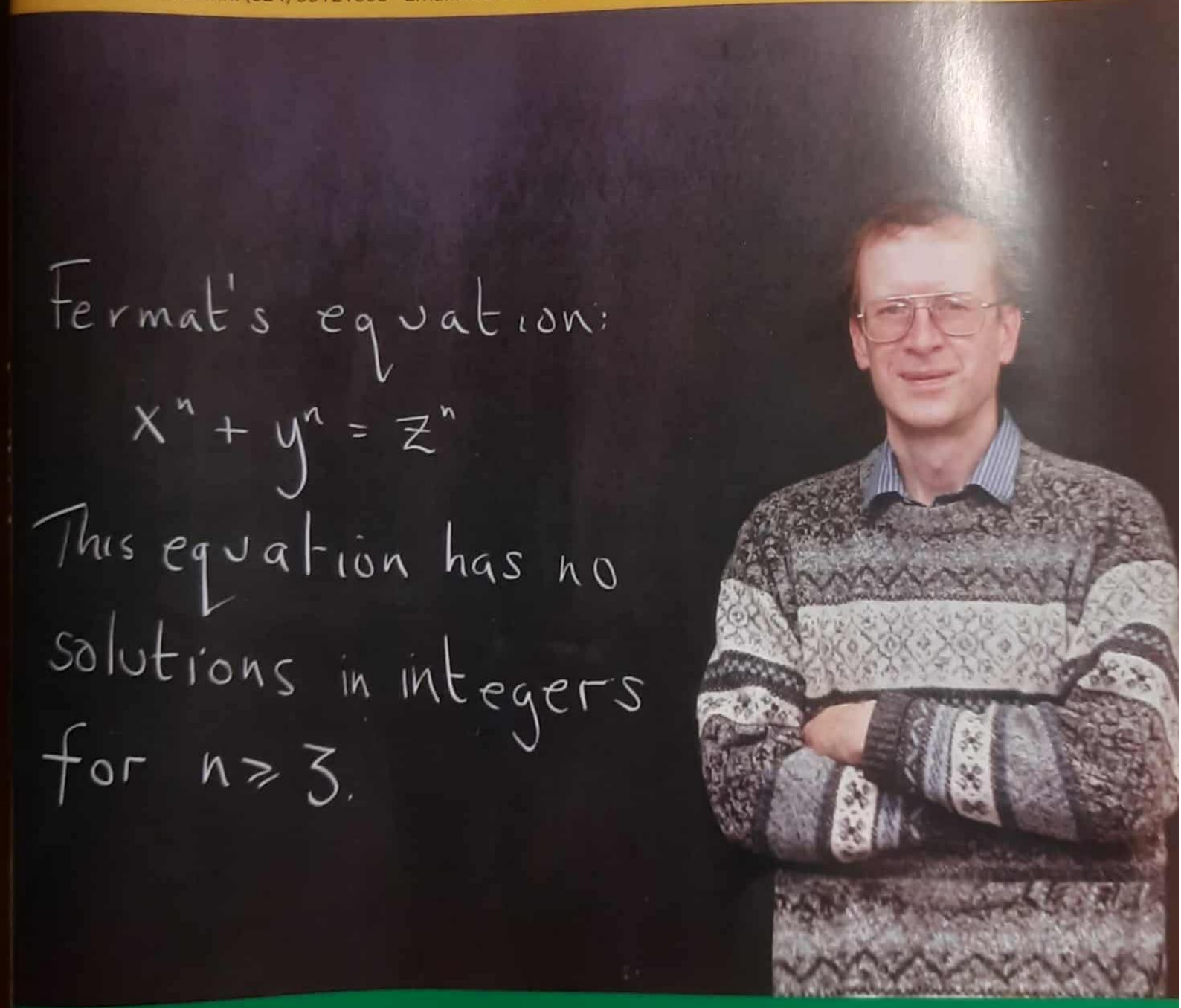
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 579
Tháng 9 - 2025
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Andrew Wiles bên cạnh định lý cuối cùng của Fermat

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM RA MẮT BẠN ĐỌC BỘ SÁCH GIÁO DỤC TÀI CHÍNH

Ngày 18 tháng 8 năm 2025, tại Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) phối hợp cùng Công ty Sách – Nhà sách Tân Việt tổ chức Chương trình giới thiệu bộ sách Giáo dục tài chính cho học sinh từ lớp 1 đến lớp 12.

Bộ sách Giáo dục tài chính do ThS. Lê Thị Thủy Sen biên soạn, lần đầu tiên xây dựng hệ thống kiến thức tài chính học đường toàn diện, phù hợp Chương trình giáo dục phổ thông 2018, kết hợp giữa lí thuyết tài chính – ngân hàng và các giá trị văn hóa, đạo đức, kĩ năng sống.



Bộ sách Giáo dục tài chính cho học sinh từ lớp 1 đến lớp 12

Bộ sách gồm ba phần được sắp xếp khoa học, đảm bảo tính liên môn, sư phạm để thích hợp cho cả việc dạy và học ở các cấp học với tiêu chí: dễ nhớ – dễ hiểu – dễ tiếp thu – dễ áp dụng và thú vị.

Đặc biệt, tác giả đã sử dụng nhiều ca dao, tục ngữ, thành ngữ, truyện ngắn, câu chuyện đời thường, tích xưa, truyền thống dân tộc và các biểu tượng văn hóa quen thuộc để làm cầu nối đưa kiến thức tài chính đến gần với học sinh. Các nội dung được thiết kế theo hướng tích hợp giữa kiến thức tài chính – ngân hàng với giáo dục đạo đức, kĩ năng sống, giáo dục công dân.

Bộ sách cũng là bước cụ thể triển khai "Chiến lược tài chính toàn diện quốc gia đến năm 2025, định hướng 2030" do Thủ tướng Chính phủ phê duyệt, trong đó chỉ rõ: Kiến thức tài chính cần được giáo dục cho học sinh phổ thông, lồng ghép cùng các môn học, các cấp học trong chương trình để tăng cường sự hiểu biết và phát triển năng lực, tư duy tài chính cho thế hệ trẻ.

Phát biểu tại Chương trình, ông Nguyễn Tiến Thanh – Chủ tịch Hội đồng thành viên, Tổng Giám đốc nhấn mạnh: *Bộ sách Giáo dục tài chính không chỉ là một sản phẩm xuất bản, mà còn là tâm huyết, là niềm tin của NXBGDVN gửi đến thế hệ trẻ Việt Nam.* Ông hi vọng những bài học tài chính giản dị sẽ giúp các em dần hình thành tư duy tài chính vững vàng, biết quản lí tiền một cách thông minh, nhân văn và có trách nhiệm. Bộ sách sẽ là tài liệu học tập bổ ích, là hành trang quý giá, người bạn đồng hành thân thiết của các em trên đường trưởng thành.

Nhân dịp này, các diễn giả cũng đã cùng nhau trao đổi về sự cần thiết của giáo dục tài chính cho học sinh phổ thông, hình thức truyền đạt kiến thức, sự cập nhật kiến thức về tài chính trong tương lai...



Các diễn giả tọa đàm tại Chương trình

Hi vọng bộ sách Giáo dục tài chính sẽ giúp các em học sinh từng bước xây dựng thói quen tài chính lành mạnh, hình thành bản lĩnh tiêu dùng thông minh và thái độ tích cực với giá trị lao động, từ đó phát triển toàn diện về năng lực, phẩm chất và trở thành công dân có trách nhiệm trong nền kinh tế hiện đại và xã hội phát triển.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN VỀ BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG LIÊN QUAN ĐẾN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

LÝ VĂN CÔNG
(Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng)

Trong chương trình toán lớp 9, việc đánh giá giá trị của biểu thức $A=f(x_1,x_2)$ khi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ (với $a\neq 0$) là một bài toán thường gặp. Nếu $f(x_1,x_2)$ là một biểu thức đối xứng, nghĩa là $f(x_1,x_2)=f(x_2,x_1)$, thì bài toán trở nên đơn giản hơn nhờ định lý Viète. Cụ thể, ta có thể biểu diễn A thông qua tổng và tích của hai nghiệm:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Khi đó, giá trị của A có thể được tính trực tiếp mà không cần giải phương trình để tìm x_1,x_2.

Tuy nhiên, khi biểu thức $A=f(x_1,x_2)$ không đối xứng, các phương pháp truyền thống dựa trên tổng và tích hai nghiệm không còn hiệu quả. Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số phương pháp nhằm xử lý các biểu thức không đối xứng theo hai nghiệm, giúp đơn giản hóa việc tính toán mà không cần tìm nghiệm cụ thể của phương trình.

Phương pháp 1. Biến đổi biểu thức qua tổng, hiệu hai nghiệm

Một trong những kỹ thuật cơ bản và hiệu quả khi giải bài toán tính giá trị biểu thức liên quan đến hai nghiệm của phương trình bậc hai là đưa biểu thức đó về dạng phụ thuộc vào tổng và hiệu hai nghiệm. Với phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1,x_2, ta có thể sử dụng các hệ thức sau:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a},$$

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

Việc biểu diễn lại biểu thức cần tính theo x_1+x_2 và x_1-x_2 giúp áp dụng định lý Viète và công thức hiệu hai nghiệm để rút gọn biểu thức một cách hiệu quả, đặc biệt khi không cần tìm nghiệm cụ thể.

Thí dụ 1. *Cho phương trình $x^2-8x+3=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2(x_1>x_2)$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức:*

a) $P=4x_1+5x_2-7$; b) $Q=5x_1-8x_2+4$.

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=8,\ x_1x_2=3$;

ii) $x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{64-12}=2\sqrt{13}$

(do $x_1>x_2$). Do đó, ta có:

a) $P=\frac{9}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}(x_1-x_2)-7=29-\sqrt{13}$.

b) $Q=-\frac{3}{2}(x_1+x_2)+\frac{13}{2}(x_1-x_2)+4=13\sqrt{13}-8$.

Lời bình. Làm thế nào chúng ta tìm ra số $\frac{9}{2}$, $-\frac{1}{2}$ trong phân tích ở trên? Sau đây là phương pháp đồng nhất hệ số để tìm ra. Ta cần tìm m, n sao cho: $4x_1+5x_2=m(x_1+x_2)+n(x_1-x_2)$

$$=(m+n)x_1+(m-n)x_2.$$

Đồng nhất hệ số của x_1,x_2 ở hai vế ta được:

$$\begin{cases}m+n=4\\ m-n=5\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{9}{2},\ n=-\frac{1}{2}.$$

Tượng tự, ta cũng tìm ra số $-\frac{3}{2},\frac{13}{2}$ trong câu b).

Thí dụ 2. *Cho phương trình $x^2-7x+2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ (x_1>x_2)$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức*

$$A=\sqrt{2x_1+5x_2+6}.$$

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=7,\ x_1x_2=2$.

ii) $x_1-x_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{41}$

(do $x_1>x_2$). Khi đó, ta có:

$$A=\sqrt{2x_1+5x_2+6}=\sqrt{\frac{7}{2}(x_1+x_2)-\frac{3}{2}(x_1-x_2)+6}=\sqrt{\frac{61}{2}-\frac{3\sqrt{41}}{2}}.$$

Phương pháp 2. Thêm bớt nghiệm để làm xuất hiện mối liên hệ Viète

Khi biểu thức cần tính chỉ chứa một nghiệm của phương trình bậc hai (chẳng hạn x_1), ta khó có thể áp dụng trực tiếp định lý Viète vì thiếu thông tin về nghiệm còn lại. Trong những trường hợp này, một chiến lược hiệu quả là "thêm và bớt" nghiệm còn lại (chẳng hạn x_2) vào biểu thức, nhằm tạo ra các tổ hợp quen thuộc như x_1+x_2, x_1x_2, hoặc x_1-x_2. Nhờ đó, ta có thể khai thác được các hệ thức Viète: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$ để biểu diễn lại biểu thức ban đầu một cách đơn giản và thuận tiện hơn.

Thí dụ 3. *Cho phương trình $x^2-9x+1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 $(x_1<x_2)$. Tính giá trị của biểu thức:*

$$A=3x_1+5.$$

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=9, x_1x_2=1$

ii) $x_1-x_2=-\sqrt{(x_1-x_2)^2}=-\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=-\sqrt{77}$

(do $x_1<x_2$). Khi đó, ta có:

$$A=3x_1+5=3x_1+x_2-x_2+5$$
$$=(x_1+x_2)+2x_1-x_2+5=2x_1-x_2+14$$
$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{3}{2}(x_1-x_2)+14=\frac{37}{2}-\frac{3\sqrt{77}}{2}.$$

Lời bình. Trong biểu thức A chỉ chứa một nghiệm (x_1) của phương trình, do đó để tính được giá trị của A mà không phải tìm nghiệm trực tiếp thì ta cần làm xuất hiện thêm nghiệm còn lại (x_2) bằng cách thêm x_2 và bớt x_2.

Thí dụ 4. *Cho phương trình $x^2-4x-9=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 $(x_1<x_2)$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức:*

$$A=\sqrt{x_1+20}.$$

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=4, x_1x_2=-9$

ii) $x_1-x_2=-\sqrt{(x_1-x_2)^2}=-\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=-2\sqrt{13}$

(do $x_1<x_2$). Khi đó, ta có:

$$A=\sqrt{x_1+20}=\sqrt{x_1+5\times4}=\sqrt{x_1+5(x_1+x_2)}$$
$$=\sqrt{6x_1+5x_2}=\sqrt{\frac{11}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1-x_2)}=\sqrt{22-\sqrt{13}}.$$

Lời bình. Trong biểu thức A chỉ chứa một nghiệm (x_1) của phương trình, do đó để tính được giá trị của A mà không phải tìm nghiệm trực tiếp thì ta cần làm xuất hiện thêm nghiệm còn lại (x_2) bằng cách phân tích $20=5.4$ sau đó thay 4 bởi x_1+x_2.

Lưu ý. Trong biểu thức A ở trên chúng ta không thực hiện việc thêm x_2 và bớt x_2. Vì nếu làm như vậy, chúng ta lại thu được biểu thức chỉ chứa nghiệm x_2.

Thí dụ 5. *Cho phương trình $x^2-4x+2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 $(x_1>x_2)$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức:*

$$A=\sqrt{x_1+6}+\sqrt{x_2+7}.$$

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=4, x_1x_2=2.$

ii) $x_1-x_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{2}$

(do $x_1>x_2$). Do đó, ta có:

$$A=\sqrt{x_1+6}+\sqrt{x_2+7}=\sqrt{x_1+\frac{3}{2}.4}+\sqrt{x_1+\frac{7}{4}.4}$$
$$=\sqrt{x_1+\frac{3}{2}(x_1+x_2)}+\sqrt{x_1+\frac{7}{4}(x_1+x_2)}$$
$$=\sqrt{\frac{5}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2}+\sqrt{\frac{11}{4}x_1+\frac{7}{4}x_2}$$
$$=\sqrt{2(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1-x_2)}+\sqrt{\frac{9}{4}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1-x_2)}$$
$$=\sqrt{8+\sqrt{2}}+\sqrt{9+\sqrt{2}}.$$

Lời bình. Để tính A chúng ta cũng có thể bình phương hai vế rồi giải theo phương pháp 1, xong phải rút gọn căn thức mới ra kết quả như trên. Do

đó, việc lựa chọn phương pháp để tính cũng rất cần thiết đối với bài toán này.

Phương pháp 3. Sử dụng trung bình cộng của các biểu thức tương đương

Trong một số trường hợp, biểu thức cần tính chỉ phụ thuộc vào một nghiệm của phương trình (chẳng hạn x_1), nên việc áp dụng trực tiếp định lý Viète không mang lại hiệu quả rõ rệt. Để khắc phục, ta có thể khai thác mối quan hệ giữa hai nghiệm bằng cách xây dựng một biểu thức tương đương khác phụ thuộc vào nghiệm còn lại (chẳng hạn x_2), rồi lấy trung bình cộng của hai biểu thức này. Khi đó, biểu thức thu được thường sẽ chứa các đại lượng đối xứng hoặc các tổ hợp đơn giản giữa x_1 và x_2, giúp dễ dàng biểu diễn thông qua tổng và hiệu hai nghiệm, từ đó tính toán hiệu quả hơn mà không cần giải phương trình.

Thí dụ 6. *Cho phương trình $x^2-10x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1>x_2)$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức: $A=3x_1+5$.*

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=10, x_1x_2=5$.

ii) $x_1-x_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{5}$ (do $x_1>x_2$).

Do đó, ta có: $A=3x_1+5=3(10-x_2)+5=35-3x_2$.

Suy ra: $A=\dfrac{A+A}{2}=\dfrac{3x_1+5+35-3x_2}{2}=\dfrac{40+3(x_1-x_2)}{2}$

$=\dfrac{40+12\sqrt{5}}{2}=20+6\sqrt{5}$.

Thí dụ 7. *Cho phương trình $x^2-6x+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1>x_2)$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{x_1+2}$.*

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=6, x_1x_2=1$.

ii) $x_1-x_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{2}$ (do $x_1>x_2$).

Do đó, ta có: $A=\sqrt{x_1+2}=\sqrt{6-x_2+2}=\sqrt{8-x_2}$.

Suy ra: $A^2=\dfrac{A^2+A^2}{2}=\dfrac{x_1+2+8-x_2}{2}$

$=\dfrac{10+(x_1-x_2)}{2}=\dfrac{10+4\sqrt{2}}{2}=5+2\sqrt{2}$.

Vì vậy, ta có: $A=\sqrt{A^2}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

Phương pháp 4. Thêm bớt một phương trình bậc hai

Phương pháp này dựa trên việc "*sử dụng lại chính phương trình bậc hai đã cho*" để xây dựng hoặc thay thế các biểu thức chứa x_1 hoặc x_2. Từ phương trình gốc $ax^2+bx+c=0$ ta có thể suy ra các hệ thức như $ax_1^2+bx_1+c=0$, hoặc biến đổi lại để biểu diễn các biểu thức bậc hai, bậc bốn, ... chứa x_1, x_2 thông qua phương trình gốc.

Kỹ thuật này thường được sử dụng khi biểu thức cần tính có chứa x_1^2, x_1^4, hoặc các tổ hợp như $ax_1^2+bx_1$, vốn có thể thay thế trực tiếp bằng $-c$, hoặc các tổ hợp tương tự. Đây là cách khai thác ngược từ điều kiện bài toán, giúp giảm thiểu việc tính toán phức tạp và tránh phải tìm nghiệm cụ thể.

Thí dụ 8 (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm 2025-Nghệ An). *Cho phương trình $x^2-3x+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{|7x_2-3x_1^2|}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2}$.*

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=3, x_1x_2=1$.

ii) $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{5}$.

iii) $x_1^2-3x_1+1=0$.

Khi đó, ta có:

$P=\dfrac{|7x_2-3x_1^2|}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2}=\dfrac{|7x_2-3(x_1^2-3x_1+1)-9x_1+3|}{(x_1+x_2)^2-x_1x_2}$

$=\dfrac{|7x_2-9x_1+3|}{9-1}=\dfrac{|7x_2-9x_1+x_1+x_2|}{8}$

$=\dfrac{8|x_1-x_2|}{8}=\dfrac{8\sqrt{5}}{8}=\sqrt{5}$.

Thí dụ 9. *Cho phương trình $x^2-5x+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{2x_1^2-x_1+5}+x_2+1$.*

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=5, x_1x_2=1\Rightarrow x_1, x_2>0$.

ii) $x_1^2-5x_1+1=0$.

Khi đó, ta có: $A=\sqrt{2x_1^2-x_1+5}+x_2+1$

$=\sqrt{x_1^2-5x_1+1+x_1^2+4x_1+4}+x_2+1$

$=\sqrt{(x_1+2)^2}+x_2+1=|x_1+2|+x_2+1$

$=x_1+x_2+3=8$ (do $x_1, x_2>0$).

Thí dụ 10. *Cho phương trình $2x^2-7x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1>x_2)$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức:*

$$A=\sqrt{3x_1^2+x_1+15}-|x_2-2021|.$$

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=\frac{7}{2}, x_1x_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow x_1>0>x_2$.

ii) $2x_1^2-7x_1-1=0$.

Khi đó, ta có: $A=\sqrt{3x_1^2+x_1+15}-|x_2-2021|$

$=\sqrt{2x_1^2-7x_1-1+x_1^2+8x_1+16}-|x_2-2021|$

$=\sqrt{x_1^2+8x_1+16}-|x_2-2021|=|x_1+4|-|x_2-2021|$

$=x_1+4+x_2-2021=x_1+x_2-2017=\frac{7}{2}-2017=\frac{4027}{2}$.

Thí dụ 11. *Cho phương trình $x^2-4x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức:*

$$A=\sqrt{2x_1^4+8x_1+9}-7x_1.$$

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=4, x_1x_2=1\Rightarrow x_1, x_2>0$.

ii) $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{3}$.

iii) $x_1^2-4x_1+1=0$.

Khi đó, ta có: $A=\sqrt{2x_1^4+8x_1+9}-7x_1$

$=\sqrt{2(x_1^2-4x_1+1+4x_1-1)^2+8x_1+9}-7x_1$

$=\sqrt{2(4x_1-1)^2+8x_1+9}-7x_1=\sqrt{32x_1^2-8x_1+11}-7x_1$

$=\sqrt{7(x_1^2-4x_1+1)+25x_1^2+20x_1+4}-7x_1$

$=\sqrt{(5x_1+2)^2}-7x_1=|5x_1+2|-7x_1$

$=5x_1+2-7x_1=2-2x_1=2-2(4-x_2)=2x_2-6$.

Suy ra $A=\frac{A+A}{2}=\frac{2-2x_1+2x_2-6}{2}=(x_2-x_1)-2$.

i) Nếu $x_1>x_2$ thì $x_1-x_2=2\sqrt{3}\Rightarrow A=-2\sqrt{3}-2$.

ii) Nếu $x_1<x_2$ thì $x_1-x_2=-2\sqrt{3}\Rightarrow A=2\sqrt{3}-2$.

Thí dụ 12 (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT- Lào Cai). *Cho phương trình $x^2-5x+2=0$ có hai nghiệm là x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức:*

$$A=\sqrt{16x_1^2+8x_1x_2+5x_2-2}+3x_2.$$

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=5, x_1x_2=2\Rightarrow x_1, x_2>0$.

ii) $x_1^2-5x_1+2=0$ và $x_2^2-5x_2+2=0$.

Khi đó, ta có: $A=\sqrt{16x_1^2+8x_1x_2+5x_2-2}+3x_2$

$=\sqrt{16x_1^2+8x_1x_2-(x_2^2-5x_2+2)+x_2^2}+3x_2$

$=\sqrt{16x_1^2+8x_1x_2+x_2^2}+3x_2=\sqrt{(4x_1+x_2)^2}+3x_2$

$=|4x_1+x_2|+3x_2=4(x_1+x_2)=20$.

Thí dụ 13 (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT- Hà Nam). Cho phương trình $x^2-7x+2=0$.

a) *Chứng minh phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.*

b) *Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T=\sqrt{x_1^2+2x_1+1}+\sqrt{2x_2^2-x_2+11}$.*

Lời giải. a) Ta có $\Delta=(-7)^2-4\times1\times2=41>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Vì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên, ta có:

i) $x_1+x_2=7, x_1x_2=2\Rightarrow x_1, x_2>0$.

ii) $x_1^2-7x_1+2=0$ và $x_2^2-7x_2+2=0$.

Khi đó, ta có: $T=\sqrt{x_1^2+2x_1+1}+\sqrt{2x_2^2-x_2+11}$

$=\sqrt{(x_1+1)^2}+\sqrt{x_2^2-7x_2+2+x_2^2+6x_2+9}$

$=|x_1+1|+\sqrt{x_2^2+6x_2+9}=x_1+1+\sqrt{(x_2+3)^2}$

$=x_1+1+|x_2+3|=(x_1+x_2)+4=11.$

Thí dụ 14. (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT-Hải Dương). *Cho phương trình $2x^2-10x+3=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 với $x_1>x_2$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức:*

$$T=\frac{\sqrt{24x_1-5}+2x_2+2026}{25-2x_1-8x_2}.$$

Lời giải. Do phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 nên ta có:

i) $x_1+x_2=5, x_1x_2=\frac{3}{2}\Rightarrow x_1,x_2>0.$

ii) $x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{19}.$

iii) $2x_1^2-10x_1+3=0$ và $2x_2^2-10x_2+3=0.$

Do đó, ta có:

$$T=\frac{\sqrt{24x_1-5}+2x_2+2026}{25-2x_1-8x_2}=\frac{\sqrt{20x_1+4x_1-5}+2x_2+2026}{25-2x_1-8x_2}$$

$$=\frac{\sqrt{-2(2x_1^2-10x_1+3)+4x_1^2+4x_1+1}+2x_2+2026}{25-2x_1-8x_2}$$

$$=\frac{\sqrt{4x_1^2+4x_1+1}+2x_2+2026}{25-2x_1-8x_2}=\frac{|2x_1+1|+2x_2+2026}{25-2x_1-8x_2}$$

$$=\frac{2(x_1+x_2)+2027}{25-2x_1-8x_2}=\frac{2037}{25-5(x_1+x_2)+3(x_1-x_2)}$$

$$=\frac{2037}{25-25+3\sqrt{19}}=\frac{2037}{3\sqrt{19}}.$$

Lời bình. Chúng ta cũng có thể tính T trong thí dụ 14 bằng cách sử dụng kết hợp phương pháp 1, 2 như sau: $T=\frac{\sqrt{24x_1-5}+2x_2+2026}{25-2x_1-8x_2}$

$$=\frac{\sqrt{24x_1-(x_1+x_2)}+2x_2+x_1-x_1+2026}{25-2x_1-8x_2}$$

$$=\frac{\sqrt{23x_1-x_2}+(x_1+x_2)+x_2-x_1+2026}{25-2x_1-8x_2}$$

$$=\frac{\sqrt{11(x_1+x_2)+12(x_1-x_2)}-\sqrt{19}+2031}{25-5(x_1+x_2)+3(x_1-x_2)}$$

$$=\frac{\sqrt{55+12\sqrt{19}}-\sqrt{19}+2031}{25-25+3\sqrt{19}}=\frac{\sqrt{(6+\sqrt{19})^2}-\sqrt{19}+2031}{25-25+3\sqrt{19}}$$

$$=\frac{6+\sqrt{19}-\sqrt{19}+2031}{3\sqrt{19}}=\frac{2037}{3\sqrt{19}}.$$

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho phương trình $5x^2-7x+1=0$. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$M=\left(x_1-\frac{7}{5}\right)x_1+\frac{1}{25x_2^2}+x_2^2.$$

Bài 2. Cho phương trình $x^2-5x+3=0$. Gọi $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $T=\sqrt{2x_1^2+x_1+12}+3x_2+2025.$

Bài 3. Cho phương trình $x^2-12x+4=0$. Gọi $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $T=\frac{|x_1|+2|x_2|}{2x_1^2+25x_2-4}.$

Bài 4. Cho phương trình $x^2-7x+5=0$. Gọi $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $T=\sqrt{2x_1+1}+\sqrt{3x_1+2}.$

Bài 5. Cho phương trình $x^2-8x+2=0$. Gọi $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $T=\frac{\sqrt{10x_1-1}+3x_2+2025}{8-4x_1+2x_2}.$

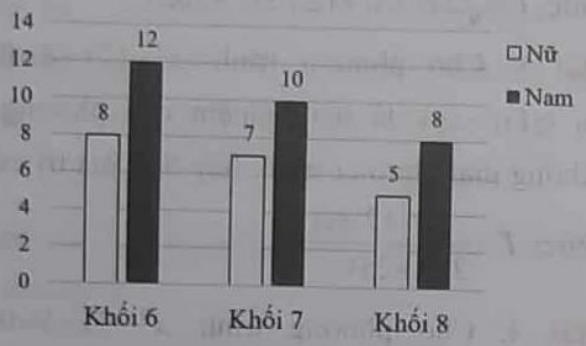
Bài 6. Cho phương trình $x^2-7x+5=0$. Gọi $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $T=\frac{x_1+2}{x_1+3}+\frac{x_2+3}{x_2+2}.$

Bài 7. Cho phương trình $x^2-7x+5=0$. Gọi $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $T=\frac{x_1+2}{x_2+3}+\frac{x_2+3}{x_1+2}.$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ NỘI

Năm học 2025-2026

Câu I. 1) *Giải bơi của một trường Trung học cơ sở ban đầu chỉ có học sinh khối 6, 7 và 8 đăng kí tham gia với số liệu học sinh được cho như trong biểu đồ cột kép ở hình dưới. Ngay trước khi giải đấu diễn ra, có thêm 6 học sinh nam khối 9 và một số học sinh nữ khối 9 đăng kí bổ sung. Biết rằng tỉ lệ học sinh nữ so với tổng số học sinh đăng kí tham gia giải trước và sau khi các học sinh khối 9 đăng kí bổ sung là không thay đổi. Tìm số học sinh nữ khối 9 đã đăng kí thi đấu.*



2) *Cho a,b,c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a+b+c\neq 0$ và $ab+bc+ca=0$. Tính giá trị của biểu thức* $P=\dfrac{1}{a^2-bc}+\dfrac{1}{b^2-ca}+\dfrac{1}{c^2-ab}$.

