:

$\frac{AH}{BD}=\frac{S_{\Delta MAH}}{S_{\Delta MBD}}=\frac{AM\cdot HE}{BM\cdot DK};\frac{AD}{BH}=\frac{S_{\Delta MAD}}{S_{\Delta MBH}}=\frac{AM\cdot DI}{BM\cdot HF}.$

Vậy $\frac{AH}{BD}\cdot\frac{AD}{BH}=\frac{MA^2}{MB^2}\cdot\frac{HE\cdot DI}{DK\cdot HF}$ (3).

Ta lại có $\widehat{HMB}=\widehat{FHB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{MHF}$) và $\widehat{FHB}=\widehat{EMD}$ (chứng minh trên), nên $\widehat{HMB}=\widehat{EMD}$, suy ra $\widehat{AMH}=\widehat{DMB}$.

Tứ giác $MEHF$ nội tiếp đường tròn nên

$\widehat{AMH}=\widehat{EFH}$ và $\widehat{EHF}=180°-\widehat{AMB}$.

Tứ giác $MIDK$ nội tiếp đường tròn nên

$\widehat{DMB}=\widehat{DIK}$, $\widehat{IDK}=180°-\widehat{AMB}$.

Suy ra: $\widehat{EFH}=\widehat{DIK}, \widehat{EHF}=\widehat{IDK}$.

Ta có: $\Delta DIK\backsim\Delta HFE$ (g.g), suy ra: $\frac{ID}{HF}=\frac{DK}{HE}$, do đó: $ID\cdot HE=DK\cdot HF$ hay $\frac{ID\cdot HE}{DK\cdot HF}=1$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra:

$\frac{MA^2}{MB^2}=\frac{AH}{BD}\cdot\frac{AD}{BH}$ hay $\frac{MA}{MB}=\sqrt{\frac{AH}{BH}\cdot\frac{AD}{BD}}$.

2) Vẽ $Cx\perp CF$. Gọi N là điểm đối xứng của A qua Cx. Khi đó $\widehat{BAN}=90°, CN=AC, AN=2CF$.

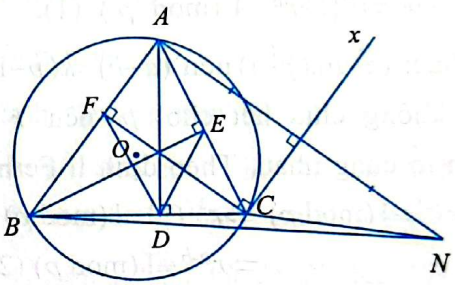
Ta luôn có: $BN\leq BC+CN$.

ΔABN vuông tại A nên:

$AB^2+AN^2=BN^2\Rightarrow AB^2+4CF^2\leq(BC+CN)^2$

$\Rightarrow 4CF^2\leq(BC+AC)^2-AB^2$ (1).

Đẳng thức ở (1) xảy ra khi B, C, N thẳng hàng, hay $BC=AC$.



Tương tự: $4AD^2\leq(AB+AC)^2-BC^2$

và $4BE^2\leq(AB+BC)^2-AC^2$.

Suy ra: $4\left(AD^2+BE^2+CF^2\right)\leq(AB+BC+AC)^2$

hay $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AD^2+BE^2+CF^2}\geq 4$. Do đó:

$\frac{(AB+BC+CA)^2}{(AD+BE+CF)^2}\geq\frac{(AB+BC+CA)^2}{3\left(AD^2+BE^2+CF^2\right)}\geq\frac{4}{3}.$

Chứng tỏ $\frac{AB+BC+CA}{AD+BE+CF}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}$ (2). Đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi $AB=AC=BC$.

Vì vậy biểu thức đã cho đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $AB=AC=BC$.

3) 98cm.

Câu 4. *1) Cho p là số nguyên tố khác 2, hai số tự nhiên lẻ a, b thoả mãn $a+b$ chia hết cho p, và $a-b$ chia hết cho $p-1$. Chứng minh rằng a^b+b^a chia hết cho $2p$.*

Được quét bằng CamScanner

2) *Cho các số thực a, b lớn hơn $\frac{1}{3}$ và thoả mãn* $\frac{1}{a^2(3b-1)}+\frac{1}{b^2(3a-1)}\geq\sqrt[3]{ab}$. *Chứng minh rằng* $1+a+b\geq 3ab$.

HD-Đáp số. 1) Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b$.

TH1: a chia hết cho p. Theo đầu bài $a+b\vdots p$ suy ra $b\vdots p$. Mà a, b là các số lẻ nên a^b+b^a là số chẵn. Từ đó suy ra $a^b+b^a\vdots(2p)$.

TH2: a không chia hết cho p.

Gọi r là dư trong phép chia a cho p $(0<r\leq p-1)$ thì $a\equiv r\pmod p$. Do $(a+b)\vdots p$ nên $b\equiv -r\pmod p$. Suy ra: $a^b+b^a\equiv r^b-r^a\pmod p$ hay $a^b+b^a\equiv r^b\left(1-r^{a-b}\right)\pmod p$ (1).

Mặt khác: $(a-b)\vdots(p-1)$ nên $(a-b)=k(p-1)$.

Vì r không chia hết cho p nên r và p nguyên tố cùng nhau. Theo định lí Fermat nhỏ ta có: $r^{p-1}\equiv 1\pmod p\Rightarrow r^{k(p-1)}\equiv 1\pmod p$

$\Rightarrow r^{a-b}\equiv 1\pmod p$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a^b+b^a\equiv 0\pmod p$ tức là $\left(a^b+b^a\right)\vdots p$. Ngoài ra a^b, b^a là các số nguyên lẻ nên $\left(a^b+b^a\right)\vdots 2$. Mà $(2,p)=1$. Vậy $\left(a^b+b^a\right)\vdots 2p$.

2) Giả sử $1+a+b<3ab$. Ta có:

$$3ab>1+a+b\geq 1+2\sqrt{ab}.$$

Suy ra: $3ab-2\sqrt{ab}-1>0$

$$\Rightarrow\left(3\sqrt{ab}+1\right)\left(\sqrt{ab}-1\right)>0\Rightarrow ab>1.$$

Vì $a>\frac{1}{3}$, $b>\frac{1}{3}$, $1+a+b<3ab$ nên

$$\begin{cases}0<1+a<3ab-b\\0<1+b<3ab-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{1+a}>\frac{1}{3ab-b}\\\frac{1}{1+b}>\frac{1}{3ab-a}\end{cases}.$$

Dẫn tới: $\frac{1}{a^2(3b-1)}+\frac{1}{b^2(3a-1)}<\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+a)}$

$$=1+\frac{(1-ab)(a+b+ab)}{ab(1+a)(1+b)}<1<\sqrt[3]{ab}.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó điều giả sử ở trên là sai. Vậy, ta phải có $1+a+b\geq 3ab$ (1). Đẳng thức ở (1) xảy ra khi $a=b=1$.

Câu 5. 1) *Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp* $\{7;8;9;10;12\}$; *Huy chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp* $\{5;6;8;9;13;14\}$. *Bạn nào chọn được số lớn hơn thì sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hoà. Tính xác suất để bạn Minh không thua cuộc.*

2) *Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A}=60^\circ$ và $AC=6$ cm. Chứng minh rằng, với 25 điểm bất kì trong hình thoi này thì luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá* 1cm.

HD-Đáp số. 1) $\frac{17}{30}$.

2) Ta chia hình thoi thành 24 phần bằng nhau theo các bước sau:

- Kẻ đường chéo BD, chia hình thoi thành hai tam giác đều bằng nhau, cạnh $2\sqrt{3}$. Mỗi tam giác đều ABD và CBD, ta kẻ ba đường trung bình để chia mỗi tam giác thành 4 tam giác đều bằng nhau.
- Trong mỗi tam giác đều nhỏ nhất vừa chia ra, ta lấy tâm của tam giác và nối với trung điểm của ba cạnh để chia mỗi tam giác đều này thành 3 tứ giác bằng nhau.

Như vậy hình thoi đã được chia thành $2.4.3=24$ tứ giác bằng nhau. Xét 24 tứ giác bằng nhau nói trên, mỗi tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính d, với $d=\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$ (cm).

Như vậy khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong mỗi tứ giác đó không vượt quá 1cm. Với 25 điểm bất kì trong hình thoi $ABCD$, theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có hai điểm cùng thuộc một tứ giác, nghĩa là có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá 1cm.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH HƯNG YÊN

Năm học 2025 - 2026

Môn thi Toán (Chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 150 *phút*

Câu I (*2,0 điểm*)

Cho biểu thức

$$M=\left(\frac{1}{x-4}+\frac{3\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}\right)\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{4\sqrt{x}}-2\right).$$

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M.

2) Đặt $N=M.\left(9x-2\sqrt{x}+4\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức N.

Câu II (*2,0 điểm*)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d):y=x+m$ và parabol $(P):y=2x^2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ thỏa mãn

$$\left(2x_1^2-x_2-m\right)^2+\left(2x_2^2-x_1-m\right)^2=4.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+x^2-xy^2=2\sqrt{\left(x-y^2\right)^3}\\56x^2+20\left(x^2-y^2\right)=\sqrt[3]{4x(8x+1)}-2\end{cases}.$$

Câu III (*2,0 điểm*)

1) Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình

$$\left(x^2+3\right)y^2-(x-2y)(x+2y+1)=25x+2y+169.$$

2) Một thùng có 40 quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có một số quả bóng màu đỏ, một số quả bóng màu xanh, còn lại là những quả bóng màu khác. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong thùng. Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ là $\frac{3}{10}$, xác suất để lấy được quả bóng màu xanh là $\frac{3}{8}$. Tìm số quả bóng có màu khác màu đỏ và màu xanh.

Câu IV (*1,0 điểm*)

Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB=9$cm, $BC=6$cm. Gọi K là trung điểm của AD. Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho $AH=2$cm. Tính $\cos\widehat{HCK}$.

Câu V (*2 điểm*)

Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm I cố định nằm trên đường tròn $(O;R)$. Gọi A,B là các giao điểm của hai đường tròn $(O;R)$ và $(I;R)$, P là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I;R)$. Đường thẳng qua P và vuông góc với IP cắt đường tròn $(O;R)$ tại M,N. Kẻ PH vuông góc với IM tại H, PK vuông góc với IN tại K.

1) Chứng minh rằng bốn điểm I,H,P,K cùng thuộc một đường tròn và HK vuông góc với OI.

2) Khi P thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I;R)$, tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IHK.

Câu VI (*1,0 điểm*)

Cho các số thực dương x,y,z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{2x^2+2xy+y^2}}{x+2y}+\frac{\sqrt{2y^2+2yz+z^2}}{y+2z}+\frac{\sqrt{2z^2+2zx+x^2}}{z+2x}.$$

PHẠM TRUNG KIÊN

(*GV THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, Hưng Yên*)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC CHO HỌC SINH THÔNG QUA VIỆC KHAI THÁC, PHÁT TRIỂN MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN TIẾN TIỆN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Trong quá trình dạy học nói chung, bồi dưỡng học sinh giỏi hoặc ôn luyện tuyển sinh vào lớp 10 nói riêng, việc lựa chọn được những bài tập điển hình có nhiều hướng giải và thông qua đó khai thác, phát triển hoặc mở rộng bài toán là việc làm cần thiết, góp phần phát triển năng lực tư duy cho học sinh. Bài viết này sẽ giới thiệu với các thầy, cô và các em học sinh một bài tập như vậy.

I. BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

Chúng ta cùng xuất phát từ một bài toán về bất đẳng thức trong đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán của Sở GD&ĐT Bình Định năm học 2021 – 2022:

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh $abc\le\frac{1}{8}$.

Bài toán này được đánh giá là quen thuộc nhưng cũng có nhiều cơ hội để khai thác và phát triển. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc về việc khai thác và phát triển bài toán này.

Lời giải 1. Ta có: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+a}=\left(1-\frac{1}{1+b}\right)+\left(1-\frac{1}{1+c}\right)=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\ge2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{b}{1+b}=\frac{c}{1+c}\Leftrightarrow b=c.$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{1}{1+b}\ge2\sqrt{\frac{ca}{(1+c)(1+a)}};\ \frac{1}{1+c}\ge2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}.$$

Nhân vế theo vế các BĐT trên, ta được

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)}\ge8.\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}\text{ hay }abc\le\frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Lời giải 2. Ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2\Leftrightarrow2abc+ab+bc+ca=1.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$ab+bc+ca\ge3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Do đó: $2abc+3\sqrt[3]{(abc)^2}\le1$

hay $2t^3+3t^2-1\le0$, với $t=\sqrt[3]{abc}>0$.

Ta có: $2t^3+3t^2-1\le0\Leftrightarrow(t+1)^2(2t-1)\le0$

$$\Leftrightarrow t\le\frac{1}{2}\ (\text{do } t>0).$$

Suy ra: $\sqrt[3]{abc}\le\frac{1}{2}$ hay $abc\le\frac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Lời giải 3. Từ giả thiết, ta có tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho:

$$\frac{1}{1+a}=\frac{2x}{x+y+z},\frac{1}{1+b}=\frac{2y}{x+y+z},\frac{1}{1+c}=\frac{2z}{x+y+z}.$$

Suy ra: $a=\frac{y+z-x}{2x},b=\frac{z+x-y}{2y},c=\frac{x+y-z}{2z}$.

Vì $a>0,b>0,c>0$ nên $x+y-z>0,y+z-x>0,$ $z+x-y>0$ hay x,y,z là độ dài ba cạnh của một tam giác. Ta có:

$$abc=\frac{1}{8}.\frac{(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}{xyz}.$$

Lại có $(x+y-z)(y+z-x)=y^2-(x-z)^2\le y^2.$

Được quét bằng CamScanner

Tương tự, ta cũng có: $(x+y-z)(z+x-y)\le x^2$;

$(y+z-x)(z+x-y)\le z^2$.

Suy ra: $(x+y-z)^2(y+z-x)^2(z+x-y)^2\le(xyz)^2$

hay $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\le xyz$.

Do đó $abc\le\frac{1}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Lời giải 4. Từ giả thiết, ta có tồn tại các số thực dương m,n,p sao cho:

$$\frac{1}{1+a}=\frac{m+n}{m+n+p};\ \frac{1}{1+b}=\frac{n+p}{m+n+p};\ \frac{1}{1+c}=\frac{p+m}{m+n+p}.$$

Do đó: $a=\frac{p}{m+n},b=\frac{m}{n+p},c=\frac{n}{p+m}$

và $abc=\frac{mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)}$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$m+n\ge2\sqrt{mn},n+p\ge2\sqrt{np},p+m\ge2\sqrt{pm}.$$

Nhân vế theo vế các BĐT này ta được:

$$(m+n)(n+p)(p+m)\ge8mnp.$$

hay $abc=\frac{mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)}\le\frac{1}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=n=p$ hay $a=b=c=\frac{1}{2}$.

II. KHAI THÁC VÀ PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN

Việc khai thác, phát triển bài toán được thể hiện thông qua việc khai thác, phát triển từ lời giải của bài toán hoặc từ giả thiết và kết luận của bài toán đó.

1. Khai thác từ giả thiết và kết luận của bài toán

Lời bàn 1. Bài toán mở đầu còn có thể được phát biểu dưới hình thức khác như sau:

Bài 1. *Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=abc$.*

(Đây là một câu hỏi trong đề thi HSG Toán 9 năm học 2015 – 2016 của Sở GD&ĐT Đồng Tháp và đề thi HSG Toán 9 năm học 2020 – 2021 của Sở GD&ĐT Trà Vinh).

Lời bàn 2. Ta có: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$

$\Leftrightarrow2abc+ab+bc+ca=1$ nên bài toán mở đầu cũng có thể được phát biểu dưới hình thức như sau:

Bài 2. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh $abc\le\frac{1}{8}$.*

Bài 3. *Xét các số thực dương a,b,c thay đổi và thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=abc$.*

Lời bàn 3. Nếu thay giả thiết $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$ thành $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge2$ thì tương tự như lời giải 1, chúng ta cũng chứng minh được $abc\le\frac{1}{8}$. Do đó, chúng ta có bài tập:

Bài 4. *Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge2$. Chứng minh $abc\le\frac{1}{8}$.*

Lời bàn 4. Nếu thay giả thiết $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$ bằng giả thiết $abc=\frac{1}{8}$ thì chúng ta có thể đánh giá $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$ như thế nào?

Với lưu ý rằng:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{3+2(a+b+c)+(ab+bc+ca)}{1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc}$$

nên với giả thiết $abc=\frac{1}{8}$ ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{24+16(a+b+c)+8(ab+bc+ca)}{9+8(a+b+c)+8(ab+bc+ca)}$$

$$=1+\frac{15+8(a+b+c)}{9+8(a+b+c)+8(ab+bc+ca)}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$ab+bc+ca\ge3\sqrt[3]{(abc)^2}=\frac{3}{4}$ hay $8(ab+bc+ca)\ge6$.

Do đó:

Được quét bằng CamScanner

$$\frac{15+8(a+b+c)}{9+8(a+b+c)+8(ab+bc+ca)}\le\frac{15+8(a+b+c)}{9+8(a+b+c)+6}=1.$$

Vì vậy, ta có $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\le 2$. Khi đó, ta có bài tập:

Bài 5. *Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $abc=\frac{1}{8}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\le 2$.*

Lời bàn 5. Ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2\Leftrightarrow\frac{1}{2+2a}+\frac{1}{2+2b}+\frac{1}{2+2c}=1.$$

Bằng cách đổi biến số $x=2a,y=2b,z=2c$ ta có bài toán mở đầu và bài 5 trở thành bài toán có hình thức "dễ thương" hơn như sau:

Bài 6. *Cho ba số thực dương x,y,z thoả mãn $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}=1$. Chứng minh rằng $xyz\le 1$.*

Bài 7. *Chứng minh rằng nếu các số thực dương x,y,z thoả mãn $xyz=1$ thì $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\le 1$.*

2. Khai thác từ lời giải của bài toán

Chúng ta cùng thực hành kỹ thuật như trong lời giải 1, lời giải 2 để giải một số bài tập.

Bài 8. (Trích đề thi Olympic Toán Croatia 2005). *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 8$.*

Lời giải 1. Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ suy ra $a>1,b>1,c>1$. Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{c-1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}}$.

Do đó: $\frac{c-1}{c}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}}$. Tương tự, ta có:

$$\frac{a-1}{a}\ge\frac{2}{\sqrt{bc}};\frac{b-1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ca}}.$$

Nhân vế theo vế các BĐT trên, ta được:

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}\ge\frac{8}{abc}\text{ hay }(a-1)(b-1)(c-1)\ge 8.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=3$.

Lời giải 2. Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ suy ra $a>1,b>1,c>1$. Đặt $x=a-1;y=b-1;z=c-1$ thì

$$x>0;y>0;z>0.$$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$ hay $xyz=x+y+z+2$. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}$ thì $t>0$ và $t^3\ge 3t+2$ $\Leftrightarrow(t-2)(t+1)^2\ge 0\Leftrightarrow t\ge 2$. Suy ra $\sqrt[3]{xyz}\ge 2$ hay $xyz\ge 8$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=2$.

Vậy $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 8$ và đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=3$.

Lời bàn 6. Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow abc=ab+bc+ca$.

Vì vậy bài toán này có thể được phát biểu dưới hình thức khác như sau: *Xét các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=ab+bc+ca$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a-1)(b-1)(c-1)$.*

Đây là một câu hỏi trong đề thi HSG Toán 11 năm học 2008 – 2009 của Sở GD&ĐT Vĩnh Phúc.

Bài 9. (Trích đề TS lớp 10 chuyên Toán năm học 2005 – 2006, Sở GDĐT Thanh Hóa). *Cho ba số thực x,y,z đều lớn hơn 2 và thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng*

$$(x-2)(y-2)(z-2)\le 1.$$

Lời giải 1. Ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z}\right)=\frac{y-2}{2y}+\frac{z-2}{2z}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{y-2}{2y}+\frac{z-2}{2z}\ge 2\sqrt{\frac{(y-2)(z-2)}{4yz}}.$$

Suy ra: $\frac{1}{x}\ge\sqrt{\frac{(y-2)(z-2)}{yz}}$. Chứng minh tương tự,

Được quét bằng CamScanner

ta có: $\frac{1}{y}\geq\sqrt{\frac{(x-2)(z-2)}{xz}}$ và $\frac{1}{z}\geq\sqrt{\frac{(x-2)(y-2)}{xy}}$.

Nhân vế theo vế các BĐT ta được:

$$\frac{1}{xyz}\geq\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{xyz}\Leftrightarrow(x-2)(y-2)(z-2)\leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=3$.

Lời giải 2. Đặt $a=x-2;b=y-2;c=z-2$ thì $a>0;b>0;c>0$.

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$ hay $abc+ab+bc+ca=4$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{abc}$ thì $t^3+3t^2\leq 4$

hay $(t-1)(t+2)^2\leq 0\Leftrightarrow t\leq 1$ (do $t>0$).

Do đó $\sqrt[3]{abc}\leq 1$ hay $abc\leq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy $(x-2)(y-2)(z-2)\leq 1$ và đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=3$.

Lời bàn 7. Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow xyz=xy+yz+zx$.

Vì vậy bài toán này có thể được phát biểu dưới hình thức khác như sau: *Xét các số thực x,y,z đều lớn hơn 2 và thỏa mãn $xyz=xy+yz+zx$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$Q=(x-2)(y-2)(z-2).$$

Bài 10. *Cho x,y,z là các số thực lớn hơn 1 và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=(x-1)(y-1)(z-1)$.*

Lời giải 1. Ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 2\Leftrightarrow\frac{1}{x}\geq\left(1-\frac{1}{y}\right)+\left(1-\frac{1}{z}\right)=\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\geq 2\sqrt{\frac{(y-1)(z-1)}{yz}}.$$

Suy ra: $\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{\frac{(y-1)(z-1)}{yz}}$.

Tương tự, ta có:

$$\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{(x-1)(z-1)}{xz}}\text{ và }\frac{1}{z}\geq 2\sqrt{\frac{(x-1)(y-1)}{xy}}.$$

Nhân vế theo vế các BĐT, ta được :

$$\frac{1}{xyz}\geq 8\frac{(x-1)(y-1)(z-1)}{xyz}\text{ hay }(x-1)(y-1)(z-1)\leq\frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{2}$. Vậy biểu thức A đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{8}$.

Lời giải 2. Đặt $a=x-1;b=y-1;c=z-1$ thì $a>0;b>0;c>0$ và $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq 2$.

Ta có: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq 2\Leftrightarrow 2abc+ab+bc+ca\leq 1$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{abc}$ thì $2t^3+3t^2\leq 1$ hay $(2t-1)(t+1)^2\leq 0\Leftrightarrow t\leq\frac{1}{2}$ hay $\sqrt[3]{abc}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow abc\leq\frac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Vậy biểu thức A đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{8}$ khi $x=y=z=\frac{3}{2}$.

Bài 11. *Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh*

$$(2a+1)(2b+1)(2c+1)\geq 8.$$

Lời giải 1. Ta có: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{1}{1+a}=\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\Leftrightarrow\frac{2a+1}{1+a}=\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{2a+1}{1+a}=\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq 2\sqrt{\frac{1}{(1+b)(1+c)}}.$$

Được quét bằng CamScanner

Tương tự, ta có: $\frac{2b+1}{1+b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{(1+a)(1+c)}}$

và $\frac{2c+1}{1+c}\geq 2\sqrt{\frac{1}{(1+a)(1+b)}}$.

Nhân vế theo vế các BĐT trên, ta được:

$$(2a+1)(2b+1)(2c+1)\geq 8.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Lời giải 2. Ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2\Leftrightarrow 2abc+ab+bc+ca=1;$$

$$(2a+1)(2b+1)(2c+1)\geq 8$$

$$\Leftrightarrow 4(2abc+ab+bc+ca)+2(a+b+c)\geq 7.$$

Từ giả thiết ta có:

$$(2a+1)(2b+1)(2c+1)\geq 8\Leftrightarrow a+b+c\geq\frac{3}{2}.$$

Áp dụng BĐT Schwarz, ta có:

$$2=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{9}{3+a+b+c}$$

hay $a+b+c+3\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow a+b+c\geq\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Lời bàn 8. Ta có: $(2a+1)(2b+1)(2c+1)\geq 8$

$$\Leftrightarrow 4(2abc+ab+bc+ca)+2(a+b+c)\geq 7.$$

Do đó, bài toán này có thể phát biểu dưới hình thức khác như sau: *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh rằng*

$$4(2abc+ab+bc+ca)+2(a+b+c)\geq 7.$$

3. Khai thác từ giả thiết của bài toán

Trong phần này, chúng ta sẽ khai thác từ giả thiết của bài toán với những hình thức khác nhau và áp dụng các bất đẳng thức quen thuộc để tạo ra những bài toán mới. Xin nhắc lại rằng:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2\Leftrightarrow 2abc+ab+bc+ca=1.$$

Lời bàn 9. Nếu áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương $\frac{1}{1+a},\frac{1}{1+b},\frac{1}{1+c}$, chúng ta có:

$$2=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

hay $(1+a)(1+b)(1+c)\geq\frac{27}{8}$ thì chúng ta có bài tập:

Bài 12. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geq\frac{27}{8}.$$

Lời bàn 10. Nếu áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}.$$

Tương tự, ta cũng có: $\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{2}{\sqrt{(1+b)(1+c)}}$

và $\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+a}\geq\frac{2}{\sqrt{(1+c)(1+a)}}$.

Cộng vế theo vế các BĐT trên, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}+\frac{1}{\sqrt{(1+b)(1+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(1+c)(1+a)}}\leq 2$$

hay $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1+c}\leq 2\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}$.

Do đó, chúng ta có bài tập sau:

Bài 13. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1+c}\leq 2\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}.$$

Lời bàn 11. Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có:

$$6=3\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)\geq\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\leq\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(1+a)(1+b)}+\sqrt{(1+b)(1+c)}+\sqrt{(1+c)(1+a)}$$

$$\leq\sqrt{6(1+a)(1+b)(1+c)}.$$

Do đó chúng ta có các bài tập sau:

Bài 14. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\leq\sqrt{6}.$$

Được quét bằng CamScanner

Bài 15. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{(1+a)(1+b)}+\sqrt{(1+b)(1+c)}+\sqrt{(1+c)(1+a)} \le \sqrt{6(1+a)(1+b)(1+c)}.$$

Lời bàn 12. Viết

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$$

và áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có:

$$[(1+a)+(1+b)+(1+c)]\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right) \ge (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+3 \ge (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+b+c+3} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Do đó, chúng ta có bài tập:

Bài 16. *Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a+b+c+3} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Bài tập này có một hình thức khác như sau:

Bài 17. (Trích đề thi Olympic Toán Iran, 1998)

Cho x,y,z là các số thực lớn hơn 1 và thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

(Bài này cũng là một câu trong đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán năm học 2020 – 2021 của Sở GD&ĐT Bình Thuận).

Lời bàn 13. Nếu áp dụng bất đẳng thức Schwarz, ta có: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} \ge \frac{4}{2+a+b}$; $\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \ge \frac{4}{2+b+c}$

và $\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+a} \ge \frac{4}{2+c+a}$.

Cộng vế theo vế các BĐT, ta được:

$$\frac{1}{2+a+b}+\frac{1}{2+b+c}+\frac{1}{2+c+a} \le 1.$$

Do đó, chúng ta có bài tập:

Bài 18. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+a+2} \le 1.$$

Lời bàn 14. Áp dụng BĐT Schwarz, ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} \ge \frac{9}{3+2a+b};\ \frac{2}{1+b}+\frac{1}{1+c} \ge \frac{9}{3+2b+c}$$

và $\frac{2}{1+c}+\frac{1}{1+a} \ge \frac{9}{3+2c+a}$.

Cộng vế theo vế các BĐT, ta được:

$$\frac{1}{3+2a+b}+\frac{1}{3+2b+c}+\frac{1}{3+2c+a} \le \frac{2}{3}.$$

Do đó, chúng ta có bài tập:

Bài 19. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2a+b+3}+\frac{1}{2b+c+3}+\frac{1}{2c+a+3} \le \frac{2}{3}.$$

Lời bàn 15. Do $4a^2+5=(4a^2+1)+4 \ge 4(a+1)$ nên

$$\frac{1}{4a^2+5} \le \frac{1}{4}.\frac{1}{1+a}.$$

Tương tự, ta cũng có: $\frac{1}{4b^2+5} \le \frac{1}{4}.\frac{1}{1+b}$;

$$\frac{1}{4c^2+5} \le \frac{1}{4}.\frac{1}{1+c}.$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{1}{4a^2+5}+\frac{1}{4b^2+5}+\frac{1}{4c^2+5} \le \frac{1}{2}.$$

Do đó, chúng ta có bài tập:

Bài 20. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{4a^2+5}+\frac{1}{4b^2+5}+\frac{1}{4c^2+5} \le \frac{1}{2}.$$

Lời bàn 16. Ta có:

$$ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \text{ hay } abc \le \left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3.$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$ thì từ giả thiết $2abc+ab+bc+ca=1$, chúng ta có:

$$1 \le 2t^3+3t^2 \Leftrightarrow (t+1)^2(2t-1) \ge 0 \text{ hay } t \ge \frac{1}{2}.$$

Suy ra $ab+bc+ca \ge \frac{3}{4}$. Do đó, chúng ta có bài tập:

Được quét bằng CamScanner

Bài 21. *Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh $ab+bc+ca\geq\frac{3}{4}$.*

Lời bàn 17. Nếu để ý rằng $abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ và $ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$. Đặt $t=\frac{1}{3}(a+b+c)$ thì từ giả thiết $2abc+ab+bc+ca=1$, chúng ta có: $2t^3+3t^2\geq1\Leftrightarrow t\geq\frac{1}{2}$. Suy ra $a+b+c\geq\frac{3}{2}$. Do đó, chúng ta có bài tập:

Bài 22. *Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh $a+b+c\geq\frac{3}{2}$.*

Có thể còn nhiều cách nữa để khai thác và tiếp cận bài toán mở đầu. Rất mong được sự trao đổi từ các thầy, cô và các em học sinh.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Các bạn hãy thực hành kỹ thuật như trong những lời giải, lời bàn trên để giải quyết các bài tập sau đây:

Bài 1. (*Trích đề thi Olympic Toán Latvia 2002*) Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1.$$

Chứng minh rằng $abcd\geq3$.

Bài 2. (*Trích đề thi HSG quốc gia môn Toán năm 1998 của Việt Nam*) Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương và n là số tự nhiên lớn hơn 2, thỏa mãn $\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+...+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$.

Chứng minh rằng $\frac{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}{n-1}\geq1998$.

Bài 3. (*Trích đề TS lớp 10 năm học 2021 – 2022, Sở GD&ĐT Thanh Hóa*) Cho ba số thực x,y,z thay đổi và thỏa mãn các điều kiện

$$x>\frac{1}{4},y>\frac{1}{3},z>\frac{1}{2}\text{ và }\frac{4}{4x+3}+\frac{3}{3y+2}+\frac{2}{2z+1}\geq2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=(4x-1)(3y-1)(2z-1).$$

Bài 4. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2abc+ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a+1)(b+1)}+\sqrt{(b+1)(c+1)}+\sqrt{(c+1)(a+1)}\geq\frac{9}{2}.$$

Bài 5. (*Trích đề TS lớp 10 chuyên Toán năm học 2021 – 2022, Sở GD&ĐT Kiên Giang*) Cho x,y,z là các số thực lớn hơn 2021, thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{2021}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-2021}+\sqrt{y-2021}+\sqrt{z-2021}.$$

Bài 6. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc+ab+bc+ca=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b+4}+\frac{1}{b+c+4}+\frac{1}{c+a+4}\leq\frac{1}{2}.$$

Bài 7. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc+ab+bc+ca=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+2b+6}+\frac{1}{b+2c+6}+\frac{1}{c+2a+6}\leq\frac{1}{3}.$$

Bài 8. Cho các số thực a,b,c lớn hơn 2 và thoả mãn $abc=2(a+b+c)$. Chứng minh rằng

$$(a-2)(b-2)(c-2)\leq18\sqrt{6}-44.$$

Bài 9. Xét các số thực x,y,z lớn hơn 1 và thoả mãn $3xyz+xy+yz+zx=5(x+y+z+3)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=(x-1)(y-1)(z-1)$.

Bài 10. Cho các số thực dương x,y,z thoả mãn $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2$. Chứng minh rằng

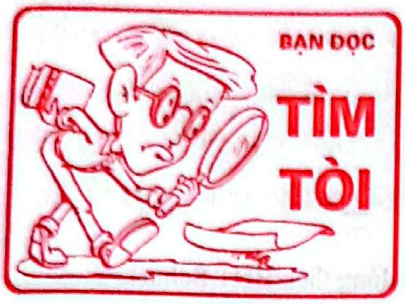
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq2(x+y+z)+3.$$

Bài 11. (*Mircea Lascu, Marian Tetiva*) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn

$$2abc+ab+bc+ca=1.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq4(a+b+c)$.

Được quét bằng CamScanner



LỜI GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

BÙI NGỌC GIAO
(GV THPT Quang Trung - Đông Giang, TP. Đà Nẵng)

Cách đây 18 năm, trên Tạp chí **Toán học và Tuổi trẻ** số 361 tháng 7 năm 2007, trong chuyên mục *Giải bài kỳ trước* có bài T7/537 như sau:

Bài T7/537. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geq 5 \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài toán trên đã được giải bằng cách sử dụng phương pháp dồn biến (theo trung bình cộng các góc). Bạn đọc có thể tham khảo chi tiết lời giải đó ở số báo trên. Cuối lời giải, thầy giáo chấm bài đó, TS. *Nguyễn Minh Đức* có nhận xét: "*Cho đến bây giờ vẫn chưa có lời giải thuần tuý lượng giác cho BĐT*(1)".

Bài viết này đưa ra lời giải thuần tuý lượng giác cho BĐT(1).

Lời giải. Trước hết chúng ta cần 5 bổ đề sau

Xét ΔABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi S, p, R, r lần lượt là diện tích, nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có:

Bổ đề 1. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$.

Bổ đề 2. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$.

Bổ đề 3 (BĐT Euler). $R\geq 2r$

Bổ đề 4 (Bất đẳng thức Schur). *Cho a, b, c là các số thực không âm. Khi đó:*

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc trong 3 số a, b, c có 2 số bằng nhau và số còn lại bằng 0.

Bổ đề 5 (BĐT Gerretsen). $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$

Chứng minh bổ đề 1. Ta có:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\Rightarrow\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Tương tự: $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$; $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$.

Khi đó: $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}$

$$=\frac{pS}{abc}=\frac{p}{4R} \text{ (đpcm).}$$

Chứng minh bổ đề 2. Ta có:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}.$$

Tương tự: $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$;

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Khi đó: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

$$=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}$$

$$=\frac{S^2}{pabc}=\frac{S}{p}:\frac{abc}{S}=\frac{r}{4R} \text{ (đpcm).}$$

Được quét bằng CamScanner

Chứng minh bổ đề 3. Theo bổ đề 2 ta có:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\le\sqrt{\frac{a^2}{4bc}}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Tương tự: $\sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}}$; $\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}$.

Khi đó: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$. Mặc khác ta có theo bổ đề 2 thì $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$.

Suy ra: $\frac{r}{4R}\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow R\ge 2r$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Chứng minh bổ đề 4. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Ta có:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(a-b)[a(a-c)-b(b-c)]+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

(BĐT cuối luôn đúng vì $a\ge b\ge c$).

Chứng minh bổ đề 5. Ta có:

$$p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$$

$$\Leftrightarrow 4R^2+4Rr+3r^2-p^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4.\frac{a^2b^2c^2}{16S^2}+4.\frac{abc}{4p}+3.\frac{S^2}{p^2}-p^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}+\frac{2abc}{a+b+c}+\frac{3(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)}-\frac{(a+b+c)^2}{4}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2}{4(x+y+z)xyz}+\frac{(x+y)(y+z)(x+z)+3xyz}{x+y+z}-(x+y+z)^2\ge 0$$

(với $a=x+y;b=y+z;c=x+z$ và $x;y;z>0$)

$$\Leftrightarrow(x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2+4(x+y)(y+z)(x+z)xyz+12x^2y^2z^2-4(x+y+z)^3xyz\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}x^4(y-z)^2+2\sum_{cyc}xy(xy-yz)(xy-xz)\ge 0$$

(BĐT cuối luôn đúng theo BĐT Schur).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Vậy bổ đề 5 được chứng minh

Trở lại bài toán T7/537.

Sử dụng các bổ đề 1, 2 BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{6\sqrt{3}R}{p}+\frac{2r}{R}\ge 5$$

$$\Leftrightarrow\frac{6\sqrt{3}R^2-p(5R-2r)}{pR}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{108R^4-p^2(5R-2r)^2}{pR\left[6\sqrt{3}R^2+p(5R-2r)\right]}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 108R^4-p^2(5R-2r)^2\ge 0.$$

Sử dụng bổ đề 5 ta được:

$$108R^4-p^2(5R-2r)^2\ge 108R^4-(5R-2r)^2(4R^2+4Rr+3r^2).$$

Mặt khác: $108R^4-(5R-2r)^2(4R^2+4Rr+3r^2)$

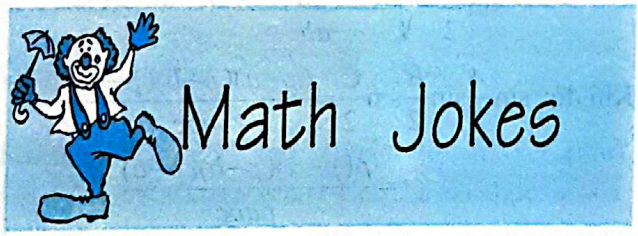
$$=(R-2r)\times\times\left[8(R-2r)^3+44r(R-2r)^2+61r^2(R-2r)+16r^3\right]\ge 0$$

(luôn đúng theo bổ đề 3).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R=2r\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

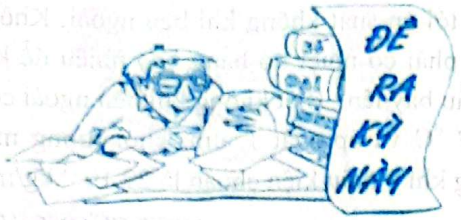
Vậy bài toán đã được chứng minh

****



An astronomer, a physicist, and a mathematician are on a train in Scotland. The astronomer looks out of the window, sees a black sheep standing in a field, and remarks, "*The sheep in Scotland are black!*" "*No, no, no!*" says the physicist. "*At least one sheep in Scotland is black!*" The mathematician rolls his eyes at his companions' muddled thinking and says, "*In Scotland, there is at least one sheep, at least one side of which appears to be black from here some of the time.*"

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/580 (Lớp 6). Cho a và b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a^3+a^2=b^4+1$. Tìm a và b để tổng $A=a^2+2a+2b^2$ là số nguyên tố.

HUỲNH THANH TÂM
(Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/580 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC}=30^0$. Gọi D là trung điểm cạnh AB, qua D dựng $DH \perp BC$ $(H \in BC)$. Trên tia đối của tia HD lấy điểm E sao cho $HD = HE$. Tính tỷ số $\dfrac{AE}{BC}$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa thiên Huế)

Bài T3/580. Cho $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ là các số nguyên tố sao cho $p_{k+1}=2p_k+1$ với $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Chứng minh rằng $\sum\limits_{1\le i<j\le 6} p_i p_j$ chia hết cho 15.

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/580. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AC = 2AB$. Các đường thẳng tiếp xúc với (O) tại A và C cắt nhau ở P. Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BAC}$.

LẠI QUANG THỌ
(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài T5/580. Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $2a + 3b + 4c + 5d \le 60$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=a^2+b^2+c^2+d^2-(29a+19b+14c+10d).$$

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/580. Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$x^5-15x^4+10x^3-30x^2+5x-3=0.$$

TRẦN VĂN LÂM
(Thái Nguyên)

Bài T7/580. Cho các số thực a, b thỏa mãn

$$a+b=ab+5+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2a+5}.\sqrt{b^2-2b+5}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a-b|$.

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T8/580. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $MB = MC$, $NC = 3NA$, $PA = 2PB$. Đường thẳng qua C và song song với MN cắt PN tại D. Đường thẳng MP cắt DA tại E và DC tại F. Chứng minh DEE là tam giác đều.

LỤC BÌNH
(GV Trường Trưng Vương, Đông Hà, Quảng Trị)

Bài T9/580. Cho hàm số $f(x)=x^2-3|x|+4$, gọi A là tập hợp hữu hạn các số thực có tính chất: Nếu x thuộc A thì $f(x)$ cũng thuộc A. Hỏi số phần tử của A là bao nhiêu?