HD giải. 1) Từ giả thiết ta xác định được tỉ lệ học sinh nữ trong tổng số học sinh khối 6, 7, 8 trước thi đấu là: $\dfrac{2}{5}$. Gọi số học sinh nữ tham gia giải bơi lội là $x\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$. Tỉ lệ học sinh nữ của toàn giải đấu là $\dfrac{20+x}{50+6+x}$. Ta có phương trình $\dfrac{20+x}{56+x}=\dfrac{2}{5}$.

Giải PT này ta tìm được $x=4$ (thỏa mãn).

2) $P=\dfrac{1}{a^2+ab+ac}+\dfrac{1}{b^2+bc+ba}+\dfrac{1}{c^2+ca+cb}$.

$=\dfrac{1}{a(a+b+c)}+\dfrac{1}{b(a+b+c)}+\dfrac{1}{c(a+b+c)}$

$=\dfrac{ab+bc+ca}{abc(a+b+c)}=0.$

Câu II. 1) *Cho a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $3a^2-bc, 3b^2-ca, 3c^2-ab$ đều chia hết cho 4. Chứng minh abc chia hết cho 8.*

2) *Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn*

$$2(2x-y)(y-x)^2=15x-7y+7.$$

Lời giải. 1) Giả sử trong ba số a,b,c có một số lẻ, mà các số $3a^2-bc, 3b^2-ca, 3c^2-ab \vdots 4$ nên cả ba số a,b,c cùng lẻ $\Rightarrow a^2,b^2,c^2$ đều chia 4 dư 1.

Vì $3a^2-bc, 3b^2-ca, 3c^2-ab \vdots 4$ nên ab,bc,ca đều chia 4 dư 3 $\Rightarrow b(c-a)\vdots 4\Rightarrow c-a\vdots 4\Rightarrow ca$ chia 4 dư 1 (mâu thuẫn). Do đó $a,b,c\vdots 2\Rightarrow abc\vdots 8$.

2) Đặt $\begin{cases}2x-y=a\\ y-x=b\end{cases}$ thì $15x-7y=8a+b$. Ta được:

$$2ab^2=8a+b+7\Leftrightarrow 2a\left(b^2-4\right)=b+7\ (*).$$

Nhận xét: $b^2=4$ không thỏa mãn (*) nên $(b+7)\vdots 2\left(b^2-4\right)$. Suy ra $(b+7)\vdots(b+2)\Rightarrow 5\vdots(b+2)$.

Do đó: $b+2\in\{\pm 1;\pm 5\}\Rightarrow b\in\{-7;-3;-1;3\}$. Thử lại:

- Với $b=-7\Rightarrow a=0\Rightarrow\begin{cases}x=-7\\ y=-14\end{cases}$.
- Với $b=-3\Rightarrow a=\dfrac{2}{5}$ (loại)
- Với $b=-1\Rightarrow a=-1\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}$.
- Với $b=3\Rightarrow a=1\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=7\end{cases}$.

Vậy $(x,y)\in\{(-7;-14);(-2;-3);(4;7)\}$.

Câu III. 1) *Với các số thực a,b,c thỏa mãn*

$$a^2b+b^2c+c^2a+16=ab^2+bc^2+ca^2.$$

a) *Chứng minh* $(a-b)(b-c)(c-a)=16$.

b) *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=a^2+b^2+c^2.$$

2) *Tìm tất cả các số hữu tỉ dương m và n sao cho các biểu thức $m+n+mn;\ \frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{mn}$ và $\frac{m}{n}$ đều nhận giá trị là số nguyên.*

Lời giải. 1) a) Ta có:

$$ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a=16$$
$$\Leftrightarrow ab(-a+b)-c^2(a-b)+c(a-b)(a+b)=16.$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(-ab-c^2+ac+bc)=16.$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=16.$$

b) Đặt $\begin{cases}a-b=x\\b-c=y\\c-a=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\xyz=16\end{cases}$. Vì $x+y+z=0$ và $x,y,z\neq 0$ nên trong ba số đó tồn tại một số dương, giả sử $x>0$. Ta có: $16=xyz\le x\cdot\frac{(y+z)^2}{4}$

$$=x\cdot\frac{(-x)^2}{4}=\frac{x^3}{4}\Rightarrow x^3\ge 64\Rightarrow x\ge 4.$$

Vì thế: $P=\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(a+b)^2}{2}+c^2\ge\frac{(a-b)^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ge 8.$

$P=8$ khi $(a;b;c)=(2;-2;0)$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 8.

2) Đặt $\begin{cases}\frac{m}{n}=k,k\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow m=kn\\n=\frac{a}{b};a,b\in\mathbb{Z}^+,(a,b)=1\end{cases}$. Ta có:

- $m+n+mn=\frac{ka}{b}+\frac{a}{b}+\frac{ka^2}{b^2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow kab+ab+ka^2\vdots b^2$

$\Rightarrow k\vdots b\Rightarrow k=bt,t\in\mathbb{Z}^+$ (do $(a,b)=1$).

- $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{mn}=\frac{b}{ka}+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{ka^2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow ab+abk+b^2\vdots ka^2$

$\Rightarrow b^2\vdots a\Rightarrow a=1$ (do $(a,b)=1$).

Từ đó: $\begin{cases}b^2t+b+bt\vdots b^2\\b+b^2t+b^2\vdots bt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}bt+1+t\vdots b\\1+bt+b\vdots t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t+1\vdots b\\b+1\vdots t\end{cases}$

$\Rightarrow b+1\ge t\ge b-1$.

TH1: $t=b-1\Rightarrow 2\vdots b-1\Rightarrow b\in\{2;3\}$.

- Với $b=2\Rightarrow t=1\Rightarrow k=2\Rightarrow n=\frac{1}{2};m=1.$

- Với $b=3\Rightarrow t=2\Rightarrow k=6\Rightarrow n=\frac{1}{3};m=2.$

TH2: $t=b\Rightarrow b=t=1\Rightarrow n=m=1.$

TH3: $t=b+1\Rightarrow 2\vdots b\Rightarrow b\in\{1;2\}$.

- Với $b=1\Rightarrow t=2\Rightarrow k=2\Rightarrow n=1;m=2.$

- Với $b=2\Rightarrow t=3\Rightarrow k=6\Rightarrow n=\frac{1}{2};m=3.$

Vậy $(m;n)\in\left\{(1;1);(2;1);\left(1;\frac{1}{2}\right);\left(3;\frac{1}{2}\right);\left(2;\frac{1}{3}\right)\right\}$.

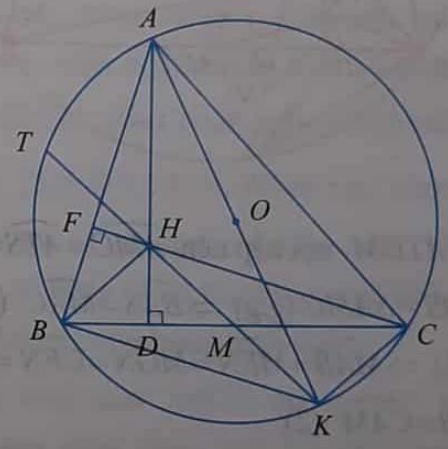
Câu IV. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB<AC$), nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao AD, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm T. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O).*

1) *Chứng minh ba điểm T,H,K thẳng hàng.*

2) *Đường thẳng qua B và vuông góc với đường thẳng AM tại điểm E, cắt đường thẳng AD tại điểm G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC tại hai điểm D và N. Chứng minh đường thẳng NE song song với đường thẳng BF.*

3) *Kẻ dây cung AX của đường tròn (O) sao cho đường thẳng AX song song với đường thẳng BC. Chứng minh ba đường thẳng MX, TD và AN đồng quy.*

HD giải. 1)



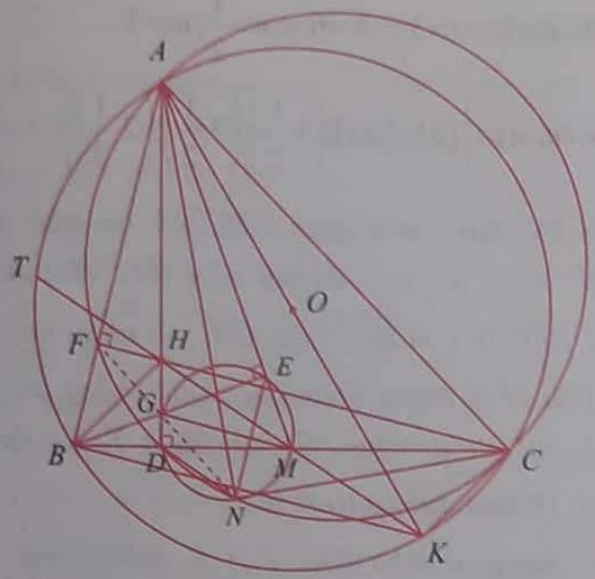
Chứng minh được tứ giác $HCKB$ là hình bình hành. Do đó ba điểm H,M,K thẳng hàng, vì thế ba điểm T,H,K thẳng hàng.

2) Chứng minh được G là trực tâm của tam giác ABM $\Rightarrow MG//FC$.

$\widehat{FND}=\widehat{FCD}=\widehat{GMD}=\widehat{GND} \Rightarrow F,G,N$ thẳng hàng.

M thuộc trung trực FB mà $MG\perp FB \Rightarrow GB=GF$

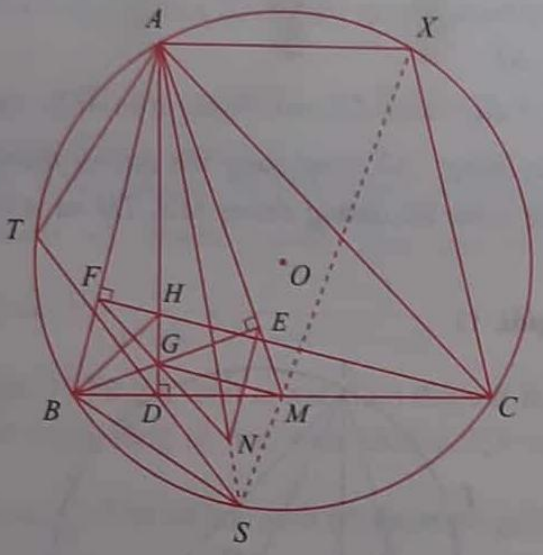
$\Rightarrow \widehat{BFG}=\widehat{FBG}$.



Mà $\widehat{FBG}=\widehat{AMG}=\widehat{GNE}$ nên suy ra $\widehat{BFG}=\widehat{GNE}$.

Từ đó ta được $NE//BF$.

3) Gọi S là giao điểm thứ hai của đường thẳng TD và đường tròn (O).



Tứ giác $ATDM$ nội tiếp nên $\widehat{AMC}=\widehat{ATS}=\widehat{ABS}$

nên $\Delta ABS\backsim\Delta AMC$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BAS}=\widehat{MAC}$ (1).

Từ câu 2) $\Rightarrow \widehat{MAB}=\widehat{MEN}=\widehat{MGN}=\widehat{CFN}=\widehat{CAN}$

nên $\widehat{NAB}=\widehat{CAM}$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow A,N,S$ thẳng hàng, $\widehat{BAM}=\widehat{SAC}$ (3).

Ta có: $AX//BC \Rightarrow AXCB$ là hình thang cân

$\Rightarrow \widehat{CXM}=\widehat{BAM}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra:

$\widehat{CXM}=\widehat{CAS}=\widehat{CXS} \Rightarrow X,M,S$ thẳng hàng

$\Rightarrow MX,TD$ và AN đồng quy tại S.

Câu V. *Hai trường trung học cơ sở A và B tổ chức chung một buổi liên hoan cho các học sinh tiêu biểu. Biết rằng trong buổi liên hoan này:*

(i) mỗi học sinh trường A quen với đúng 5 học sinh khác cũng của trường A;

(ii) mỗi học sinh trường A quen với đúng 4 học sinh trường B;

(iii) mỗi học sinh trường B quen với đúng 3 học sinh trường A;

(iv) tổng số học sinh của hai trường tham dự không vượt quá 80.

1) Số học sinh trường A tham dự buổi liên hoan có thể là 25 học sinh được không? Vì sao?

2) Tổng số học sinh của hai trường tham dự buổi liên hoan có thể nhiều nhất là bao nhiêu? Vì sao?

Lời giải. 1) Gọi số học sinh trường A là x thì tổng lượt người quen của các bạn này là $5x$ (lượt). Vì quen nhau là mối quan hệ hai chiều nên tổng số lượt người quen phải là số chẵn, dẫn tới x là số chẵn. Vậy trường A không thể có 25 học sinh.

2) Vì quen nhau là mối quan hệ hai chiều nên ta quy ước cứ một học sinh thuộc trường A và một học sinh thuộc trường B mà quen nhau thì bắt tay nhau đúng một lần.

Gọi số học sinh trường B là y, và tổng số lượt bắt tay trong buổi liên hoan là k.

Mỗi học sinh trường A bắt tay với đúng 4 học sinh trường B nên $k=4x\vdots 4$.

Mỗi học sinh trường B quen với đúng 3 học sinh trường A nên $k=3y\vdots 3 \Rightarrow k=12m$ $(m\in\mathbb{N}^*)$. Dẫn đến $x=3m; y=4m$. Lại có x chẵn nên m chẵn, dẫn tới $x+y=7m\vdots 14$.

Tổng số học sinh của hai trường tham dự bữa tiệc không vượt quá 80. Nên tổng số học sinh nhiều nhất có thể là 70 em. Vậy có thể có nhiều nhất 70 học sinh, trong đó có 30 học sinh trường A và 40 học sinh trường B.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

(GV THCS Giảng Võ 2, Hà Nội)

Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC NINH

Môn thi Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (*2,0 điểm*)

1. Không dùng máy tính, chứng minh rằng biểu thức $A=\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}-\dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ có giá trị là một số nguyên.

2. Tính giá trị của biểu thức

$$\left(x^3+4x^2-23x+2\right)^{2025}$$

khi $x=3\sqrt{3}-2$.

Câu 2. (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8.$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ y^2+yz+z^2=19. \\ z^2+zx+x^2=13 \end{cases}$$

Câu 3. (*3,0 điểm*)

1. Cho tam giác nhọn MAB nội tiếp đường tròn (O), đường cao MH. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF và cắt AB tại D.

a) Chứng minh rằng $\widehat{EMD}=\widehat{BHF}$ và ba điểm M, O, D thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{MA}{MB}=\sqrt{\dfrac{AH}{BH}\cdot\dfrac{AD}{BD}}$.

2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và có các đường cao AD, BE, CF. Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\dfrac{AB+BC+CA}{AD+BE+CF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3. Bạn *Nga* dùng một dây vải màu để buộc một gói quà có dạng hình trụ (như hình vẽ). Hình trụ có bán kính đáy 5cm và diện tích xung quanh $376{,}8\text{cm}^2$. Biết rằng cần 10cm dây vải dùng để thắt nơ, giao điểm của hai vòng dây vải là tâm các đường tròn đáy của gói quà. Hỏi bạn *Nga* cần phải chọn dây vải có chiều dài ít nhất là bao nhiêu (lấy $\pi\approx 3{,}14$)?



Câu 4. (*1,5 điểm*)

1. Cho p là số nguyên tố khác 2, hai số tự nhiên lẻ a, b thoả mãn $a+b$ chia hết cho p và $a-b$ chia hết cho $p-1$. Chứng minh rằng a^b+b^a chia hết cho $2p$.

2. Cho các số thực a, b lớn hơn $\dfrac{1}{3}$ và thoả mãn $\dfrac{1}{a^2(3b-1)}+\dfrac{1}{b^2(3a-1)}\geq\sqrt[3]{ab}$. Chứng minh rằng

$$1+a+b\geq 3ab.$$

Câu 5. (*1,5 điểm*)

1. Hai bạn *Minh* và *Huy* chơi một trò chơi như sau: *Minh* chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{7;8;9;10;12\}$; *Huy* chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{5;6;8;9;13;14\}$. Bạn nào chọn được số lớn hơn thì sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hoà. Tính xác suất để bạn *Minh* không thua cuộc.

2. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A}=60^\circ$ và $AC=6$ cm. Chứng minh rằng, với 25 điểm bất kì trong hình thoi này thì luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá 1cm.

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Giới thiệu



ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀO GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN THỰC TIỄN

NGUYỄN HỮU TIẾN
(GV Khoa Kỹ thuật Cơ sở, Học viện PK-KQ, Sơn Tây, Hà Nội)

(Kỳ 2)

Câu 7. *Một chuyến xe bus có sức chứa tối đa 60 hành khách. Nếu một chuyến xe chở x hành khách thì giá cho mỗi hành khách là $10\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Doanh thu lớn nhất của một chuyến xe bus là*

A. 1,6 *triệu đồng.* **B.** 0,6 *triệu đồng.*
C. 3,2 *triệu đồng.* **D.** 1,2 *triệu đồng.*

Lời giải. Điều kiện: $x \in \mathbb{N}$, $x \le 60$.

Ta có doanh thu mỗi chuyến là:

$$R(x)=10x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2=\frac{10}{2.40^2}(120-x)(120-x).2x$$

$$\le \frac{10}{2.40^2}\left(\frac{120-x+120-x+2x}{3}\right)^3$$

$$=1600 \text{ (nghìn đồng).}$$

$R(x)=1600 \Leftrightarrow 120-x=2x \Leftrightarrow x=40$ (thỏa mãn).

Vậy doanh thu lớn nhất của một chuyến xe bus là 1,6 triệu đồng.

Câu 8. *Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L=10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm. Biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ 10^{-12} W/m^2 đến 10 W/m^2. Hãy tính mức cường độ âm lớn nhất mà tai người có thể nghe được.*

A. 130 dB **B.** 135 dB
C. 120 dB **D.** 110 dB.

Lời giải. Ta có:

$$10^{-12} \le I \le 10 \Leftrightarrow \frac{10^{-12}}{10^{-12}} \le \frac{I}{10^{-12}} \le \frac{10}{10^{-12}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{I}{10^{-12}} \le 10^{13} \Leftrightarrow \log 1 \le \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \le \log 10^{13}$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \le 130 \text{ (do } 10>1\text{)}$$

$\Leftrightarrow 0 \le L \le 130$. Vậy mức cường độ âm lớn nhất mà tai người có thể nghe được là 130 dB.

Câu 9. *Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 50.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 1 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?*

A. 2250000 **B.** 2350000
C. 2450000 **D.** 2550000.

Lời giải. Gọi x là số lần tăng giá 50000 đồng ($x \in \mathbb{N}$). Khi đó giá thuê mỗi căn hộ sẽ là:

$$P(x)=2000000+50000x \text{ (đồng).}$$

Số căn hộ bị bỏ trống là x; số căn hộ được thuê là $50-x$. Tổng số tiền thu được mỗi tháng là:

$$R(x)=(50-x)(2000000+50000x)$$

$$=-50000x^2+500000x-100000000 \text{ (đồng).}$$

Ta có: $R'(x)=-100000x+500000$;

$R'(x)=0 \Leftrightarrow -100000x+500000=0 \Leftrightarrow x=5$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		5		$+\infty$
$R'(x)$		+	0	−	
$R(x)$		↗		↘	

Suy ra $R(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 5$.

Khi đó giá cần thuê căn hộ là:

$$2000000 + 50000.5 = 2250000 \text{ (đồng)}.$$

C.2. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI: Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

Câu 1. *Một con cá hồi bơi ngược dòng nước (từ nơi sinh sống) để vượt một khoảng cách 300 km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi dòng nước đứng yên là v km/h, thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức: $E(v) = cv^3t$, với c là một hằng số dương, E được tính bằng Jun.*

a) *Vận tốc của con cá khi bơi ngược dòng nước là $v - 6$ (km/h).*

b) *Thời gian con cá bơi ngược dòng nước quãng đường 300 km là $t = \dfrac{300}{v-6}$ giờ.*

c) $E(10) = 75000$ Jun.

d) *Để năng lượng tiêu hao là thấp nhất thì $v = 9$ km/h.*

Lời giải. a) Vận tốc của con cá khi bơi ngược dòng nước là $v - 6$ (km/h). Vậy a) đúng.

b) Thời gian con cá bơi ngược dòng nước quãng đường 300 km là $t = \dfrac{300}{v-6}$ giờ. Vậy b) đúng.

c) Ta có: $E(v) = cv^3.\dfrac{300}{v-6} = 300c.\dfrac{v^3}{v-6}$

$\Rightarrow E(10) = 300c.\dfrac{1000}{10-6} = 75000c$ (Jun). Vậy c) sai.

d) Ta có: $E'(v) = 300c.\dfrac{2v^3 - 18v^2}{(v-6)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2v^2(v-9) = 0 \Rightarrow v = 9.$

v		9	
$E'(v)$	$-$	0	$+$
$E(v)$	↘	$E(9)$	↗

Vậy d) đúng.

Câu 2. *Một công ty chuyên sản xuất máy công nghiệp. Bộ phận bán hàng ước tính rằng với q sản phẩm được sản xuất trong một tháng thì tổng chi phí sẽ là $C(q)=8q^2+40q+1400$ (triệu đồng) và mỗi sản phẩm công ty bán với giá $P(q)=1400-2q$ (triệu đồng).*

a) *Chi phí mỗi tháng công ty phải bỏ ra để sản xuất 50 sản phẩm là 23400 (triệu đồng).*

b) *Lợi nhuận khi bán được q sản phẩm mỗi tháng là $F(q)=-10q^2+1440q-1400$ (triệu đồng).*

c) *Lợi nhuận bán được 20 sản phẩm mỗi tháng của công ty là 21800 (triệu đồng).*

d) *Lợi nhuận cao nhất trong một tháng của công ty là hơn 45000 (triệu đồng).*

Lời giải. a) Ta có chi phí mỗi tháng công ty bỏ ra để sản xuất 50 sản phẩm là:

$C(50)=8.50^2+40.50+1400=23400$ (triệu đồng).

Vậy a) đúng.

b) Lợi nhuận (triệu đồng) khi bán được q sản phẩm là: $F(q)=q.(1400-2q)-(8q^2+40q+1400)$

$=-10q^2+1360q-1400$. Vậy b) sai.

c) Lợi nhuận của công ty (triệu đồng) khi bán được 20 sản phẩm mỗi tháng là:

$$F(20)=-10.20^2+1360.20-1400=21800.$$

Vậy c) đúng.

d) Ta có $F'(q)=-20q+1360; F'(q)=0 \Leftrightarrow q=68$.

Mà $F''(q)=-20<0$, suy ra lợi nhuận cao nhất trong một tháng của công ty là:

$$F(68)=44840 \text{ (triệu đồng)}.$$ Vậy d) sai.

Câu 3. *Người ta muốn làm một cái bình thủy tinh hình lăng trụ đứng không có nắp, đáy là tam giác đều để đựng 16 lít nước (xem tấm thủy tinh làm vỏ bình là rất mỏng). Gọi x (dm) là độ dài cạnh đáy và h (dm) là chiều cao của hình lăng trụ đứng $(x, h > 0)$.*

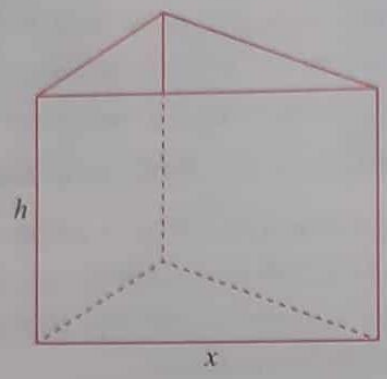
a) *Chiều cao của bình là $h=\dfrac{64}{\sqrt{3}x^2}$ (dm).*

b) *Để tiết kiệm chi phí nhất thì diện tích xung quanh của bình là nhỏ nhất.*

c) *Gọi S là tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của bình. Khi đó $S=x^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dm^2.*

d) *Để tiết kiệm chi phí nhất thì cạnh đáy của bình phải bằng 4dm.*

Lời giải.



a) Gọi x là độ dài cạnh đáy và h là chiều cao của hình lăng trụ đứng $(x, h>0)$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ đã cho là:

$$V=16=h.x^2\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow h=\frac{64}{\sqrt{3}x^2}\ (\text{dm}).$$

Vậy a) đúng.

b) Để tiết kiệm chi phí nhất thì tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy bình phải nhỏ nhất.

Vậy b) sai.

c) Ta có:

$$S=S_{\text{đ}}+S_{\text{xq}}=x^2\frac{\sqrt{3}}{2}+3xh=x^2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{192}{\sqrt{3}x}=f(x).$$

Vậy c) sai.

d) Ta có: $f'(x)=\sqrt{3}x-\frac{192}{\sqrt{3}x^2}$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^3=192\Leftrightarrow x=4.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	4	
$f'(x)$	$-$	0 $+$
$f(x)$	$24\sqrt{3}$	

Vậy $\min f(x)=24\sqrt{3}\,\text{dm}^2$ tại $x=4$ dm.

Để tiết kiệm chi phí nhất thì cạnh đáy của bình phải bằng 4dm. Vậy d) đúng.

C.3. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. *Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$,, trong đó c là hằng số cho trước, E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng bao nhiêu km/h?*

Lời giải. Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng là:

$$v-6\ (\text{km/h},\ v>6).$$

Năng lượng tiêu hao của cả quá trình tìm về nguồn là: $E(v)=cv^3t=cv^3.\frac{400}{v-6}$.

Ta có: $E'(v)=c.400.\frac{2v^3-18v^2}{(v-6)^2}$

$$\Rightarrow E'(v)=0\Leftrightarrow v=9\ (\text{km/h}).$$

Ta có bảng biến thiên:

x	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$			$E(9)$		

Từ bảng biến thiên ta có $\min E(v)=E(9)$.

Vậy $v=9$.