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hóa)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/580. Cho dãy số $(x_n)_{n\ge 1}$ xác định bởi:

$x_1 = 6$ và $x_{n+1}=\dfrac{2n+3}{2n+1}x_n-\dfrac{12}{(n+1)(2n+1)}$ với mọi $n \ge 1$. Đặt $y_n=\dfrac{x_n}{n}, n=1,2,\ldots$. Tìm giới hạn:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/580. Với n là số nguyên dương, tính tổng sau (theo n):

$$T_n=\sum_{\substack{i,j,k,l\in\mathbb{N}\\ i+j+2(k+l)=n}}\frac{(i+j+k+l)!}{i!j!k!l!}.$$

NGUYỄN TUẤN ANH
(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Được quét bằng CamScanner

Bài T12/580. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc AC, BD sao cho $\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{ND}} \neq 0$. O là giao điểm của AN và BM; CO, DO theo thứ tự cắt AB tại P, Q (A, B, P, Q đôi một phân biệt). Đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAP và OBQ cắt nhau tại G khác O. Chứng minh rằng OG chia đôi đoạn CD.

LÊ VIỆT ÂN
(*Ocean Education, 40 đs 9, P.9, KDC City Land, Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh*)

Bài L1/580. Một khí cầu có thể tích $V = 336\ \text{m}^3$ và khối lượng vỏ $m = 84$ kg được bơm không khí nóng tới áp suất không khí bên ngoài. Không khí nóng phải có nhiệt độ bằng bao nhiêu để khí cầu bắt đầu bay lên? Biết không khí bên ngoài có nhiệt độ 27 °C và áp suất 1 atm; khối lượng mol của không khí ở điều kiện chuẩn là 29.10^{-3} kg/mol.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/580. Một mẫu chất phóng xạ, có chu kì bán rã $T_1 = 2$ ngày, gồm $6{,}4.10^{11}$ hạt nhân nguyên tử. Một mẫu chất phóng xạ khác, có chu kì bán rã $T_2 = 3$ ngày, gồm 8.10^{10} hạt nhân nguyên tử. Sau bao nhiêu ngày số hạt nhân nguyên tử chưa phóng xạ của hai mẫu đó bằng nhau?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/580 (Grade 6). Given two positive integers a and b satisfying $a^3+a^2=b^4+1$. Find a and b such that $A=a^2+2a+2b^2$ is a prime number.

Problem T2/580 (Grade 7). Given a right triangle ABC at A with $\widehat{ABC}=30^0$. Let D be the midpoint of AB. Through D, construct $DH \perp BC$ ($H \in BC$). On the opposite ray of the ray HD, choose the point E such that $HD = HE$. Calculate the ratio $\frac{AE}{BC}$.

Problem T3/580. Given prime numbers $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ such that

$$p_{k+1}=2p_k+1, k=1,..5.$$

Prove that $\sum_{1\le i<j\le 6} p_i p_j$ is divisible by 15.

Problem T4/580. Given a triangle ABC inscribed in circle (O) and $AC = 2AB$. The tangents to (O) at A and C intersect at P. Prove that BP passes through the midpoint of the arc $\overset{\frown}{BAC}$.

Problem T5/580. Let a, b, c, d be non-negative real numbers satisfying $2a + 3b + 4c + 5d \le 60$. Find the minimum value of the expression

$$P=a^2+b^2+c^2+d^2-(29a+19b+14c+10d).$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/580. Find the real solutions of the following equation

$$x^5-15x^4+10x^3-30x^2+5x-3=0.$$

Problem T7/580. Given real numbers a and b satisfying

$$a+b=ab+5+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2a+5}.\sqrt{b^2-2b+5}.$$

Find the minimum value of the expression

$$P=|a-b|.$$

Problem T8/580. Given an equilateral triangle ABC. On the edges BC, CA, AB, choose the points M , N , P respectively such that $MB = MC$, $NC = 3NA$, $PA = 2PB$. The line through C and parallel to MN intersects PN at D. The line MP intersects DA and DC at E and F respectively. Prove that DEE is an equilateral triangle.

Problem T9/580. Let $f(x)=x^2-3|x|+4$. Let A be the finite set of real numbers with the property: If x belongs to A, then $f(x)$ also belongs to A. What is the number of elements of A?

(*Xem tiếp trang 36*)

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/576. *Tính giá trị của tổng gồm 2025 số hạng sau:*

$$S=\frac{1^2}{1^2-1.2026+2052338}+\frac{2^2}{2^2-2.2026+2052338}+\frac{3^2}{3^2-3.2026+2052338}+...+\frac{2025^2}{2025^2-2025.2026+2052338}.$$

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương n ta có:

$$n^2-n.2026+2052338=n^2-2n.1013+1013^2+1013^2=(n-1013)^2+1013^2\ (*).$$

Có hai cách giải tiếp như sau.

Cách 1. Áp dụng (*), mỗi số hạng có dạng

$$\frac{n^2}{n^2-n.2026+2052338}=\frac{(n-1013+1013)^2}{(n-1013)^2+1013^2}=\frac{(n-1013)^2+1013^2+2(n-1013).1013}{(n-1013)^2+1013^2}=1+\frac{2(n-1013).1013}{(n-1013)^2+1013^2}\ (**).$$

Cho n lần lượt bằng 1; 2;...; 2024; 2025 vào đẳng thức (**) rồi thay vào tổng S gồm 2025 số hạng được:

$$S=1+\frac{2(1-1013).1013}{(1-1013)^2+1013^2}1+\frac{2(2-1013).1013}{(2-1013)^2+1013^2}+...+1+\frac{2(1013-1013).1013}{(1013-1013)^2+1013^2}+...+1+\frac{2(2024-1013).1013}{(2024-1013)^2+1013^2}+1+\frac{2(2025-1013).1013}{(2025-1013)^2+1013^2}$$

$$=2025+\frac{2(-1012).1013}{1012^2+1013^2}+\frac{2(-1011).1013}{1011^2+1013^2}+...+\frac{2(1011).1013}{1011^2+1013^2}+\frac{2(1012).1013}{1012^2+1013^2}=2025.$$

Cách 2. Xét các số hạng từ trái sang phải lần lượt là 1; 2; ...; 2025. Áp dụng (*), số hạng thứ 1013 bằng: $\frac{1013^2}{1013^2-1013.2026+2052338}=\frac{1013^2}{(1013-1013)^2+1013^2}=1.$

Xét tổng hai số hạng n và $2026-n$ với n lần lượt bằng 1; 2;...; 1012, áp dụng (*), có:

$$\frac{n^2}{n^2-n.2026+2052338}+\frac{(2026-n)^2}{(2026-n)^2-(2026-n)2026+2052338}=\frac{n^2}{(n-1013)^2+1013^2}+\frac{(2026-n)^2}{(1013-n)^2+1013^2},$$

đặt $m=n-1013$ thì tổng hai phân số này có dạng:

$$\frac{n^2}{(n-1013)^2+1013^2}+\frac{(2026-n)^2}{(1013-n)^2+1013^2}=\frac{(m+1013)^2}{m^2+1013^2}+\frac{(1013-m)^2}{m^2+1013^2}=\frac{2m^2+2.1013^2}{m^2+1013^2}=2.$$

Cho n lần lượt bằng 1; 2;...; 2024; 2025, tức là n bằng 1013; n lần lượt bằng 1; 2;...;1012 và n lần lượt bằng 1014 = 2026 – 1012; ...; 2025 = 2026 – 1; rồi thay kết quả trên vào tổng S gồm 2025 số hạng như trên được $S=1+2.1012=2025$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội**: *Nguyễn Phương Hoa*, 6A2, THCS Linh Đàm, P. Hoàng Liệt; **Quảng Ngãi**: *Trần Phạm Minh Thúy*, 6B, THCS Hành Trung, xã Nghĩa Hành; *Trần Gia Bảo, Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, xã Đình Cương; *Nguyễn Trần Thảo Nguyên, Phạm Thị Bảo Uyên*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, xã Đình Cương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/576. *Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn:*

$$|a+2025b-1|^9+|a+2027b-2|^{10}=2+2026b-2028^b.$$

Lời giải. Nếu a, b cùng tính chẵn, lẻ thì

$|a+2025b-1|^9+|a+2027b-2|^{10}$ là số nguyên lẻ.

Nếu a, b khác tính chẵn, lẻ thì

$|a+2025b-1|^9+|a+2027b-2|^{10}$ là số nguyên lẻ.

Vậy mọi số nguyên a, b thì

$|a+2025b-1|^9+|a+2027b-2|^{10}$ là số lẻ.

Suy ra $2+2026b-2028^b$ là một số lẻ, suy ra 2028^b là số lẻ. Vậy $b=0$, từ đó ta có:

Được quét bằng CamScanner

$$|a-1|^9+|a-2|^{10}=1.$$

Xét $a<1$, suy ra $a-2<-1$, suy ra $|a-2|^{10}>1$ hay $|a-1|^9+|a-2|^{10}>1$ (không thoả mãn).

Xét $a>2$, suy ra $a-1>1$, suy ra $|a-1|^9>1$ hay $|a-1|^9+|a-2|^{10}>1$ (không thoả mãn).

Do a là một số nguyên, nên ta chỉ cần xét $a=1$ và $a=2$ và đều thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có hai cặp số nguyên (a,b) thoả mãn yêu cầu bài toán là $(1,0)$ và $(2,0)$.

Nhận xét. Đây là một bài toán tương đối dễ nên có nhiều bạn tham gia gửi bài về toà soạn, tuy nhiên một số bạn có lời giải còn dài. Tuyên dương các bài sau có lời giải đúng:

Nghệ An: *Nguyễn Thị Hà Giang*; *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*; *Nguyễn Thái Dũng*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Dương Đức Anh*, 7M, THCS Ngô Sĩ Liên, Hoàng Mai; **Quảng Ngãi:** *Bùi Quỳnh Nhã Trúc*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ; *Trần Văn Phụng*, 7C, THCS Nguyễn Kim Vang và *Phạm Thị Bảo Uyên*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, xã Đình Cương; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/576. *Với mỗi số thực x, kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Chứng minh rằng $\left[(9+4\sqrt{5})^{2025}\right]$ là số lẻ.*

Lời giải. Ta có: $(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})=18;$

$$(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})=81-80=1$$

nên các số $x_1=9-4\sqrt{5}$; $x_2=9+4\sqrt{5}$ là các nghiệm của phương trình bậc hai $x^2-18x+1=0$.

Ký hiệu $S_n=x_1^n+x_2^n$ $(n=1,2,3,...)$.

Ta có: $\begin{cases}x_1^2-18x_1+1=0\\x_2^2-18x_2+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^{n+2}-18x_1^{n+1}+x_1^n=0\\x_2^{n+2}-18x_2^{n+1}+x_2^n=0\end{cases}.$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên, ta được:

$$S_{n+2}-18S_{n+1}+S_n=0\Rightarrow S_{n+2}=18S_{n+1}-S_n.$$

Lại có: $S_1=x_1+x_2=18;$

$$S_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=18^2-2=322$$

là các số tự nhiên chẵn.

Giả sử với số tự nhiên k mà S_k, S_{k+1} là các số tự nhiên chẵn thì $S_{k+2}=18S_{k+1}-S_k$ cũng là số tự nhiên chẵn.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $S_n=x_1^n+x_2^n$ là số tự nhiên chẵn với $n=1,2,3,....$

Đặc biệt, $S_{2025}=(9+4\sqrt{5})^{2025}+(9-4\sqrt{5})^{2025}$ là số tự nhiên chẵn và

$$0<9-4\sqrt{5}<1\Rightarrow 0<(9-4\sqrt{5})^{2025}<1$$

nên $\left[(9+4\sqrt{5})^{2025}\right]=S_{2025}-1$ là số tự nhiên lẻ.

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán bằng cách khác: Sử dụng công thức

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n$$

với $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(k=0,1,2,...,n)$ ta dễ dàng chứng minh rằng:

$$(9+4\sqrt{5})^{2025}=A+B\sqrt{5},\quad (9-4\sqrt{5})^{2025}=A-B\sqrt{5}$$

với $A,B\in\mathbb{N}^*$; suy ra:

$$(9+4\sqrt{5})^{2025}+(9-4\sqrt{5})^{2025}=2A.$$

Lại có $0<9-4\sqrt{5}<1\Rightarrow 0<(9-4\sqrt{5})^{2025}<1$ nên

$$2A-1<(9+4\sqrt{5})^{2025}<2A;$$

ta được $\left[(9+4\sqrt{5})^{2025}\right]=2A-1$ là một số lẻ.

2) Điều then chốt của các lời giải là chứng minh $(9+4\sqrt{5})^{2025}+(9-4\sqrt{5})^{2025}$ là số tự nhiên chẵn và $0<(9-4\sqrt{5})^{2025}<1$ để suy ra $\left[(9+4\sqrt{5})^{2025}\right]$ là số lẻ.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc; **Hà Nam:** *Đào Việt Trung*, 8B, THCS Thanh Sơn, TX. Kim Bảng; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, phường Thành

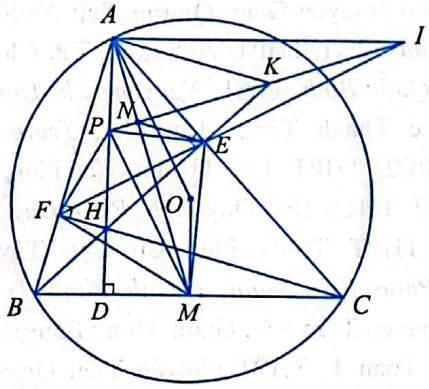
Được quét bằng CamScanner

Sen; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu, *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt ; Hoàng Mai; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường quốc tế song ngữ cấp 2, 3, Gibs, TP. Grar.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/576. *Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho $AB < AC$ và hai đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng qua A và vuông góc với AH cắt EF ở I, đường thẳng qua A và vuông góc với AB cắt BE ở K, đường thẳng qua A và vuông góc với IK cắt BC ở M. IK cắt AH tại P. Chứng minh độ dài đoạn MP không đổi khi A thay đổi trên cung lớn BC.*

Lời giải.



Lời giải. Gọi R là bán kính đường tròn O; N là giao điểm của IK và AM. Ta có $\widehat{IAE}=\widehat{ECB}=\widehat{AFE}$, suy ra: $\Delta IAE \backsim \Delta IFA$ (g.g). Ta có:

$$\frac{IA}{IF}=\frac{IE}{IA}\Rightarrow IA^2=IE.IF.$$

Mặt khác: $IA^2 = IN.IP$, nên $IE.IF = IN.IP$.

Do đó tứ giác $EFPN$ nội tiếp, suy ra:

$$\widehat{PFE}=\widehat{KNE}=\widehat{KAE}=\widehat{ECH}.$$

Từ đó $\widehat{PFA}=\widehat{HCB}=\widehat{PAF}$, dẫn tới P là trung điểm của AH. Gọi M' là trung điểm của BC. Ta có các kết quả quen thuộc:

$$OM' = AP, PF \perp FM', \text{ và } PE \perp EM'.$$

Từ đó, M' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF, tức là P, N, E, M', F cùng thuộc một đường tròn. Do đó $M'N \perp IK$. Vậy $M' \equiv M$, hay M là trung điểm của BC. Do $APMO$ là hình bình hành nên $MP = OA = R$ không đổi.

Nhận xét. 1) Giả thiết dây cung BC cố định là không cần thiết.

2) Chỉ có hai bạn cho lời giải tốt:

Nghệ An: *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Lâm Đồng:** *Trần Đức Hiếu*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/576. *Giải phương trình:*

$$\sqrt[3]{x^4-5x^3-13x^2-3x-3}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3x-2}+2x+1=0.$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x^2+3x-2\geq 0$ (*).

Ta có: $x^4-5x^3-13x^2-3x-3$

$=(x^4+3x^3-2x^2)+(x^2+3x-2)-(8x^3+12x^2+6x+1)$

$=(x^2+1)(x^2+3x-2)-(2x+1)^3.$

Theo (*) và $x^2+1>0$ nên $(x^2+1)(x^2+3x-2)\geq 0$.

Do đó: $(x^2+1)(x^2+3x-2)-(2x+1)^3\geq -(2x+1)^3$ (**).

Từ đó suy ra:

$$\sqrt[3]{x^4-5x^3-13x^2-3x-3}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3x-2}+2x+1$$

$$\geq\sqrt[3]{-(2x+1)^3}+\frac{1}{2}.0+2x+1=0.$$

Do đó:

$$\sqrt[3]{x^4-5x^3-13x^2-3x-3}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3x-2}+2x+1=0$$

khi và chỉ khi $x^2+3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là:

$$S=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}.$$

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là việc phát hiện và chứng minh được bất đẳng thức (**). Các bạn gửi bài về toà soạn đều cho lời giải đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt, lập luận chặt chẽ:

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 8H1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; *Hà Sĩ An*, 8A3, THCS Nguyễn Trãi A, Thường Tín; *Trần Thu Hà*, 9C, THCS Phú Minh, Sóc Sơn; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thanh Mai*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Vạn Xuân; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, Thành Sen; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu;

Được quét bằng CamScanner

TP. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Lâm*, 8A2, THCS Đào Duy Anh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/576. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \quad (1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \quad (2) \end{cases} \text{(I).}$$

Lời giải (của *Nguyễn Mai Trâm* và nhiều bạn khác). Điều kiện để hệ phương trình (I) có nghĩa là $x+y>0$ (*). Với điều kiện (*) ta có:

$$(1)\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy+\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}=1-\frac{2xy}{x+y}+\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y-\frac{xy}{x+y}\right)^2=\left(1-\frac{xy}{x+y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x+y-\frac{xy}{x+y}=\pm\left(1-\frac{xy}{x+y}\right).$$

TH1: $x+y-\dfrac{xy}{x+y}=1-\dfrac{xy}{x+y}\Leftrightarrow x+y=1\Leftrightarrow y=1-x.$

Thay vào (2) ta được:

$$1=x^2-(1-x)\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow y=3 \text{ hoặc } x=1\Rightarrow y=0.$$

TH2: $x+y-\dfrac{xy}{x+y}=-\left(1-\dfrac{xy}{x+y}\right)\Leftrightarrow x+y-\dfrac{2xy}{x+y}+1=0$ (3).

Với điều kiện (*) thì

$$(3)\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy+(x+y)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+(x+y)=0.$$

Nhưng $x+y>0$ nên TH2 không cho nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là:

$$x=-2;y=3 \text{ hoặc } x=1;y=0.$$

Nhận xét. Bài này dễ nên nhiều bạn tham gia giải và giải đúng. **An Giang:** *Nguyễn Gia Bảo*, 10T1, *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá. **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên, TP. Đà Nẵng; **Đắc Lắk:** *Lê Duy Khánh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Đức Phúc*, *Lê Ngọc Thành*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. **Hà Nội:** *Hà Sĩ An*, 8A3, THCS Nguyễn Trãi A, xã Thường Tín, *Trần Thu Hà*, 9C, THCS Phú Minh, Sóc Sơn; *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; *Nguyễn Kim Thành*, 11 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, P. Thành Sen. **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Lâm Đồng:** *Trần Đức Hiếu*, *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, *Phạm Quang Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt. **Nghệ An:** *Nguyễn Thái Dũng*, 7B, *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai. **Phú Thọ:** *Hà Lê Đức Anh*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, xã Phù Ninh; *Chu Ngọc Ánh*, *Nguyễn Thanh Mai*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Vạn Xuân. **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh. **Quảng Bình:** *Nguyễn Văn Hợp*, 11T2, *Nguyễn Phương Nam*, 12T2, *Vương Khánh Toàn*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Vĩnh Thịnh*, 12A1, THPT Vĩnh Linh. **TP. Chí Minh:** *Nguyễn Quốc Bình*, 11A1, *Nguyễn Chí Đại*, 10A1, THPT Lê Thánh Tông, Tân Phú; *Trương Quốc Minh*, 10C2, THPT Tây Thanh, Tân Phú, *Nguyễn Lâm*, 8A2, THCS Đào Duy Anh, *Phan Duy Nguyễn*, 11TN1, THPT Trung Phú, Củ Chi. **Tây Ninh:** *Huỳnh Phan Kim Ngân*, *Huỳnh Minh Trí*, 10T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Tiền Giang:** *Đỗ Nhật Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang. **Vĩnh Long:** *Đặng Thành Chung*, *Lê Hoàng Khang*, *Lê Duy Minh*, *Thái Minh Phúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

Chúng tôi tra trên mạng thấy có hai trường chuyên Lê Hồng Phong (Nam Định và TP. Hồ Chí Minh). Đề nghị bạn *Trần Quang Minh*, 10CT1 lần gửi bài sau ghi rõ địa chỉ hơn.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/576. *Cho dãy số* (u_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ *được xác định như sau:* $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1-2u_n-u_n^2} \end{cases}$.

Tính $\lim\left(u_1+u_2+\ldots+u_n+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$.

Lời giải. Từ công thức xác định dãy ta có:

$$\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1-2u_n-u_n^2}{u_n}=\frac{1}{u_n}-2-u_n$$

Được quét bằng CamScanner

hay $u_n=\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}-2$ với mọi n nguyên dương.

Do đó:

$$u_1=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}-2,\ u_2=\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}-2,\ldots,u_n=\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}-2.$$

Cộng theo vế n đẳng thức trên ta thu được:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}}-2n$$

hay $u_1+u_2+\ldots+u_n+\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_1}-2n=\frac{1}{2}-2n.$

Suy ra:

$$\lim\left(u_1+u_2+\ldots+u_n+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\lim n\left(\frac{1}{2n}-2\right)=-\infty.$$

Nhận xét. Đây là một bài toán không khó vì bản chất của nó chỉ là một bài toán tính tổng hay rút gọn biểu thức. Ngay cả các bạn học sinh cấp hai cũng có thể giải được bài toán này. Tuy nhiên chỉ có vài bạn chỉ ra rằng $u_n\neq 0$ bằng quy nạp. Chỉ có bạn *Nguyễn Hữu Vĩnh Thịnh*, 12A1, THPT Vĩnh Linh, **Quảng Trị** chỉ ra rằng u_n xác định với mọi n nguyên dương. Ngoài bạn Thịnh, các bạn sau đây có lời giải đúng:

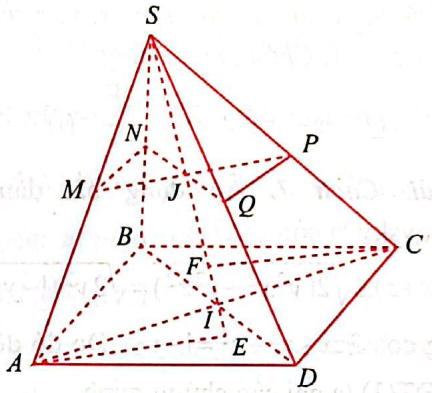
Phú Yên: *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Nghệ An:** *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên; **Cần Thơ:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phan Duy Nguyễn*, 11TN1, THPT Trung Phú; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh*, 10T1, *Thái Minh Phúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Đức Phát*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Long An:** *Huỳnh Minh Trí*, 11T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Kiên Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Tiền Giang:** *Phạm Nguyễn Anh Duy*, *Võ Đặng Quang Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang; **Đà Nẵng:** *Trần Tấn Triết*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 11 Toán 2, THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Bùi Tùng Lâm*, *Ngô Bùi Anh Khoa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Vĩnh Thịnh*, 12A1, THPT Vĩnh Linh; **Quảng Bình:** *Lê Ánh Dương*, 11 chuyên Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T8/576. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB, SC, SD và gọi $\frac{SM}{SA}=a, \frac{SN}{SB}=b, \frac{SP}{SC}=c, \frac{SQ}{SD}=d$ (với a, b, c, d là các số dương). Biết rằng bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng, chứng minh*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{cd}}.$$

Lời giải.



Gọi I,J lần lượt là giao điểm của AC và BD, MP và NQ. Khi đó J nằm trên giao tuyến của mp(SAC) và mp(SBD) nên A,J,I thẳng hàng.

Qua A,C kẻ các đường thẳng song song với MP, cắt SI lần lượt tại E,F. Do $ABCD$ là hình bình hành nên I là trung điểm của AC. Suy ra $AECF$ cũng là hình bình hành. Từ đó $IE=IF$. Ta thu được $SE+SF=2SI$. Suy ra:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SP}=\frac{SE}{SJ}+\frac{SF}{SJ}=\frac{SE+SF}{SJ}=\frac{2SI}{SJ}.$$

Tương tự: $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{2SI}{SJ}$. Vậy $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{\sqrt{cd}}.$$

Được quét bằng CamScanner

Vậy $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{cd}}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=d$, khi và chỉ khi MN,PQ,AB,CD đôi một song song.

Nhận xét. Mấu chốt ở bài toán này là chỉ ra được $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Long:** *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Đức Phát*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Vĩnh Thịnh*, 12A1, THPT Vĩnh Linh; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Bùi Tùng Lâm*, *Nguyễn Tùng Duy*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/576. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng*

$$Q=xy+yz+2zx\leq\frac{1+\sqrt{3}}{2}\quad(1).$$

Lời giải. Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$y(x+z)\leq\sqrt{2(y^2x^2+y^2z^2)}=\sqrt{2y^2(1-y^2)}.$$

Ta cũng có: $2zx\leq x^2+z^2=1-y^2$. Do đó để chứng minh BĐT(1) ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{2y^2(1-y^2)}+1-y^2\leq\frac{1+\sqrt{3}}{2}\quad(2).$$

Ta có:

$$\sqrt{2y^2(1-y^2)}+1-y^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4y^2-4y^4}+\frac{1}{2}(1-2y^2)+\frac{1}{2}$$

$$\leq\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left[4y^2-4y^4+(1-2y^2)^2\right]}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Vậy (2) và do đó (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=z=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{12}}, y=\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$.

Cách 2. Vì $x^2+y^2+z^2=1$ nên ta có thể đặt:

$x=\sin\alpha\cos\beta, y=\cos\alpha, z=\sin\alpha\sin\beta$ với $\alpha,\beta\in[0;2\pi]$.

Khi đó: $Q=y(x+z)+2xz$

$$=\cos\alpha\sin\alpha(\cos\beta+\sin\beta)+2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$=\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\alpha\sin2\beta$$

$$\leq\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin2\alpha+\frac{1-\cos2\alpha}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin2\alpha-\cos2\alpha)$$

$$\leq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

$Q=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ khi $\begin{cases}\sin2\beta=1,\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin2\alpha=-\sqrt{2}\cos2\alpha\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}\cos2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \sin2\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}\\ x=z=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{12}}\end{cases}.$$

Nhận xét. Cách giải 1 (bằng đại số) là của đa số các bạn với một số biến đổi khác. Cách giải 2 (bằng lượng giác) là của tác giả đề toán. Một số bạn giải bài này bằng phương pháp đạo hàm cũng cho kết quả đúng. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Quảng Trị: *Nguyễn Hữu Vĩnh Thịnh*, 12A1, THPT Vĩnh Linh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 7A, TH&THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, P. Thành Sen; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, P. Hoàng Mai; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 11 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11 Toán 1, THPT Lương Văn Chánh, **Tiền Giang:** *Đỗ Nhật Huy*, *Phạm Nguyễn Anh Duy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đắc Lắk:** *Lê Duy Khánh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Kiên Giang:** *Trần Hoàng Bách*, *Nguyễn Gia Bảo*, 10T1, *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh*, 10T1, *Lê Thiện Khiêm*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; **Điện Biên:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 12C1 chuyên Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:**

Được quét bằng CamScanner

Huỳnh Nguyễn Lê Minh, Phạm Quang Minh, Trần Đức Hiếu, 10T, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chí Đại*, 10A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế song ngữ Cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/576. *Xét dãy số* (a_n) *với:* $a_0=a_1=1$ *và* $a_{n+1}=7a_n-a_{n-1}-2$ *với mọi số tự nhiên* $n\geq 1$. *Có phải với mọi số tự nhiên n thì các số hạng* a_n *luôn là số chính phương không?*

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên An Giang)

Xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_0=x_1=1$ và $x_{n+1}=3x_n-x_{n-1}$ với mọi số tự nhiên $n\geq 1$. Dễ thấy x_n là số nguyên dương với mọi n.

Ta chứng minh rằng:

$$x_{n+1}^2-x_nx_{n+2}=-1 \quad (1) \text{ với mọi } n.$$

Thật vậy: $x_{n+2}+x_n=3x_{n+1}$,

$$x_{n+1}+x_{n-1}=3x_n\Rightarrow\frac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}+x_{n-1}}=\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

$$\Rightarrow x_nx_{n+2}-x_{n+1}^2=x_{n-1}x_{n+1}-x_n^2$$

$$\Rightarrow x_nx_{n+2}-x_{n+1}^2=x_0x_2-x_1^2=1.2-1=1\Rightarrow \text{có (1).}$$

Từ đó: $x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n$

$$=x_{n+1}^2-x_n(3x_{n+1}-x_n)=x_{n+1}^2-x_nx_{n+2}=-1 \quad (2).$$

Ta chứng minh bằng quy nạp khẳng định sau:

$$a_n=x_n^2 \quad (3) \text{ với mọi } n\in\mathbb{N}.$$

Với $n=0,1$ khẳng định (3) đúng, giả sử (3) đúng tới $k\geq 1$. Sử dụng (2) ta có:

$$a_{k+1}=7a_k-a_{k-1}-2=7x_k^2-x_{k-1}^2$$

$$+2\left(x_k^2+x_{k-1}^2-3x_kx_{k-1}\right)=\left(3x_k-x_{k-1}\right)^2=x_{k+1}^2.$$

Vậy (3) đúng với $k+1$. Theo nguyên lý quy nạp (3) được chứng minh, tức là: Với mọi số tự nhiên n, a_n là số chính phương.

Nhận xét. Bài này được nhiều bạn tham gia giải và giải đúng. Trong số các bạn có lời giải tốt có: **Bình Phước:** *Hồ Dương Đức Đạt*, 11T1, THPT chuyên Bình Long; **Hà Tĩnh:** *Đào Tùng Lâm*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Gia Lai:** *Nguyễn Trần Ngọc Thiện*, 12A1, THPT Tuy Phước; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Cần Thơ:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần thơ.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/576. *Tìm tất cả các hàm số* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *thỏa mãn*

$$f\left(f(xy)+2xy\right)=3xf(y)+3yf(x) \quad (1),$$

với mọi $x,y\in(0;+\infty)$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Với $y=1$, ta được:

$$f(f(x)+2x)=3xf(1)+3f(x),\ \forall x\in(0,+\infty)$$

hay $f(f(xy)+2xy)=3xyf(1)+3f(xy),\ \forall x,y\in(0,+\infty)$.

Kết hợp với (1) ta thu được:

$$3xyf(1)+3f(xy)=3xf(y)+3yf(x),\ \forall x,y\in(0,+\infty)$$

hay $\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}=\frac{f(xy)}{xy}+f(1),\forall x,y\in(0,+\infty)$

hay $g(xy)=g(x)+g(y),\forall x,y\in(0,+\infty)$ (2),

trong đó: $g(t)=\frac{f(t)}{t}-f(1)$, $g:(0,+\infty)\to\left(-f(1),+\infty\right)$.

Đặt $x=e^u,y=e^v$ với $u,v\in\mathbb{R}$ thì $u=\ln x,v=\ln y$ và (2) có dạng: $h(u+v)=h(u)+h(v),\forall u,v\in\mathbb{R}$ (3),

trong đó $h(t)=g(e^t)$.

Từ (3) suy ra $h(nt)=nh(t)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ hay

$h(t)=\frac{h(nt)}{n}>\frac{-f(1)}{n}\to 0$ khi $n\to+\infty$.

Suy ra $h(t)\geq 0,\forall t\in\mathbb{R}$. Theo (3) thì khi $u>v$ ta có:

$$f(u)=f(u-v+v)=f(u-v)+f(v)\geq f(v)$$

nên $h(t)$ là hàm đơn điệu tăng. Suy ra $h(t)$ là hàm đơn điệu tăng và là hàm cộng tính nên $h(t)=ct$. Vì $h(t)\geq 0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $c=0$ và $h(t)\equiv 0$ và $f(x)=f(1)x=ax$ với $x\in(0,+\infty)$.

Thay vào (1), ta thu được $f(1)=a=4$.

Kết luận: $f(x)=4x$.

Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm dạng Cauchy không sử dụng tính liên tục trên trục thực trong lớp hàm hợp. Đa số các bạn giải theo cách đã trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Cần Thơ:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Cần Thơ; **Đà Nẵng:**

Được quét bằng CamScanner

Trần Tấn Triết, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Gia Lai:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Kiên Giang:** *Trần Hoàng Bách Hợp*, *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Vĩnh Long:** *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

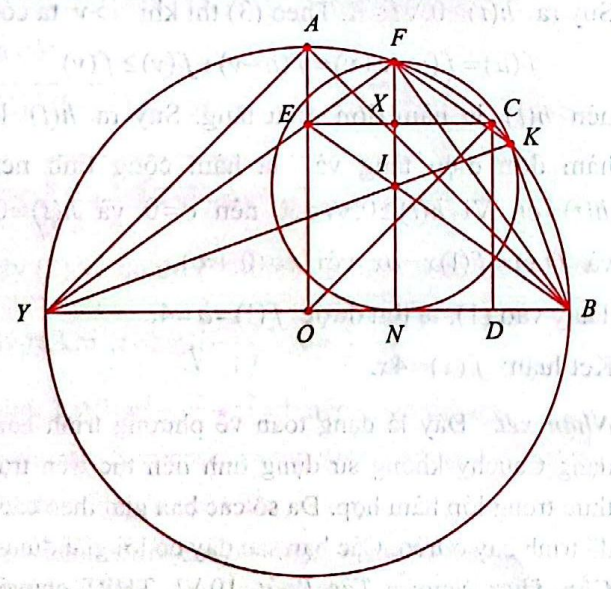
Bài T12/576. *Cho đường tròn (O) và hai điểm A, $B \in (O)$ sao cho $\widehat{AOB}=90^0$, C là điểm chính giữa cung nhỏ AB của đường tròn (O). Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên OB, OA. F là điểm thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O) sao cho CE là đường phân giác của góc $\widehat{BEF}$. Đường thẳng qua F và vuông góc với OB cắt BE tại điểm I.*

a) *Chứng minh rằng đường tròn (I) (tâm I, bán kính IF) tiếp xúc với OB tại N.*

b) *Từ B kẻ tiếp tuyến BK với đường tròn (I) (điểm K khác điểm N). Chứng minh rằng $K \in (O)$.*

Lời giải. (Theo bạn *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**)

a) Gọi Y là giao điểm của FE và BO; X là giao điểm của FI và CE; R là bán kính của (O).



Dễ thấy $EC \parallel BY$. Từ đó, chú ý rằng các tia EB và EF đối xứng với nhau qua EC, suy ra:

$$\widehat{YBE}=\widehat{CEB}=\widehat{CEF}=\widehat{EYB}.$$

Do đó $EB=EY$.

Kết hợp với $EO \perp BY$, suy ra $OB=OY$.

Điều đó có nghĩa là Y thuộc (O).

Vì C là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ nên $\widehat{COE}=45°$. Do đó tam giác ECO vuông cân tại E.

Vậy $OE=\dfrac{CO}{\sqrt{2}}=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Kết hợp với $OE \perp OY$, suy ra: $EY^2=OE^2+OY^2=\dfrac{1}{2}R^2+R^2=\dfrac{3}{2}R^2$.

Do đó: $EY=\dfrac{\sqrt{6}}{2}R$ (1). Điều đó có nghĩa là:

$$\frac{\sqrt{6}}{2}R.EF=EY.EF=R^2-OE^2=R^2-\frac{1}{2}R^2=\frac{1}{2}R^2.$$

Do đó $EF=\dfrac{\sqrt{6}}{6}R$ (2). Từ (1) và (2), chú ý rằng $EB=EY$, suy ra $EB=3EF$ (3).

Dễ thấy tam giác EFI cân tại E và $EX \perp FI$.

Do đó $EI=EF$ và $XI=XF$ (4).

Từ (3) và (4), chú ý rằng $EX \parallel BN$, suy ra:

$$FI=2XI=2\frac{XI}{NI}.NI=2\frac{EI}{BI}.NI=2\frac{EI}{EB-EI}.NI$$
$$=2\frac{EF}{EB-EF}.NI=2.\frac{1}{3-1}.NI=NI.$$

Vậy đường tròn tâm I bán kính IF tiếp xúc với BC.

b) Dễ thấy:

$$\widehat{KBY}=\widehat{KBN}=2\widehat{IBN}=2\widehat{EBO}=\widehat{EBY}+\widehat{EYB} \quad (5).$$

Dễ thấy $IF=IK$ và IB là phân giác ngoài của góc $\widehat{KIF}$. Do đó $KF \parallel IB$. Từ đó, chú ý rằng $FN \parallel EO$, suy ra:

$$\widehat{KFY}=\widehat{KFN}+\widehat{NFY}=\widehat{BIN}+\widehat{OEY}$$
$$=\widehat{BEO}+\widehat{OEY}=\widehat{BEY} \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra: $\widehat{KBY}+\widehat{KFY}=180°$.

Điều đó có nghĩa là K thuộc (O).

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải, nhiều bạn giải bằng phương pháp tọa độ, một số bạn giải bằng cách dùng số phức.

2) Xin nêu tên các bạn có lời giải đúng: **Điện Biên:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 12C1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Thọ:** *Lương Thành Vinh*, 11A, THPT

Được quét bằng CamScanner

chuyên Hùng Vương; **Đà Nẵng:** *Trần Tấn Triết*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; *Nguyễn Lê Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Duy Nguyên*, 11TN1, THPT Trung Phú, Củ Chi; **Tiền Giang:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 10T1, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** *Lê Nguyên Khang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm: **Đồng Tháp:** *Phạm Ngọc Ngân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **An Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/576. *Người ta bơm 1000 m^3 khí nóng ở nhiệt độ T = 300 K vào khinh khí cầu. Nhiệt độ và áp suất khí quyển khi ấy là T_0 = 279 K và p_0 = 1,00 bar. Khối lượng khinh khí cầu là 240 kg. Khi đó khinh khí cầu chưa thể bay lên được.*

a) *Hãy tính lượng không khí chứa khinh khí cầu khi ấy.*

Muốn khinh khí cầu bay lên người ta phải tăng nhiệt độ của khối khí lên bên trong khinh khí cầu mà không thêm vào hoặc lấy bớt không khí ra. Đây là quá trình đẳng áp. Xem không khí là phân tử lưỡng nguyên tử có nhiệt dung riêng đẳng áp là $c_{mp} = \frac{7}{2}R$. *Cho biết hằng số khí lí tưởng là* R = 8,31 J/mol.K *và khối lượng mol của không khí là* M_A = 29 g/mol.

b) *Tính thể tích của khinh khí cầu đạt được để nó bắt đầu đi lên.*

Lời giải. a) Khối lượng không khí có trong khinh khí cầu khi chưa bay là:

$$n=\frac{p_0V_0}{RT_1}=\frac{1,013.10^5.1000}{8,31.300}=4,06.10^4 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow m_A=n.M_A=4,06.10^4.29.10^{-3}\approx 1,18.10^3 \text{ kg}.$$

Tổng khối lượng khinh khí cầu là:

$$m_B=m_n+m_A=240+1,18.10^3=1,42.10^3 \text{ kg}.$$

b) Gọi: $p_1=p_0; V_1=V_0=1000$ m^3; $T_1=300$ K lần lượt là áp suất, thể tích, nhiệt độ khối khí chứa trong khinh khí cầu sau khi bơm và $p_2=p_0; V_2$ và T_2 là các giá trị tương ứng khi khinh khí cầu bắt đầu bay. Lúc ấy lực đẩy Ác-si-mét F_A lớn hơn trọng lượng của khinh khí cầu:

$$F_A=F_G \text{ hay } \rho_0V_2g=m_Bg$$

Áp dụng phương trình trạng thái khí lí tưởng:

$$p_0V_0=n_0RT_0\Rightarrow\frac{n_0}{V_0}=\frac{p_0}{RT_0}.$$

Ta có: $\rho_0=\frac{p_0m_A}{RT_0}=\frac{1,013.10^5.29}{8,31.279}=1,27$ kg/m^3.

$$\Rightarrow V_2=\frac{m_B}{\rho_0}=\frac{1,42.10^3}{1,27}\approx 1,12.10^3 \text{ m}^3.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải đúng bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/576. *Chất phóng xạ X có chu kì bán rã T, phân rã biến đổi thành hạt nhân con Y bền. Ở thời điểm ban đầu (t = 0) có một mẫu chất X nguyên chất, tại thời điểm t_1, tỉ số giữa số hạt nhân Y sinh ra và số hạt nhân X còn lại là* $\frac{1}{4}$. *Tại thời điểm* $t_2=t_1+141,2$ (s), *tỉ số giữa hạt nhân Y sinh ra và số hạt nhân X còn lại là 4. Xác định T.*

Lời giải. Ta biết, số hạt nhân Y sinh ra N_Y bằng số hạt nhân X bị phân rã ΔN ($N_Y=\Delta N$).