Câu 2. *Enzyme là protein hoạt động như một chất xúc tác làm tăng tốc độ phản ứng hóa học xuất hiện trong các tế bào. Trong một phản ứng, một enzyme được chuyển hóa thành một enzyme khác, được gọi là enzyme sản phẩm. Enzyme sản phẩm hoạt động như một chất xúc tác cho chính sự hình thành của nó. Kí hiệu R là tốc độ tạo thành enzyme sản phẩm được cho bởi phương trình $R(p)=kp(l-p)$, trong đó l là tổng lượng enzyme ban đầu và enzyme sản phẩm, p là lượng enzyme sản phẩm, và k là hằng số dương. Giả sử $l=10$. Xác định giá trị của p để R đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải. Ta có:

$$R(p)=kp(l-p)\Rightarrow R'(p)=k(l-2p).$$

Đạo hàm: $R'(p)=0\Leftrightarrow k(l-2p)=0\Leftrightarrow p=\dfrac{l}{2}$.

Ta có $R''(p)=-2k<0, \forall k>0$, nên hàm số đạt cực đại tại $p=\dfrac{l}{2}$. Vậy R đạt giá trị lớn nhất khi $p=\dfrac{l}{2}=5$.

Câu 3. *Thể tích của 1 kg nước ở nhiệt độ $t\in[0°C;30°C]$ được cho bởi công thức*

$$V(t)=999,87-0,06426t+0,0085043t^2-0,0000679t^3 \ (\text{cm}^3).$$

Ở nhiệt độ nào ($t\in[0°C;30°C]$) thì nước có khối lượng riêng lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải. Khối lượng riêng của vật lớn nhất khi và chỉ khi thể tích của vật nhỏ nhất.

Ta có:

$$V'(t)=-0,06426+0,0170086t-0,0002037t^2$$

$$\Rightarrow V'(t)=0\Rightarrow t=3,9665.$$

Ta có bảng biến thiên:

t	0		$3,9665$		30
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘		↗	

Vậy nước có khối lượng riêng lớn nhất khi $t\approx 4°C$.

Câu 4. *Lưu lượng ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức* $f(v)=\dfrac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$ *(xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm là bao nhiêu* km/h *thì lưu lượng xe đạt lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?*

Lời giải. Ta có:

$$f'(v)=\frac{290,4(0,36v^2+13,2v+264)-290,4v(0,72v+13,2)}{(0,36v^2+13,2v+264)^2}$$

$$=\frac{-104,544v^2+76665,6}{(0,36v^2+13,2v+264)^2}=0\Leftrightarrow v=\frac{10\sqrt{66}}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{10\sqrt{66}}{3}$		$+\infty$
$f'(v)$		$+$	0	$-$	
$f(v)$		↗		↘	

Vậy lưu lượng xe là lớn nhất khi vận tốc trung bình của các xe là $\dfrac{10\sqrt{66}}{3}\approx 27$ km/h.

Câu 5. *Một công ty sản xuất ra x sản phẩm với giá bán một sản phẩm phụ thuộc vào số lượng sản xuất theo phương trình $p(x)=1312-2x$. Tổng chi phí khi sản xuất x sản phẩm là $C(x)=x^3-77x^2+1000x+100$. Để công ty đạt lợi nhuận cao nhất thì số sản phẩm cần sản xuất là bao nhiêu?*

Lời giải. Lợi nhuận của công ty được tính như sau

$$T(x)=xp(x)-C(x)$$

$$=x(1312-2x)-(x^3-77x^2+1000x+100)$$

$$=-x^3+75x^2+312x-100.$$

Với $x>0, x\in\mathbb{N}$, ta có:

$$T'(x)=-3x^2+150x+312=0;$$

$$T'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=52\\x=-2 \ (\text{loại})\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		52		$+\infty$
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$		↗		↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy $T(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=52$. Vậy công ty cần sản xuất 52 sản phẩm để đạt lợi nhuận cao nhất.



MỞ RỘNG MỘT BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN XUÂN LỘC
(Cựu HS THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)
NGUYỄN THỊ MINH ANH
(HS 12T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài báo này xin giới thiệu với bạn đọc Toán học và Tuổi trẻ một bất đẳng thức thú vị trong tam giác cùng với các mở rộng của nó trong mặt phẳng và trong không gian.

Bài toán 1. *Cho điểm M nằm trong tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM và BC, CA, AB. Chứng minh rằng*

$$S_{A_1B_1C_1} \le \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho điểm M nằm trong tam giác ABC và α, β, γ là các số thực dương sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Nếu A_1 là giao điểm của AM và BC thì* $\dfrac{MA_1}{AA_1}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Chứng minh (h.1).

Vì $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ nên qua phép chiếu vectơ phương (BC) lên đường thẳng AA_1, ta có:

$$\vec{0}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MA_1}+\gamma\overrightarrow{MA_1}=\alpha\overrightarrow{MA}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{MA_1}.$$

Từ đó, chú ý rằng các vectơ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA_1}$ ngược hướng, suy ra: $\dfrac{MA_1}{MA}=-\dfrac{\overrightarrow{MA_1}}{\overrightarrow{MA}}=\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$.

Vậy $\dfrac{MA_1}{AA_1}=\dfrac{MA_1}{MA+MA_1}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$.

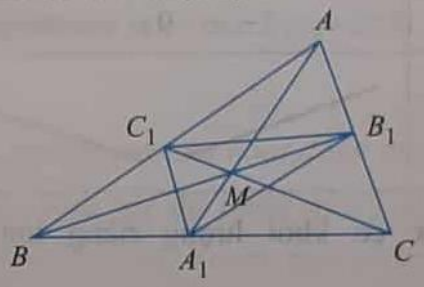
Bổ đề 2. *Cho điểm M nằm trong tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM và BC, CA, AB. Giả sử α, β, γ là các số thực dương sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khi đó:*

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{2\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma)}.$$

Chứng minh (h.1). Theo bổ đề 1, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}&=\sum_{cyc}\frac{S_{MB_1C_1}}{S_{ABC}}=\sum_{cyc}\frac{MA_1}{AA_1}.\frac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}}\\&=\sum_{cyc}\frac{MA_1}{AA_1}.\frac{MB_1.MC_1}{MB.MC}=\sum_{cyc}\frac{MA_1}{AA_1}.\frac{MB_1}{MB}.\frac{MC_1}{MC}\\&=\sum_{cyc}\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.\frac{\beta}{\gamma+\alpha}.\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\\&=\frac{\prod\limits_{cyc}\alpha}{\sum\limits_{cyc}\alpha}\sum_{cyc}\frac{1}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\prod\limits_{cyc}\alpha}{\sum\limits_{cyc}\alpha}.\frac{2\sum\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma)}=\frac{2\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma)}.\end{aligned}$$

Trở lại giải bài toán 1 (h.1).



Hình 1

Vì M nằm trong tam giác ABC nên tồn tại các số $\alpha,\beta,\gamma>0$ sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Từ đó, theo bổ đề 2 và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số ta có:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{2\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma)}\le\frac{2\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}2\sqrt{\beta\gamma}}=\frac{1}{4}.$$

Vậy $S_{A_1B_1C_1}\le\dfrac{1}{4}S_{ABC}$. Đẳng thức xảy ra khi $\alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC.

Bài toán 1 được mở rộng như sau.

Bài toán 2. *Điểm M nằm trong tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM và BC, CA, AB. A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM và B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng $S^2_{A_1B_1C_1} \le S_{ABC}.S_{A_2B_2C_2}$.*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề 3. Với $\forall x,y,z>0$, ta có:

$$\prod_{cyc} x\left(\sum_{cyc} x\right)^3 \le \frac{27}{64}\prod_{cyc}(y+z)^2.$$

Chứng minh. Đặt $a=\frac{y+z}{2}; b=\frac{z+x}{2}; c=\frac{x+y}{2}$.

Dễ thấy a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Kí hiệu tam giác đó là ABC ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$). Gọi S, R theo thứ tự là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác của ABC.

Theo công thức Heron, chú ý rằng $\sum_{cyc}\sin A \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, ta có: $\prod_{cyc} x\left(\sum_{cyc} x\right)^3 = \prod_{cyc}(b+c-a)\left(\sum_{cyc} a\right)^3$

$$= \left[\sum_{cyc} a\prod_{cyc}(b+c-a)\right]\left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

$$= 16S^2\left(\sum_{cyc} a\right)^2 = 16\left(\frac{\prod\limits_{cyc} a}{4R}\right)^2\left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

$$= 4\left(\prod_{cyc} a\right)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{1}{16}\prod_{cyc}(y+z)^2\left(\sum_{cyc}\sin A\right)^2$$

$$\le \frac{1}{16}\prod_{cyc}(y+z)^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{27}{64}\prod_{cyc}(y+z)^2.$$

Vậy $\prod_{cyc} x\left(\sum_{cyc} x\right)^3 \le \frac{27}{64}\prod_{cyc}(y+z)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

Trở lại giải bài toán 2 (h.2).

Vì M nằm trong tam giác ABC nên tồn tại các số $\alpha,\beta,\gamma>0$ sao cho: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Qua các phép chiếu vectơ phương (BC), (CA), (AB) theo thứ tự xuống các đường thẳng MA, MB, MC, ta có: $\begin{cases}\alpha\overrightarrow{MA}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{MA_1}=\vec{0}\\ \beta\overrightarrow{MB}+(\gamma+\alpha)\overrightarrow{MB_1}=\vec{0}\\ \gamma\overrightarrow{MC}+(\alpha+\beta)\overrightarrow{MC_1}=\vec{0}\end{cases}$.

Cộng theo vế ba đẳng thức trên, chú ý rằng $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, ta có:

$$(\beta+\gamma)\overrightarrow{MA_1}+(\gamma+\alpha)\overrightarrow{MB_1}+(\alpha+\beta)\overrightarrow{MC_1}=\vec{0}.$$

Từ đó, chú ý rằng $\beta+\gamma,\gamma+\alpha,\alpha+\beta>0$, suy ra M nằm trong tam giác $A_2B_2C_2$.

Lần lượt áp dụng bổ đề 2 cho các tam giác ABC, $A_2B_2C_2$ và điểm M, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số $2\alpha+\beta+\gamma, 2\beta+\gamma+\alpha, 2\gamma+\alpha+\beta$ và theo bổ đề 3, ta có:

$$\frac{S^2_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}.S_{A_2B_2C_2}} = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}.\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}}$$

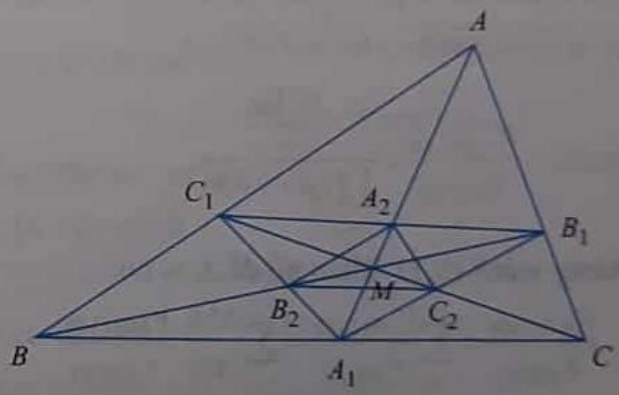
$$= \frac{2\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma)}.\frac{\prod\limits_{cyc}(2\alpha+\beta+\gamma)}{2\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma)} = \frac{\prod\limits_{cyc}\alpha.\prod\limits_{cyc}(2\alpha+\beta+\gamma)}{\left[\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma)\right]^2}$$

$$\le \left(\frac{4}{3}\right)^3.\frac{\prod\limits_{cyc}\alpha.\left(\sum\limits_{cyc}\alpha\right)^3}{\left[\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma)\right]^2} = \frac{64}{27}.\frac{\prod\limits_{cyc}\alpha.\left(\sum\limits_{cyc}\alpha\right)^3}{\left[\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma)\right]^2} \le 1.$$

Do đó $S^2_{A_1B_1C_1} \le S_{ABC}.S_{A_2B_2C_2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\alpha=\beta=\gamma\\ \beta+\gamma=\gamma+\alpha=\alpha+\beta\end{cases}$

$\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC.



Hình 2

Một cách tự nhiên, bài toán 1 được mở rộng thành bài toán cho tứ diện.

Bài toán 3. *Điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$. A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM, DM và các mặt phẳng (BCD), (CAD), (DAB), (ABC). Chứng minh rằng*

$$V_{A_1B_1C_1D_1} \le \frac{1}{27} V_{ABCD}.$$

Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 4. *Cho điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$ và α, β, γ, δ là các số thực dương sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=\vec{0}$. Nếu A_1 là giao điểm của AM và mặt phẳng (BCD) thì*

$$\frac{MA_1}{AA_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

Chứng minh (h.3).

Vì $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ nên qua phép chiếu vectơ phương (BCD) xuống đường thẳng AA_1, ta có: $\vec{0}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}$

$$=\alpha\overrightarrow{MA}+(\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MA_1}.$$

Từ đó, chú ý rằng các vectơ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA_1}$ ngược hướng, suy ra: $\frac{MA_1}{MA} = -\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overrightarrow{MA}} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma+\delta}$.

Vậy $\frac{MA_1}{AA_1} = \frac{MA_1}{MA+MA_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$.

Bổ đề 5. *Điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$. A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM, DM và các mặt phẳng (BCD), (CAD), (DAB), (ABC). Giả sử α, β, γ, δ là các số thực dương sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.*

Khi đó: $\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{3\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma+\delta)}$.

Chứng minh (h.3). Theo bổ đề 4, ta có:

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \sum_{cyc}\frac{V_{MB_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \sum_{cyc}\frac{MA_1}{AA_1}\cdot\frac{V_{MB_1C_1D_1}}{V_{MBCD}}$$

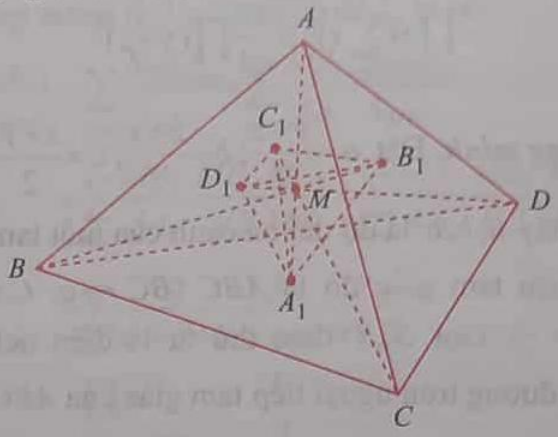
$$=\sum_{cyc}\frac{MA_1}{AA_1}\cdot\frac{MB_1}{MB}\cdot\frac{MC_1}{MC}\cdot\frac{MD_1}{MD}$$

$$=\sum_{cyc}\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\cdot\frac{\beta}{\gamma+\delta+\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\delta+\alpha+\beta}\cdot\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$=\frac{\prod\limits_{cyc}\alpha}{\sum\limits_{cyc}\alpha}\sum_{cyc}\frac{1}{(\gamma+\delta+\alpha)(\delta+\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$=\frac{\prod\limits_{cyc}\alpha}{\sum\limits_{cyc}\alpha}\cdot\frac{3\sum\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma+\delta)} = \frac{3\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma+\delta)}.$$

Trở lại giải bài toán 3.



Hình 3

Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên tồn tại các số $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ sao cho

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=\vec{0}.$$

Từ đó, theo bổ đề 5 và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số suy ra:

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{3\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma+\delta)} \le \frac{3\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}3\sqrt[3]{\beta\gamma\delta}} = \frac{1}{27}.$$

Do đó $V_{A_1B_1C_1D_1} \le \frac{1}{27} V_{ABCD}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta \Leftrightarrow M$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

Một cách tự nhiên, bài toán 2 được mở rộng thành bài toán cho tứ diện.

Bài toán 4. *Điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$. A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM, DM và các mặt phẳng (BCD), (CAD), (DAB), (ABC). A_2, B_2, C_2, D_2 theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM, DM và các mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$, $(C_1A_1D_1)$, $(D_1A_1B_1)$, $(A_1B_1C_1)$. Chứng minh rằng:*

$$V^2_{A_1B_1C_1D_1} \le V_{ABCD}.V_{A_2B_2C_2D_2}.$$

Lời giải (h.4). Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên tồn tại các số $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ sao cho:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=\vec{0}.$$

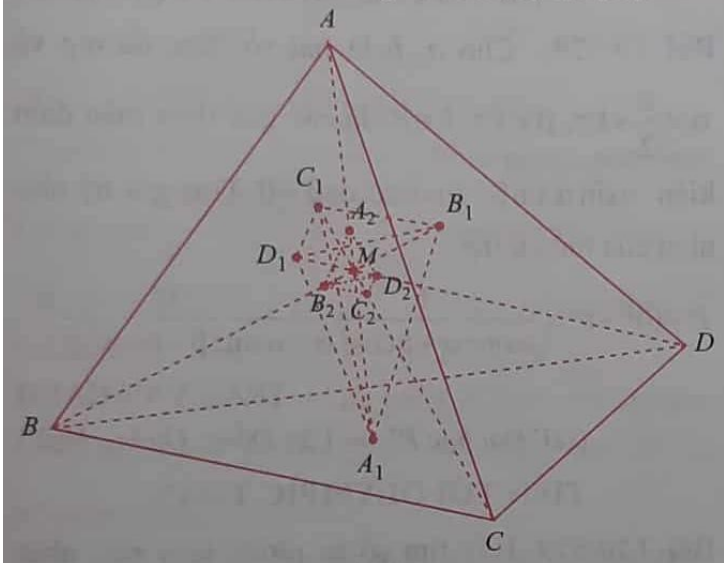
Qua các phép chiếu vectơ phương (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) theo thứ tự xuống các đường thẳng MA, MB, MC, MD, ta có:

$$\begin{cases}\alpha\overrightarrow{MA}+(\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MA_1}=\vec{0}\\ \beta\overrightarrow{MB}+(\gamma+\delta+\alpha)\overrightarrow{MB_1}=\vec{0}\\ \gamma\overrightarrow{MC}+(\delta+\alpha+\beta)\overrightarrow{MC_1}=\vec{0}\\ \delta\overrightarrow{MD}+(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MD_1}=\vec{0}\end{cases}.$$

Cộng theo vế bốn đẳng thức trên và chú ý rằng $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, ta có:

$$(\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MA_1}+(\gamma+\delta+\alpha)\overrightarrow{MB_1}+(\delta+\alpha+\beta)\overrightarrow{MC_1}+(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MD_1}=\vec{0}.$$

Từ đó, chú ý rằng $\beta+\gamma+\delta,\gamma+\delta+\alpha,\delta+\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma$ dương, suy ra M nằm trong tứ diện $A_1B_1C_1D_1$.



Hình 4

Vậy, áp dụng bổ đề 5 cho các tứ diện $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ và điểm M, ta có:

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}^2}{V_{ABCD}.V_{A_2B_2C_2D_2}}=\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}}.\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_2B_2C_2D_2}}$$

$$=\frac{3\prod\limits_{cyc}\alpha}{\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma+\delta)}.\frac{\prod\limits_{cyc}(3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta)}{3\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma+\delta)}$$

$$=\frac{\prod\limits_{cyc}\alpha.\prod\limits_{cyc}(3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta)}{\left[\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma+\delta)\right]^2}\quad(1).$$

Áp dụng bổ đề 3 cho ba số $x=\frac{\alpha}{2}+\beta;\ y=\frac{\alpha}{2}+\gamma;$ $z=\frac{\alpha}{2}+\delta$ và theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số ta có:

$$\frac{27}{64}\left[(\alpha+\gamma+\delta)(\alpha+\delta+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)\right]^2$$

$$\geq\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)\left(\frac{\alpha}{2}+\delta\right)\left(\frac{3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta}{2}\right)^3$$

$$=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta}{2}\right)^3$$

$$\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{\alpha\beta^2}.\frac{3}{2}\sqrt[3]{\alpha\gamma^2}.\frac{3}{2}\sqrt[3]{\alpha\delta^2}\left(\frac{3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta}{2}\right)^3$$

$$=\frac{27}{8}\sqrt[3]{\alpha^3\beta^2\gamma^2\delta^2}\left(\frac{3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow\left[(\alpha+\gamma+\delta)(\alpha+\delta+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)\right]^2\geq\sqrt[3]{\alpha^3\beta^2\gamma^2\delta^2}(3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta)^3.$$

Tương tự, ta có:

$$\left[(\beta+\delta+\alpha)(\beta+\alpha+\gamma)(\beta+\gamma+\delta)\right]^2\geq\sqrt[3]{\beta^3\gamma^2\delta^2\alpha^2}(3\beta+2\gamma+2\delta+2\alpha)^3;$$

$$\left[(\gamma+\alpha+\beta)(\gamma+\beta+\delta)(\gamma+\delta+\alpha)\right]^2\geq\sqrt[3]{\gamma^3\alpha^2\beta^2\delta^2}(3\gamma+2\alpha+2\beta+2\delta)^3;$$

$$\left[(\delta+\beta+\gamma)(\delta+\gamma+\alpha)(\delta+\alpha+\beta)\right]^2\geq\sqrt[3]{\delta^3\alpha^2\gamma^2\beta^2}(3\delta+2\alpha+2\beta+2\gamma)^3.$$

Nhân theo vế của bốn bất đẳng thức trên, ta được:

$$\left[\prod_{cyc}\alpha\prod_{cyc}(3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta)\right]^3\leq\left[\prod_{cyc}(\beta+\gamma+\delta)\right]^6.$$

Do đó $\dfrac{\prod\limits_{cyc}\alpha\prod\limits_{cyc}(3\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta)}{\left[\prod\limits_{cyc}(\beta+\gamma+\delta)\right]^2}\leq1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$V_{A_1B_1C_1D_1}^2\leq V_{ABCD}.V_{A_2B_2C_2D_2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}\alpha=\beta=\gamma=\delta\\ \beta+\gamma+\delta=\gamma+\delta+\alpha=\delta+\alpha+\beta=\alpha+\beta+\gamma\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=\delta$

$\Leftrightarrow M$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

Lời cảm ơn. Các tác giả chân thành cảm ơn TS. *Nguyễn Minh Hà* đã tận tình giúp đỡ để các tác giả hoàn thành bài báo này.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/579 (Lớp 6). Tìm số nguyên tố p để số $\dfrac{3^p+2026(p-1)}{2025}$ là một số chính phương.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/579 (Lớp 7). Tìm chữ số tận cùng của số $A=1^1+2^2+3^3+...+2025^{2025}$.

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

(Xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/579. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (a, b) thỏa mãn $(a+b+2)(a^2+b^2+2)(a^4+b^4+2)$ là lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(GV THCS Trần Duy Hưng, Q. Cầu Giấy, Hà Nội)

Bài T4/579. Cho tam giác ABC cân tại A, O là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạng AC lấy điểm E sao cho $\widehat{DOE}=\widehat{ABC}$. Đặt $AB = b$, $BC = 2a$ $(b > a > 0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng DE.

BÙI VĂN CHI

(Số nhà 21/2, đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/579. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}\ge 3\sqrt{3}$.

ĐỖ NGỌC ÁNH

(SV - DH34 - Học viện Quân Y, Hà Đông, Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/579. Giải phương trình sau trên tập số thực

$$(x^3-4)^3=\left(\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+4\right)^2.$$

TRẦN VĂN LÂM

(Thái Nguyên)

Bài T7/579. Cho các số thực x, y thỏa mãn

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{x-y}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=|x+y|$.

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T8/579. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kỳ trên (O). Chứng minh rằng: $2(a^4PA^4+b^4PB^4+c^4PC^4)$

$$=\left((a^2+b^2+c^2)PL^2+\frac{3a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2$$

trong đó $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ và L là điểm Lemoin của tam giác ABC, tức là điểm thỏa mãn

$$a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/579. Cho a, b là hai số thực dương và $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ là các góc thỏa mãn điều kiện $a\sin\alpha\sin\beta-b\cos\alpha\cos\beta=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=(a^2+b^2)\left(\frac{1}{a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha}+\frac{1}{a\sin^2\beta+b\cos^2\beta}\right).$$

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/579. Hãy tìm số tự nhiên lẻ n nhỏ nhất sao cho số $M=p^8+np^4+\dfrac{n^2-1}{4}$ có ít nhất 4 ước nguyên tố phân biệt (với p là số nguyên tố bất kỳ).

TRẦN BÁ DUY LINH

(Lớp 30-K34, Đại học Kinh tế TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/579. Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}[x]+\{y\}=z\\ [y]+\{z\}=x\\ [z]+\{x\}=y\end{cases}$, trong đó $[.]$ là phần nguyên và $\{.\}$ là phần phân của một số thực.

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG

(Pleyku)

Bài T12/579. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. Gọi M là trung điểm BC, hai tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại I. Tia đối của tia DA cắt đường tròn đường kính BC tại T. Tia TM cắt đường tròn (I, IB) tại điểm X.

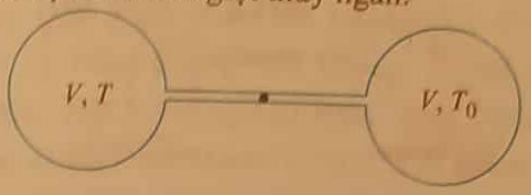
a) Chứng minh A, O, X thẳng hàng.

b) Đường tròn (XMB) cắt đoạn thẳng AB tại E, đường tròn (XMC) cắt đoạn thẳng AC tại F. Chứng minh hai đường tròn (AEF) và (I, IB) tiếp xúc nhau.

NGUYỄN NGỌC TÚ

(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài L1/579. Một nhiệt kế khí ồm có hai bình giống nhau, dung tích mỗi bình là V, nối với nhau bởi một ống nằm ngang có chiều dài l và tiết diện S (hình dưới). Trong ống có một giọt thủy ngân để ngăn cách không khí trong hai ống và để làm vật chuẩn chỉ nhiệt độ. Bình bên phải đặt trong máy điều nhiệt và được giữ ở nhiệt độ T_0. Tìm công thức cho sự phụ thuộc của nhiệt độ T của bình bên trái vào độ dời x của giọt thủy ngân.



Cho $V = 5$ L, $l = 20$ cm, S = 4 mm^2, $T_0 = 300$ K, $x = 5$ cm. Từ kết quả của T tìm được cho biết nhiệt kế có nhạy không?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/579. Hạt nhân ${}^{210}_{84}P_0$ ban đầu đứng yên, sau đó phân rã α, biến đổi thành hạt nhân chì. Động năng của hạt α bay ra chiếm bao nhiêu phần trăm của năng lượng phân rã ?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/579 (Grade 6). Find prime numbers p such that $\dfrac{3^p+2026(p-1)}{2025}$ is a perfect number.

Problem T2/579 (Grade 7). Find the last digit of the number $A=1^1+2^2+3^3+...+2025^{2025}$.

Problem T3/579. Find all pairs of natural numbers (a, b) satisfying $(a+b+2)(a^2+b^2+2)(a^4+b^4+2)$ is a prime power.

Problem T4/579. Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A, and O is the midpoint of BC. On the side AB take a point D, on the side AC take a point E so that $\widehat{DOE}=\widehat{ABC}$. Let $AB = b$, $BC = 2a$ ($b > a > 0$). Find the smallest value of the measure of the line segment DE .

Problem T5/579. Given a, b, c are the lengths of three sides of a triangle and satisfy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prove that: $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}\ge 3\sqrt{3}$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/579. Find the real solutions of the equation $(x^3-4)^3=\left(\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+4\right)^2$.