Tại thời điểm t_1:

$$\frac{N_{Y1}}{N_{X1}}=\frac{\Delta N_{X1}}{N_{X1}}=\frac{N_0(1-2^{-\frac{t_1}{T}})}{N_0.2^{-\frac{t_1}{T}}}=2^{\frac{t_1}{T}}-1=\frac{1}{4}\Rightarrow 2^{\frac{t_1}{T}}=\frac{5}{4}\ (1).$$

Tại thời điểm t_2:

$$\frac{N_{Y2}}{N_{X2}}=\frac{\Delta N_{X2}}{N_{X2}}=\frac{N_0(1-2^{-\frac{t_2}{T}})}{N_0.2^{-\frac{t_2}{T}}}=2^{\frac{t_2}{T}}-1=4$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{t_2}{T}}=5\Rightarrow 2^{\frac{t_1+141,2}{T}}=5\Leftrightarrow 2^{\frac{t_1}{T}}.2^{\frac{141,2}{T}}=5\ (2).$$

Từ (1) và (2) có: $\frac{5}{4}.2^{\frac{141,2}{T}}=5\Rightarrow 2^{\frac{141,2}{T}}=4=2^2$

$$\Rightarrow T=\frac{141,2}{2}=70,6 \text{ (s)}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này. *Trần Văn Phú*, phường phố Hiến, tỉnh **Hưng Yên**; *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11L5, THPT Thái Phiên, **TP. Đà Nẵng**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Được quét bằng CamScanner



PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN THEO ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH TRONG BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

1. Ý TƯỞNG CỦA PHƯƠNG PHÁP

Khi gặp bài toán chứng minh bất đẳng thức lượng giác có dạng $f(A,B,C)\ge 0$ hoặc $f(A,B,C)\le 0$, với A,B,C là ba góc của một tam giác, ta làm như sau:

Xét hiệu $f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)\ge 0$ sau đó chứng minh $f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)\ge 0$ hoặc $f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)\le 0$ và chứng minh $f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)\le 0$, từ đó rút ra kết luận $f(A,B,C)\ge 0$ hoặc $f(A,B,C)\le 0$.

Sau đây là một số thí dụ minh họa cho phương pháp

2. CÁC THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có*

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\ge \cos A\cos B\cos C.$$

Lời giải. • Nếu tam giác ABC là tam giác tù hoặc vuông thì ta có ngay điều phải chứng minh.

• Xét trường hợp tam giác ABC là tam giác nhọn.

Đặt $f(A,B,C)=(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)-\cos A\cos B\cos C.$

Không mất tính tổng quát, giả sử $\hat A\le \hat B\le \hat C$, suy ra: $\hat A\le 60^0\Rightarrow \cos A\ge \frac{1}{2}$. Khi đó:

$$f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=(1-\cos A)\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)^2-\cos A\sin^2\frac{A}{2}.$$

Ta có: $f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)$

$$=(1-\cos A)\left[(1-\cos B)(1-\cos C)-\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)^2\right]-\cos A\left(\cos B\cos C-\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=(1-\cos A)\left(-\cos B-\cos C+2\sin\frac{A}{2}+\cos B\cos C-\sin^2\frac{A}{2}\right)-\cos A\left(\cos B\cos C-\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos A)\left[4\sin\frac{A}{2}-4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos(B-C)-\cos A-1+\cos A\right]-\frac{1}{2}\cos A\left[\cos(B-C)-\cos A-1+\cos A\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos A)\times\left[4\sin\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)+\cos(B-C)-1\right]+\frac{1}{2}\cos A\left[1-\cos(B-C)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos A)4\sin\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)+\frac{1}{2}(1-\cos A)\left[\cos(B-C)-1\right]+\frac{1}{2}\cos A\left[1-\cos(B-C)\right]$$

$$\ge\frac{1}{2}\left[1-\cos(B-C)\right](2\cos A-1)\ge 0\ (\text{do }\cos A\ge\frac{1}{2}).$$

Ta chứng minh:

$$(1-\cos A)\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)^2-\cos A\sin^2\frac{A}{2}\ge 0\quad (1).$$

Được quét bằng CamScanner

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow 2\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)^2-\cos A\geq 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}-4\sin\frac{A}{2}+1\geq 0\Leftrightarrow\left(2\sin\frac{A}{2}-1\right)^2\geq 0$

(đpcm). Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có :*

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)\geq\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}.$$

(Trích đề thi đề nghị Olimpic 30-4-2010)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $\hat{A}\leq\hat{B}\leq\hat{C}$, suy ra: $0<\sin\frac{A}{2}\leq\frac{1}{2};\frac{1}{2}\leq\sin\frac{B+C}{4}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $f(A,B,C)=\frac{5}{4}+\frac{1}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$

$-\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}$.

Khi đó: $f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=\frac{5}{4}+\frac{1}{6}\cos A$

$+\frac{1}{3}\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}-2\sin\frac{B+C}{4}$. Ta có:

$f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)$

$=\frac{1}{6}\left(\cos B+\cos C-2\sin\frac{A}{2}\right)$

$-\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-2\sin\frac{B+C}{4}\right)$

$=\frac{1}{3}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-1\right)-2\sin\frac{B+C}{4}\left(\cos\frac{B-C}{4}-1\right)$

$=2\sin\frac{B+C}{4}\left(1-\cos\frac{B-C}{4}\right)-\frac{1}{3}\sin\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)$

$=2\sin\frac{B+C}{4}\left(1-\cos\frac{B-C}{4}\right)-\frac{2}{3}\sin\frac{A}{2}\left(1-\cos^2\frac{B-C}{4}\right)$

$=\left(1-\cos\frac{B-C}{4}\right)\left[2\sin\frac{B+C}{4}-\frac{2}{3}\sin\frac{A}{2}\left(1+\cos\frac{B-C}{4}\right)\right]$

$\geq\left(1-\cos\frac{B-C}{4}\right)\left[1-\frac{1}{3}\left(1+\cos\frac{B-C}{4}\right)\right]$

$=\frac{1}{3}\left(1-\cos\frac{B-C}{4}\right)\left(2-\cos\frac{B-C}{4}\right)\geq 0.$

Ta chứng minh

$f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=\frac{5}{4}+\frac{1}{6}\cos A+\frac{1}{3}\sin\frac{A}{2}$

$-\sin\frac{A}{2}-2\sin\frac{B+C}{4}\geq 0$ (1).

Ta có:

(1) $\Leftrightarrow\frac{5}{4}+\frac{1}{6}\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)-\frac{2}{3}\sin\frac{A}{2}-2\sin\frac{B+C}{4}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{17}{12}-\frac{1}{3}\sin^2\frac{A}{2}-\frac{2}{3}\sin\frac{A}{2}-2\sin\frac{B+C}{4}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{17}{12}-\frac{1}{3}\left(1-2\sin^2\frac{B+C}{4}\right)^2-\frac{2}{3}\left(1-2\sin^2\frac{B+C}{4}\right)$

$-2\sin\frac{B+C}{4}\geq 0$

$\Leftrightarrow 16\sin^4\frac{B+C}{4}-32\sin^2\frac{B+C}{4}$

$+24\sin\frac{B+C}{4}-5\leq 0$ (2).

Đặt $t=\sin\frac{B+C}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq t<\frac{\sqrt{2}}{2}$, khi đó (2) trở thành: $16t^4-32t^2+24t-5\leq 0$

$\Leftrightarrow 16t^4-8t^3+8t^3-4t^2-28t^2+14t+10t-5\leq 0$

$\Leftrightarrow(2t-1)\left(8t^3+4t^2-14t+5\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow(2t-1)\left(8t^3-4t^2+8t^2-4t-10t+5\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow(2t-1)^2\left(4t^2+4t-5\right)\leq 0$ (3).

Xét hàm số $f(t)=4t^2+4t-5$ với $\frac{1}{2}\leq t<\frac{\sqrt{2}}{2}$ có

$f'(t)=8t+4>0$ với $\frac{1}{2}\leq t<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow f(t)<f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+2\sqrt{2}-5=2\sqrt{2}-3<0$

từ đó (3) là đúng, ta có đpcm. Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:* $\frac{\cot A\cot B\cot C}{\sin A\sin B\sin C}\leq\frac{8}{27}$ (1).

(TH&TT, số tháng 2 năm 2009)

Lời giải. Ta có:

Được quét bằng CamScanner

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\cos A\cos B\cos C}{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C} \le \frac{8}{27} \quad (2).$$

Nếu trong ba góc A, B, C có một góc vuông hoặc tù thì (2) luôn đúng.

Xét cả ba góc A, B, C đều nhọn. Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}{\cos A\cos B\cos C} \ge \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\cos^2 A\right)\left(1-\cos^2 B\right)\left(1-\cos^2 C\right) \ge \frac{27}{8}\cos A\cos B\cos C.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $\hat{A} \le \hat{B} \le \hat{C}$. Suy ra: $\hat{A} \le 60^0 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \cos A < 1$. Đặt

$$f(A,B,C) = \left(1-\cos^2 A\right)\left(1-\cos^2 B\right)\left(1-\cos^2 C\right) - \frac{27}{8}\cos A\cos B\cos C.$$

Khi đó:

$$f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) = \left(1-\cos^2 A\right)\left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)^2 - \frac{27}{8}\cos A\sin^2\frac{A}{2}.$$

Ta có: $f(A,B,C) - f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right)$

$$= \left(1-\cos^2 A\right)\left[\left(1-\cos^2 B\right)\left(1-\cos^2 C\right) - \left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)^2\right] - \frac{27}{8}\cos A\left(\cos B\cos C - \sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= \left(1-\cos^2 A\right)\times\left[-\left(\cos^2 B+\cos^2 C-2\sin^2\frac{A}{2}\right) + \cos^2 B\cos^2 C - \sin^4\frac{A}{2}\right] - \frac{27}{16}\cos A\left(2\cos B\cos C - 2\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos^2 A\right)\times\left[-\left(2+\cos 2B+\cos 2C-4\sin^2\frac{A}{2}\right) + \left(2\cos B\cos C - 2\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\cos B\cos C+\sin^2\frac{A}{2}\right)\right] - \frac{27}{16}\cos A\left[\cos(B-C)-\cos A-1+\cos A\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos^2 A\right)\times$$

$$\times\left[-(2-2\cos A\cos(B-C)-2+2\cos A) + (\cos(B-C)-\cos A-1+\cos A)\left(\cos B\cos C+\sin^2\frac{A}{2}\right)\right] + \frac{27}{16}\cos A\left[1-\cos(B-C)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos^2 A\right)\times\left[-2\cos A(1-\cos(B-C)) - (1-\cos(B-C))\left(\cos B\cos C+\sin^2\frac{A}{2}\right)\right] + \frac{27}{16}\cos A\left[1-\cos(B-C)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos^2 A\right)\left[1-\cos(B-C)\right]\times \times\left[-2\cos A-\cos B\cos C-\sin^2\frac{A}{2}\right] + \frac{27}{16}\cos A\left[1-\cos(B-C)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\cos(B-C)\right]\times \times\left[\left(1-\cos^2 A\right)\left(-2\cos A-\cos B\cos C-\sin^2\frac{A}{2}\right)+\frac{27}{8}\cos A\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-\cos(B-C)\right]\times \times\left[\left(1-\cos^2 A\right)\left(-4\cos A-\cos(B-C)+\cos A-1+\cos A\right)+\frac{27}{4}\cos A\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-\cos(B-C)\right]\times \times\left[\left(1-\cos^2 A\right)\left(-2\cos A-\cos(B-C)-1\right)+\frac{27}{4}\cos A\right]$$

$$\ge \frac{1}{4}\left[1-\cos(B-C)\right]\left[2\left(\cos^2 A-1\right)(\cos A+1)+\frac{27}{4}\cos A\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-\cos(B-C)\right]\left(2\cos^3 A+2\cos^2 A+\frac{19}{4}\cos A-2\right) \ge 0$$

(đúng, do $\frac{1}{2} \le \cos A < 1$).

Ta chứng minh:

$$\left(1-\cos^2 A\right)\left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)^2 - \frac{27}{8}\cos A\sin^2\frac{A}{2} \ge 0 \quad (3).$$

Thật vậy:

Được quét bằng CamScanner

$(3) \Leftrightarrow \left(1-\cos^2 A\right)\frac{(1+\cos A)^2}{4}-\frac{27}{16}\cos A(1-\cos A)\ge 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 A+8\cos^3 A-27\cos^2 A+19\cos A-4\le 0$ (4).

Đặt $t=\cos A \Rightarrow \frac{1}{2}\le t<1$, khi đó (4) trở thành:

$4t^4+8t^3-27t^2+19t-4\le 0$

$\Leftrightarrow 4t^4-2t^3+10t^3-5t^2-22t^2+11t+8t-4\le 0$

$\Leftrightarrow (2t-1)\left(2t^3+5t^2-11t+4\right)\le 0$

$\Leftrightarrow (2t-1)\left(2t^3-t^2+6t^2-3t-8t+4\right)\le 0$

$\Leftrightarrow (2t-1)^2\left(t^2+3t-4\right)\le 0$

$\Leftrightarrow (2t-1)^2(t-1)(t+4)\le 0$ (đúng, do $\frac{1}{2}\le t<1$).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:*

$$\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)\left(1+\cos^2 C\right)\ge\frac{125}{64}.$$

(Trích đề thi HSG Quốc gia năm 1992)

Lời giải. Giả sử $\widehat{A}\le\widehat{B}\le\widehat{C}$, ta có:

$$0<\widehat{A}\le\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2}\le\cos A<1,\ 0<\sin\frac{A}{2}\le\frac{1}{2}.$$

Đặt:

$$f(A,B,C)=\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)\left(1+\cos^2 C\right)-\frac{125}{64}.$$

Khi đó:

$$f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\sin^2\frac{A}{2}\right)^2-\frac{125}{64}.$$

Ta có: $f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)$

$=\left(1+\cos^2 A\right)\left[\left(1+\cos^2 B\right)\left(1+\cos^2 C\right)-\left(1+\sin^2\frac{A}{2}\right)^2\right]$

$=\left(1+\cos^2 A\right)\left(\cos^2 B+\cos^2 C-2\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2 B\cos^2 C-\sin^4\frac{A}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 A\right)\left[2+\cos 2B+\cos 2C-4\sin^2\frac{A}{2}\right.$

$\left.+\left(2\cos B\cos C-2\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\cos B\cos C+\sin^2\frac{A}{2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 A\right)\times$

$\times\left\{2-2\cos A\cos(B-C)-2+2\cos A\right.$

$\left.+\left(\cos(B-C)-\cos A-1+\cos A\right)\left(\cos B\cos C+\sin^2\frac{A}{2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 A\right)\left[2\cos A(1-\cos(B-C))\right.$

$\left.-(1-\cos(B-C))\left(\cos B\cos C+\sin^2\frac{A}{2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 A\right)(1-\cos(B-C))\times$

$\times\left(2\cos A-\cos B\cos C-\sin^2\frac{A}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1+\cos^2 A\right)(1-\cos(B-C))\times$

$\times\left[4\cos A-\cos(B-C)+\cos A-1+\cos A\right]$

$=\frac{1}{4}\left(1+\cos^2 A\right)(1-\cos(B-C))\left[6\cos A-\cos(B-C)-1\right]$

$\ge\frac{1}{4}\left(1+\cos^2 A\right)\left[1-\cos(B-C)\right][3-1-1]$

$=\frac{1}{4}\left(1+\cos^2 A\right)\left[1-\cos(B-C)\right]\ge 0.$

Ta chứng minh

$f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\sin^2\frac{A}{2}\right)^2-\frac{125}{64}\ge 0$ (1).

Thật vậy:

$(1)\Leftrightarrow\left(1+\cos^2 A\right)(3-\cos A)^2\ge\frac{125}{16}$

$\Leftrightarrow 16\cos^4 A-96\cos^3 A+160\cos^2 A-96\cos A+19\ge 0$ (2).

Đặt $t=\cos A\Rightarrow\frac{1}{2}\le t<1$, khi đó (2) trở thành:

$16t^4-96t^3+160t^2-96t+19\ge 0$

$\Leftrightarrow 16t^4-8t^3-88t^3+44t^2+116t^2-58t-38t+19\ge 0$

$\Leftrightarrow (2t-1)\left(8t^3-44t^2+58t-19\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow (2t-1)\left(8t^3-4t^2-40t^2+20t+38t-19\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow (2t-1)^2\left(4t^2-20t+19\right)\ge 0$

(đúng vì $\frac{1}{2}\le t<1$).

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều.

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:*

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geq 2.$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $\hat{A}\leq\hat{B}\leq\hat{C}$, ta có: $0<\sin\frac{A}{2}\leq\frac{1}{2}$ và $0<\cos\frac{B-C}{2}\leq 1$. Đặt

$$f(A,B,C)=\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-2\geq 0.$$

Khi đó: $f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=\tan^2\frac{A}{2}+2\tan^2\frac{B+C}{4}+8\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B+C}{4}-2.$

Ta có: $f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{4},\frac{B+C}{4}\right)$

$$=\left(\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}-2\tan^2\frac{B+C}{4}\right)+4\sin\frac{A}{2}\left(2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-2\sin^2\frac{B+C}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}-\frac{2}{\cos^2\frac{B+C}{4}}\right)+4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}-1+\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\left[\frac{\cos^2\frac{B+C}{4}\left(\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)-2\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{B+C}{4}}\right]+4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-1\right)$$

$$=\left[\frac{\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\left(2+\cos B+\cos C\right)-2\left(\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}{4\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{B+C}{4}}\right]-4\sin\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=\left[\frac{\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)-\left(\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{B+C}{4}}\right]-4\sin\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)}{2\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{B+C}{4}}-4\sin\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\left[\frac{1+\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{B+C}{4}}-4\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$=\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\left[\frac{1+\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}-4\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$=\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\times\left[\frac{1+\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}-\left(\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\right]$$

$$=\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\times\left[\frac{1-\sin^2\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}-\sin^3\frac{A}{2}-\sin^4\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}-2\sin^3\frac{A}{2}\right)}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\right]$$

$$-\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\times\frac{\cos^2\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right)}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}$$

$$\geq\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\times\left[\frac{\frac{3}{4}+\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{4}\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{8}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{4}\cos\frac{B-C}{2}-\frac{3}{4}\cos^2\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\right]$$

$$=\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\left[\frac{\frac{3}{4}\sin^2\frac{B-C}{2}+\frac{5}{8}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{4}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\right]\geq 0.$$

Bây giờ ta chứng minh

Được quét bằng CamScanner

$$f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=\tan^2\frac{A}{2}+2\tan^2\frac{B+C}{4}$$
$$+8\sin\frac{A}{2}\sin^2\frac{B+C}{4}-2\ge 0\ (1).$$

Thật vậy:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{1-\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{\frac{1}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}+4\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)-2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^4\frac{A}{2}-4\sin^3\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\ge 0$$

$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}-1\right)^2\ge 0$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều.