Problem T7/579. Given real numbers x , y satisfying $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\sqrt{x-y}$. Find the minimum value of the expression $S=|x+y|$.

Problem T8/579. Given triangle ABC inscribed in a circle (O) and P is any point on (O). Prove that

$$2\left(a^4PA^4+b^4PB^4+c^4PC^4\right)$$

$$=\left(\left(a^2+b^2+c^2\right)PL^2+\frac{3a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2$$

where $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ and L is the Lemoin point of triangle ABC, that is the point satisfying

$$a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}.$$

Problem T9/579. Let a and b be two positive real numbers and $\alpha\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\beta\ne k\pi,k\in\mathbb{Z}$ are angles satisfying $a\sin\alpha\sin\beta-b\cos\alpha\cos\beta=0$. Find the minimum value of the expression

$$P=(a^2+b^2)\left(\frac{1}{a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha}+\frac{1}{a\sin^2\beta+b\cos^2\beta}\right).$$

(Xem tiếp trang 28)



Bài T1/575. *Biết x, y, z, t là các số nguyên dương thay đổi thỏa mãn: $2025xy = 2026zt$. Hỏi tổng $S = 2025(x^2 + y^2) + 2026(z^2 + t^2)$ là số nguyên tố hay hợp số?*

Lời giải. Ta cần chứng minh Bổ đề sau:

Bổ đề. *Giả sử a, b, c, d là các số nguyên dương nào đó thỏa mãn $ab = cd$ thì tổng $a + b + c + d$ là hợp số.*

Chứng minh. Gọi t là ước số chung lớn nhất của a và c, lúc đó $a = mt$ và $c = nt$ với m, n, t đều là số nguyên dương và $(m, n) = 1$.

Từ $ab = cd$ có $mtb = ntd$ hay là $mb = nd$ (*).

Do n là ước số của mb mà $(m, n) = 1$ nên n là ước số của b, tức là $b = nk$, trong đó k là số nguyên dương. Thay $b = nk$ vào (*) được:

$$mnk = nd, \text{ suy ra: } d = mk.$$

Từ các điều trên thì

$$a + b + c + d = mt + nk + nt + mk$$
$$= m(t + k) + n(t + k) = (t + k)(m + n).$$

Vì các số t, k, m, n đều là số nguyên dương nên $t + k$ và $m + n$ đều lớn hơn 1, tức là tổng

$$a + b + c + d$$

bằng tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên tổng đó là hợp số.

Trở lại bài toán T1/575.

Từ giả thiết $2025xy = 2026zt$ có:

$$(2025xy)^2 = (2026zt)^2$$

hay là $(2025x^2)(2025y^2) = (2026z^2)(2026t^2)$.

Sử dụng bổ đề trên ta thấy

$$S = 2025(x^2 + y^2) + 2026(z^2 + t^2)$$
$$= (2025x^2) + (2025y^2) + (2026z^2) + (2026t^2)$$

là hợp số.

Nhận xét. Lời giải bài toán này của các bạn gửi đến Tòa soạn đều không chuẩn xác. Theo cách giải nêu trên có thể thay hai số 2025 và 2026 bởi hai số nguyên dương tùy ý.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/575. *Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 + 1$ chia hết cho q và $2^q + 1$ chia hết cho p.*

Lời giải. Kí hiệu: $\begin{cases}(p^2+1) \vdots q & (1)\\ (2^q+1) \vdots p & (2)\end{cases}$. Ta cần bổ đề

Bổ đề. *Cho các số nguyên dương a, m. Giả sử n là số nguyên dương thoả mãn $a^n \equiv 1 \pmod m$ và h số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $a^h \equiv 1 \pmod m$. Khi đó $h \mid n$.*

Chứng minh. Xét $n = kh + r$ với k, r là các số tự nhiên, $0 \le r < h$. Khi đó:

$$a^n = a^{hk+r} = (a^h)^k . a^r \equiv a^r \pmod m$$

hay $a^r \equiv 1 \pmod m$ (*).

Nếu $r > 0$ thì từ (*) dẫn đến mâu thuẫn với với tính chất nhỏ nhất của h. Vậy $r = 0$, tức là n chia hết cho h.

Trở lại bài toán:

Từ (2) suy ra p là số nguyên tố lẻ, do đó theo định lý Fermat bé ta có: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ (3). Mặt khác:

$$2^{2q} - 1 = (2^q - 1)(2^q + 1) \equiv 0 \pmod p \quad \text{(do (2))}.$$

Suy ra: $2^{2q} \equiv 1 \pmod p$ (4).

Gọi d là số nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn

$$2^d \equiv 1 \pmod p \quad (5).$$

Suy ra d là ước của $2q$ mà q là số nguyên tố nên $d \in \{1; 2; q; 2q\}$. Vì $p \ge 3$ nên từ (5) có $d \ne 1$. Nhưng do điều kiện (2) suy ra $d \ne q$.

- Với $d = 2$, từ (5) suy ra $4 \equiv 1 \pmod p$ mà p nguyên tố nên $p = 3$, thay vào (1) suy ra $q = 2$ hoặc $q = 5$. Thử lại thấy $p = 3, q = 5$ thoả mãn các điều kiện (1) và (2).

- Với $d = 2q$, từ (3) suy ra $2q \mid p - 1$ hay $q \mid p - 1$. Từ (1) có $q \mid p^2 + 1 = (p - 1)(p + 1) + 2$ nên $q \mid 2$ hay $q = 2$. Thay vào (2) suy ra $p = 5$. Thử lại thấy $p = 5, q = 2$ thoả mãn các điều kiện.

Vậy có hai cặp số nguyên tố (p,q) thoả mãn yêu cầu bài toán là: $(3,5)$ và $(5,2)$.

Nhận xét. Lời giải dựa trên ý tưởng của bạn *Trương Khánh Chi*. Một số bạn gửi bài giải nhưng không xét hết điều kiện của bài toán dẫn đến sót nghiệm hoặc thừa nghiệm. Khen bạn duy nhất có lời giải tốt: *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc.**

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/575. *Với n là số nguyên dương lớn hơn 1 và p là số nguyên tố sao cho n là ước số của $p-1$ và p là ước số của n^3-1, chứng minh rằng $4p-3$ là số chính phương.*

Lời giải. Ta có p là số nguyên tố nên $p-1>0$ và $p-1 \vdots n \Rightarrow p-1 \geq n \Rightarrow p \geq n+1$ (1).

Lại có: $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1) \vdots p$ và $0<n-1<p$ nên $n^2+n+1 \vdots p$. Đặt $n^2+n+1=kp$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Nếu $k \geq 2$ và lưu ý $p-1 \vdots n$ nên:

$$k-1=(kp-1)-k(p-1)=(n^2+n)-k(p-1) \vdots n$$

$$\Rightarrow k-1 \geq n \Rightarrow k \geq n+1 \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$n^2+n+1=kp \geq (n+1)^2=n^2+2n+1 \Rightarrow n \leq 0,$$

trái với giả thiết n là số nguyên dương lớn hơn 1.

Do đó $0<k<2$ hay $k=1$. Suy ra $n^2+n+1=p$, nên $4p-3=4(n^2+n+1)-3=4n^2+4n+1$.

Vậy $4p-3=(2n+1)^2$ là số chính phương.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải là kết quả $n^2+n+1=p$. Muốn vậy, ta phải chứng minh $n^2+n+1 \vdots p \Rightarrow n^2+n+1=kp$, $k \in \mathbb{N}^*$, sau đó chứng minh $k=1$.

2) Bạn đọc có thể kiểm tra để thấy có nhiều cặp số (n,p) thoả mãn bài toán chẳng hạn $(n,p)=(2;7)$ hoặc $(n,p)=(3,13),\ldots$

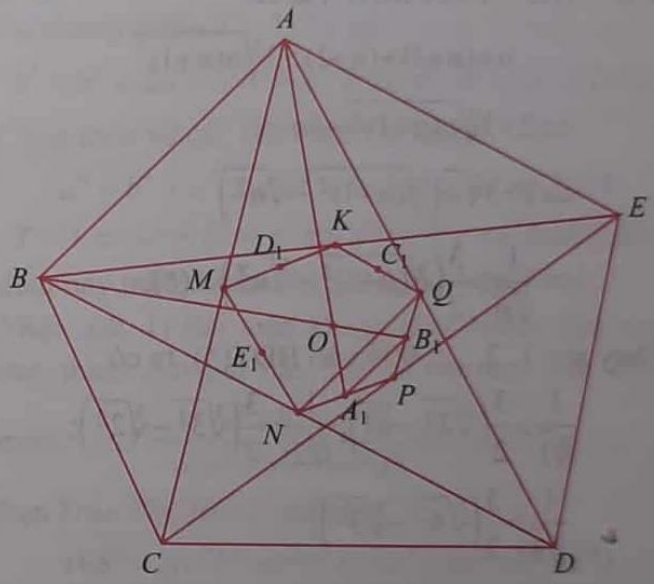
Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP Vĩnh Yên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thanh Mai, Vũ Tuấn Minh*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, *Hà Lê Đức Anh*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Hà Nội:** *Doãn Hải Dương*, 9A6, THCS Thanh Xuân, Q. Thanh Xuân, *Hà Sĩ An*, 8A3, THCS Nguyễn Trãi A, Thường Tín; **Nghệ An:** *Trương Đình Quốc Anh*, 6E, *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 7A, TH & THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Hà Nam:** *Đào Việt Trung*, 8B, THCS Thanh Sơn, TX. Kim Bảng.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/575. *Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q, K lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, CE, DA và EB. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 lần lượt là trung điểm của các đoạn NP, PQ, QK, KM và MN. Tính tỷ số diện tích $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}}$.*

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AA_1 và BB_1. Áp dụng tính chất đường trung bình cho các tam giác NPQ và ABD ta có $A_1B_1 \parallel NQ \parallel AB$ và $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{1}{4}$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{OA_1}{OA}=\dfrac{OB_1}{OB}=\dfrac{1}{4}$.

Tương tự, gọi O_1 là giao điểm của AA_1 và CC_1, ta có $\dfrac{O_1A_1}{O_1A}=\dfrac{O_1C_1}{O_1C}=\dfrac{1}{4}$, dẫn tới $O \equiv O_1$.

Từ đó, xét tương tự với DD_1 và EE_1, ta suy ra AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 đồng quy tại O.

Hơn nữa:

$$\frac{S_{OA_1B_1}}{S_{OAB}}=\frac{S_{OB_1C_1}}{S_{OBC}}=\frac{S_{OC_1D_1}}{S_{OCD}}=\frac{S_{OD_1E_1}}{S_{ODE}}=\frac{S_{OE_1A_1}}{S_{OEA}}=\frac{1}{16}.$$

Kết hợp với tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}}=\frac{1}{16}.$$

Nhận xét. Chỉ có ba bạn có lời giải đúng cho bài toán trên: **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Hà Nội:** *Lại Đình Mạnh*, 8A1, THCS Linh Đàm, *Hà Sĩ An*, 8A3, THCS Nguyễn Trãi A, xã Thường Tín.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/575. *Chứng minh bất đẳng thức sau:*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{999}}>147.$$

Hãy nêu bài toán tổng quát.

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương $n, n+1, n+1$ với $n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$n+(n+1)+(n+1)>3\sqrt[3]{n(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2>3\sqrt[3]{n(n+1)^2}-3n$$

$$\Leftrightarrow 2>3\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right) \quad (*).$$

Thay $n=1, 2, \ldots, 999$ vào BĐT(*), ta có:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}}>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{1}\right);\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2^2}\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{3^2}\right);$$

.....

$$\frac{1}{\sqrt[3]{999}}>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1000^2}-\sqrt[3]{999^2}\right).$$

Cộng theo vế 999 bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{999}}$$

$$>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{3^2}+...+\sqrt[3]{1000^2}-\sqrt[3]{999^2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1000^2}-\sqrt[3]{1}\right)=\frac{3}{2}.99>147.$$

Vậy BĐT của đề bài đã được chứng minh. Từ đó, ta nêu bài toán tổng quát như sau:

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-1\right)$$

với $n\in\mathbb{N}^*$.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là việc phát hiện và chứng minh được bất đẳng thức (*). Các bạn gửi bài về toà soạn đều cho lời giải đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt, lập luận chặt chẽ.

Hà Nội: *Trần Thu Hà*, 8C, THCS Phú Minh, Sóc Sơn; *Nguyễn Thanh Tùng*, 8A8, THCS Hoàng Liệt, Hoàng Mai; *Đỗ Hải Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/575. *Cho hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:*

i) $f(xy)=f(x).f(y)$ với mọi x, y thỏa mãn $(x; y)=1$;

ii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ với mọi số nguyên tố x, y.

Hãy tính $f(2021)$.

Lời giải. Ta có: $f(2021)=f(43).f(47)$.

Thay $x=2, y=3$ vào i) ta có: $f(6)=f(2).f(3)$.

Thay $x=y=3$ vào ii) ta có: $f(6)=2f(3)$.

Suy ra: $2f(3)=f(6)=f(2).f(3)\Rightarrow f(2)=2$.

Từ ii) ta có: $f(4)=f(2)+f(2)=4$;

$f(5)=f(2)+f(3)=2+f(3)$;

$f(7)=f(2)+f(5)=2+f(5)=4+f(3)$;

$f(12)=f(5)+f(7)=6+2f(3)$;

Từ i) ta có: $f(12)=f(3).f(4)=4f(3)$.

Suy ra: $6+2f(3)=4f(3)\Rightarrow f(3)=3$. Khi đó:

$$f(5)=5, f(6)=6, f(7)=7.$$

Suy ra: $f(21)=f(3).f(7)=3.7=21$;

$f(21)=f(2)+f(19)\Rightarrow f(19)=21-2=19$;

$f(22)=f(3)+f(19)=3+19=22$.

Mà $f(22)=f(11)+f(11)=2f(11)\Rightarrow f(11)=11$.

Suy ra: $f(13)=f(2)+f(11)=2+11=13$.

$f(44)=f(4).f(11)=4.11=44$.

$f(41)=f(44)-f(3)=44-3=41.$

$f(43)=f(41)+f(2)=41+2=43.$

$f(52)=f(4).f(13)=4.13=52.$

$f(47)=f(52)-f(5)=52-5=47.$

Vậy $f(2021)=f(43).f(47)=43.47=2021.$

Nhận xét. Vì $2021=43.47$ nên dựa vào tính chất i) và ii) của hàm f ta sẽ tìm được $f(43)$ và f(47) từ đó tìm được $f(2021)$. Các bạn tham gia giải bài này đều có lời giải đúng. Sau đây là danh sách các bạn: **Vĩnh Phúc:** *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đặng Bảo An*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Trần Đức Phát*, *Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1, *Nguyễn Phương Nam*, *Lê Ánh Dương*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; **Lâm Đồng:** *Trương Mỹ Hạnh*, 10 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Vũ Khắc Duy*, 10E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Bình Phước:** *Hồ Dương Đức Đạt*, 11T1, THPT chuyên Bình Long; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh*, *Lê Hoàng Khang*, 10T1, *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An:** *Nguyễn Anh Thư*, *Trần Lê Trọng Phúc*, 10T1, *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu, *Vũ Tiến Phát*, 10A1, THPT Nguyễn Thông; **An Giang:** *Trần Khưu Nhật Anh*, 10T1, *Nguyễn Đức Mạnh*, *Trần Hoàng Bách*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/575. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn có một góc khác 60^0. Chứng minh rằng* $T=\dfrac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ *không phải là số nguyên.*

Lời giải. Đây là bài toán có xuất xứ từ bài toán thi vô địch Ba Lan: *Chứng minh rằng ba đoạn thẳng a,b,c có thể tạo thành ba cạnh của một tam giác khi và chỉ khi*

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>\frac{1}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right) \quad (1).$$

Điều kiện cần: Giả sử a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Ta có:

$$\begin{aligned}&2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)\\&=-a^4+2a^2\left(b^2+c^2\right)-\left(b^2-c^2\right)^2\\&=-\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[a^2-(b+c)^2\right]\\&=(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)(b+c-a)>0.\end{aligned}$$

Điều kiện đủ: Giả sử có (1) cho ba số dương,. nghĩa là có:

$$(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)(b+c-a)>0.$$

Khi ấy: 1) Hoặc cả ba số $a-b+c$; $b+c-a$; $a+b-c$ cùng dương. Khi ấy ba số a,b,c tạo thành ba cạnh của một tam giác.

2) Trong ba số $a-b+c$; $b+c-a$; $a+b-c$ có hai số âm, thí dụ, $a-b+c<0$ và $a+b-c<0$. Khi ấy $a<0$. Vô lí. Vậy ba số a,b,c tạo thành ba cạnh của một tam giác.

Quay trở lại bài toán T7/575. Do (1) nên $T<2$. Ta chứng minh $T>1$. Ta có:

$$a^4+b^4\ge 2a^2b^2;\ b^4+c^4\ge 2b^2c^2;\ c^4+a^4\ge 2c^2a^2.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được:

$$a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\Rightarrow T\ge 1.$$

$T=1\Leftrightarrow a^2=b^2=c^2\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $T>1$.

Nhận xét. 1) Bài toán không khó. Nhiều bạn nhiều tỉnh tham gia giải bài. Tất cả các bạn đều chứng minh: $1\le T=\dfrac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}<2.$

Bạn *Trần Thu Hà* có nhận xét:

$$16S^2=2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

Đây chính là bài thi vào Đại học Hùng Vương năm 2000 (xem: Tạ Duy Phượng, Hoàng Minh Quân: *Phương trình bậc ba với các hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2017, Bài 3.1.72, trang 136).

2) Bạn *Huỳnh Nguyễn Lê Minh* đặt một câu hỏi: khi nào $a^4+b^4+c^4=k\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$, $k\in\mathbb{N}^*$?

3) Tất cả các bài gửi đều có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Trần Thu Hà*, 8C, THCS Phú Minh, Sóc Sơn; *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Phạm Tiến Duy*, 8-16, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Bùi Tùng Lâm*,

10 Toán 1, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong, Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kiên Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá. **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh, Phạm Quang Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Long An:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Nam Định:** *Trần Thanh Hằng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định, **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Lê Ánh Dương*, 11 chuyên toán 2, *Vương Khánh Toàn*, 11 chuyên toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Tiền Giang:** *Võ Đặng Quang Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chí Đại*, 10A1, THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Khang, Thái Minh Phúc*, 10T1, *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

4) Bạn *Trần Thu Hà* phải ghi rõ THCS Phú Minh thuộc Huyện nào, vì có hai huyện (Sóc Sơn và Phú Xuyên, Hà Nội) cùng có THCS Phú Minh.

TẠ DUY PHƯỢNG

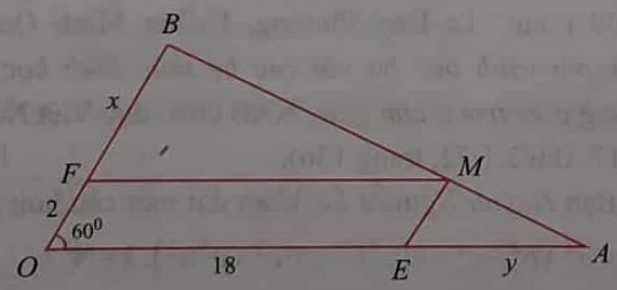
Bài T8/575. *Cho hình bình hành $OEMF$ với $\widehat{O}=60^0$, $OE=18$, $OF=2$. Đường thẳng d đi qua M cắt tia OE, OF lần lượt tại A, B. Xác định độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB.*

Lời giải. Đặt $BF=x$, $AE=y$ $(x,y>0)$.

Ta có $\Delta BFM\sim\Delta MEA$ (g.g), từ đó suy ra:

$AE.BF=ME.MF$ hay $xy=2.18=36$.

Suy ra: $x+4y\ge 2\sqrt{x.4y}=2.2.6=24$.



Áp dụng định lý côsin cho tam giác OAB ta có:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos 60^0$$
$$=OA^2+OB^2-OA.OB$$
$$=(x+2)^2+(y+18)^2-(x+2)(y+18)$$
$$=x^2-14x+y^2+34y+256$$
$$=(x-12)^2+(y-3)^2+10(x+4y)+103$$
$$\ge 10.24+103=343.$$

Suy ra: $AB\ge 7\sqrt{7}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=12, y=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của AB bằng $7\sqrt{7}$ khi $OA=21$, $OB=14$.

Nhận xét. Bài toán này không khó nhưng có ít bạn tham gia giải. Xin nêu tên các bạn có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Ngô Bùi Anh Khoa, Nguyễn Tùng Duy*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 10T2, THPT chuyên ĐH Sư phạm; **Đồng Tháp:** *Hồ Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/575. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$2\sqrt{a^2b+b^2c+c^2a}+2\sqrt{ab^2+bc^2+ca^2}$$
$$\ge 3\sqrt{ab+bc+ca}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Vương Khánh Toàn*, 11 chuyên Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**)

Bình phương hai vế của bất đẳng thức đã cho ta được:

$$4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$
$$+8\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}$$
$$\ge 9(ab+bc+ca)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$+6\sqrt{(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}.$$

Theo bất đẳng thức Schur ta có:

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)$$
$$=a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+abc(a^3+b^3+c^3+3abc)$$
$$\ge a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3$$
$$+abc[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
$$=(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$
$$+2\sqrt{(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$
$$\ge 9(ab+bc+ca)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$, ta có:

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$
$$=3q-3r;$$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$
$$=q^2-6r.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}=9a^2b^2c^2.$$

Suy ra:

$$2\sqrt{(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}\geq 6abc=6r.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$4(3q-3r)+6r\geq 9q+q^2-6r \text{ hay } 3q\geq q^2.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $q\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$.

Chứng minh hoàn tất.

Nhận xét. Bài toán này không khó, nhưng có lẽ sự xuất hiện của bốn biểu thức chứa căn trong đề bài đã làm nản lòng nhiều bạn. Ngoài bạn *Toàn*, các bạn sau đây có lời giải đúng:

Nghệ An: *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T10/575. *Cho hai số nguyên dương m và n. Giả sử các số thực $a_1,a_2,...,a_m$ và $b_1,b_2,...,b_n$ thỏa mãn điều kiện:*

$$[a_1+q]+[a_2+q]+...+[a_m+q]$$
$$=[b_1+q]+[b_2+q]+...+[b_n+q],\ \forall q\in[0;1) \quad (1)$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt qua x. Chứng minh rằng

$$a_1+a_2+...+a_m=b_1+b_2+...+b_n.$$

Lời giải. (Của bạn *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên-Diễn Châu, **Nghệ An**)

$$(1)\Rightarrow\int_0^1\sum_{i=1}^m[a_i+q]dq=\int_0^1\sum_{j=1}^n[b_j+q]dq$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^m\int_0^1[a_i+q]dq=\sum_{j=1}^n\int_0^1[b_j+q]dq \quad (2).$$

Với mỗi số thực u ký hiệu $\{u\}=u-[u]\in[0,1)$.

Ta có: $[u+q]=[u]$ nếu $q\in[0;1-\{u\})$;

$[u+q]=[u]+1$ nếu $q\in[1-\{u\};1)$.

Thành thử:

$$\int_0^1[u+q]dq=\int_0^{1-\{u\}}[u+q]dq+\int_{1-\{u\}}^1[u+q]dq$$
$$=[u]\int_0^{1-\{u\}}dq+([u]+1)\int_{1-\{u\}}^1dq$$
$$=[u](1-\{u\})+([u]+1)\{u\}$$
$$=[u]+\{u\}=u \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\sum_{i=1}^m a_i=\sum_{j=1}^n b_j$

Nhận xét. Lời giải trên ngắn gọn và đặc sắc. Ngoài bạn *Như*, các bạn sau đây có lời giải đúng với các cách khác nhau: **Vĩnh Phúc:** *Trương Khánh Chi*, 7A, THCS Vĩnh Yên; **Gia Lai:** *Lương Xuân Nghĩa*, 10A7, THPT Pleiku; **Bình Phước:** *Hồ Dương Đức Đạt*, 11T1, THPT chuyên Bình Long; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phan Tấn Phát*, 10, PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/575. *Cho dãy số (x_n) thỏa mãn:*

$$x_1=3;\ x_{n+1}=x_n^2-2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Ta xác định dãy (y_n) bởi

$$y_n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}+...+\frac{1}{x_1x_2...x_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Hãy tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

Lời giải. (Dựa theo ý của đa số các bạn)

Dễ nhận thấy dãy số $\{x_n\}$ dương, tăng không bị chặn, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

Ta có: $x_n^2-4=(x_{n-1}^2-2)^2-4=x_{n-1}^2(x_{n-1}^2-4)$.

Do đó (bằng quy nạp) ta có:

$$x_n^2-4=x_1^2x_2^2...x_{n-1}^2(x_1^2-4)=5x_1^2x_2^2...x_{n-1}^2.$$

Suy ra: $x_1x_2...x_{n-1}=\frac{\sqrt{x_n^2-4}}{\sqrt{5}}$

hay $\frac{x_n}{x_1x_2...x_{n-1}}=\frac{x_n\sqrt{5}}{\sqrt{x_n^2-4}}$.

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n\sqrt{5}}{\sqrt{x_n^2-4}}=\sqrt{5}$.

Với $2\le k\in\mathbb{N}$, ta có:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x_k}{x_1x_2\ldots x_{k-1}}-\frac{x_{k+1}}{x_1x_2\ldots x_k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{x_k^2-x_{k+1}}{x_1x_2\ldots x_k}=\frac{1}{2}.\frac{x_k^2-(x_k^2-2)}{x_1x_2\ldots x_k}$$

$$=\frac{1}{x_1x_2\ldots x_k}.$$

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_1x_2\ldots x_k}$

$$=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{x_k}{x_1x_2\ldots x_{k-1}}-\frac{x_{k+1}}{x_1x_2\ldots x_k}\right)$$

$$=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}\right)$$

$$=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{x_1}-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}).$$

Kết luận: $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về tính toán dãy số truy hồi. Đa số các bạn giải theo cách đã trình bày ở trên. Một số bạn sử dụng công thức khai triển $\cos nx=T_n(\cos x)$, $\cosh nx=T_n(\cosh x)$ hoặc $\dfrac{1}{2}\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)=T_n\left(\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ với $T_n(x)$ là đa thức Chebyshev bậc n, cũng cho kết quả đúng và ngắn gọn. Các bạn gửi bài đều cho kết quả đúng.

Gia Lai: *Lương Xuân Nghĩa*, 10A7, THPT Chi Lăng, *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Tĩnh:** *Lê Minh Mạnh*, 11T1, *Phan Viết Lê Huy*, *Bùi Tùng Lâm*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kiên Giang:** *Nguyễn Đức Mạnh*, *Trần Hoàng Bách*, *Nguyễn Hữu Nhanh*, *Thái Đức Huy*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Lâm Đồng:** *Phạm Quang Minh*, *Lê Xuân Hải*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải; **Vĩnh Long:** *Lê Thiện Khiêm*, 11T2, *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/575. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau. Tiếp tuyến chung ngoài d. Đường tròn (O_3) tiếp xúc ngoài (O_1), (O_2) và d. Lần lượt gọi tiếp điểm của (O_1) và (O_2) là B_3, của (O_2) và (O_3) là B_1, của (O_3) và (O_1) là B_2. Gọi tiếp điểm của (O_1), (O_2), (O_3) với d lần lượt là A_1, A_2, A_3. Chứng minh rằng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.*

Lời giải 1. (Theo bạn *Lương Xuân Nghĩa*, 10A7, THPT Chi Lăng, **Gia Lai**)

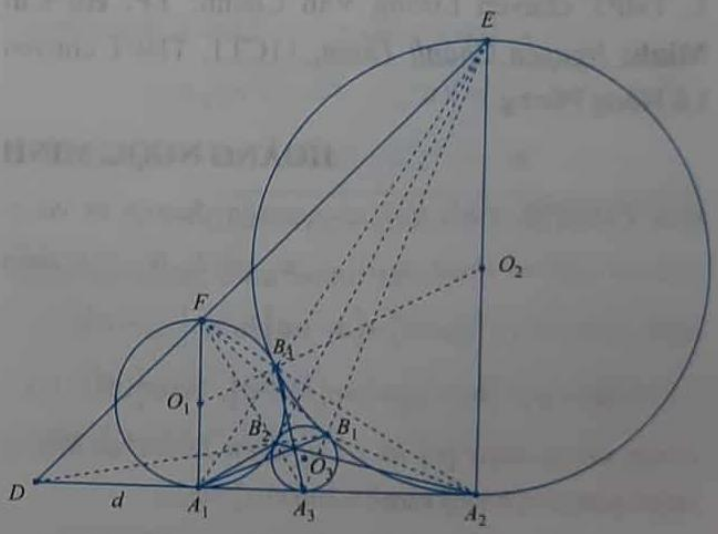
Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Nếu các đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc với nhau tại T và theo thứ tự tiếp xúc với đường thẳng d tại A_1, A_2 thì $\widehat{A_1TA_2}=90^0$.*

Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán T12.

Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của A_3B_1, A_3B_2 và (O_2), (O_1); D là giao điểm của A_1A_2 và B_1B_2 (h.1).



Theo bổ đề trên, ta có:

$$\widehat{A_3B_1A_2}=\widehat{A_3B_2A_1}=\widehat{A_1B_3A_2}=90^0.$$

Do đó các bộ ba điểm (A_2, O_2, E), (A_1, O_1, F) thẳng hàng. Điều đó có nghĩa là các bộ ba điểm (A_1, B_3, E), (A_2, B_3, F) thẳng hàng.

Vậy, chú ý rằng $\widehat{FA_1A_2}=\widehat{EA_2A_1}=90^\circ$, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\mathcal{P}_{F/(O_2)}=\overline{FA_2}.\overline{FB_3}=FA_1^2=\overline{FA_3}.\overline{FB_2}=\mathcal{P}_{F/(O_3)};$$

$$\mathcal{P}_{E/(O_1)}=\overline{EA_1}.\overline{EB_3}=EA_2^2=\overline{EA_3}.\overline{EB_1}=\mathcal{P}_{E/(O_3)}.$$

Do đó FB_1 là trục đẳng phương của (O_2), (O_3) và EB_2 là trục đẳng phương của (O_1), (O_3).

Nói cách khác, FB_1 là tiếp tuyến chung của (O_2), (O_3) và EB_2 là tiếp tuyến chung của (O_1), (O_3).

Vậy, áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix}B_1A_3B_2\\A_3B_2B_1\end{pmatrix}$, ta có D, E, F thẳng hàng.

Từ đó, áp dụng định lí Desargues cho các tam giác $B_1B_2A_3$ và $A_1A_2B_3$, suy ra A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.

Lời giải 2. Gọi $N_{A_3}^{R^2}$ là phép nghịch đảo tâm A_3 và phương tích dương bất kì.

Qua $N_{A_3}^{R^2}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d; các đường tròn (O_1), (O_2) theo thứ tự biến thành các đường tròn (K_1), (K_2); đường tròn (O_3) biến thành đường thẳng (K_3); các điểm A_1, A_2 theo thứ tự biến thành các điểm X_1, X_2; các điểm B_1, B_2, B_3 theo thứ tự biến thành các điểm Y_1, Y_2, Y_3; các đường thẳng A_1B_1, A_2B_2 theo thứ tự biến thành các đường tròn $(A_3X_1Y_1)$, $(A_3X_2Y_2)$; đường thẳng A_3B_3 biến thành đường thẳng A_3Y_3 (h.2).

Gọi S là giao điểm thứ hai của các đường tròn $(A_3X_1Y_1)$, $(A_3X_2Y_2)$.

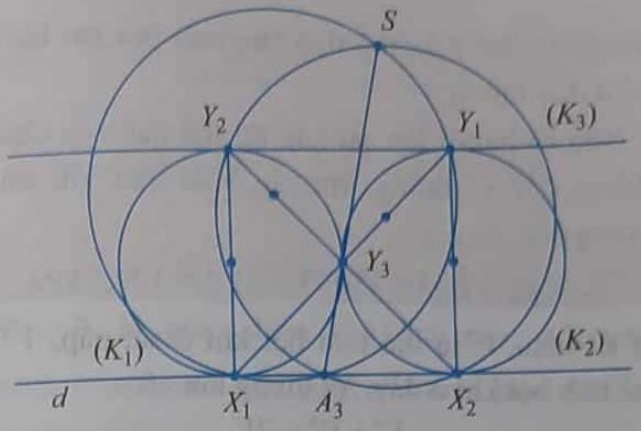
Dễ thấy (K_1), (K_2) tiếp xúc với nhau tại Y_3; (K_1), (K_2) theo thứ tự tiếp xúc với d tại X_1, X_2; (K_1), (K_2) theo thứ tự tiếp xúc với (K_3) tại Y_2, Y_1; (K_2), (K_3) song song với nhau; $X_1X_2Y_1Y_2$ là hình vuông tâm Y_3. Do đó Y_3 là giao điểm của X_1Y_1 và X_2Y_2. Vậy

$$\mathcal{P}_{Y_3/(A_3X_1Y_1)}=\overline{Y_3X_1}.\overline{Y_3Y_1}=\overline{Y_3X_2}.\overline{Y_3Y_2}=\mathcal{P}_{Y_3/(A_3X_2Y_2)}.$$

Điều đó có nghĩa là A_3Y_3 đi qua S. Nói cách khác A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy (tại nghịch ảnh của điểm S qua phép nghịch đảo $N_{A_3}^{R^2}$).

Nhận xét.

1) Bài toán này không khó, tuy nhiên chỉ có 7 bạn tham gia giải.



Hình 2

2) Lời giải 1 cho ta cách dựng đơn giản đường tròn (O_3) sau khi đã có các đường tròn (O_1) và (O_2).

3) Ngoài hai lời giải trên, bài toán còn có hai lời giải khác:

+ Lời giải bằng vectơ (xem ví dụ 21, trang 25, 26, *Tài liệu chuyên toán hình học 10*, NXBGDVN, 2011).

+ Lời giải bằng tứ giác nội tiếp và ba trục đẳng phương của ba đường tròn đồng quy (xem bài toán 130, trang 144 – 256, *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 10* phần hình học, NXBGDVN, 2022).

4) Bạn *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THPT Phủng Chí Kiên, Diễn Châu, **Nghệ An** cũng có lời giải đúng (rất đáng khen) nhưng lại phải dùng phương pháp tọa độ và tính toán bằng lượng giác.

5) Xin nêu tên 5 bạn còn lại: **Phú Thọ:** *Trần Việt Tùng*, 10 toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Trần Hậu Nam Khánh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Long:** *Đặng Thành Trung*, 11T, *Lê Thiệu Khiêm*, 11T9, THPT chuyên Bình Long.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/575. *Một thùng kín có chiều cao h = 3 m chứa đầy nước. Ở đáy thùng có hai bọt không khí thể tích bằng nhau. Áp suất ở đáy thùng là p_0 = 150 kPa.*

a) *Nếu cả hai bọt khí lên sát nắp thì áp suất p_2 ở đáy thùng là bao nhiêu?*

b) *Nếu có một bọt khí đi lên sát nắp, còn bọt khí kia vẫn ở sát đáy, thì áp suất p_1 ở đáy bình là bao nhiêu?*

Lời giải. Gọi V là thể tích của mỗi bọt khí lúc cả hai ở đáy thùng.

a) Nếu cả hai đi lên sát nắp thì thể tích của chúng không đổi vì thùng kín, áp suất của khí cũng không đổi. Vậy

$$p_2 = p_0 + \rho gh = 150 + 1.9,81.3 = 179,5 \text{ kPa}.$$

b) Kí hiệu V' là thể tích bọt khí ở sát nắp, V'' là thể tích bọt khí ở đáy. Vì thùng kín nên:

$$V' + V'' = 2V.$$

Áp dụng định luật Boyle cho bọt ở đáy:

$$p_0 V = p_1 V''.$$

Áp dụng định luật Boyle cho bọt ở nắp:

$$p_0 V = (p_1 - \rho gh)V'.$$

Đặt $p = \rho gh$ rồi giải ba phương trình trên ta được: $p_1^2 - (p_0 + p)p_1 + \frac{1}{2}p_0 p = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm:

$$p_1 = \frac{1}{2}(p_0 + p \pm \sqrt{p_0^2 + p^2}).$$

Ta chọn nghiệm sao cho $p_1 - p > 0$:

$$p_1 = \frac{1}{2}(150 + 29,5 + \sqrt{150^2 + 29,5^2}) = 166 \text{ kPa}.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải đúng bày này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/575. *Một mẫu phóng xạ phát ra 220000 hạt anpha trong ngày đầu tiên và 400000 hạt anpha nữa trong hai ngày kế tiếp. Biết rằng hạt nhân con bền, chu kì bán rã của hạt nhân phóng xạ trong mẫu là bao nhiêu?*

Lời giải. Ta có:

$$N_{\alpha_1} = N_0\left(1 - 2^{-\frac{t_1}{T}}\right); \quad N_{\alpha_2} = N_0 2^{-\frac{t_1}{T}}\left(1 - 2^{-\frac{t_2}{T}}\right)$$

Vì $t_2 = 2t_1$ nên : $\frac{400000}{220000} = \frac{N_{\alpha_2}}{N_{\alpha_1}} = \frac{2^{-\frac{t_1}{T}}\left(1 - 2^{-\frac{t_2}{T}}\right)}{1 - 2^{-\frac{t_1}{T}}}$

$$= \frac{2^{-\frac{t_1}{T}}\left(1 - 2^{-\frac{2t_1}{T}}\right)}{1 - 2^{-\frac{t_1}{T}}} = 2^{-\frac{t_1}{T}} + 2^{-\frac{2t_1}{T}}.$$

Do đó: $\frac{20}{11}2^{\frac{2t_1}{T}} - 2^{\frac{t_1}{T}} - 1 = 0 \Rightarrow 2^{\frac{t_1}{T}} = \frac{11}{40}\left(1 + \sqrt{\frac{91}{11}}\right)$

$$\Rightarrow T = t_1 \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{11}{40}\left(1 + \sqrt{\frac{91}{11}}\right)\right)} \approx 11 \text{ ngày}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu, **Nghệ An**; *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11L5, THPT Thái Phiên, **Đà Nẵng**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

****

PROBLEMS ... *(Tiếp theo trang 19)*

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/579. Find the smallest odd number n such that the number $M = p^8 + np^4 + \frac{n^2 - 1}{4}$ has at least 4 distinct prime factors (where p is any prime number).

Problem T11/579. Find all real numbers x, y, z that satisfy the system of equations: $\begin{cases} [x] + \{y\} = z \\ [y] + \{z\} = x, \\ [z] + \{x\} = y \end{cases}$

where $[.]$ is the integral part and $\{.\}$ is the fractional part of a real number.

Problem T12/579. Given acute triangle ABC ($AB < AC$) inscribed in a circle (O), AD is an altitude of the triangle, and M is the midpoint of BC. Two tangents of (O) at B, C intersect at I. The opposite ray of the ray DA intersects the circle with diameter BC at T. The ray TM intersects the circle (I, IB) at X.

a) Prove that A, O, X are collinear.

b) The circle (XMB) intersects the line segment AB at E, the circle (XMC) intersects the line segment AC at F. Prove that the two circles (AEF) and (I, IB) are tangent to each other.

NGUYEN PHU HOANG LAN

(University of Education, VNU, Hanoi)



ĐIỂM DUMPTY TRONG TAM GIÁC VÀ MỘT SỐ THÍ DỤ ÁP DỤNG

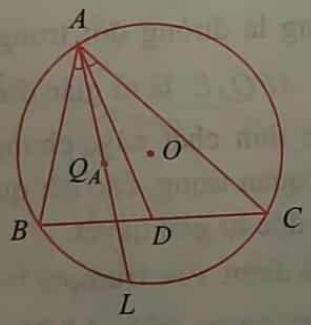
NGUYỄN TRƯỜNG SƠN
(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Trong lịch sử hình học, tam giác hiện lên vừa gần gũi, vừa như cánh cửa mở đưa ta vào kho tàng bí ẩn bất tận của toán học. Từ hình ảnh giản dị ấy, bao điểm đặc biệt đã lần lượt xuất hiện: trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội, ngoại tiếp,... Mỗi phát hiện chẳng khác nào một viên ngọc được đặt lên tòa lâu đài kỳ vĩ của tri thức nhân loại. Hôm nay, chúng tôi xin trân trọng giới thiệu đến bạn đọc một viên ngọc mới mẻ, duyên dáng và đầy thú vị: *điểm Dumpty trong tam giác*.

I. ĐỊNH NGHĨA VỀ ĐIỂM DUMPTY TRONG TAM GIÁC

Cho tam giác ABC, nội tiếp đường tròn (O). Đường đối trung của tam giác xuất phát từ đỉnh A, cắt lại đường tròn (O) tại điểm L. Khi đó trung điểm Q_A của đoạn thẳng AL được gọi là điểm $A-$Dumpty trong tam giác ABC.

Các điểm $B-$Dumpty, $C-$Dumpty được định nghĩa tương tự.



Nhận xét. *Từ định nghĩa này, suy ra điểm Q_A nằm trên đường tròn đường kính AO.*

II. MỘT SỐ TÍNH CHẤT LIÊN QUAN TỚI ĐIỂM DUMPTY

Trong các tính chất của bài báo này, ΔABC là tam giác không cân có trung điểm D của đoạn thẳng BC, Q_A là điểm $A-$Dumpty trong tam giác ABC, L là giao điểm thứ hai của AQ_A với đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC và $Q=AL\cap BC$.

Tính chất 1. *Q_A là điểm Dumpty trong tam giác ABC, khi đó $\widehat{Q_ABA}=\widehat{Q_AAC}$ và $\widehat{Q_ACA}=\widehat{Q_AAB}$.*

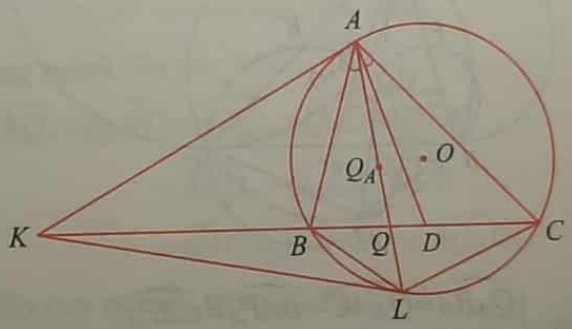
Chứng minh. Xét cấu hình như hình vẽ dưới.

Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại A,L của đường tròn (O).

Do tứ giác $ABLC$ điều hòa nên K thuộc đường thẳng BC.

Suy ra BQ là đường đối trung trong tam giác ABL, do đó $\widehat{Q_ABA}=\widehat{QBL}=\widehat{LAC}=\widehat{Q_AAC}$.

Tương tự, CQ là đường đối trung trong tam giác ACL, do đó $\widehat{Q_ACA}=\widehat{BCL}=\widehat{LAB}=\widehat{Q_AAB}$.



Nhận xét. 1) Từ tính chất 1, ta thấy đường tròn (ϖ_B) ngoại tiếp ΔQ_AAB tiếp xúc với đường thẳng AC tại A và đường tròn (ϖ_C) ngoại tiếp ΔQ_AAC tiếp xúc với đường thẳng AB tại A.

2) Ba điểm Q_A,O,K thẳng hàng.

3) Điểm Q_A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC.

Tính chất 2. *Tồn tại phép vị tự quay tâm Q_A biến BA thành AC.*

Chứng minh. Từ tính chất 1, suy ra $\Delta Q_AAC-\Delta Q_ABA$. Do đó tồn tại phép vị tự quay tâm Q_A biến BA thành AC.

Nhận xét.

1) Từ $\Delta Q_AAC \sim \Delta Q_ABA \Rightarrow \dfrac{Q_AA}{Q_AB}=\dfrac{Q_AC}{Q_AA}=\dfrac{AC}{AB}$

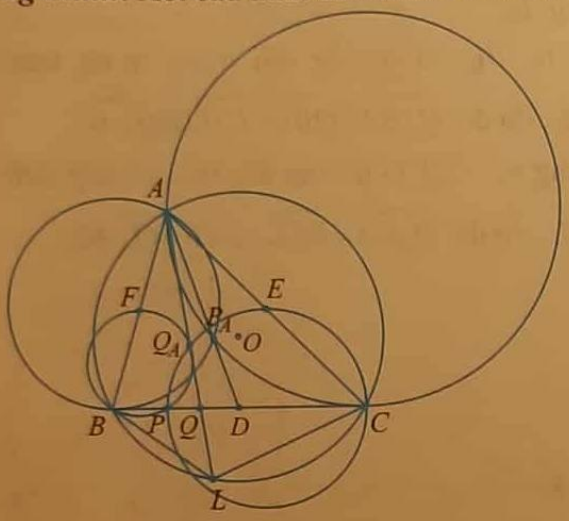
$\Rightarrow Q_AA^2=Q_AB\cdot Q_AC$ và $\dfrac{Q_AC}{Q_AB}=\left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2=\dfrac{QC}{QB}$.

Suy ra Q_AA là đường phân giác của $\widehat{BQ_AC}$. Những điều trên có nhiều ứng dụng thú vị, là chìa khóa giải quyết nhiều bài toán.

2) Các tam giác BLQ_A, BCA, LCQ_A đôi một đồng dạng với nhau.

Tính chất 3. *Các đường tròn qua A tiếp xúc với BC theo thứ tự tại B và C cắt nhau tại điểm thứ hai P_A (điểm này gọi là điểm $A-$Humpty trong tam giác). Khi đó Q_A và P_A liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.*

Chứng minh. Xét cấu hình như hình vẽ dưới.



Ta có: $\begin{cases}\widehat{Q_ABA}=\widehat{Q_AAC}=\widehat{BAP_A}=\widehat{CBP_A}\\ \widehat{Q_ACA}=\widehat{Q_AAB}=\widehat{CAP_A}=\widehat{BCP_A}\end{cases}$.

Suy ra Q_A và P_A liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.

Tính chất 4. *Gọi P là hình chiếu của A lên BC, D,E,F theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BC,CA,AB. Khi đó Q_A thuộc các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BPF, CEP, OQD và AFQ_AE là tứ giác điều hòa.*

Chứng minh.

• Ta chứng minh bốn điểm B,P,F,Q_A đồng viên.

Ta có: $(Q_AB,Q_AF)\equiv(Q_AB,Q_AO)+(Q_AO,Q_AF)$

$\equiv(CB,CO)+(AO,AF)\equiv(BO,BC)+(BA,BO)$

$\equiv(BA,BC)\equiv(PB,PF)(\mathrm{mod}\,\pi)$,

suy ra điều phải chứng minh.

• Ta chứng minh bốn điểm C,P,E,Q_A đồng viên.

Thật vậy: $(Q_AC,Q_AE)\equiv(Q_AC,Q_AO)+(Q_AO,Q_AE)$

$\equiv(BC,BO)+(AO,AE)\equiv(CO,CB)+(CA,CO)$

$\equiv(CA,CB)\equiv(PC,PE)(\mathrm{mod}\,\pi)$,

suy ra điều phải chứng minh.

• Ta chứng minh bốn điểm O,D,Q,Q_A đồng viên.

Thật vậy: $(Q_AO,Q_AQ)\equiv\dfrac{\pi}{2}\equiv(DO,DQ)(\mathrm{mod}\,\pi)$,

suy ra điều phải chứng minh.

• Ta sẽ chứng minh AFQ_AE là tứ giác điều hòa.

Cách 1. Do Q_A nằm trên đường đối trung AL của tam giác ABC nên $\dfrac{d(Q_A,AB)}{d(Q_A,AC)}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AF}{AE}$ (1).

Lại có, tứ giác AFQ_AE nội tiếp đường tròn đường kính AO suy ra:

$$\frac{d(Q_A,AB)}{d(Q_A,AC)}=\frac{AQ_A\sin\widehat{FAQ_A}}{AQ_A\sin\widehat{EAQ_A}}=\frac{FQ_A\sin\widehat{AFQ_A}}{EQ_A\sin\widehat{AEQ_A}}=\frac{FQ_A}{EQ_A}\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{FQ_A}{EQ_A}=\frac{AF}{AE}\Rightarrow FQ_A\cdot AE=EQ_A\cdot AF.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Ta có tứ giác AFQ_AE nội tiếp đường tròn đường kính AO.

Do AQ_A là đường đối trung của tam giác ABC nên AQ_A cũng là đường đối trung của tam giác AEF. Suy ra AFQ_AE là tứ giác điều hòa.

Nhận xét. Từ tính chất này, chúng ta rút ra rất nhiều kết quả quan trọng, các kết quả này coi như bài tập để bạn đọc tự giải quyết.

1) Q_A chính là điểm $P-$ Humpty trong ΔPEF.

2) Đường tròn ngoại tiếp ΔBDL tiếp xúc với đường thẳng AB tại B và đường tròn ngoại tiếp ΔCDL tiếp xúc với đường thẳng AC tại C.

3) Các điểm A,O,D,L,K cùng nằm trên đường tròn đường kính OK trong đó K là giao điểm của các tiếp tuyến tại A,L của đường tròn (O).

4) Hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác QDL, ABC tiếp xúc trong với nhau tại L.

5) Gọi $U=OQ_A\cap AP$, khi đó bốn điểm U,P,Q,Q_A đồng viên.

6) Gọi A' là giao điểm thứ hai của đường thẳng qua A song song BC với đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó ba điểm L,D,A' thẳng hàng.

7) Gọi H' đối xứng với trực tâm H của ΔABC qua BC. Khi đó các điểm L,P,D,H' đồng viên.

8) Gọi V là một điểm bất kì trên BC và $A'V$ cắt lại đường tròn (O) tại S. Khi đó bốn điểm V,P,H',S đồng viên và bốn điểm V,Q,L,S đồng viên.

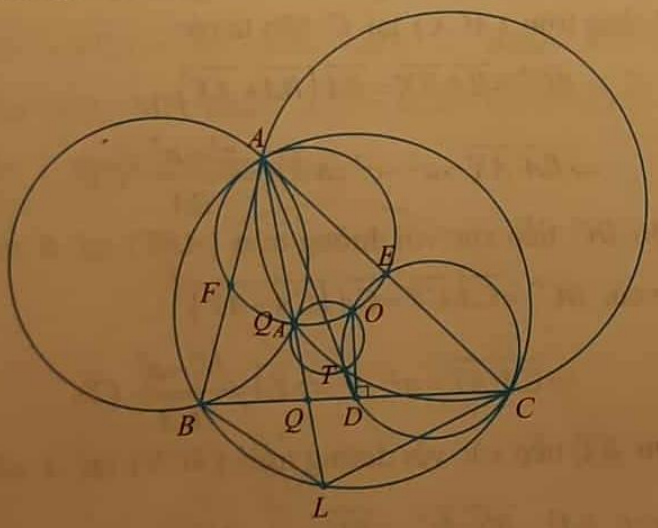
9) Gọi Y là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD với đường tròn ngoại tiếp ΔBHC và X là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B,C của đường tròn (O). Khi đó $P_AQ_A\parallel XY$.

10) Gọi $N=EQ_A\cap BC$, khi đó N thuộc đường tròn (ϖ_B).

11) Hai đường thẳng PQ_A,DL song song với nhau. Từ đó suy ra giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác CEP và CDL nằm trên đường đối trung AL.

Tính chất 5. *Đường tròn (ϖ_C), đường tròn $(CEOD)$ và đường trung tuyến AD cùng đi qua một điểm chung T.*

Chứng minh. Xét cấu hình như hình vẽ dưới đây.



Gọi T là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD với đường tròn $(CEOD)$. Ta sẽ chứng minh T nằm trên đường tròn (ϖ_C).

Ta thấy hai đường tròn $(CEOD)$ và đường tròn (AEF) đối xứng nhau qua đường thẳng OE. Điều này tương đương với chứng minh $\widehat{OET}=\widehat{OEQ_A}$.

Cách 1. Ta có: $\widehat{OAQ_A}=\widehat{OAQ}=\widehat{BAC}-\widehat{BAQ}-\widehat{CAO}$

$=\widehat{BAC}-\widehat{CAD}-\left(90^\circ-\widehat{CBA}\right)$

$=90^\circ-\left(\widehat{CAD}+\widehat{ACB}\right)=90^\circ-\widehat{ADB}=\widehat{ADO}.$

Suyra: $\widehat{OET}=\widehat{TDO}=\widehat{ADO}=\widehat{OAQ_A}=\widehat{OEQ_A}$ (đpcm).

Cách 2. Theo nhận xét trên ta có A,O,D,L đồng viên nên $\widehat{OAQ_A}=\widehat{OAL}=\widehat{OLA}=\widehat{ODA}=\widehat{ODT}=\widehat{OET}$.

Do bốn điểm A,O,E,Q_A đồng viên ta có $\widehat{OAQ_A}=\widehat{OEQ_A}$. Từ đây suy ra đpcm.

Nhận xét. Theo chứng minh trên, suy ra T và Q_A đối xứng với nhau qua đường thẳng OE. Suy ra:

$$\widehat{BAT}=\widehat{CAQ_A}=\widehat{EAQ_A}=\widehat{ECT}=\widehat{ACT},$$

khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác CAT tiếp xúc với đường thẳng AB tại A.

Tính chất 6. *Đường tròn ngoại tiếp tam giác OTQ_A tiếp xúc với đường tròn (ϖ_B).*

Chứng minh. Ta có:

$\widehat{ABQ_A}+\widehat{Q_ATO}=\widehat{ABQ_A}+\widehat{Q_ATA}+\widehat{OTA}$

$=\widehat{ABQ_A}+\widehat{Q_ACA}+\widehat{OCB}$

$=\widehat{BAC}+\widehat{OCB}=90^\circ=\widehat{AQ_AO}.$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

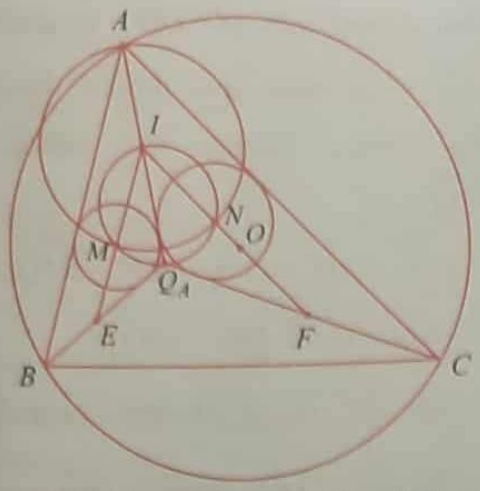
Tính chất 7. *Tam giác ABC nhọn với Q_A là điểm $A-$ Dumpty trong tam giác. Gọi M,N theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABQ_A,ACQ_A. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Khi đó:*

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AQ_A}.$$

Chứng minh.

Gọi I là giao điểm thứ hai của AQ_A với đường tròn (Q_AMN), $E=IM\cap Q_AB,F=IN\cap Q_AC$.

Do Q_A là điểm $A-$ Dumpty trong ΔABC nên $\Delta AQ_AB\sim\Delta CQ_AA$.