Thí dụ 6. *Chứng minh rằng với tam giác ABC không có góc tù và mỗi góc không nhỏ hơn* $\frac{\pi}{4}$ *ta có bất đẳng thức sau*

$$\cot A+\cot B+\cot C+3\cot A\cot B\cot C\le 4\left(2-\sqrt{2}\right).$$

(Trích đề thi đề nghị thi Olimpic 30-4-2011)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{A}\le\widehat{B}\le\widehat{C}$, ta có: $\frac{\pi}{4}\le\widehat{A}\le\frac{\pi}{3}\Rightarrow 1\le\tan^2 A\le 3$ hay $\sin^2 A\le 3\cos^2 A$. Đặt:

$$f(A,B,C)=\cot A+\cot B+\cot C$$
$$+3\cot A\cot B\cot C-4\left(2-\sqrt{2}\right).$$

Khi đó: $f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)$

$$=\cot A+2\tan\frac{A}{2}+3\cot A\tan^2\frac{A}{2}-4\left(2-\sqrt{2}\right);$$

$$f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=\left(\cot B+\cot C-2\tan\frac{A}{2}\right)+3\cot A\left(\cot B\cot C-\tan^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\sin A}{\sin B\sin C}-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)+3\cot A\left(\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}-\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\left(2\cos^2\frac{A}{2}-2\sin B\sin C\right)}{\sin B\sin C\cos\frac{A}{2}}$$

$$+3\cot A\left(\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}-1+1-\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\left[1+\cos A-\cos(B-C)-\cos A\right]}{\sin B\sin C\cos\frac{A}{2}}$$

$$-\frac{3}{2}\cot A\cos A\left(\frac{2\cos^2\frac{A}{2}-2\sin B\sin C}{\sin B\sin C\cos^2\frac{A}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\left[1+\cos A-\cos(B-C)-\cos A\right]}{\sin B\sin C\cos\frac{A}{2}}$$

$$-\frac{3}{2}\cot A\cos A\left[\frac{1+\cos A-\cos(B-C)-\cos A}{\sin B\sin C\cos^2\frac{A}{2}}\right]$$

$$=\left[1-\cos(B-C)\right]\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin B\sin C\cos\frac{A}{2}}-\frac{3\cot A\cos A}{2\sin B\sin C\cos^2\frac{A}{2}}\right)$$

$$=\frac{\left[1-\cos(B-C)\right](\sin A-3\cot A\cos A)}{2\sin B\sin C\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\left[1-\cos(B-C)\right]\left(\sin^2 A-3\cos^2 A\right)}{2\sin A\sin B\sin C\cos^2\frac{A}{2}}\le 0.$$

Ta chứng minh:

$$\cot A+2\tan\frac{A}{2}+3\cot A\tan^2\frac{A}{2}\le 4\left(2-\sqrt{2}\right)\ (1).$$

Thật vậy:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}}+2\tan\frac{A}{2}+\frac{3\tan^2\frac{A}{2}\left(1-\tan^2\frac{A}{2}\right)}{2\tan\frac{A}{2}}\le 4\left(2-\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^4\frac{A}{2}-6\tan^2\frac{A}{2}+8\left(2-\sqrt{2}\right)\tan\frac{A}{2}-1\ge 0\ (2).$$

Đặt $t=\tan\frac{A}{2}\Rightarrow\sqrt{2}-1\le t\le\frac{1}{\sqrt{3}}$ (do $t=\tan\frac{A}{2}$ đồng biến trên $\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6}\right]$ và $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$).

Khi đó (2) trở thành: $3t^4-6t^2+8\left(2-\sqrt{2}\right)t-1\ge 0.$

Được quét bằng CamScanner

Xét hàm số $f(t)=3t^4-6t^2+8\left(2-\sqrt{2}\right)t-1$, $t\in I=\left[\sqrt{2}-1;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ có:

$$f'(t)=12t^3-12t+8\left(2-\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow f''(t)=36t^2-12\le 0,\forall t\in I.$$

Do đó f' là hàm nghịch biến trên I, suy ra:

$$f'(t)\ge f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=8\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{8\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}-1\right)}{\sqrt{3}}>0,\forall t\in I.$$

Vậy f là hàm đồng biến trên I, suy ra:

$$f(t)\ge f\left(\sqrt{2}-1\right)=0 \quad \text{(đpcm)}.$$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC là tam giác có ba góc là hoán vị của $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{8};\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

3. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

1. $\cos A\cos B\cos C+8\sqrt{3}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$\ge 24\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}-1.$$

(TH&TT, số tháng 9 năm 2010)

2. $\dfrac{\cos A}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}+\dfrac{\cos B}{\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}}+\dfrac{\cos C}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}}\ge 2.$

(TH&TT số tháng 8 năm 2010)

3. $\dfrac{\cos A\cos B}{\cos\dfrac{A-B}{2}}+\dfrac{\cos B\cos C}{\cos\dfrac{B-C}{2}}+\dfrac{\cos C\cos A}{\cos\dfrac{C-A}{2}}\le\dfrac{3}{4}$

(với ΔABC nhọn).

(TH&TT số tháng 5 năm 2010)

4. $\dfrac{2}{3}\left(\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)\ge\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}$

(TH&TT số tháng 3 năm 2016)

5. $\cos^2\dfrac{A-B}{2}+\cos^2\dfrac{B-C}{2}+\cos^2\dfrac{C-A}{2}$

$$\ge 24\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

(TH&TT số tháng 10 năm 2011)

6. $3(\cos A+\cos B+\cos C)$

$$\ge 2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A).$$

7. $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A$

$$\le(\cos A+\cos B+\cos C)^2.$$

8. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc$, chứng minh rằng:

$$\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}+\sqrt{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}$$

$$+\sqrt{\left(1+c^2\right)\left(1+a^2\right)}-\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}\ge 4.$$

(TH&TT, số tháng 9 năm 2016)

****

PROBLEMS...

(Tiếp theo trang 20)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/580. Given the sequence $(x_n)_{n\ge 1}$ determined by:

$x_1=6$ and $x_{n+1}=\dfrac{2n+3}{2n+1}x_n-\dfrac{12}{(n+1)(2n+1)},\forall n\ge 1.$

Set $y_n=\dfrac{x_n}{n},n=1,2,...$ Find the limit $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

Problem T11/580. With a positive integer n, calculate the sum: $T_n=\sum\limits_{i+j+2(k+l)=n}\dfrac{(i+j+k+l)!}{i!j!k!l!}$.

Problem T12/5 80. Given a quadrilateral $ABCD$. Points M and N lie on segments AC and BD, respectively, such that O is the intersection point of AN and BM. Lines CO and DO intersect AB at points P and Q, respectively, where A, B, P, and Q are all distinct. The circumcircles of triangles OAP and OBQ intersect again at a point $G\ne O$. Prove that OG bisects segment CD.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

Được quét bằng CamScanner



QUÁ TRÌNH HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN CỦA HÌNH HỌC

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Hình học là phần toán học nghiên cứu các tính chất của các hình hình học, vị trí tương hỗ của chúng cùng với các quan hệ trong không gian mà không xét đến các tính chất khác của chúng như màu sắc, tỷ trọng, độ cứng, ...

1°. Sự ra đời một số khái niệm hình học

Thuật ngữ "*Hình học*" theo tiếng Hy Lạp có nghĩa đen là "*đo đạc đất đai*". Trong cuốn "*Lịch sử Hình học và Thiên văn học*" nhà lịch sử Cổ Hy Lạp *Eudemus de Rhodes* (350 – 290 tr.CN) đã viết: "*Hình học đã được khai phá bởi người Ai Cập và nảy sinh cùng với đo đạc đất đai. Việc đo đạc đối với họ là cần thiết vì nước sông Nil tràn bờ thường xuyên phá sạch các ranh giới*" (Từ điển Bách khoa toàn thư, Moscow – 1988, tr. 143).

Những bản di cảo thời Ai Cập và Babylon cổ đại được phát hiện ngày nay chứng tỏ rằng gần bốn nghìn năm trước loài người đã biết tính diện tích các hình tam giác, hình chữ nhật, hình thang và tính gần đúng diện tích hình tròn. Họ cũng biết công thức tính thể tích hình lập phương, hình trụ, ...

Thật vậy. Nội dung của hai bản *Sách cỏ lau* (Papyrus) Ai Cập khoảng thời kỳ từ thế kỷ XX – thế kỷ XVII tr.CN được trưng bày ở Moscow và London đã cho bức tranh về hình học Ai Cập, trong đó Sách cỏ lau được tạo ra từ *giấy cây cỏ lau* làm từ bột cây thực vật thủy sinh ở sông Nil (Ai Cập). Trong các Papyrus này có trình bày công thức tính diện tích hình tròn với sự thừa nhận: *diện tích hình tròn bằng diện tích hình vuông cạnh bằng* $\frac{8}{9}$ *đường kính d của hình tròn.*

Kết quả: $S=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ tương đương với số $\pi \approx 3{,}1605$.

Nền văn minh Babylon không để lại cho hậu thế các Papyrus mà thay vào đó là "*hơn mười vạn bảng nhỏ bằng đất sét nung*" mà trên đó có chữ viết bằng mũi dao và một loạt tính toán với *cơ sở lục thập phân* (cơ số sáu mươi). Theo nhiều nhà lịch sử toán học (LSTH) thì tri thức hình học của người Babylon còn cao hơn so với người Ai Cập vì trong các bảng đất sét nung còn lưu lại có cả khái niệm sơ bộ về *đo góc* và *các hệ thức lượng giác*. Người Babylon cũng tính được diện tích hình tròn theo công thức $S=\frac{c^2}{12}$, trong đó c là độ dài đường tròn, tức là dùng giá trị khá thô của $\pi=3$.

Người ta cho rằng nếu khối lượng kiến thức hình học với nghệ thuật kiến trúc không cao thì người Babylon khó mà xây dựng được cho nhà vua xứ mình công trình vĩ đại mà Lịch sử gọi là *Vườn treo Babylon* – một trong bảy kỳ quan của thế giới cổ đại – để nhà vua ban tặng cho Hoàng hậu giải sầu lúc chạnh nhớ cố hương ... Và, tặng phẩm này của nhà vua được hoàn tất năm 603 tr.CN.

Theo các sử gia Hy Lạp thì các tri thức hình học được truyền từ Ai Cập và Babylon sang Hy Lạp từ thế kỷ VII tr.CN. Các nhà triết học và toán học Hy Lạp bắt đầu làm quen với văn minh Ai Cập và Babylon từ đó.

Lịch sử có ghi rằng: vào thế kỷ VI tr.CN, ở đảo Samos thuộc Hy Lạp cổ đại người ta đã đào một con kênh ngầm xuyên qua lòng núi vào thành phố.

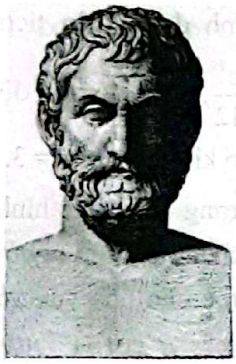
Được quét bằng CamScanner

Con kênh dài 1km và người ta đã đào từ hai phía lại ... Điều đó buộc các kỹ sư xây dựng thủy lợi Hy Lạp phải có kiến thức sâu sắc về định hướng ngầm và nhiều vấn đề về Hình học mà ngày nay đã rất phức tạp huống hồ khi đó cách đây gần ba nghìn năm trước!

Về Hình học ở Hy Lạp cổ đại còn có sự tích về Bài toán Delos hay bài toán gấp đôi thể tích hình lập phương: *Bằng thước và compa hãy dựng một hình lập phương có thể tích gấp đôi thể tích của hình lập phương cho trước*? Hơn hai nghìn năm sau, đến năm 1837 thì bài toán hình học này mới được nhà toán học Pháp *P. Waltzel* (1814 – 1848) *chứng minh bài toán không giải được bằng thước và compa.*

2°. Sự ra đời của khoa học hình học.

Hình học chỉ trở thành một khoa học sau khi người ta bắt đầu dùng những chứng minh luận lý của nó một cách có hệ thống.



Thalès

Người có công đầu trong việc tìm các kết quả hình học mới thông qua các lập luận (chứng minh) là *Thalès* (thế kỷ VI tr.CN). Ông là bậc *Đại hiền sĩ trong bảy nhà hiền triết nổi danh của thời kỳ Cổ Hy Lạp* (TH&TT, 1, 2019, tr.13–15).

Theo các nhà toán học và triết học Hy Lạp thì *Thalès* là người đầu tiên chứng minh định lý hình học. Thành tựu đặc biệt quan trọng và có vai trò cốt lõi trong Hình học là định lý mang tên Ông về "*Các đường thẳng song song và cát tuyến*". Theo nhà toán học *Proclus* (412–485) thì định lý Thalès được chứng minh vào thế kỷ VI tr.CN và bắt đầu từ thời điểm đó Hình học ở Hy Lạp phát triển rất nhanh.

Những nhà bác học tiếp theo *Thalès* như *Pythagoras* (570–500 tr.CN) và trường phái của ông, *Anasagor* (500–428 tr.CN) nghiên cứu phép cầu phương hình tròn và phép phối cảnh, *Democritos* (460–370 tr.CN) nghiên cứu các nguyên tử hình học, ... đã có công tổng kết, hệ thống hóa các thành tựu hình học đã đạt được *bằng phương pháp quy nạp, suy diễn từ kết quả này sang kết quả khác* để tạo thành một thể thống nhất.



PYTHAGORAS

Tất cả công việc này đã hoàn thành trong khoảng thời gian VI – IV tr.CN ở Cổ Hy Lạp. Và, khoa học Hình học được hình thành từ đó. Chính nhà hình học *Hipppocrates* (thế kỷ V tr.CN) là tác giả của bộ sách "*Các nguyên lý*" hình học đầu tiên (không lưu truyền được đến với hậu thế). Ở đây ông đã trình bày hình học một cách có hệ thống và đã tính được diện tích hình trăng khuyết.

Việc phát minh ra rằng *có những đoạn thẳng vô ước với nhau là một trong những phát minh sáng chói nhất của trường phái Pythagoras*. Phát minh tuyệt vời này đã ảnh hưởng sâu sắc đến toàn bộ nền toán học (và cả triết học nữa) từ xưa đến nay vì mãi đến nửa sau của thế kỷ XIX người ta mới xây dựng hoàn chỉnh lý thuyết số thực.

Có lẽ cạnh và đường chéo của hình vuông là những đường thẳng vô ước được phát minh đầu tiên và dưới đây là *cách chứng minh thời cổ ?* Cách chứng minh này được thực hiện theo phương pháp phản chứng.

Giả sử đường chéo d và cạnh a của hình vuông là khả ước. Khi đó tồn tại *đoạn thẳng phân ước chung* λ của chúng sao cho $d = p\lambda$, $a = q\lambda$, $p, q \in \mathbb{N}$. Từ đó: $\frac{d}{a} = \frac{p\lambda}{q\lambda} = \frac{p}{q}$, trong đó $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Nếu không như thế thì cần giản ước phân số này cho ƯCLN(p, q) để được phân số tối giản. Tiếp đó, theo định lý Pythagoras thì $d^2 = 2a^2$ và ta có:

$$\frac{d^2}{a^2} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \frac{2a^2}{a^2} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad (1).$$

Được quét bằng CamScanner

Vế phải có chứa thừa số 2 nên p^2 là số chẵn và p cũng phải là số chẵn (vì bình phương của số lẻ cũng là số lẻ). Bây giờ đặt $p = 2r$. Khi đó từ (1) suy ra: $4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2$ (2). Vì vế trái của (2) có chứa thừa số 2 nên từ (2) suy ra rằng q là số chẵn. Như vậy *cả p và q đều là số chẵn* do đó chia hết cho 2 và vì vậy $\frac{p}{q}$ không tối giản. Mâu thuẫn.

Cho đến tận bây giờ các nhà LSTH vẫn đang còn loay hoay tìm cách lý giải tại sao thời cổ đại (VI – V tr.CN) tại Hy Lạp cổ đại đã diễn ra bước nhảy vọt về tư duy đến vậy? Ngay *Platon* (429 – 348 tr.CN) nhà triết học vĩ đại nhất thời bấy giờ đã phải thốt lên: "*Khi chưa biết có đoạn thẳng vô ước thì ông cũng giống như một con vật không có trí khôn*" (A. I. Mackusevich ... *Số và Hình*, NXBGD, 1962, tr. 50-51). Và, trước cửa Học viện (Akademia) Platon người ta cho treo tấm biển cảnh báo: "*Người nào không biết Hình học xin miễn vào*". Có lẽ lúc đó Hình học đã trở thành ngôn ngữ của toán học nói chung ...

3°. Quá trình xây dựng hệ thống suy diễn trong Hình học

Mặc dù không để lại công trình nào về Hình học nhưng nhà triết học vĩ đại *Platon* và môn sinh ưu tú của ông là *Aristotenes* đã rất coi trọng tính hệ thống và xây dựng *cơ sở hình học bằng việc lập ra hệ thống các định nghĩa và các tiên đề đủ cho việc suy diễn luận lý để chứng minh các mệnh đề hình học.*



Euclid

Đỉnh cao của Hình học Cổ Hy Lạp là bộ sách "*Các nguyên lý*" hình học (CNLHH) được nhà toán học vĩ đại Cổ Hy Lạp *Euclid* (thế kỷ III tr.CN) biên soạn. Đây là tác phẩm cùng tên với tác phẩm của *Hippocrates* biên soạn vào thế kỷ V tr.CN đã bị thất lạc. Sau *Euclid* ở Hy Lạp đã xuất hiện một số nhà hình học vĩ đại như *Archimedes*, *Apollonius* và *Eratosthenes* (thế kỷ III tr.CN) đã làm phong phú thêm khoa Hình học bằng những phát minh mới.

Với tác phẩm của mình, *Euclid* là người đầu tiên đề ra vấn đề xây dựng "*Cơ sở Hình học*" dựa trên một hệ tiên đề. Bộ CNLHH trình bày 131 định nghĩa, 5 tiên đề và 5 định đề (gọi chung là 10 tiên đề). Từ đó, ông đã chứng minh một số lượng khổng lồ 465 định lý về hình học ...

Vậy tiên đề là gì? Tiên đề từ đâu mà có? Lần theo quan điểm và cách làm của *Euclid*, có thể phỏng chừng như sau:

Vấn đề là khi chứng minh một mệnh đề nào đó ta phải dựa trên một mệnh đề khác đã được chứng minh mà mệnh đề này lại là kết quả của sự suy luận từ một mệnh đề trước nữa đã chứng minh, ... Quá trình quy về các mệnh đề đã được chứng minh trước ấy không thể kéo dài vô hạn được. Vì thế có thể khẳng định rằng: *phải tồn tại những mệnh đề đầu tiên nào đó tự hiển nhiên không cần phải chứng minh.*

Những mệnh đề mà ta thừa nhận không cần chứng minh được gọi là các tiên đề. Tuy không cần chứng minh nhưng tính chân thật của tiên đề phải được *kiểm nghiệm trên thực tế.* Một hệ tiên đề cần thỏa mãn các yêu cầu: 1) *Tính phi mâu thuẫn*: nghĩa là từ hệ đó không thể suy ra được hai mệnh đề phủ định lẫn nhau; 2) *Tính độc lập*: nghĩa là mọi tiên đề của hệ không thể suy ra được từ các tiên đề của hệ đó; 3) *Tính đầy đủ*: có thể hiểu nôm na là hệ đó không thừa và cũng không thiếu, tức là từ đó có thể rút ra bất cứ định lý nào của lĩnh vực được xét.

Với hệ tiên đề Euclid trong bộ CNLHH, Hình học dần dần trở thành một khoa học suy diễn thực sự, tức là một khoa học mà trong đó phần lớn các sự kiện khoa học đều được xác lập bằng kết luận - chứng minh. Chỉ đến thế kỷ XIX việc nghiên cứu "*Cơ sở hình học*" mới được đẩy mạnh ở mức độ cao hơn. Chính lúc này người ta mới rõ rằng *Euclid* chưa đưa vào đủ các tiên đề cần thiết để

Được quét bằng CamScanner

xây dựng hình học như: không có tiên đề thứ tự, không có tiên đề liên tục, không có tiên đề đời hình, ... Nhưng dù sao thì phương pháp suy diễn do *Euclid* sáng tạo ra đã có vị trí hết sức vững vàng trong toán học và các nhà toán học vẫn tôn ông là bậc thầy ...

4°. Chuyện về tiên đề song song

Kể từ khi bộ CNLHH của *Euclid* ra đời, các nhà toán học thế giới nhiều thế kỷ qua đã bị cuốn hút bởi vấn đề về tiên đề đường thẳng song song (gọi tắt là tiên đề song song). Chuyện trở nên sôi động đến nỗi nhà bác học lỗi lạc Pháp là *D'Alembert* (1717–1783) đã phải gọi đó là "*chuyện om sòm trong hình học*". *Euclid* đã phát biểu tiên đề song song như sau:

"*Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng tạo thành hai góc trong cùng phía có tổng bé hơn hai góc vuông thì hai đường thẳng đó kéo dài về phía hai góc ấy đến một lúc nào đó sẽ phải cắt nhau*".

Bộ phận hình học chỉ dựa trên chín tiên đề đầu tiên không kể tiên đề song song được gọi là *Hình học tuyệt đối* (Danh từ "*hình học tuyệt đối*" do *J. Bolyai* dùng đầu tiên).

Vì sao các nhà toán học quan tâm nhiều đến tiên đề song song ?