Lại có M,N theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABQ_A, ACQ_A nên $\widehat{AQ_AM}=\widehat{CQ_AN}=\widehat{AQ_AN}$, suy ra Q_AI là đường phân giác của $\widehat{MQ_AN}$. Khi đó $IM=IN$. Ta có:

$$\widehat{MIN}=180^\circ-\widehat{MQ_AN}=180^\circ-\widehat{AQ_AC}$$
$$=\widehat{Q_AAC}+\widehat{Q_ACA}=\widehat{BAC}=2\widehat{MAN},$$

suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN.

Kết hợp $\widehat{MQ_AN}=\widehat{AQ_AC}$ với điều sau:

$$\Delta AQ_AM\sim\Delta CQ_AN\Rightarrow\frac{Q_AM}{AQ_A}=\frac{Q_AN}{CQ_A}$$

suy ra: $\Delta NQ_AM\sim\Delta CQ_AA$ (c.g.c).

Khi đó $\widehat{MIQ_A}=\widehat{Q_ANM}=\widehat{Q_ACA}=\widehat{Q_AAB}$, suy ra $AB\parallel IE$. Chứng minh tương tự ta có $AC\parallel IF$.

Từ đây suy ra:

$$\Delta IQ_AM\sim\Delta FQ_AN\Rightarrow\frac{IM}{FN}=\frac{IQ_A}{FQ_A}=\frac{AQ_A}{CQ_A}=\frac{AB}{CA}.$$

Ta có: $\frac{R}{AB}+\frac{R}{AC}+\frac{R}{AQ_A}=\frac{IM}{AB}+\frac{IN}{AC}+\frac{IA}{AQ_A}$

$$=\frac{NF}{AC}+\frac{IN}{AC}+\frac{IA}{AQ_A}=\frac{IF}{AC}+1-\frac{IQ_A}{AQ_A}=\frac{IF}{AC}+1-\frac{IF}{AC}=1,$$

(đpcm).

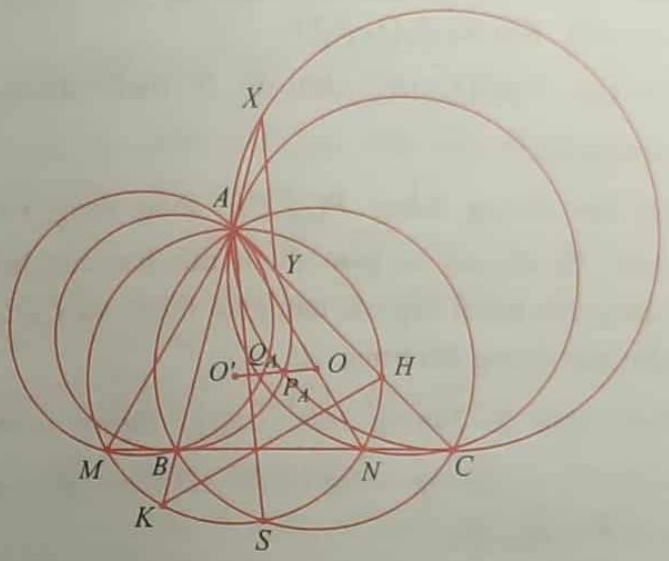
Tính chất 8. *Gọi X là giao điểm thứ hai của đường thẳng AB với đường tròn (AP_AC); Y là giao điểm thứ hai của đường thẳng AC với đường tròn (AP_AB); M,N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của đường thẳng BC với đường tròn $(AQ_AB),(AQ_AC)$. S là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (AMN) với đường tròn (O). Khi đó $AS\parallel XY$.*

Chứng minh. Gọi O' là tâm của đường tròn (AMN) và R,R' theo thứ tự là bán kính đường tròn (O) và (O'). Gọi K,H theo thứ tự là giao điểm thứ hai của đường tròn (O') với các đường thẳng AB,AC.

Do AS là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O') nên $OO'\perp AS$.

Để chứng minh $AS\parallel XY$, ta cần chứng minh:

$$OO'\perp XY\Leftrightarrow XO'^2-YO'^2=XO^2-YO^2$$
$$\Leftrightarrow\left(XO'^2-R'^2\right)-\left(YO'^2-R'^2\right)=\left(XO^2-R^2\right)-\left(YO^2-R^2\right)$$
$$\Leftrightarrow\mathcal{P}_{X/(O')}-\mathcal{P}_{Y/(O')}=\mathcal{P}_{X/(O)}-\mathcal{P}_{Y/(O)}$$
$$\Leftrightarrow\overline{XA}\cdot\overline{XK}-\overline{YA}\cdot\overline{YH}=\overline{XA}\cdot\overline{XB}-\overline{YA}\cdot\overline{YC}$$
$$\Leftrightarrow\overline{XA}\cdot\overline{BK}=\overline{YA}\cdot\overline{CH}$$



Đặt $BC=a,CA=b,AB=c$. Do BC tiếp xúc với đường tròn (ACX) tại C nên ta có:

$$BC^2=\overline{BA}\cdot\overline{BX}=\overline{BA}\cdot\left(\overline{BA}+\overline{AX}\right)$$
$$\Rightarrow\overline{BA}\cdot\overline{AX}=a^2-c^2\Rightarrow\overline{XA}=\frac{c^2-a^2}{\overline{BA}}\ (1).$$

Do BC tiếp xúc với đường tròn (ABY) tại B nên ta có: $BC^2=\overline{CA}\cdot\overline{CY}=\overline{CA}\cdot\left(\overline{CA}+\overline{AY}\right)$

$$\Rightarrow\overline{CA}\cdot\overline{AY}=a^2-b^2\Rightarrow\overline{YA}=\frac{b^2-a^2}{\overline{CA}}\ (2).$$

Do BA tiếp xúc với đường tròn (ACN) tại A nên ta có $BA^2=\overline{BN}\cdot\overline{BC}\Rightarrow\overline{BN}=\frac{c^2}{\overline{BC}}$ (3).

Do CA tiếp xúc với đường tròn (ABM) tại A nên ta có $CA^2=\overline{CM}\cdot\overline{CB}\Rightarrow\overline{CM}=\frac{b^2}{\overline{CB}}$.

Suy ra: $\begin{cases}\overline{BM}=\overline{BC}+\overline{CM}=-\overline{CB}+\dfrac{b^2}{\overline{CB}}=\dfrac{b^2-a^2}{\overline{CB}}\\ \overline{CN}=\overline{CB}+\overline{BN}=\overline{CB}+\dfrac{c^2}{\overline{BC}}=\dfrac{a^2-c^2}{\overline{CB}}\end{cases}$ (4).

Kết hợp (3), (4) và

$$\overline{BK}\cdot\overline{BA}=\overline{BM}\cdot\overline{BN},\overline{CM}\cdot\overline{CN}=\overline{CH}\cdot\overline{CA}$$

suy ra: $\overline{BK}=\dfrac{\overline{BM}\cdot\overline{BN}}{\overline{BA}}=\dfrac{\overline{BA}(b^2-a^2)}{a^2}$ (5)

và $\overline{CH}=\dfrac{\overline{CM}\cdot\overline{CN}}{\overline{CA}}=-\dfrac{\overline{CA}(c^2-a^2)}{a^2}$ (6).

Từ (1) và (5) suy ra:

$$\overline{XA}\cdot\overline{BK}=-\frac{c^2-a^2}{\overline{BA}}\cdot\frac{\overline{BA}(b^2-a^2)}{a^2}$$

$$=-\frac{(c^2-a^2)(b^2-a^2)}{a^2}\quad(7).$$

Từ (1) và (6) suy ra:

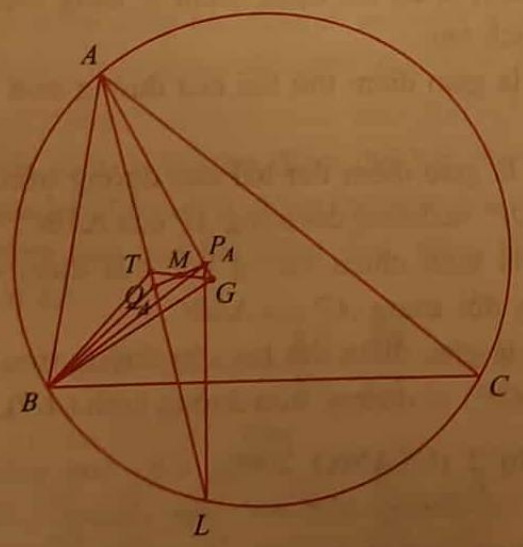
$$\overline{YA}\cdot\overline{CH}=-\frac{b^2-a^2}{\overline{CA}}\cdot\frac{\overline{CA}(c^2-a^2)}{a^2}$$

$$=-\frac{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}{a^2}\quad(8).$$

Từ (7) và (8) suy ra điều phải chứng minh.

Tính chất 9. *Gọi P_A,Q_A,G,T theo thứ tự là các điểm $A-$Humpty, $A-$Dumpty, trọng tâm và điểm Lemoine của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của P_AQ_A. Khi đó ba điểm M,G,T thẳng hàng.*

Chứng minh. Gọi L là điểm đối xứng của P_A qua đường thẳng BC. Vì $\widehat{BLC}=\widehat{BP_AC}=180^\circ-\widehat{BAC}$ nên L thuộc đường tròn (O). Mặt khác: $\widehat{LAB}=\widehat{LCB}=\widehat{P_ACB}=\widehat{P_AAC}$ nên L thuộc đường AQ_A.



Ta có: $\dfrac{TQ_A}{TA}=\dfrac{BQ_A\cdot\sin\widehat{TBQ_A}}{BA\cdot\sin\widehat{TBA}},\dfrac{GA}{GP_A}=\dfrac{BA\cdot\sin\widehat{GBA}}{BP_A\cdot\sin\widehat{GBP_A}}$.

Do $\Delta BQ_AL\sim\Delta BAC\Rightarrow\dfrac{BQ_A}{BP_A}=\dfrac{BQ_A}{BL}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{\sin\widehat{GBC}}{\sin\widehat{GBA}}$.

Suy ra:

$$\frac{TQ_A}{TA}\cdot\frac{GA}{GP_A}\cdot\frac{MP_A}{MQ_A}=\frac{BQ_A\cdot\sin\widehat{TBQ_A}}{BA\cdot\sin\widehat{TBA}}\cdot\frac{BA\cdot\sin\widehat{GBA}}{BP_A\cdot\sin\widehat{GBP_A}}$$

$$=\frac{\sin\widehat{GBC}}{\sin\widehat{GBA}}\cdot\frac{\sin\widehat{GBA}}{\sin\widehat{TBA}}\cdot\frac{\sin\widehat{TBQ_A}}{\sin\widehat{GBP_A}}=1.$$

Áp dụng đinh lí Menelaus đảo vào tam giác AP_AQ_A suy ra ba điểm M,G,T thẳng hàng.

III. MỘT SỐ THÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 1 (Đề thi chọn đội tuyển HSG quốc gia TP. Hà Nội, 2016 – 2017). *Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ với trung tuyến AM. Đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai D. Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại E, đường thẳng AC cắt đường thẳng BD tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE tại hai điểm A và P. Gọi (S_1) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại A, (S_2) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và Q là giao điểm thứ hai của (S_1) và (S_2). Chứng minh rằng:*

a) *Ba điểm A,Q,P thẳng hàng.*

b) *Tam giác OPQ vuông.*

Lời giải. a) Dễ thấy P là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$.

Theo định lý Brocard thì O là trực tâm của ΔEFM, hay $OM\perp EF$ (1).

Lại có: $\overline{EA}\cdot\overline{EB}=\overline{EC}\cdot\overline{ED}\Rightarrow\mathcal{P}_{E/(ABF)}=\mathcal{P}_{E/(DCF)}$,

mà trục đẳng phương của hai đường tròn trên là PF nên ba điểm E,P,F thẳng hàng.

Gọi R là bán kính của đường tròn (O), xét

$$OF^2-OE^2=OF^2-R^2+R^2-OE^2=\mathcal{P}_{F/(O)}-\mathcal{P}_{E/(O)}$$

$$=\overline{FA}\cdot\overline{FC}-\overline{EC}\cdot\overline{ED}=\overline{FP}\cdot\overline{FE}-\overline{EP}\cdot\overline{EF}$$

$$=\overline{FE}\cdot\left(\overline{FP}+\overline{EP}\right)=PF^2-PE^2.$$

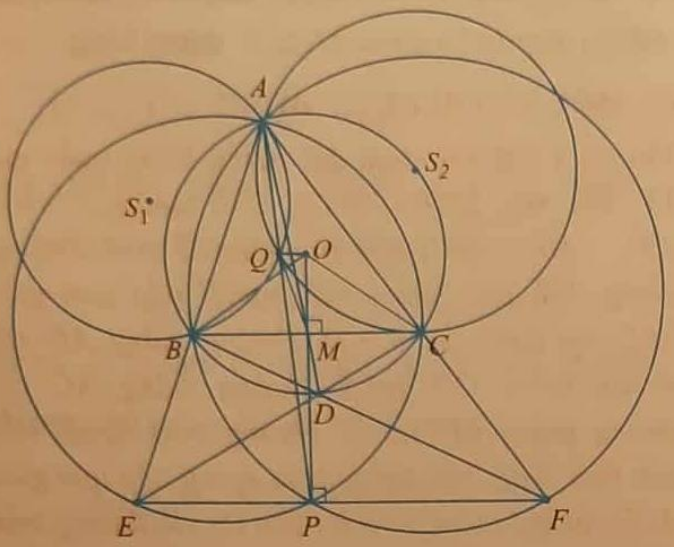
Suy ra $OP\perp EF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm O, M, P thẳng hàng. Mặt khác, OM là đường trung trực của cạnh BC nên $OM \perp BC$, dẫn đến $BC \parallel EF$. Suy ra $\widehat{BAC}=\widehat{BPE}=\widehat{PBC}$ hay PB là tiếp tuyến của (O). Chứng minh tương tự, PC là tiếp tuyến của (O). Hay AP là đường đối trung của ΔABC.

Mặt khác, $\Delta BAQ \sim \Delta ACQ$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{d(Q,AB)}{d(Q,AC)}=\dfrac{AB}{AC}$,

suy ra AQ là đường đối trung của ΔABC.

Từ đây suy ra các điểm A, Q, P thẳng hàng.

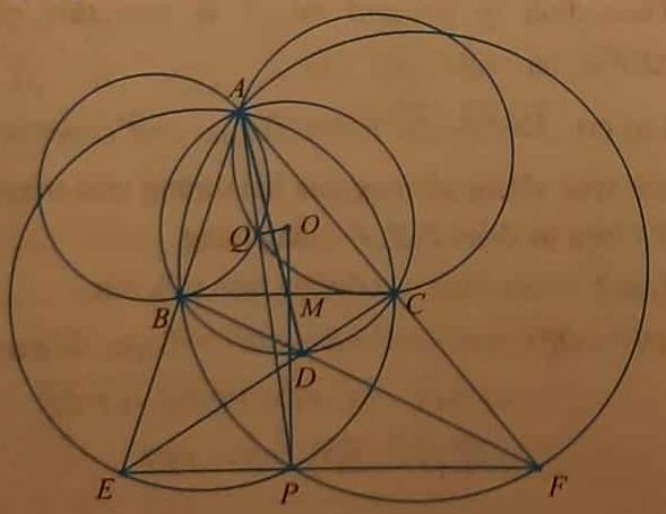


b) ***Cách 1.*** Theo câu a), tứ giác $OBPC$ nội tiếp đường tròn đường kính OP. Suy ra:

$$\widehat{BQC}=360^\circ-\widehat{AQB}-\widehat{AQC}$$
$$=\left(\widehat{QAB}+\widehat{ABQ}\right)+\left(\widehat{QAC}+\widehat{ACQ}\right)=2\widehat{CAB}=\widehat{BOC}.$$

Suy ra điểm Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OBPC$. Dẫn đến $OQ \perp QP$, hay ΔOPQ vuông tại Q.

Cách 2.



Ta có: $(PE,PF)=(PE,PA)+(PA,PF)$

$$=(CE,CA)+(BA,BF)=(CD,CA)+(BA,BD)$$
$$=(CD,CA)+(CA,CD)=0 \pmod{\pi}.$$

Do đó P,E,F thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABM với cát tuyến EDC và cho ΔACM với cát tuyến FBD ta có:

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{CM}}\cdot\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}}=1 \text{ và } \frac{\overline{FA}}{\overline{FC}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}\cdot\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}}=1.$$

Suy ra $\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{FA}{FC} \Rightarrow BC \parallel EF$.

Khi đó $\widehat{PBD}=\widehat{DEP}=\widehat{BCD}$, dẫn đến PB là tiếp tuyến của đường tròn (O). Chứng minh tương tự PC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Gọi Q' là hình chiếu của O trên PA. Khi đó các điểm P,C,B,O,Q' cùng nằm trên đường tròn đường kính PO. Suy ra:

$$\widehat{ABQ'}=\widehat{ABC}-\widehat{Q'BC}=\widehat{ABC}-\widehat{Q'PC}$$
$$=\widehat{ABC}-\widehat{APC}=\widehat{ABC}-\widehat{AEC}=\widehat{BCD}=\widehat{BAD}.$$

Mặt khác, do $BC \parallel EF$ nên

$$\widehat{BAD}=\widehat{BCD}=\widehat{CEP}=\widehat{CAP}=\widehat{CAQ'}.$$

Do đó $\widehat{ABQ'}=\widehat{CAQ'}$. Suy ra AC là tiếp tuyến của đường tròn (ABQ') nên $(ABQ')\equiv(S_1)$.

Chứng minh tương tự $(ACQ')\equiv(S_2)$. Suy ra $Q'\equiv Q$.

Vậy tam giác OPQ vuông tại Q.

Nhận xét. Điểm Q trong bài toán này chính là điểm $A-$ Dumpty trong tam giác ABC. Từ bài toán này, ta có thể dựng điểm Q bằng một trong các cách sau:

a) Q là giao điểm thứ hai của đường tròn (S_1) và (S_2).

b) Q là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính OP và đường đối trung AP của ΔABC.

c) Q là hình chiếu vuông góc của điểm O trên đường đối trung AP của ΔABC.

d) Q là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính (OP) và đường tròn đường kính (AO).

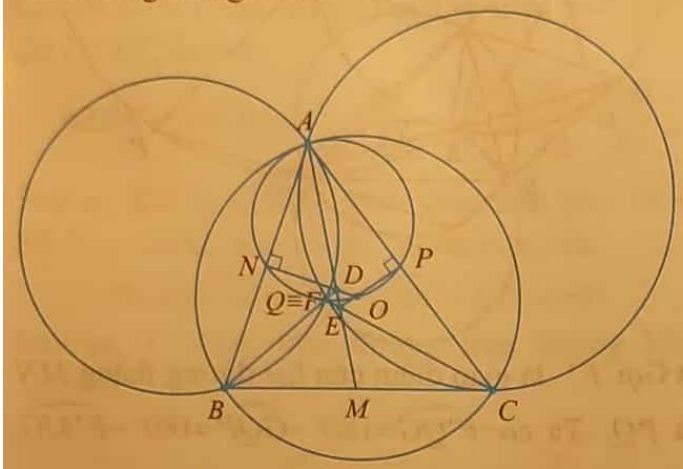
Thí dụ 2 (USAMO 2008). *Cho tam giác ABC nhọn và không cân nội tiếp đường tròn (O), đường trung trực của AB và AC cắt đường trung*

tuyến AM tại D và E tương ứng. Gọi F là giao điểm của BD và CE; N, P lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng bốn điểm N, F, O, P đồng viên.

Lời giải. Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường tròn qua hai điểm A, B đồng thời tiếp xúc với AC và đường tròn qua hai điểm A, C đồng thời tiếp xúc với AB.

Theo bài toán trên ta suy ra AQ là đường đối trung ứng với góc A của ΔABC.

Gọi D', E' theo thứ tự là giao điểm của BQ, CQ với đường thẳng AM.



Ta có: $\widehat{ABQ}=\widehat{QAC}=\widehat{BAD'}$. Từ đó dẫn đến $\Delta D'BA$ cân tại D', suy ra $D'\equiv D$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $E'\equiv E$.

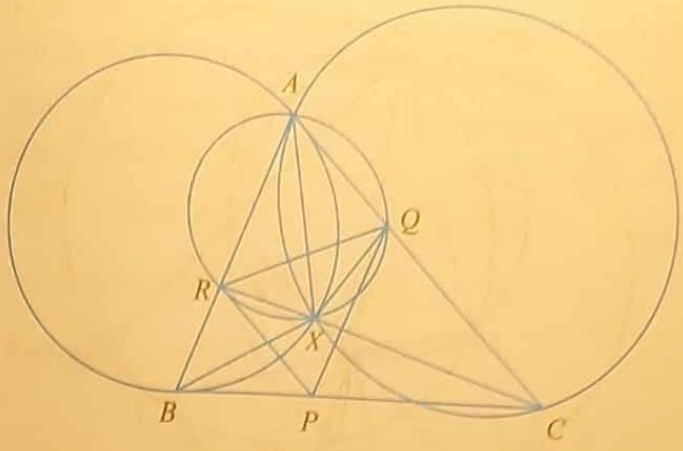
Vì vậy $Q\equiv F$ hay F là điểm $A-$Dumpty trong tam giác ABC nên bốn điểm N, F, O, P cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

Thí dụ 3 (USA TST 2008). *Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi P là điểm thay đổi trên đoạn BC. Điểm Q và R lần lượt nằm trên các cạnh AC và AB sao cho $PQ \parallel AB$ và $PR \parallel AC$. Chứng minh rằng khi điểm P thay đổi trên đoạn BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác AQR luôn đi qua một điểm X cố định thỏa mãn $\widehat{BAG}=\widehat{CAX}$.*

Lời giải. Gọi X là giao điểm thứ hai của đường tròn qua hai điểm A, B đồng thời tiếp xúc với AC và đường tròn qua hai điểm A, C đồng thời tiếp xúc với AB.

Dễ thấy $\Delta AXB \sim \Delta CXA \Rightarrow \dfrac{XB}{XA}=\dfrac{AB}{CA}$. Mặt khác, do $PQ \parallel AB$ và $PR \parallel AC$ nên

$$\frac{BR}{BA}=\frac{BP}{BC}=\frac{RP}{AC}=\frac{AQ}{AC}\Rightarrow\frac{BR}{QA}=\frac{AB}{AC}.$$



Từ đây suy ra: $\dfrac{XB}{XA}=\dfrac{BR}{AQ}$. Lại có $\widehat{ABX}=\widehat{QAX}$ nên $\Delta AQX \sim \Delta BRX$. Suy ra:

$$\widehat{RXQ}=\widehat{AXB}=180^\circ-\widehat{RAQ}.$$

Do đó tứ giác $AQXR$ nội tiếp hay đường tròn (AQR) luôn đi qua điểm X cố định. Do X là điểm $A-$Dumpty trong tam giác ABC nên $\widehat{BAG}=\widehat{CAX}$.

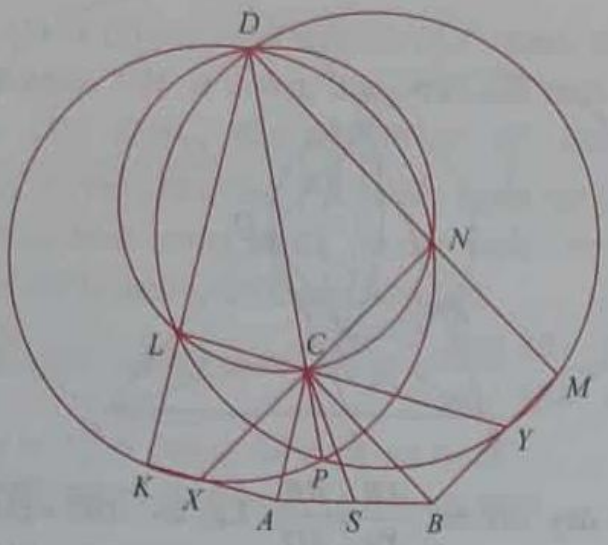
Nhận xét. Lí do chúng ta nghĩ đến cách xây dựng điểm X là khi điểm P suy biến về hai điểm B và C thì đường tròn ngoại tiếp ΔAQR suy biến thành đường tròn qua hai điểm A, B đồng thời tiếp xúc với AC và đường tròn qua hai điểm A, C đồng thời tiếp xúc với AB. Từ đó, theo tính chất 1), dễ thấy điểm cố định cần tìm chính là điểm $A-$Dumpty trong tam giác ABC.

Thí dụ 4 (2013 All-Russian Olympiad). *Dựng các hình vuông $CAKL$ và $CBMN$ được vẽ trên các cạnh của tam giác ABC nhọn và nằm phía ngoài tam giác đó. Đường thẳng CN cắt đoạn AK tại X, đường thẳng CL cắt đoạn BM tại Y. Điểm P nằm trong tam giác ABC là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KXN và LYM. Điểm S là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng $\widehat{ACS}=\widehat{BCP}$.*

Lời giải. Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng KL và MN. Ta thấy D nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔKXN và D nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔLYM.

Suy ra DP là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KXN và LYM.

Do $\Delta ACX \sim \Delta BCY \Rightarrow \dfrac{CX}{CY}=\dfrac{CA}{CB} \Rightarrow CX\cdot CN=CY\cdot CL$.



Khi đó: $\mathcal{P}_{C/(KXN)}=\mathcal{P}_{C/(LYM)}$. Điều này dẫn tới ba điểm P,C,D thẳng hàng.

Mặt khác, $\dfrac{d(D,AC)}{d(D,BC)}=\dfrac{KA}{BM}=\dfrac{AC}{CB}$, hay DP là đường đối trung ứng với đỉnh C của ΔABC hay $\widehat{ACS}=\widehat{BCP}$.

Nhận xét. Điểm P trong bài toán trên chính là điểm $C-$ Dumpty trong ΔABC.

Thí dụ 5 (HSGNB 2018-2019). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Dựng phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABMN$ và $ACPQ$ sao cho tam giác ABN đồng dạng với tam giác CAP. Gọi $G = AQ \cap BM$, $H = AN \cap CP$. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác GMQ và HNP cắt nhau tại E và F (E nằm trong đường tròn (O)). Chứng minh rằng*

a) *E,F,A thẳng hàng.*

b) *B,C,O,E đồng viên.*

Lời giải.

a) Gọi (O_1), (O_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác GMQ và HNP, D là giao điểm của hai đường thẳng BM và CP. Suy ra tứ giác $AGDH$ là hình bình hành. Do đó $\Delta ABN-\Delta CAP\Rightarrow \widehat{ABM}+\widehat{ACP}=180^\circ$, hay tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O).

Suy ra $\widehat{ACB}=\widehat{ADG}$ và $\widehat{BAC}=180^\circ-\widehat{CDB}=\widehat{AGD}$. Điều này suy ra:

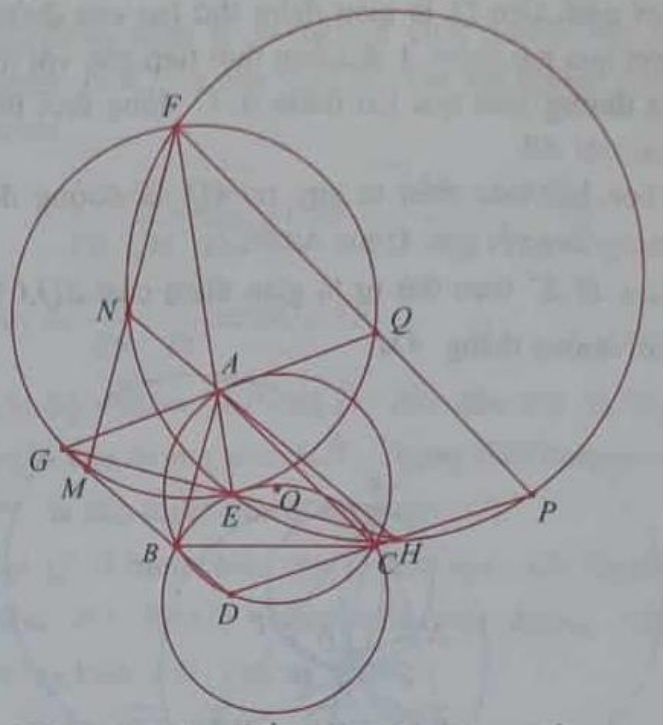
$$\Delta ABC\sim\Delta GAD\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{GA}{GD}=\frac{GA}{AH}\quad(1).$$

Cũng từ $\Delta ABN-\Delta CAP\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AN}{CP}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{GA}{AH}=\frac{AN}{CP}\Rightarrow GA\cdot AQ=AH\cdot AN \text{ hay } \mathcal{P}_{A/(O_1)}=\mathcal{P}_{A/(O_2)}$$

Vậy ba điểm E,F,A thẳng hàng (đpcm).



b) Gọi F' là giao điểm của hai đường thẳng MN và PQ. Ta có $\widehat{F'QG}=180^\circ-\widehat{GQP}=180^\circ-\widehat{F'MG}$ suy ra F' thuộc đường tròn (O_1).

Chứng minh tương tự F' thuộc đường tròn (O_2).

Suy ra $F'\equiv F$. Theo câu a), tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên tứ giác $DMFP$ nội tiếp.

Từ đó suy ra:

$$\widehat{AEG}+\widehat{AEH}=180^\circ-\widehat{BMF}+180^\circ-\widehat{CPF}=180^\circ$$

hay ba điểm G,H,E thẳng hàng.

Dễ thấy các tứ giác $AEBG$, $AECH$ nội tiếp nên $\widehat{BAE}=\widehat{BGE}=\widehat{AHG}=\widehat{ACE}$. Suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAEC.

Tương tự ta chứng minh được AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔABE.

Theo tính chất 1), E là điểm $A-$ Dumpty trong ΔABC. Suy ra bốn điểm B, C, E, O cùng thuộc một đường tròn.

Thí dụ 6 (USA TST 2017). *Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại T. Đường tròn đường kính AT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC tại A_1 và A_2 sao cho $OA_1 < OA_2$. Định nghĩa tương tự với các điểm B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.*

Lời giải. Kẻ các tiếp tuyến của (O) tại A, B, C cắt nhau lần lượt tại X, Y, Z như hình vẽ.

Đường đối trung AX của ΔABC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Gọi M là trung điểm của AD, K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ZBCYXT$. Ta có $ABDC$ là tứ giác điều hòa nên TD là tiếp tuyến của (O). Do đó ba điểm O, M, T thẳng hàng và điểm M nằm trên đường tròn đường kính AT (1).

Mặt khác $\overline{TB}\cdot\overline{TC}=TD^2=TA^2=\overline{TM}\cdot\overline{TO}$, hay điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔOBC (2).

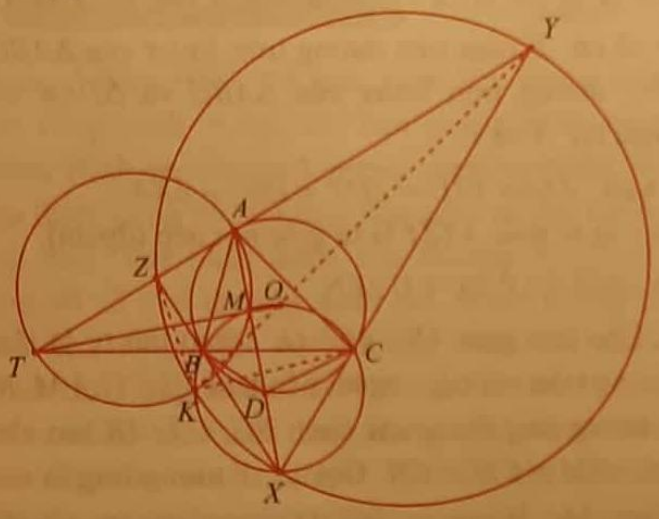
Lại có K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ZBCYXT$, suy ra:

$$\Delta ZBK\sim\Delta YCK(\text{g.g})\Rightarrow\frac{ZK}{ZB}=\frac{YK}{YC}\Rightarrow\frac{YK}{YA}=\frac{ZK}{ZA}.$$

Suy ra KA là đường phân giác của góc $\widehat{YKZ}$. Kết hợp với tứ giác $TKBZ$ nội tiếp suy ra:

$$\widehat{TKA}=\widehat{TKZ}+\widehat{AKZ}=\widehat{XBC}+\widehat{BXO}=90^\circ.$$

Suy ra K nằm trên đường tròn đường kính AT (3).



Từ (1), (2) và (3) suy ra M, K là hai giao điểm của đường tròn đường kính AT và đường tròn ngoại tiếp ΔOBC, hay $K\equiv A_2, M\equiv A_1$. Suy ra AA_1 là đường đối trung của ΔABC. Chứng minh tương tự BB_1, CC_1 là đường đối trung của ΔABC. Do đó ba đường AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Lemoine.

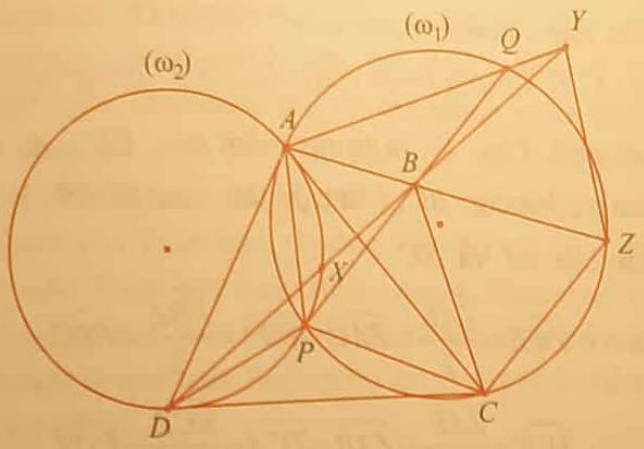
Nhận xét. Điểm M trong bài toán trên chính là điểm $A-$ Dumpty của tam giác ABC. Từ đây ta có thêm một số cách dựng điểm Dumpty:

a) M là giao điểm của đường thẳng TO với đường đối trung AX.

b) M là giao điểm thứ hai của đường thẳng TO với đường tròn ngoại tiếp tam giác OCB.

Thí dụ 7 (Iran TST 2017). *Giả sử rằng P là một điểm nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\widehat{BPC}=2\widehat{BAC}$, $\widehat{PCA}=\widehat{PAD}$, $\widehat{PDA}=\widehat{PAC}$. Chứng minh rằng $\widehat{PBD}=\left|\widehat{PCA}-\widehat{BCA}\right|$.*

Lời giải.



Kí hiệu $(\omega_1), (\omega_2)$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác APC, APD. Q là giao điểm thứ hai của PB với đường tròn (ω_1), DB cắt (ω_2), AQ theo thứ tự tại X, Y. Giả sử rằng Z là điểm thứ hai của AB với (ω_1).

Đặt $\beta=\widehat{PCA}=\widehat{PAD}$, $\theta=\widehat{PDA}=\widehat{PAC}$.

Dễ thấy Y tồn tại, vì nếu ngược lại thì $AQ\parallel DB$, khi đó $\widehat{DXP}=\widehat{AQB}=\widehat{DBP}$. Suy ra $B\equiv X$, khi đó:

$$\widehat{ABD}=\widehat{AXD}=\widehat{APD}=180^\circ-(\beta+\theta).$$

Xét tam giác ABD ta nhận được $\widehat{BAC}+\widehat{ADB}=0^\circ$ thẳng hàng (vô lí)).

Ta có: $\widehat{PQA}=\widehat{PCA}=\widehat{PAD}=\widehat{PXD}$, suy ra tứ giác $PXQY$ nội tiếp. Suy ra: $BX\cdot BY=BP\cdot BQ$.

Lại có $P_{B/(\omega_1)}=BP\cdot BQ=BZ\cdot BA$.

Suy ra $BX\cdot BY=BZ\cdot BA$, hay tứ giác $AXZY$ nội tiếp. Suy ra: $\widehat{AZY}=\widehat{AXY}=180^\circ-\widehat{AXD}$.

Lại có: $\widehat{AXD}=\widehat{APD}=180^\circ-(\beta+\theta)$, suy ra $\widehat{AZY}=\beta+\theta$.

Mặt khác, $\widehat{AZC}=\widehat{PAC}+\widehat{ACP}=\beta+\theta=\widehat{AZY}$. Do đó

$$\widehat{ZAC}+\widehat{ZAY}=\widehat{QAC}=\widehat{BPC}=2\widehat{BAC}\Rightarrow\widehat{ZAC}=\widehat{ZAY}.$$

Từ đó suy ra: $\Delta AZC=\Delta AZY\Rightarrow AC=AY$.

Điều này dẫn tới $\Delta BAC=\Delta BAY\Rightarrow\widehat{ACB}=\widehat{AYB}$.

Vì vậy: $\widehat{PBD}=\widehat{QBY}=\left|\widehat{BQA}-\widehat{BYA}\right|=\left|\widehat{PCA}-\widehat{BCA}\right|$,

điều phải chứng minh.

Nhận xét. Điểm P ở bài toán trên chính là điểm A− Dumpty của tam giác ADC.

Thí dụ 8. *Cho tam giác ABC với Z là điểm A− Dumpty của tam giác. Gọi D,E,F theo thứ tự là điểm đối xứng của Z qua BC,CA,AB. Đường tròn Euler của hai tam giác ABC,AEF cắt nhau tại X,Y. Chứng minh rằng A,Z,X,Y đồng viên.*

Lời giải. Gọi X là trung điểm của EF, A_1 là trung điểm của BC, I là trực tâm của ΔDEF, Y là giao của DI và BC.

Ta có: $\widehat{ZFE}=\dfrac{\widehat{ZAE}}{2}=\widehat{ZAC}=\widehat{ZBA}=\dfrac{\widehat{FBZ}}{2}=\widehat{FDZ}$;

$$\widehat{ZEF}=\frac{\widehat{ZAF}}{2}=\widehat{ZAB}=\widehat{ZCA}=\frac{\widehat{ECZ}}{2}=\widehat{EDZ}.$$

Suy ra Z là điểm $D-Humpty$ của ΔDEF.

Suy ra D,Z,X thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{XAC}=\widehat{FEZ}=\dfrac{\widehat{FAZ}}{2}=\widehat{BAZ}$.

Suy ra AX và AZ đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

Suy ra A,A_1,X thẳng hàng.

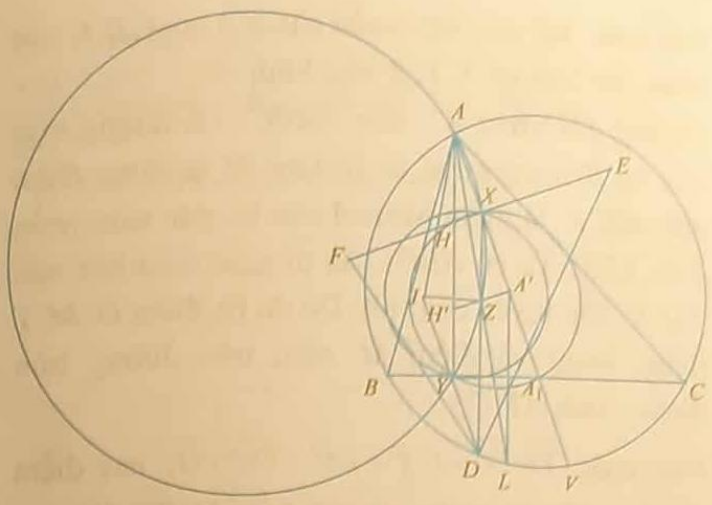
Có Z là điểm D−Humpty của ΔDEF. Suy ra $\widehat{IZD}=90°$. Suy ra $IZ \parallel BC$. Mà BC đi qua trung điểm của ZD. Suy ra BC đi qua trung điểm của ID, qua đó có $YD=YZ=YI$. Suy ra Y nằm trên đường tròn Euler của ΔDEF.

Do Z là điểm $D-Humpty$ của ΔDEF và I là trực tâm của ΔDEF nên tứ giác $EZIF$ nội tiếp đường tròn. Mặt khác tam giác EFZ nội tiếp đường tròn tâm A. Suy ra $AZ=AI$. Suy ra AY là trung trực của ZI.

Suy ra $IZ \perp AY$ hay $BC \perp AY$. Suy ra Y nằm trên đường tròn Euler của ΔABC.

Gọi L là giao điểm thứ hai của AZ với (O). Suy ra Z là trung điểm của AL. Gọi A' đối xứng với A qua EF. Suy ra $A'L \parallel ZD$.

Suy ra $BC \perp A'L$. Gọi giao của AA_1 với (O) là V. Suy ra $VL \parallel BC$ hay $VL \perp AL$.



Do A_1 thuộc trung trực của VL và A_1 nằm trên $A'V$ do đó A_1 là tâm của $(A'LV)$.

Suy ra $A'A_1=VA_1$ do đó $A'BVC$ là hình bình hành.

Suy ra:

$$\widehat{A'CB}=\widehat{CBV}=\widehat{CAV},\ \widehat{A'BC}=\widehat{BCV}=\widehat{BAV}.$$

Do đó A' là điểm A−Humpty của ΔABC.

Gọi H' là trực tâm của ΔABC. Khi đó $\widehat{H'A'A}=90°$. Gọi H là trung điểm của AH'. Khi đó, ta sẽ có $\widehat{HXA}=90°$. Kết hợp với $\widehat{HYA_1}=90°$ ta sẽ có X nằm trên đường tròn Euler của ΔABC. Hay đường tròn Euler của ΔABC và ΔDEF cắt nhau tại X và Y.

Ta có: $\widehat{ZYA}=\widehat{YZD}=\widehat{ZDY}=180°-\widehat{ZXA}$.

Suy ra tứ giác $AXZY$ là tứ giác nội tiếp (đpcm).

IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho tam giác ABC với O, I theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác. Gọi M, N, P tương ứng thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $BP=BM=CM=CN$. Gọi X, Y tương ứng là các điểm M− Humpty, M− Dumpty của tam giác MNP. Chứng minh rằng $IO \parallel XY$.

2. Cho tam giác ABC. Gọi M_A là trung điểm của đoạn nối các điểm A− Humpty và A− Dumpty. Định nghĩa tương tự với M_B, M_C. Chứng minh rằng các điểm M_A, M_B, M_C thẳng hàng.

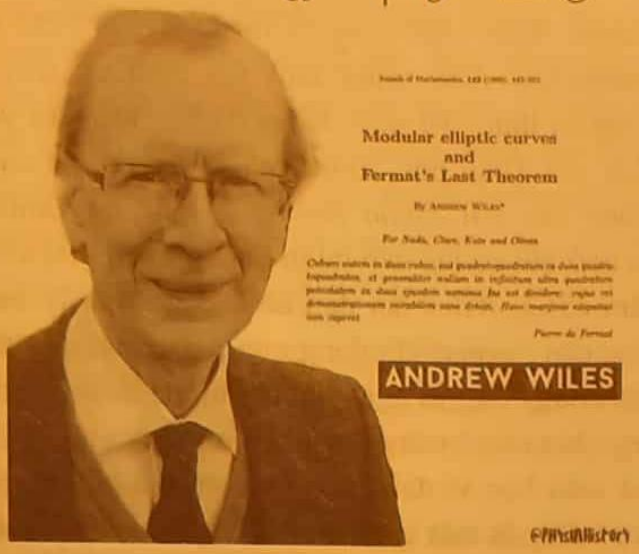
3. Cho tam giác ABC. Các điểm P_A, P_B, P_C là các điểm Humpty của tam giác. Các điểm Q_A, Q_B, Q_C là các điểm Dumpty của tam giác. Gọi N là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác được tạo nên bởi các đường thẳng P_AQ_A, P_BQ_B, P_CQ_C đi qua N.



CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ FERMAT LỚN HÀNH TRÌNH VĨ ĐẠI TRONG LỊCH SỬ TOÁN HỌC

TRẦN HỮU BÌNH NGUYÊN
(HS 12 Toán I, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Hồ Chí Minh)

$$a^n + b^n = c^n$$



Tháng 5 năm 1995, thế giới Toán học chứng kiến một công trình vĩ đại, khi bản chứng minh hoàn chỉnh Định lý Fermat lớn của *Andrew Wiles* lần đầu được công bố, kết thúc tám năm nỗ lực không mệt mỏi. Tuy nhận được giải thưởng Wolfskehl kèm vô số giải thưởng danh giá, *Wiles* không hề đơn độc trong hành trình chứng minh của mình. Thực tế, chứng minh của *Wiles* là kết tinh của rất nhiều công trình nền tảng trong xuyên suốt hơn 350 năm tồn tại của định lí. Bài viết này sẽ cung cấp cho người đọc những thông tin cô đọng nhưng đầy đủ về những đột phá trong chứng minh bài toán này, từ sự tò mò đến phát hiện vĩ đại của tác giả bài toán, cách cộng đồng Toán học sôi sục chỉ do vài dòng chữ, sự bất lực kéo dài sau đó, cho đến một chuỗi những phát hiện quan trọng dẫn đến chứng minh hoàn chỉnh của *Wiles*, từ đó ghi nhận công lao của mọi đóng góp quan trọng trong suốt lịch sử bài toán, không chỉ ở mỗi chứng minh cuối cùng.

Đôi nét về Fermat

Pierre de Fermat sinh ngày 20 tháng 8 năm 1601 ở Beaumont-de-Lomagne thuộc phía Nam nước Pháp. Ông được giáo dục tại tu viện dòng Francisco ở Grandselve, sau đó học tại Đại học Toulouse. Năm 1631, ông trở thành luật sư tại Nghị viện Toulouse, sau đó trở thành thẩm phán tại cùng cơ quan này. Dù bận rộn với nghề luật, ông vẫn dành toàn bộ năng lượng còn lại để nghiên cứu Toán học, thường viết thư trao đổi với các nhà Toán học khác như *Pascal*, *Descartes* và *Mersenne* [1]. *Eric Temple Bell* từng chia sẻ rằng *Fermat* là nhà toán học có bộ óc vĩ đại nhất thế kỉ XVII ([2]).

Những dòng ghi chú trên lề sách

Yêu thích sự riêng tư, *Fermat* hầu như không bao giờ công bố công trình nào. Sau khi ông chết, con trai ông, *Samuel de Fermat*, nhìn thấy giá trị từ những công trình của cha và đã không để chúng bị thất lạc. *Samuel* đã dành thời gian gom góp và công bố những ghi chép quan trọng của *Fermat*. Thực tế, *Fermat* đã có một công trình rất đáng chú ý gọi là Định lí Fermat nhỏ [3]. Tuy nhiên, nhân loại đã biết đến một Bài toán thách thức còn vĩ đại hơn thế dưới những ghi chép như sau ([1], [4]):

"*Không thể phân tách một lập phương thành tổng của 2 lập phương, hay một lũy thừa bậc bốn thành tổng của 2 lũy thừa bậc bốn hay tổng quát, bất kì lũy thừa nào cao hơn bình phương thành tổng của 2 lũy thừa cùng bậc.*" [1, tr. 93]; [2, tr. 88]; [4, tr. 44].

Khá bất ngờ khi *Fermat* lại khẳng định chắc chắn rằng *không tồn tại bất cứ bộ ba nào thỏa mãn phương trình trên*. Không dừng lại ở đó, ông còn viết thêm một câu mà về sau đã trở thành một thách thức ám ảnh các nhà Toán học.

"*Tôi đã tìm được một chứng minh thực sự tuyệt vời, nhưng lề giấy này quá hẹp nên không thể viết hết ra được*" ([1], [4]).

Không ai có thể biết chắc liệu *Fermat* có thật sự có trong tay chứng minh đó hay không. Chỉ biết rằng với những dòng ghi chú đó, *Fermat* đã để lại một trong những Bài toán thách thức vĩ đại nhất lịch sử.

Những viên gạch đầu tiên

Vẻ đẹp của định lý Fermat lớn nằm ở vẻ ngoài đơn giản nhưng không ai, kể cả những bộ óc vĩ đại nhất, có thể chứng minh nó hoàn chỉnh. Sau rất nhiều năm, nhân loại mới chỉ có những bước tiến nhỏ bé. Bản thân *Fermat*, bằng cách sử dụng phương pháp giảm vô hạn cũng đã phác thảo một chứng minh khá đầy đủ cho trường hợp $n = 4$. Ông giả sử tồn tại một nghiệm có dạng (x_1, y_1, z_1). Bằng cách khảo sát tính chất của nghiệm này, *Fermat* có thể chứng minh rằng tồn tại một nghiệm nhỏ hơn thực sự là (x_2, y_2, z_2). Quá trình này tiếp diễn đến vô hạn sẽ suy ra điều vô lý vì x, y, z trong đề bài là các số nguyên dương. *Leonhard Euler* (1707-1783), áp dụng phương pháp giảm vô hạn kết hợp với số phức đã chứng minh cho trường hợp $n = 3$ và thông báo cho nhà toán học *Goldbach* (1690-1764) vào ngày 4/8/1753, đánh dấu bước tiến đầu tiên trong việc chứng minh Định lí. Năm 1828, *Dirichlet* (1805-1859) chứng minh Định lí cho trường hợp $n = 5$. 12 năm sau, *Gabriel Lamé* (1795-1870) chứng minh được với $n = 7$. Tóm lại, ròng rã 2 thế kỷ sau *Fermat*, định lý mới được chứng minh với $n = 3$, 4, 5, 6 và 7 ([1], [4]).

Sự bất lực của các bộ óc

Sự u ám trong việc chứng minh định lí tăng lên khi ngay cả những bộ óc vĩ đại nhất, như *Leonhard Euler*, cũng phải đầu hàng. Trong cuốn sách *Bài toán cuối cùng*, *Eric Temple Bell* (1883-1960) đã viết rằng có lẽ nền văn minh của chúng ta cáo chung trước khi các nhà toán học tìm ra lời giải cho bài toán. Khi sự chú ý vào bài toán ngày càng cạn kiệt, các nhà toán học bắt đầu rẽ sang những hướng đi khác, Định lý đột nhiên gây được sự chú ý trở lại nhờ công của *Paul Wolfskehl* (1856-1906). Chuyện kể rằng sau khi bị từ chối bởi một người phụ nữ không rõ danh tính, ông rơi vào trạng thái tuyệt vọng đến mức muốn kết liễu đời mình. Trước lúc tự vẫn, ông đọc được một công trình của *Kummer* (1810-1893) về định lý Fermat lớn và say mê với nó đến quên cả kết liễu bản thân. Biết ơn Toán học vì đã hồi sinh khát vọng sống, ông dành ra số tiền 100000 Mác (tương đương 1,75 triệu USD bây giờ) làm giải thưởng trao tặng cho ai có thể chứng minh định lý cuối cùng của *Fermat*. [1], [4].

Andrew Wiles

Andrew Wiles sinh ngày 11 tháng 4 năm 1953 tại Cambridge, Anh trong một gia đình có truyền thống tri thức. Từ nhỏ, *Wiles* đã bộc lộ niềm yêu thích với Toán học, từng chia sẻ trong một cuộc phỏng vấn với *Nadia Hasnaoui* rằng ông không thể nhớ nổi có lúc nào mình không thích giải toán. Năm 1963, *Wiles* lần đầu nhìn thấy định lý cuối cùng của *Fermat* khi đang mượn sách tại một thư viện công cộng và ngay lập tức bị mê hoặc bởi nó. Ông nhìn nó vô cùng đơn giản ấy thế mà tất cả các nhà toán học vĩ đại trong lịch sử đều không giải được. Đây là một bài toán mà ông, khi đó 10 tuổi, còn hiểu được, và ông chia sẻ rằng từ thời điểm đó ông sẽ không để cho nó bị sống mất, tức là sẽ phải giải được nó. *Wiles* đã thử mọi phương pháp chứng minh mà ông biết, nhưng đáng tiếc, mọi nỗ lực của ông đều không thành công ([1], [4]).

Năm 1975, *Andrew Wiles* bắt đầu sự nghiệp Toán học với tư cách nghiên cứu sinh tại Đại học Cambridge, dưới sự dẫn dắt của *John Coates* (1945-2022). Dù vẫn hi vọng chứng minh được định lý Fermat lớn, *Wiles* phải tạm gác nó sang một bên để nghiên cứu một lĩnh vực gọi là những đường cong elliptic, thứ được đề nghị bởi chính *John Coates*. *Wiles* nhanh chóng nổi tiếng với những hiểu biết sâu rộng về các phương trình elliptic. Quan trọng hơn, có lẽ *Coates* cũng không ngờ rằng chính sự định hướng này cho *Wiles* đã trang bị cho ông những kiến thức và kỹ thuật cần thiết để chứng minh định lý Fermat lớn ([1], [4]).

Mối liên hệ đột phá

1. *Giả thuyết Taniyama-Shimura*

Năm 1954, *Goro Shimura* (1930-2019), nhà Toán học của Đại học Tokyo có cuộc gặp đầu tiên với *Yutaka Taniyama* (1927-1958). Tháng 9 năm 1955, họ cùng tham dự một hội nghị Toán học

quốc tế tại Tokyo. Tại đây, *Taniyama* đã nêu ra một giả thuyết gây sửng sốt:

Mỗi phương trình elliptic (phương trình dạng $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ lĩnh vực *Wiles* từng nghiên cứu trong lúc làm nghiên cứu sinh) *đều có quan hệ với một dạng modular*, vốn là 2 khái niệm hoàn toàn tách biệt.

Đây là một ý tưởng xuất sắc về trực giác, nhưng các nhà toán học khác chỉ xem là một sự trùng hợp. *Shimura* và *Taniyama* cũng không thể cùng nhau phát triển giả thuyết này thêm đáng kể, bởi vào năm 1958, *Taniyama* đã tự sát. Dù vậy, sau khi ra đời, dù chưa được chứng minh, giả thuyết *Taniyama-Shimura* đã trở thành một mắt xích quan trọng trong thế giới Toán học.

2. *Phát hiện của Frey*

Năm 1984, tại một hội nghị bàn luận về những tiến bộ trong việc chứng minh giả thuyết Taniyama-Shimura, *Gerhard Frey* đã có một phát hiện rất đáng chú ý:

Ông giả sử định lý cuối cùng của Fermat là sai, tức là tồn tại một nghiệm (a, b, c) thỏa mãn phương trình $x^n + y^n = z^n$, trong đó n là số nguyên lớn hơn 2. Trải qua nhiều phép biến đổi, ông rút ra được phương trình đường cong Frey:

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n).$$

Trông có vẻ không liên quan, nhưng thực chất đây cũng là một phương trình có dạng:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Nên nó phải là một phương trình elliptic! Tuy nhiên, *Frey* lại chứng minh rằng đây là một phương trình vô cùng "kỳ quặc", đến mức nó không thể liên quan đến một dạng modular nào. Như vậy, nếu giả thuyết Taniyama-Shimura là đúng, đường cong *Frey* không thể tồn tại, kéo theo định lí Fermat lớn được chứng minh.

Như vậy, *Frey* đã kết nối giả thuyết Taniyama-Shimura với định lý Fermat lớn, nhưng vẫn còn lại một mắt xích còn thiếu. Mãi đến năm 1986, *Ken Ribet* mới chứng minh được rằng phương trình elliptic của *Frey* đủ "kì quặc", tức là nó không bao giờ có thể là modular, qua đó tạo ra kết nối hoàn hảo giữa định lý Fermat lớn và giả thuyết Taniyama-Shimura ([1], [4], [5]).

7 năm làm việc

Năm 1986, *Wiles* lần đầu nghe về mối liên hệ giữa giả thuyết Taniyama-Shimura và định lý cuối cùng của *Fermat*. Ông quyết định từ giờ trở đi sẽ dành toàn bộ thời gian để chứng minh định lý. *Wiles* cũng quyết định giữ bí mật tuyệt đối với mọi người, trừ vợ ông, bà *Nada*. Ông cũng bỏ tất cả công việc không liên quan trực tiếp đến việc chứng minh định lý và tận dụng mọi thời gian để làm việc với nó.

Thời gian đầu tiên, ông dành thời gian luyện tập những kỹ thuật mạnh mẽ nhất cho chứng minh của mình. Ông đã quyết định sử dụng phương pháp quy nạp làm chiến lược tổng quát cho chứng minh. Một thời gian ngắn sau, *Wiles* tìm thấy manh mối đầu tiên trong phép chứng minh theo hướng quy nạp của mình trong công trình của *Evariste Galois*, sử dụng một thứ gọi là các "*nhóm Galois*", dựa trên công trình của *Galois* về lý thuyết nhóm. Hai năm kể từ khi bắt đầu, *Wiles* đã chứng minh được trường hợp cơ sở cho chứng minh quy nạp của mình. Bước tiếp theo là phải mở rộng chứng minh rằng mọi phần tử của các dãy $-E$ đều ăn khớp với phần tử tương ứng trong dãy $-M$. Điều này không hề đơn giản và *Wiles* ngày càng cảm thấy bất lực. Ông đã thử cải tiến lý thuyết Iwasawa, một phương pháp ông được học hồi còn là nghiên cứu sinh tại Đại học Princeton, nhưng vẫn không thành công. Sau 5 năm rỏng nỗ lực trong đơn độc, *Wiles* đã quyết định quay trở lại cuộc sống xã hội để nắm bắt những xu thế Toán học mới. Cuộc gặp với thầy cũ *John Coates* đã cho ông biết về phương pháp Kolyvagin-Flach và ngay lập tức thấy hiệu quả của nó. *Wiles* đã lần đầu nhìn thấy chiến thắng. Tuy nhiên, đến lúc gần như đã hoàn thành, ông lại băn khoăn liệu mình đã thật sự thông thạo phương pháp Kolyvagin-Flach hay chưa. Để đảm bảo không có sai sót, *Wiles* đã phải tiết lộ công việc của mình với *Nick Katz*, một chuyên gia về lĩnh vực này. *Katz* đã đóng vai trò kiểm tra những tính toán liên quan đến phương pháp Kolyvagin-Flach của *Wiles* là hoàn toàn đúng, đồng thời có nghĩa vụ giữ bí mật tuyệt đối. Sau khi được xác nhận là phương pháp đang vận hành tốt, *Wiles* tập trung toàn bộ sức lực hoàn tất

chứng minh và có vẻ như đã thành công. Vậy là đã đến lúc công bố cho phần còn lại của thế giới ([1], [4], [5]).

Thử thách cuối cùng

Buổi hội nghị công bố các nét cơ bản trong chứng minh của *Wiles* diễn ra suôn sẻ, việc còn lại duy nhất là tiến hành kiểm tra thật kỹ bản thảo chứng minh dài 200 trang bằng một quá trình phản biện dài. *Wiles* đã giải đáp được hầu hết thắc mắc của giới chuyên môn, nhưng nhanh chóng nhận ra trong chứng minh có một lỗi logic cơ bản sau khi nhận phản hồi từ chính *Nick Katz*. Trước khi phải thừa nhận sai lầm, *Wiles* quyết tâm dốc hết sức sửa chữa chứng minh đó, nhưng không tìm thấy hi vọng sau 6 tháng đầu. *Wiles* đành viết email trì hoãn 6 tháng nữa sẽ công bố bản thảo đầy đủ, nhưng mọi chuyện vẫn không có gì khả quan. Trong lúc đó, thế giới Toán học bùng lên những tin đồn về việc chứng minh đã mắc một lỗi nghiêm trọng. Một số người gây áp lực buộc *Wiles* công bố nhiều hơn bản thảo của chứng minh để người khác có cơ hội xem xét. Sau 8 tháng tiếp theo nỗ lực liên tục, *Wiles* đã chuẩn bị chấp nhận đầu hàng. Nhưng trước đó, ông đã dành trọn vẹn tháng 9 để nhìn lại một lần nữa tại sao phương pháp Kolyvagin-Flach lại không vận hành tốt như mong muốn. Và rồi, hoàn toàn bất ngờ, *Wiles* đã có một phát hiện kì diệu: Dù phương pháp Kolyvagin-Flach không vận hành được, nó là "*tất cả những gì ông cần để làm cho lý thuyết Iwasawa mà ông sử dụng 3 năm trước trở nên áp dụng được*". Vậy là sau 8 năm nỗ lực không mệt mỏi, đặc biệt là khoảng thời gian cuối cùng đầy đau đớn, *Wiles* đã có một phát hiện xuất sắc kết thúc những chuỗi ngày đen tối trên ([1], [4], [5]).

Trái ngọt

Lần này chứng minh của *Wiles* hoàn toàn ổn. Sau khi vượt qua vòng phản biện vô cùng kỹ lưỡng, hai bài báo dài 130 trang đã được đăng trên tạp chí Annals of Mathematics vào tháng 5 năm 1995. *Wiles* một lần nữa xuất hiện trên khắp các mặt báo, nhận vô số lời khen ngợi. Chứng minh của *Wiles* là một chiến công tuyệt vời khi đã "*kết hợp những đột phá trong lý thuyết số của thế kỷ XX với những kỹ thuật truyền thống theo cách chưa bao giờ được xem là khả thi*".

Wiles cũng chia sẻ trong một cuộc phỏng vấn với chương trình Nova: "*Tôi bị ám ảnh với bài toán này trong suốt 8 năm, đến mức lúc nào tôi cũng nghĩ về nó – từ lúc tôi thức dậy vào buổi sáng đến khi đi ngủ vào ban đêm. Đó là một thời gian dài chỉ suy nghĩ về một điều. Cuộc phiêu lưu ấy giờ đã qua rồi. Trí óc của tôi hiện đang được nghỉ ngơi*" ([1], [4]).

Lời kết

Định lý Fermat lớn không chỉ vĩ đại bởi độ khó không tưởng ẩn dưới sự dễ hiểu khác thường, mà còn trở nên đẹp hơn nhờ những con người đã dốc tâm huyết chinh phục nó. Hành trình 358 năm tìm lời giải là một cuộc phiêu lưu vĩ đại, nơi những bộ óc kiệt xuất cùng nhau cống hiến trí lực cho một thách thức toán học lớn. Thành công trong việc chứng minh định lí này có lẽ không phải của riêng *Andrew Wiles*, mà là kết tinh rực rỡ của trí tuệ nhân loại qua nhiều thế kỷ, là minh chứng cho thấy sự bền bỉ, kiên cường của các nhà toán học nói riêng và con người nói chung trong việc đối diện với khó khăn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Singh S., (2013). *Fermat's last theorem*. Harper Collins Publisher.

2. Bell, E. T. (1937). *Men of Mathematics* [Internet Archive edition]. Retrieved August 14, 2025, from Internet Archive: https://archive.org/details/MenOfMathematics/page/n55/mode/2up?view=theater&q=fermat

3. Chernick, J. (1939). *On Fermat's simple theorem*. Bulletin of the American Mathematical Society, 45(4), 269-274.

4. Lê Quang Ánh (2018). *Định lý cuối cùng của Fermat*. Nhà xuất bản Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.

5. Cox, D. A. (1994). *Introduction to Fermat's last theorem*. The American Mathematical Monthly, 101(1), 3-14.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 120

PROBLEM. *Each student of class 12A is a friend of exactly 7 students of class 12B, and each student of class 12B is a friend of exactly 6 students of class 12A. Given that the total number of students in the two classes is 65, calculate the number of students in each class.*

Solution: Suppose that class 12A has m students and class 12B has n students.

Let M be an $m \times n$ matrix (a rectangular array of m rows and n columns). Denote by a_{ij} the element in the position determined by the i^{th} row and the j^{th} row.

We let $a_{ij}=1$ if the i^{th} student of the class 12A and the j^{th} student of the class 12B are friend and $a_{ij}=0$ otherwise.

For each row we have exactly 7 numbers 1 and for each column we have exactly 6 numbers 1. Hence $7m = 6n$ (1). On the other hand, $m + n = 65$ (2).

From (1) and (2) we can get $m = 30$ and $n = 35$.

Remark: This problem is proposed by teacher *Nguyen Manh Quyen*, High school for gifted students Nguyen Chi Thanh, Dak Nong. The first approach was provided in the previous issue

TỪ VỰNG / KÍ HIỆU

matrix : *ma trận (bảng chữ nhật gồm các số)*

row : *hàng*

column : *cột*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 118

BÀI TOÁN. *Tìm tất cả các số thực x sao cho*

$$10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x.$$

Lời giải. Dễ dàng kiểm tra rằng $x = 2$ là một nghiệm. Chúng ta sẽ chứng minh đây là nghiệm duy nhất. Thật vậy, chia hai vế của phương trình cho 13^x ta được: $\left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x$.

Vế trái là hàm số giảm theo x, còn vế phải là hàm số tăng theo x. Do đó, đồ thị của hai hàm này chỉ có thể cắt nhau tại nhiều nhất một điểm.

Bình luận: Tổng quát hơn,

$$a^2 + (a+1)^2 + \ldots + (a+k)^2 = (a+k+1)^2 + (a+k+2)^2 + \ldots + (a+2k)^2$$

với $a = k(2k+1), k \in \mathbb{N}$.

Chú ý: Bài tập này được chọn từ cuốn sách: *101 bài toán đại số* trong chương trình huấn luyện của đội tuyển Olympic Toán Mỹ – Tác giả: T. Andreescu, Z. Feng.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn: *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo**, *Hồ Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**, *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã có bài dịch tốt.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

SAI LẦM . . . (*Tiếp trang 47*)

Ta có: $\sin 4x + \sin 2x + 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x.\cos x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin 3x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin 3x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác bởi 2 điểm; Họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác bởi 3 điểm. Do đó nghiệm của phương trình biểu diễn trên đường tròn lượng giác bởi 5 điểm. Chọn **C**.

Theo em lời giải của Hùng đã đúng chưa, nghiệm của phương trình biểu diễn trên đường tròn lượng giác bởi bao nhiêu điểm?

NGUYỄN THANH GIANG
(*Trường THPT chuyên Hưng Yên*)



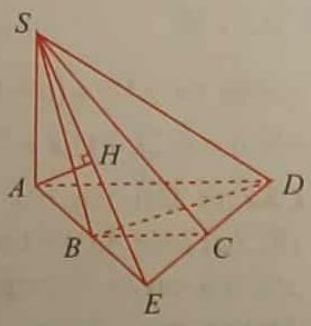
BÀI TOÁN 99. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD//BC$, $AD=2a$, $AB=BC=CD=a$, $SA\perp(ABCD)$.*

Biết $d(A,(SBD))=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải. ***Cách 1.*** Kéo dài AB và CD cắt nhau tại $E\Rightarrow(SAB)\cap(SCD)=SE$.

Gọi $\varphi=\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right)=\left(\widehat{(SAE),(SDE)}\right)$, khi đó:

$$\sin\varphi=\frac{3V_{SADE}.SE}{2S_{\Delta SAE}.S_{\Delta SDE}}.$$



Do $BC=\dfrac{1}{2}AD\Rightarrow B,C$ lần lượt là trung điểm của AE,DE, hay tam giác ADE đều cạnh $2a$.

$\Rightarrow BD\perp AE\Rightarrow BD\perp(SAB)$. Kẻ $AH\perp SB$ tại H

$\Rightarrow AH\perp(SBD)\Rightarrow d(A,(SBD))=AH=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

ΔSAB vuông tại A có $AB=a$, $AH=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\Rightarrow SA=a$

$\Rightarrow S_{\Delta ADE}=a^2\sqrt{3}\Rightarrow V_{SAED}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ADE}.SA=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$;

$SE=\sqrt{SA^2+AE^2}=a\sqrt{5}$; $S_{\Delta SAE}=\dfrac{1}{2}SA.AE=a^2$.

ΔSDE cân tại $S\Rightarrow SC\perp DE$

$\Rightarrow SC=\sqrt{SE^2-EC^2}=2a\Rightarrow S_{\Delta SDE}=\dfrac{1}{2}SC.DE=2a^2$.

Vậy $\sin\varphi=\dfrac{3.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{5}}{2.a^2.2a^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\Rightarrow\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\dfrac{1}{4}$.

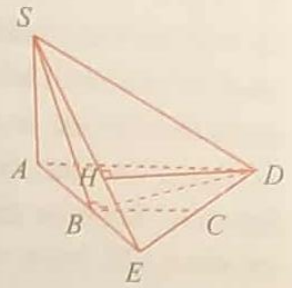
Cách 2. $\sin\varphi=\dfrac{d(D,(SAE))}{d(D,SE)}$. Ta có:

$\begin{cases}DB\perp AE\\DB\perp SA\end{cases}\Rightarrow DB\perp(SAB)\Rightarrow d(D,(SAB))=DB=a\sqrt{3}$.

Kẻ $DH\perp SE\Rightarrow d(D,SE)=DH$. Ta có:

$DH.SE=SC.ED$

$\Rightarrow DH=\dfrac{SC.ED}{SE}=\dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.



Vậy

$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Cách 3. Ta có: $(SAB)\cap(SCD)=SE$.

Kẻ $DH\perp SE$ (1). Vì $\begin{cases}BD\perp AB\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAB)$

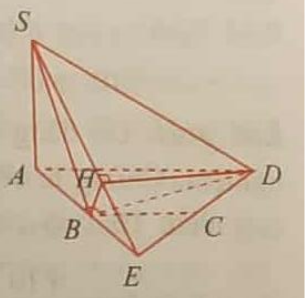
$\Rightarrow BD\perp SE\Rightarrow SE\perp(BDH)\Rightarrow SE\perp BH$ (2).

ΔADE đều cạnh $2a\Rightarrow BD=a\sqrt{3}$. Từ (1), (2) suy ra: $\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right)=\left(\widehat{BH,DH}\right)=\widehat{DHB}$.

$\Delta EHB\sim\Delta EAS\Rightarrow\dfrac{HB}{SA}=\dfrac{EB}{SE}$

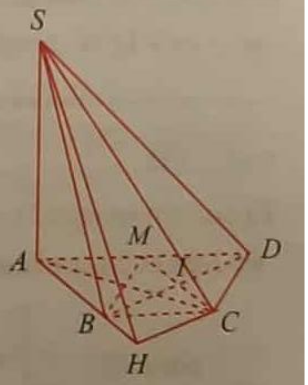
$\Rightarrow HB=\dfrac{EB.SA}{SE}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow HD=\sqrt{BH^2+BD^2}=\dfrac{4a}{\sqrt{5}}$



$\Rightarrow\cos\varphi=\cos\widehat{BHD}=\dfrac{BH}{DH}=\dfrac{1}{4}$.

Cách 4. Ta có: $BD\perp(SAB)$. Kẻ $CH//BD$ với $H\in AB\Rightarrow CH\perp(SAB)\Rightarrow\Delta SBH$ là hình chiếu vuông góc của ΔSCD trên mp(OAB). Gọi M là trung điểm của AD. Gọi $I=MC\cap BD\Rightarrow IBHC$ là hình chữ nhật



$\Rightarrow BH=CI=\dfrac{a}{2}$.

Ta có:

$S_{\Delta SBH}=\dfrac{1}{2}SA.BH=\dfrac{a^2}{4}$.

Lại có: $\begin{cases}DC\perp AC\\DC\perp SA\end{cases}\Rightarrow DC\perp(SAC)$

$\Rightarrow CD\perp SC\Rightarrow S_{\Delta SCD}=\dfrac{1}{2}SC.CD$.

$AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=a\sqrt{3}$, $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2a$

$\Rightarrow S_{\Delta SCD}=a^2$. Vậy $\cos\varphi=\dfrac{S_{\Delta SBH}}{S_{\Delta SCD}}=\dfrac{1}{4}$.

Nhận xét. Nếu xác định được giao tuyến SE thì có thể sử dụng công thức $\cos\varphi=\dfrac{S_{\Delta SBE}}{S_{\Delta SDE}}$ thì việc tính toán sẽ trở nên nhẹ nhàng hơn.

Cách 5. Ta có: $BD\perp(SAB)$ (1). Kẻ $AH\perp SC$ tại $H\Rightarrow AH\perp CD\Rightarrow AH\perp(SCD)$. Gọi $F=AC\cap BD$. Kẻ $FE//AH$ $(E\in SC)\Rightarrow FE\perp(SCD)$ (2).

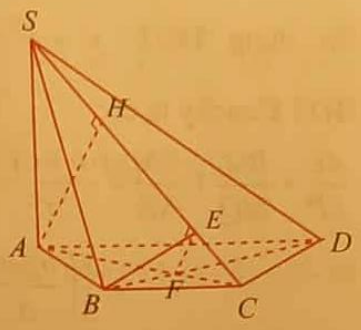
Từ (1), (2) $\Rightarrow\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right)=\left(\widehat{FB,FE}\right)=\varphi$.

$\Delta FBC\sim\Delta FDA$ (g.g)

$\Rightarrow\dfrac{FB}{FD}=\dfrac{FC}{FA}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow BF=\dfrac{1}{3}BD=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow FA=\sqrt{AB^2+BF^2}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$



$\Rightarrow FC=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $AH=\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Delta CFE\sim\Delta CAH$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{CF}{CA}=\dfrac{FE}{AH}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow FE=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow EC=\sqrt{FC^2-FE^2}=\dfrac{a}{2}$. ΔSBC có $BC=a$, $SB=a\sqrt{2}, SC=2a\Rightarrow\cos\widehat{SCB}=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow BE=\sqrt{CE^2+CB^2-2CE.CB.\cos\widehat{ECB}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

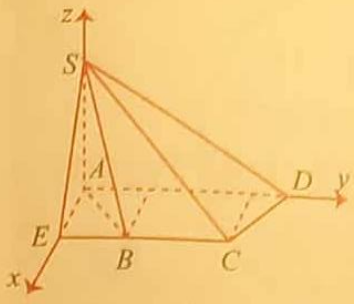
Vậy $\cos\varphi=\left|\cos\widehat{BFE}\right|=\left|\dfrac{BF^2+FE^2-BE^2}{2BF.FE}\right|=\dfrac{1}{4}$.

Cách 6. Dựng hình thang $AECD$ vuông tại A và E. Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó:

$A(0;0;0)$, $E\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), D(0;2a;0), S(0;0;a)$,

$B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right), C\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{3a}{2};0\right)$.

Gọi $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).



Ta có:

$\overrightarrow{AS}=(0;0;a)$,

$\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$,

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}\right]=\left(-\dfrac{a^2}{2};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2};0\right)$. Lấy $\vec{n_1}=(-1;\sqrt{3};0)$.

$\overrightarrow{SC}=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{3a}{2};-a\right), \overrightarrow{SD}=(0;2a;-a)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(\dfrac{a^2}{2};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2};a^2\sqrt{3}\right)$. Lấy $\vec{n_2}=(1;\sqrt{3};2\sqrt{3})$.

Gọi $\varphi=\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right)$, ta có:

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n_1};\vec{n_2}\right)\right|=\frac{\left|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|.\left|\vec{n_2}\right|}=\frac{1}{4}.$$

Cách 7. Dựng mp(BMN) // mp(SCD). Khi đó góc giữa mp(SAB) và mp(SCD) cũng chính là góc giữa mp(SAB) và mp(BMN). Khi đó ta có thể dùng 1 trong 6 cách trên để giải.

NGUYỄN HỮU VĂN
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

HOÀNG THÀNH ĐẠT
(GV THPT Thanh Chương 3, Nghệ An)

Nhận xét. Bạn *Vũ Đức Duy*, CTy TNHH Thuế và Tư vấn PwC Việt Nam đóng góp một cách giải tương tự như cách 7 trong lời giải trên của hai bạn *Nguyễn Hữu Văn* và *Hoàng Thành Đạt*, những người giới thiệu bài toán. Xin hoan nghênh bạn.

NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 101 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/10/2025.

BÀI TOÁN 101. *Giải phương trình nghiệm nguyên:* $x^2+xy-2y+1=0$.

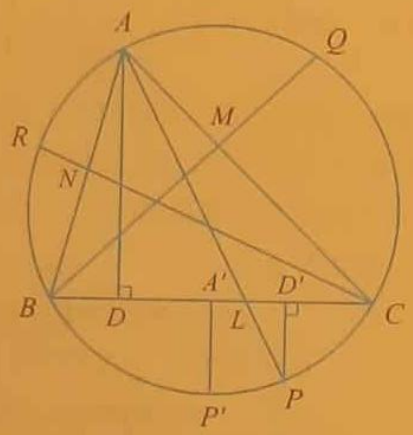
NGUYỄN TRI PHƯƠNG
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)



BÀI TOÁN 107 (Korea 1995). *Cho tam giác ABC và các điểm L, M, N thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của AL, BM, CN với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\geq 9.$$

Lời giải. Kí hiệu $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.



Gọi A' là trung điểm của BC, P' là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$. Gọi D và D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và P trên BC.

Rõ ràng là: $\frac{AL}{LP}=\frac{AD}{PD'}\geq\frac{AD}{P'A'}$. Vì vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}$ đạt được khi P, Q, R lần lượt là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$. Điều này xảy ra khi AL, BM, CN lần lượt là phân giác trong các góc A, B, C của tam giác ABC. Do AL là phân giác trong của góc A nên: $\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{BL}{CL+BL}=\frac{c}{b+c}$

$$\Leftrightarrow\frac{BL}{BC}=\frac{c}{b+c}\Rightarrow BL=\frac{ac}{b+c}$$

và dễ thấy $AL^2=bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$. Hơn nữa:

$$\frac{AL}{LP}=\frac{AL^2}{AL.LP}=\frac{AL^2}{BL.LC}=\frac{bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]}{\frac{a^2bc}{(b+c)^2}}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2}.$$

Tương tự với các đường phân giác trong BM, CN ta cũng có:

$$\frac{BM}{MQ}=\frac{(c+a)^2-b^2}{b^2};\ \frac{CN}{NR}=\frac{(a+b)^2-c^2}{c^2}.$$

Sử dụng BĐT $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2$ và BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}=\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2}+\frac{(a+b)^2}{c^2}-3$$

$$\geq\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)^2-3$$

$$\geq\frac{1}{3}.6^2-3=9\ (\text{đpcm})\ (*).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét. 1) BĐT(*) có thể chứng minh bằng cách khác như sau: $\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2}+\frac{(a+b)^2}{c^2}-3$

$$=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\right)+2\left(\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{a^2}\right)-3$$

$$\geq 3.2+2.3-3=9.$$

2) Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã có lời giải đúng.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/10/2025.

BÀI TOÁN 109. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3\\ y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0\end{cases}$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(*Đề đăng trên TH&TT số 575, tháng 5 năm 2025*)

Phân tích sai lầm. Ta thấy rằng, đẳng thức $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{21}{2}=-\frac{21}{2}$ xảy ra khi

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=0$ và $\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}$ và $y=\frac{9}{2}$.

Tuy nhiên đẳng thức $P=-\frac{21}{2}$ xảy ra khi

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=0,\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=0$ và $x^2+y^2+4x-8y+13=0$.

Tuy nhiên $x=-\frac{7}{2},y=\frac{9}{2}$ không thỏa mãn $x^2+y^2+4x-8y+13=0$ nên đẳng thức $P=\frac{21}{2}$ không xảy ra.

Tương tự, đẳng thức $P=\frac{17}{2}$ xảy ra khi

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0,\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=0$ và $x^2+y^2+4x-8y+13=0$,

nhưng hệ này vô nghiệm. Chứng tỏ đẳng thức $P=\frac{17}{2}$ không xảy ra.

Kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của bạn *Hữu Thắng* đều không đúng.

Lời giải đúng. Từ $P=3x-y+9$ ta có $y=3x-P+9$, thế vào đẳng thức $x^2+y^2+4x-8y+13=0$ thu được:

$$x^2+(3x-P+9)^2+4x-8(3x-P+9)+13=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+9x^2+P^2+81-6Px+54x-18P+4x-24x+8P-72+13=0$$

$$\Leftrightarrow 10x^2+2(17-3P)x+P^2-10P+22=0\quad (*).$$

Coi (*) là phương trình bậc hai ẩn x. PT này có nghiệm khi và chỉ khi

$$(17-3P)^2-10(P^2-10P+22)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 289-102P+9P^2-10P^2+100P-220\ge 0$$

$$\Leftrightarrow P^2+2P-69\le 0\Leftrightarrow -1-\sqrt{70}\le P\le -1+\sqrt{70}.$$

Nếu $P=-1+\sqrt{70}$ thì

$$x=\frac{3P-17}{10}=\frac{3\left(-1+\sqrt{70}\right)-17}{10}=\frac{3\sqrt{70}-20}{10}$$

$$\Rightarrow y=3.\frac{3\sqrt{70}-20}{10}-\left(-1+\sqrt{70}\right)+9=4-\frac{\sqrt{70}}{10}.$$

Nếu $P=-1-\sqrt{70}$ thì

$$x=\frac{3P-17}{10}=\frac{3\left(-1-\sqrt{70}\right)-17}{10}=\frac{-3\sqrt{70}-20}{10}$$

$$\Rightarrow y=3.\frac{-3\sqrt{70}-20}{10}-\left(-1-\sqrt{70}\right)+9=4+\frac{\sqrt{70}}{10}.$$

Vậy, $\min P=-1-\sqrt{70}$, đạt được khi $x=\frac{-3\sqrt{70}-20}{10},y=4+\frac{\sqrt{70}}{10}$; và $\max P=-1+\sqrt{70}$, đạt được khi $x=\frac{3\sqrt{70}-20}{10},y=4-\frac{\sqrt{70}}{10}$.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn: *Đinh Gia Kỷ*, 10TN2, THPT Trung Phú, xã Bình Mỹ, Củ Chi, **TP. Hồ Chí Minh**, *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**, *Vũ Đức Duy*, CTy THHH Thuế và Tư vấn PwC (Việt Nam), *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

BIỂU DIỄN BỞI BAO NHIÊU ĐIỂM ?



Trong đề kiểm tra có câu hỏi trắc nghiệm sau

Nghiệm của phương trình $\sin 4x+\sin 2x+2\cos x=0$ *biểu diễn trên đường tròn lượng giác bởi bao nhiêu điểm?*

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6.

Bạn Hùng đã chọn C và trình bày lại lời giải như sau:

(Xem tiếp trang 43)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 579 (9.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142849, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : ***TS.* TRẦN HỮU NAM** ***Thư kí Tòa soạn:* CN. VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Lý Văn Công – Một số phương pháp giải bài toán về biểu thức không đối xứng liên quan đến phương trình bậc hai.

6 Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