1. Về hình thức, phát biểu của tiên đề song song (mà *Euclid* gọi là Định đề V) *vừa dài dòng vừa rắc rối* đã phần nào ảnh hưởng đến *tính tự hiển nhiên* của một tiên đề. Việc phát biểu tiên đề hơi lờ mờ cũng có cơ sở để cho rằng chính *Euclid* đã không thỏa mãn với tiên đề đó. Một điều nữa cũng rất quan trọng là nó *được áp dụng rất chậm*: mãi đến mệnh đề thứ hai mươi chín *Euclid* mới dùng đến nó và sau đó tuyệt nhiên không dùng đến nữa.

2. Đã có nhiều nhà toán học tìm cách thay tiên đề song song đó bởi một tiên đề song song khác *tương đương nhưng đơn giản hơn và trực giác hơn*. Một trong số đó là tiên đề do nhà địa chất và nhà toán học Scotland *J. Playfair* (1748 – 1819) đưa ra năm 1795 dưới dạng: *Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có không quá một đường thẳng nằm trong cùng một mặt phẳng với đường thẳng đã cho và không cắt đường thẳng ấy.*

Tính chất độc đáo của tiên đề Playfair là phát biểu đơn giản hơn nhưng vẫn khẳng định tính chất của đường thẳng trên toàn bộ chiều dài vô hạn về cả hai phía của nó ... mặc dù điều đó *không thể kiểm tra bằng thực nghiệm*.

3. Nếu tiên đề song song là hệ quả của các tiên đề khác thì chỉ cần loại nó ra khỏi hệ tiên đề và chứng minh nó như một định lý nhờ các tiên đề khác. Nhưng gần như các nhà toán học nhiều thế kỷ đã phí công một cách vô vọng bởi lẽ sớm hay muộn các chứng minh đều lộ ra vòng luẩn quẩn...

Vào cuối thế kỷ XVIII đầu thế kỷ XIX nhiều nhà toán học đã có ấn tượng rằng: việc chứng minh tiên đề song song cũng giống như việc "*chế tạo động cơ vĩnh cửu*" là việc làm vô vọng !

5°. Tính độc lập của tiên đề song song

Như vậy việc tìm kiếm chứng minh tiên đề song song đã thất bại! Nhưng, đã có ai trong các nhà toán học khẳng định rằng phép chứng minh đó không tồn tại? Câu trả lời *không tồn tại* chỉ được xác lập sau hai nghìn năm kể từ khi Hình học Euclid ra đời và phát minh này thuộc về nhà hình học thiên tài Nga là *Nikolai Ivanovich Lobachevsky* (1792–1856).



Lobachevsky

Lobachevsky đã chỉ ra rằng *toàn bộ vấn đề nằm ở tự thân tiên đề song song vì bản thân tiên đề đó độc lập với các tiên đề còn lại của Euclid* và chính *Lobachevsky* đã lưu lại cho thế hệ sau phương pháp chứng minh tính độc lập đó. Cụ thể, trong cuốn sách giáo khoa "*Cơ sở hình học*" (Mosc–1967) của Viện sĩ *A.V. Pogorelov* vấn đề này được trình bày như sau.

Được quét bằng CamScanner

Theo định nghĩa: "*Tiên đề A của lý thuyết nào đó với cấu trúc tiên đề T được gọi là độc lập nếu nó không thể thu được như một hệ quả từ các tiên đề khác của T*".

Và, sau đây là "*Phương pháp thông thường để chứng minh tính độc lập của một tiên đề nào đó là ở chỗ: xây dựng một mô hình R của hệ tiên đề T không có tiên đề A (tức là tiên đề A không thỏa mãn). Nếu một mô hình như vậy xây dựng được thì tiên đề A độc lập*" (tr.63).

Con đường mà *Lobachevsky* đến với phát minh rực rỡ trong hình học là như sau:

Đầu tiên ông lập hệ tiên đề gồm: chín tiên đề của Hình học tuyệt đối và các phủ định của tiên đề song song dạng: *Qua điểm A không nằm trên đường thẳng (d) có thể kẻ trong mặt phẳng xác định bởi A và (d) nhiều hơn hai đường thẳng không cắt (d).*

Công lao to lớn của *Lobachevsky* đối với Lịch sử hình học là ở chỗ ông đã đặt vấn đề này đầu tiên chứ không phải cố chứng minh tiên đề song song là định lý.

Tiếp đó, ông bắt đầu rút ra các hệ quả khác nhau từ hệ tiên đề này ... Đầu tiên ông thu được các định lý trong hình học Euclid mà không sử dụng tiên đề song song, tức là các định lý của *Hình học tuyệt đối* đều được bảo toàn. Tiếp đó ông chứng minh hàng chục định lý mà không gặp một mâu thuẫn logic nào. Khi đó trong đầu ông đã lóe lên một *ước đoán thiên tài là: khi thay tiên đề song song bởi các phủ định của nó và vẫn giữ nguyên chín tiên đề đầu thì người ta thu được một Hình học mới*! Và Hình học mới đó được Ông đặt tên là: *Hình học tưởng tượng. Đó là năm 1826 ...*

Liên quan đến thời khắc lịch sử này, trong cuốn "*Cơ sở hình học*" của mình viện sĩ *A.Pogorelov* viết: "*Thoạt nhìn, kết luận của Lobachevsky có thể thiếu cơ sở. Thật vậy, làm sao đảm bảo được rằng khi phát triển hệ thống của mình tiếp theo đến cùng thì không đi đến mâu thuẫn. Tuy nhiên điều băn khoăn này cũng ngang như đối với Hình học Euclid. Do đó về mặt phi mâu thuẫn logic thì cả hai hệ thống hình học này là ở trạng thái như nhau ... Hơn thế nữa, như những nghiên cứu của các nhà hình học sau Lobachevsky đã chứng minh rằng giữa các hình học này tồn tại một liên hệ gắn bó và tính phi mâu thuẫn logic của một hình học là phụ thuộc vào tính phi mâu thuẫn của hình học kia. Như vậy hai dạng hình học Euclid và Lobachevsky là bình đẳng*" (tr.18).

6°. Hình học Lobachevsky ra đời

Ở trên ta đã thấy rằng *tiên đề song song là độc lập với các tiên đề còn lại của hình học Euclid. Từ đó suy rằng khi thay tiên đề này bởi các phủ định của nó ta cũng thu được hệ thống không mâu thuẫn về mặt logic. Hình học được xây dựng trên hệ thống này được gọi là Hình học Lobachevsky. Đó là Hình học phi Euclid đầu tiên trong LSTH thế giới.*

Ngày 11.2.1826 tại trường Đại học tổng hợp Kadan của nước Nga, trên diễn đàn của Hội nghị khoa học của khoa Toán-Lý, *GS. Lobachevsky* đã trình bày bản báo cáo nhan đề: "*Bản trình bày tóm tắt Cơ sở hình học với phép chứng minh chặt chẽ định lý về đường song song*". Về sau, người ta lấy ngày này - ngày 11.2.1826 - làm ngày ra đời của Hình học Lobachevsky (Nguyễn Thủy Thanh, *Lịch sử toán học giản yếu*, NXBGD, 2012, tr. 144).

Giới toán học chưa thừa nhận ngay thành tựu của *Lobachevsky* bởi họ chưa chuẩn bị được tư tưởng rằng có tồn tại một hình học khác với hình học *Euclid*. *N. Lobachevsky* không e ngại những điều mới lạ và khác thường mà phát minh của mình mang lại và đã dũng cảm bảo vệ chân lý mà mình sáng tạo ra.

Ba năm sau, vào năm 1829 *Lobachevsky* đã cho xuất bản một loạt sách và các bài báo trình bày một cách đầy đủ môn Hình học Lobachevsky. Về sau người ta còn gọi là *Hình học hypecbolic*. Các tác phẩm này được truyền bá rộng rãi ở nước Nga và được xuất bản bằng tiếng Đức năm 1840.

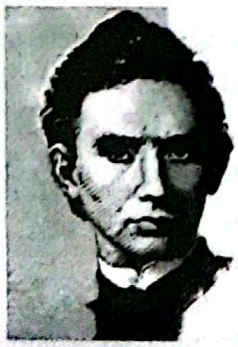
Cả báo cáo năm 1826 lẫn các tác phẩm xuất bản năm 1829 sau đó của *Lobachevsky* hầu như không được ai thời đó hiểu thấu và do đó ông bị công kích gay gắt. Từ đó cũng thấy rõ Hình học

Được quét bằng CamScanner

Lobachevsky đã góp phần xóa bỏ quan niệm về hệ tiên đề Euclid như một hệ thống bất di bất dịch.

Sự thừa nhận phát minh của *Lobachevsky* được bắt đầu sau năm 1868 kể từ công trình của nhà toán học Italia *E. Beltrami* (1835–1900): *"Thử lý giải hình học phi Euclid"*. Rồi tiếp đó là công trình của các nhà toán học *F. Klein* (1821–1895) (với mô hình hình tròn đơn vị), của nhà toán học Pháp *H. Poincare* (1854–1912) (với hai mô hình nửa mặt phẳng trên và hình tròn đơn vị). Mỗi nhà toán học đó, bằng những mô hình cụ thể đã chứng minh được điều mà bản thân *Lobachevsky* chưa làm được là Hình học Lobachevsky cũng phi mâu thuẫn như Hình học Euclid phi mâu thuẫn. Có được điều đó là nhờ các nhà toán học này đã xây dựng được những "*mô hình*" đơn giản của hình học Lobachevsky thỏa mãn tất cả các tiên đề Euclid trừ ra tiên đề song song.

Mười hai năm sau ngày *N.I. Lobachevsky* đi vào cõi vĩnh hằng, năm 1856 hình học của ông mới được công nhận và truyền bá rộng rãi. Nó được thừa nhận và truyền bá rộng rãi nhân kỷ niệm 100 năm ngày sinh của ông. Đồng thời với đó, năm 1895 người ta đã thành lập *giải thưởng Quốc tế mang tên Giải thưởng Lobachevsky*. Năm 1896 tại Kadan một tượng đài tưởng niệm ông đã được dựng lên ... Và công trình của ông được ca ngợi khắp mọi nơi.



Bolyai

Ủng hộ và chia sẻ quan điểm về phát minh hình học Lobachevsky còn có nhà toán học người Hungari là *J. Bolyai* (1802–1860). Ba năm sau khi các công trình của *Lobachevsky* được xuất bản năm 1829, *độc lập và không hay biết gì về các công trình nghiên cứu của Lobachevsky*, năm 1832 *Bolyai* đã công bố công trình của mình dưới dạng một phụ lục của một cuốn sách của cha mình là *F. Bolyai*. Phụ lục có nhan đề: *"Phụ lục trình bày lý thuyết đúng đắn tuyệt đối về không gian"* cũng về Hình học Lobachevsky. Người ta cho rằng ngẫm nghĩ từng chữ và từng ký hiệu của ông trong phụ lục thì đó là một công trình toán học. Từ đó cũng xuất hiện tên gọi Hình học Lobachevsky – Bolyai. *Bolyai* mất năm 1860 trước khi Hình học phi Euclid Lobachevsky – Bolyai được thừa nhận tám năm. Người ta đã dựng tượng bản thân để tưởng niệm ông tại vùng đô thị du lịch Clyj – Napoca ...

Đoạn kết

Suốt mấy nghìn năm qua, hình học Euclid luôn luôn là một mẫu mực của một môn học được tiên đề hóa, trong đó tiên đề song song đã thu hút sự quan tâm của bao thế hệ nhà toán học. Tiên đề đó có thể phát biểu dưới dạng ngắn gọn tương đương sau đây:

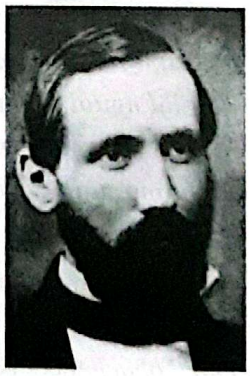
"*Qua một điểm cho trước không nằm trên đường thẳng cho trước tồn tại một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng ấy*".

Hình học Lobachevsky được xây dựng trên hệ tiên đề gồm chín tiên đề của Hình học tuyệt đối cùng với cái phủ định của tiên đề này là

"*Qua một điểm cho trước không nằm trên đường thẳng cho trước tồn tại ít nhất hai đường thẳng song song với đường thẳng ấy*".

Như vậy số đường thẳng song song đi qua một điểm cho trước ở ngoài đường thẳng đã cho là vô số (≥ 2).

Nhưng còn một khả năng nữa là: *qua một điểm cho trước nằm ngoài một đường thẳng cho trước không kẻ được một đường thẳng nào song song với đường thẳng đã cho, tức là bất kỳ hai đường thẳng nào trong mặt phẳng cũng cắt nhau.*



Riemann

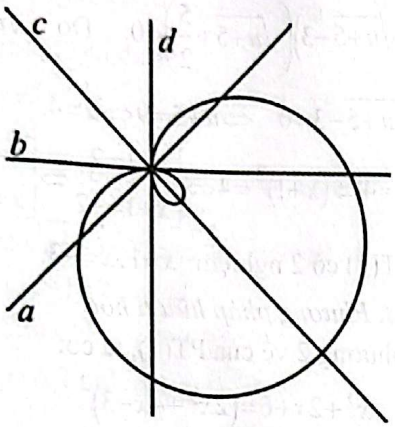
Với cái phủ định này người ta thu được một hình học phi Euclid thứ hai gọi là *Hình học Riemann* được trình bày đầu tiên trong báo cáo "*Về những giả thiết trong Cơ sở hình học*" (1854) của nhà toán học lỗi lạc Đức *B. Riemann* (1826 – 1866).

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 121

PROBLEM. *The curve in the diagram is defined by the equation* $\left(x^2+y^2-2x\right)^2=2\left(x^2+y^2\right)$. *Which of the lines* a,b,c,d *is the* y*-axis?*



Solution. All the powers of the y variable in the equation are even. Hence if the point $(x;y)$ is on the curve so is $(x;-y)$. Thefore the curve is symmetric through the x-axis. Then the y-axis is the line a.

***Remark*:** This problem is based on a problem in the Kangaroo Math Contest.

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

curve : *đường cong*

diagram : *sơ đồ, biểu đồ, hình*

symmetric : *đối xứng*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 119

BÀI TOÁN. *Mỗi học sinh của lớp* 12A *là bạn của đúng* 7 *học sinh lớp* 12B, *và mỗi học sinh lớp* 12B *là bạn của đúng* 6 *học sinh lớp* 12A. *Biết rằng tổng số học sinh của hai lớp là* 65, *hãy tính số học sinh của mỗi lớp.*

Lời giải. Giả sử lớp 12A có m học sinh và lớp 12B có n học sinh. Ta biểu diễn mỗi học sinh bằng một điểm, và nối một điểm của lớp 12A với một điểm của lớp 12B bằng một đoạn thẳng nếu hai học sinh đó là bạn bè.

Đếm theo các điểm nối từ lớp 12A, ta có số đoạn thẳng là $7m$.

Đếm theo các điểm nối từ lớp 12B, ta có số đoạn thẳng là $6n$.Vậy ta có phương trình: $7m = 6n$ (1).

Mặt khác, tổng số học sinh là: $m + n = 65$ (2).

Từ (1) và (2), ta giải được: $m = 30$ và $n = 35$.

Chú thích. Bài toán này được đề xuất bởi thầy Nguyễn Mạnh Quyền, trường THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, Đắk Nông.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn: *Đoàn Xuân Thái*, 8A3, THCS Nguyễn Đăng Đạo, phường Kinh Bắc, **Bắc Ninh**, *Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**, *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** và bạn *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo** đã có bài dịch tốt.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

SAI LẦM... (*Tiếp trang 47*)

Khi $a=b=c=1$ thì $P=12$, khi $a=3,b=c=0$ thì $P=45$. Do vậy giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức P lần lượt là 12 và 45.

Lời giải thật hoàn hảo và đơn giản đến mức bất ngờ! ***Theo bạn, lời giải trên đã thật sự chính xác chưa, bạn có phân vân gì không? Nếu là bạn, bạn sẽ giải thế nào?***

TRẦN QUỐC LUẬT
(*GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh*)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 100. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+2x+6}=2x^2+4x-3 \quad (1).$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Lê Khiết Năm học 2025-2026)

Lời giải: Do $x^2+2x+6=(x+1)^2+5\geq 5$ nên tập xác định của phương trình là $\mathbb{R}$.

Cách 1. *Phương pháp đặt ẩn phụ một biến*

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+6}$ với $t\geq\sqrt{5} \Rightarrow t^2=x^2+2x+6$

$\Rightarrow x^2+2x=t^2-6$. PT(1) trở thành:

$$t=2(t^2-6)-3 \Leftrightarrow 2t^2-t-15=0$$

$$\Leftrightarrow t=3, t=-\frac{5}{2} \text{ (không thỏa mãn).}$$

Với $t=3\Rightarrow\sqrt{x^2+2x+6}=3$

$\Leftrightarrow x^2+2x+6=9\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x=1, x=-3.$

Vậy PT(1) có 2 nghiệm $x=1, x=-3$.

Cách 2. *Phương pháp đặt ẩn phụ đưa về phương trình dạng căn thức cơ bản*

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+5}=2(x+1)^2-5 \quad (2).$$

Đặt $u=(x+1)^2$, $u\geq 0$. PT(2) trở thành:

$$\sqrt{u+5}=2u-5 \quad (3).$$

Bình phương hai vế của PT(3) ta được:

$$u+5=4u^2-20u+25\Leftrightarrow 4u^2-21u+20=0.$$

Giải ta được $u=4, u=\frac{5}{4}$. Thử lại chỉ có $u=4$ thỏa mãn PT(3). Ta có:

$$u=4\Rightarrow(x+1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=2\\x+1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$$

Vậy PT(1) có 2 nghiệm $x=1, x=-3$.

Cách 3. *Phương pháp đưa về phương trình tích*

$$\text{PT(1)}\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+5}=2(x+1)^2-5 \quad (2).$$

Đặt $u=(x+1)^2$, $u\geq 0$. PT(2) trở thành:

$$\sqrt{u+5}=2u-5 \quad (3).$$

PT(3) tương đương với

$$\sqrt{u+5}=2(u+5)-15$$

$$\Leftrightarrow 2\left[(u+5)-2\sqrt{u+5}.\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right]=15+\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{u+5}-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{121}{16}\Leftrightarrow\left(\sqrt{u+5}-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{u+5}-3\right)\left(\sqrt{u+5}+\frac{5}{2}\right)=0. \quad \text{Do} \quad \sqrt{u+5}+\frac{5}{2}>0$$

nên $\sqrt{u+5}-3=0 \Leftrightarrow u+5=9\Leftrightarrow u=4$.

Với $u=4\Rightarrow(x+1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=2\\x+1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Vậy PT(1) có 2 nghiệm: $x=1, x=-3$.

Cách 4. *Phương pháp hữu tỉ hóa*

Bình phương 2 vế của PT(1), ta có:

$$x^2+2x+6=(2x^2+4x-3)^2$$

$\Leftrightarrow 4x^4+16x^3+3x^2-26x+3=0$

$\Leftrightarrow 4x^3(x-1)+20x^2(x-1)+23x(x-1)-3(x-1)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)(4x^3+20x^2+23x-3)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left[4x^2(x+3)+8x(x+3)-(x+3)\right]=0$

$\Leftrightarrow(x-1)(x+3)(4x^2+8x-1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x+3=0\\4x^2+8x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1, x=-3, x=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Thử lại chỉ có $x=1, x=-3$ thỏa mãn PT(1).

Vậy PT(1) có 2 nghiệm $x=1, x=-3$.

Cách 5. *Phương pháp dùng biểu thức liên hợp*

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+6}-3=2x^2+4x-6$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x^2+2x+6}+3}=2(x^2+2x-3)$$

$$\Leftrightarrow(x^2+2x-3)\left(2-\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+6}+3}\right)=0.$$

Do $\sqrt{x^2+2x+6}+3>1$ nên $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+6}+3}<1$

$$\Rightarrow 2-\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+6}+3}>0.$$

Do đó: $x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x=1, x=-3$.

Vậy PT(1) có 2 nghiệm $x=1, x=-3$.

Được quét bằng CamScanner

Cách 6. Phương pháp hệ phương trình

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+5}=2(x+1)^2-5$ (2).

Đặt $a=x+1$. PT(2) trở thành: $\sqrt{a^2+5}=2a^2-5$.

Đặt $b=\sqrt{a^2+5}$, $b\geq\sqrt{5}$. Suy ra:

$$b^2=a^2+5\Rightarrow b^2-5=a^2.$$

Ta có HPT: $\begin{cases}b=2a^2-5\\b^2-5=a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+5=2a^2 & (3)\\b^2-5=a^2 & (4)\end{cases}$.

Thay (4) vào (3)ta được:

$$b+5=2\left(b^2-5\right)\Leftrightarrow 2b^2-b-15=0$$

$$\Leftrightarrow b=3, b=-\frac{5}{2}\text{ (không thỏa mãn).}$$

Với $b=3\Rightarrow\sqrt{a^2+5}=3\Leftrightarrow a^2+5=9\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$.

Với $a=2\Rightarrow x+1=2\Rightarrow x=1$.

Với $a=-2\Rightarrow x+1=-2\Rightarrow x=-3$.

Vậy PT(1) có 2 nghiệm $x=1, x=-3$.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Nhận xét. Bạn *Trần Gia Phú*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** đóng góp 5 cách giải, bạn *Vũ Đức Duy*, CTy TNHH Thuế và Tư vấn PwC Việt Nam đóng góp 2 cách giải và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đóng góp 3 cách giải, tương tự như những cách giải trên của bạn *Trần Văn Hạnh*, người giới thiệu bài toán. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 102 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/11/2025.

BÀI TOÁN 102. *Cho ba số thực dương a, b, c và $\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha,\beta\geq 0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^\alpha}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\alpha}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\alpha}{a^\beta+b^\beta}\geq\frac{3(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)}{2(a^\beta+b^\beta+c^\beta)}.$$

NGÔ VĂN THÁI

(Hưng Yên)

****

PHƯƠNG PHÁP . . . *(Tiếp theo trang 5)*

6. Cho đa giác có n ($n\geq 4$) cạnh. Gọi tổng số đường chéo của đa giác đó là T_n. Chứng minh rằng $T_n=\frac{n(n-3)}{2}$.

7. Cho $a, b\geq 0$ và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $\frac{a^n+b^n}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$.

8. Cho $n\in\mathbb{N}^*$, $a>-1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)^n\geq 1+na\text{ (BĐT Bernoulli).}$$

9. Chứng minh rằng:

a) $2^{n+1}\geq n+2$, với $n\in\mathbb{N}$;

b) $n^n>(n+1)^{n-1}$, với $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$;

c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$, với $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

10. Giả sử năm đầu tiên, một người gửi vào ngân hàng A (đồng) với lãi suất r %/năm. Hết năm đầu tiên, người đó không rút tiền ra và gửi thêm A (đồng) nữa. Hết năm thứ hai, người đó cũng không rút tiền ra và lại gửi thêm A (đồng) nữa. Cứ tiếp tục như vậy cho những năm sau. Chứng minh số tiền cả vốn lẫn lãi mà người đó có được sau n (năm) là $T_n=\frac{A(100+r)}{r}\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right]$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi.

11. Một người gửi số tiền A (đồng) vào ngân hàng. Biểu lãi suất của ngân hàng như sau: Chia mỗi năm thành m kì hạn và lãi suất r % /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kì hạn, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Chứng minh số tiền nhận được (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sau n (năm) gửi là $T_n=A\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{m\cdot n}$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi.

12. Kí hiệu p_k là số nguyên tố thứ k. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n phương trình

$$2nx^2+9n\left(p_{n+1}+p_{n+2}\right)x+1945n^3=2001x^3$$

luôn có nghiệm dương không nhỏ hơn n.

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 107 (Belarus 1999). *Cho hai dãy số thực* $x_1, x_2, \ldots$ *và* $y_1, y_2, \ldots$ *được xác định như sau:*

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2},$$

và $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$ *với mọi* $n \geq 1$.

Chứng minh rằng $2 < x_n y_n < 3$ *với mọi* $n > 1$.

Lời giải. Cách 1. Đặt $z_n = \dfrac{1}{y_n}$ và chú ý rằng quan hệ đệ quy đối với y_n tương đương với

$$z_{n+1} = z_n + \sqrt{1+z_n^2}.$$

Cũng chú ý rằng $z_2 = \sqrt{3} = x_1$. Từ x_i và z_i cùng thỏa mãn quan hệ đệ quy nên $z_n = x_{n-1}$ với mọi $n > 1$. Vì vậy: $x_n y_n = \dfrac{x_n}{z_n} = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$.

Chú ý rằng: $\sqrt{1+x_{n-1}^2} > x_{n-1}$. Vì vậy: $x_n > 2x_{n-1}$ và $x_n y_n > 2$.

Do dãy (x_n) là dãy tăng với $n > 1$ nên ta có:

$x_{n-1}^2 \geq x_1^2 = 3 > \dfrac{1}{3}$, điều này kéo theo :

$$2x_{n-1} > \sqrt{1+x_{n-1}^2}.$$

Vì vậy $3x_{n-1} > x_n$, hay $x_n y_n < 3$.

Cách 2. Đặt $x_n = \cot\theta_n$ với $0 < \theta_n < 90^0$, kéo theo: $x_{n+1} = \cot\theta_n + \sqrt{1+\cot^2\theta_n} = \dfrac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n} + \dfrac{1}{\sin\theta_n}$

$$= \frac{1+\cos\theta_n}{\sin\theta_n} = \frac{2\cos^2\frac{\theta_n}{2}}{2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_n}{2}} = \cot\frac{\theta_n}{2}.$$

Từ giả thiết $x_1 = \sqrt{3}$, suy ra:

$$\cot\theta_1 = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_1 = 30^0.$$

Suy ra: $\theta_n = \dfrac{30^0}{2^{n-1}}$.

Tính toán tương tự ta được:

$$y_n = \tan(2\theta_n) = \frac{2\tan\theta_n}{1-\tan^2\theta_n}.$$

Điều này kéo theo:

$$x_n y_n = \cot\theta_n . \frac{2\tan\theta_n}{1-\tan^2\theta_n} = \frac{2}{1-\tan^2\theta_n}.$$

Với $n > 1$ thì $0 < \theta_n < 30^0$, do đó $0 < \tan^2\theta_n < 1$.

Suy ra: $x_n y_n > 2$.

Với $n > 1$ thì $\theta_n < 30^0$, và ta cũng có:

$$\tan^2\theta_n < \frac{1}{3}.$$

Vì vậy $x_n y_n < 3$.

Nhận xét. Từ dạng đóng đối với x_n và y_n trong cách giải thứ hai ta có mối quan hệ $y_n = \dfrac{1}{x_{n-1}}$ trong cách giải thứ nhất. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã có lời giải đúng cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/11/2025.

BÀI TOÁN 109. *Xác định tất cả các số có ba chữ số, chia hết cho 11, sao cho thương số trong phép chia số đó cho 11 bằng tổng các bình phương các chữ số của số ấy.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

****

THÔNG BÁO

Bạn đọc có thể đặt mua các ấn phẩm của Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: *Toán học và Tuổi trẻ* (C168); *Toán Tuổi thơ 1* (C169); *Toán Tuổi thơ 2* (C169.1); *Văn học và Tuổi trẻ* (C668); *Văn Tuổi thơ* (C668.1).

****

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: XÁC SUẤT ĐỂ 2 ROBOT GẶP NHAU?

(Đề đăng trên TH&TT số 576, tháng 6 năm 2025)

Phân tích. Lời giải của bạn *Minh* chưa đúng. Con rôbốt thứ nhất đi từ A đến B và con thứ hai đi từ B đến A. Trong lời giải của bạn *Minh*, bạn chỉ xét con rôbốt thứ nhất đi từ A đến một trong các điểm $M(i;8-i)$ mà không đi tiếp đến B, tương tự con rôbốt thứ hai đi từ B đến một trong các điểm $M(i;8-i)$ mà không đi tiếp đến A.

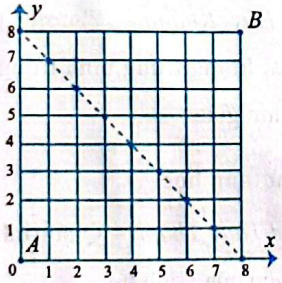
Lời giải đúng. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A(0;0), B(8;8)$. Mỗi đỉnh của hình vuông đơn vị đều có tọa độ dạng $(x;y)$ với:

$$x, y \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}.$$

Con rôbốt thứ nhất có C_{16}^8 cách đi từ A đến B.

Con rôbốt thứ hai có C_{16}^8 cách đi từ B đến A.

Do đó $n(\Omega)=\left(C_{16}^8\right)^2$.



Hai con rôbốt gặp nhau tại điểm $M(i;j)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} i,j \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\} \\ i+j=(8-i)+(8-j) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i,j \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\} \\ i+j=8 \end{cases}.$$

Chứng tỏ hai con rôbốt chỉ có thể gặp nhau tại một trong các điểm

$$M(i;8-i), i \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}.$$

Xét biến cố X: "Hai con rôbốt gặp nhau". Ta thấy rằng, với mỗi $i \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$ thì

- Con rôbốt thứ nhất có $\left(C_8^i\right)^2$ cách đi từ A đến điểm $M(i;8-i)$, rồi đến B.
- Con rôbốt thứ hai có $\left(C_8^i\right)^2$ cách đi từ B đến điểm $M(i;8-i)$, rồi đến A.

Suy ra $n(X)=\sum_{i=0}^{8}\left(C_8^i\right)^4$. Vậy xác suất cần tính là:

$$P(X)=\frac{n(X)}{n(\Omega)}=\frac{\sum_{i=0}^{8}\left(C_8^i\right)^4}{\left(C_{16}^8\right)^2}=\frac{44916498}{165636900}=\frac{75617}{278850}.$$

Nhận xét. Có một bạn phát hiện được sai lầm nhưng phần tính bị nhầm nên kết quả tìm ra chưa đúng.

KIHIVI

THẬT HOÀN HẢO VÀ NGẮN GỌN!



Một học sinh nêu lời giải cho bài toán bất đẳng thức như ở dưới đây.

Bài toán. *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=a^3+b^3+c^3+2(a^2+b^2+c^2)+3abc.$$

Lời giải. Với $a+b+c=3$, ta có:

$$a^2+b^2+c^2=9-2(ab+bc+ca);$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc+3[9-3(ab+bc+ca)].$$

Do vậy: $P=6abc-13(ab+bc+ca)+45$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\ge 0$, khi đó $1\le a\le 3$. Xét hàm số bậc nhất theo biến a sau trên đoạn $[1;3]$:

$$f(a)=(6bc-13b-13c)a+(45-13bc).$$

Chú ý rằng khi $a=1$ thì $1\ge b\ge c\ge 0$ và $b+c=2$ nên $b=c=1$, do vậy $f(1)=12$. Mặt khác khi $a=3$ thì $b\ge c\ge 0$ và $b+c=0$ nên $b=c=0$, do đó $f(3)=45$.

Theo tính chất của hàm số bậc nhất ta có:

$$12=\min\{f(1);f(3)\}\le f(a)\le\max\{f(1);f(3)\}=45, \forall a\in[1;3].$$

(Xem tiếp trang 43)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 580 (10.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập* : TS. TRẦN HỮU NAM** ***Thư kí Tòa soạn*: CN. VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Hoàng Ngọc Hùng – Phương pháp quy nạp toán học.

6 Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Bắc Ninh, năm học 2025 – 2026.

9 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Hưng Yên, năm học 2025 – 2026.

10 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Tiến Tiến – Phát triển năng lực cho học sinh thông qua việc khai thác, phát triển một bài toán bất đẳng thức.

17 **Bạn đọc tìm tòi**
Bùi Ngọc Giao – Lời giải cho một bài toán bất đẳng thức.

19 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/580, ..., T12/580, L1/580, L2/580.

21 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/576, ..., T12/576, L1/576, L2/576

30 **Phương pháp giải toán**
Phạm Duy Khánh – Phương pháp dồn biến theo đại lượng trung bình trong bất đẳng thức trong tam giác.

37 **Lịch sử toán học**
Nguyễn Thủy Thanh – Quá trình hình thành và phát triển của Hình học.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 121 – Bài dịch số 119.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 100 – Đề bài toán 102.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 107. Đề bài toán 109.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

TRƯỜNG THPT GIA VIỄN B...

(Tiếp theo bìa 4)

Những kết quả đó góp phần xây dựng nhà trường trở thành trường THPT đầu tiên trên địa bàn huyện Gia Viễn đạt chuẩn quốc gia (năm 2013), tiếp đó được công nhận lại vào các năm 2018 và 2025.



Đại biểu dự Hội thảo chuyên đề môn Toán cấp tỉnh năm học 2013–2014

Không chỉ chú trọng đến chất lượng giáo dục, nhà trường còn tổ chức các sân chơi nhằm phát huy năng lực, sở trường, khơi dậy ý chí, đam mê và khát vọng cống hiến của học sinh; đồng thời quan tâm đến các hoạt động như khuyến học, khuyến tài, chữ thập đỏ, ... Cán bộ, giáo viên, nhân viên và học sinh nhà trường tích cực, thường xuyên ủng hộ, tham gia đóng góp xây dựng Quỹ khuyến học, khuyến tài huyện Gia Viễn, Quỹ hoạt động Chữ thập đỏ, ủng hộ đồng bào bị thiệt hại do bão lũ, thiên tai, hỗ trợ học sinh có hoàn cảnh khó khăn, ... Cán bộ, giáo viên, nhân viên nhà trường tích cực tham gia các hoạt động thiện nguyện. Giai đoạn 2015-2025, nhà trường có 161 lượt cán bộ, giáo viên, nhân viên tham gia hiến máu tình nguyện. Với đóng góp của các cá nhân và tập thể cho công tác chữ thập đỏ và khuyến học, khuyến tài, nhà trường 5 lần được Chủ tịch UBND huyện Gia Viễn tặng Giấy khen, 3 lần được Ban Chỉ đạo vận động hiến máu tình nguyện tỉnh Ninh Bình tặng Giấy khen, 2 lần được Hội Khuyến học tỉnh Ninh Bình tặng Giấy khen, có 10 lượt giáo viên được tặng Giấy khen của Chủ tịch UBND huyện Gia Viễn, Ban Chỉ đạo vận động hiến máu tình nguyện tỉnh Ninh Bình.

Trong hành trình 60 năm xây dựng và trưởng thành, sự quan tâm sâu sắc của các cấp ủy Đảng, chính quyền và phụ huynh học sinh luôn là nguồn động viên to lớn, khích lệ các thế hệ thầy và trò nhà trường không ngừng cố gắng, nỗ lực vươn lên và đạt được những thành tích đáng trân trọng. Nhà trường nhiều lần được tặng danh hiệu Tập thể lao động xuất sắc, Cờ thi đua của UBND tỉnh; được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba; nhiều lần được Thủ tướng Chính phủ, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, Chủ tịch UBND tỉnh Ninh Bình tặng Bằng khen; được Ban Chấp hành Trung ương Hội Chữ thập đỏ Việt Nam tặng Bằng khen; được Giám đốc Sở GD&ĐT, Chủ tịch UBND huyện Gia Viễn tặng Giấy khen các loại. Trong giai đoạn 2015-2025, có 96 lượt cá nhân được tặng danh hiệu "Chiến sĩ thi đua cơ sở", có 11 cá nhân được Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, Chủ tịch UBND tỉnh tặng Bằng khen và nhiều cá nhân được tặng Giấy khen của Giám đốc Sở GD&ĐT, Chủ tịch UBND huyện Gia Viễn. Nhiều thế hệ học sinh ra trường đã trưởng thành trên mọi miền đất nước và ở nước ngoài, cũng có những cựu học sinh đã anh dũng hy sinh và trở thành liệt sỹ, đó là những điểm nhấn tô thắm thêm lá cờ truyền thống vẻ vang của nhà trường.

Nhân dịp kỷ niệm 60 năm thành lập, Trường THPT Gia Viễn B xin được gửi lời tri ân sâu sắc đến các thế hệ thầy cô giáo, cán bộ, nhân viên, học sinh và phụ huynh đã đồng hành, đóng góp công sức vào sự phát triển của nhà trường. Sự cống hiến thầm lặng, bền bỉ của quý vị là nền tảng vững chắc để nhà trường vươn tới những tầm cao mới. Kỷ niệm 60 năm thành lập là một dấu mốc quan trọng để mỗi thầy cô, học sinh và cựu học sinh cùng nhau tự hào, ôn lại truyền thống, đồng thời tiếp thêm động lực cho những bước đi vững chắc trong tương lai.

Trường THPT Gia Viễn B - 60 năm một chặng đường, một niềm tự hào!
Tiếp nối truyền thống - Kiến tạo tương lai!

Được quét bằng CamScanner

TRƯỜNG THPT GIA VIỄN B

60 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN



NGƯT–ThS. *Trần Văn Kiên*
Bí thư Chi bộ, Hiệu trưởng nhà trường



Hội đồng giáo dục nhà trường năm học 2025–20

Trường THPT Gia Viễn B, Ninh Bình được thành lập năm 1965 với tên gọi ban đầu là Trường cấp III B Gia Viễn tại xã Gia Thắng (nay thuộc xã Đại Hoàng), huyện Gia Viễn. Năm 1969 trường chuyển về đóng trên địa bàn xã Gia Lập (nay thuộc xã Gia Vân) cho đến ngày nay.

Những ngày đầu mới thành lập, trường chỉ có 8 lớp (4 lớp 8, 2 lớp 9 và 2 lớp 10) với khoảng 400 học sinh, được bố trí học nhờ tại nhà dân, các lớp học được dựng bằng tranh tre, nứa lá, tường đắp bằng vách đất. Trải qua 60 năm xây dựng và phát triển, đến nay trường đã có 30 lớp học với 1298 học sinh, cơ sở vật chất ngày càng khang trang, hiện đại, đáp ứng nhu cầu dạy và học trong thời kỳ đổi mới giáo dục. Hội đồng sư phạm nhà trường có 3 cán bộ quản lý: Hiệu trưởng: NGƯT-ThS Trần Văn Kiên, các Phó Hiệu trưởng: ThS Nguyễn Tiên Tiến, ThS Phạm Quốc Khánh; 65 giáo viên (18 Thạc sĩ, 37 giáo viên được công nhận giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh) và 8 nhân viên được biên chế thành 6 tổ: Toán-Tin, Vật lí-Hoá học, Sinh-Công nghệ-Giáo dục thể chất, Ngữ văn-Lịch sử, Địa lí-Ngoại ngữ-Giáo dục công dân và tổ Văn phòng. Đội ngũ giáo viên nhà trường không ngừng học tập nâng cao trình độ chuyên môn, nghiệp vụ, thường xuyên đổi mới phương pháp và ứng dụng công nghệ thông tin, chuyển đổi số trong dạy học. Nhiều cán bộ, giáo viên của nhà trường là cộng tác viên chuyên môn của Sở GD&ĐT như cô Hoàng Thị Thủy, cô Nguyễn Thị Mỹ Hạnh, cô Đặng Thị Huệ, thầy Kiều Quốc Phương, thầy Nguyễn Mạnh Cường, thầy Phạm Văn Trịnh, thầy Nguyễn Tiên Tiến, ... và nhiều thầy, cô có sáng kiến được Chủ tịch UBND tỉnh, Giám đốc Sở GD&ĐT công nhận. Chi bộ nhà trường trực thuộc Đảng bộ xã Gia Vân, với 5 tổ đảng gồm 49 đảng viên. Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh nhà trường có 31 chi đoàn, gồm 1 chi đoàn giáo viên và 30 chi đoàn học sinh với 1323 đoàn viên, thanh niên.

Trong suốt chặng đường 60 năm xây dựng và phát triển, nhà trường luôn hoàn thành tốt, hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ chính trị. Chất lượng giáo dục không ngừng được củng cố và nâng cao, đáp ứng các tiêu chí, tiêu chuẩn của trường học đạt chuẩn quốc gia. Kết quả thi tốt nghiệp THPT trong nhiều năm gần đây luôn đạt 100%, tỉ lệ học sinh trúng tuyển vào các trường đại học đạt trên 75%. Học sinh nhà trường tham gia các kỳ thi, cuộc thi, hội thi, ... do Sở GD&ĐT, Bộ GD&ĐT, ... tổ chức đạt nhiều kết quả cao. Trong nhiều năm học nhà trường được Sở GD&ĐT Ninh Bình tặng Cờ trong phong trào bồi dưỡng học sinh giỏi, Hội thi thể dục thể thao cấp tỉnh, Hội thao quốc phòng và an ninh, Hội thi Giai điệu tuổi hồng dành cho học sinh phổ thông, Hội khoẻ Phù Đổng, ...

(Xem tiếp bìa 3)

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT10M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2025
Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner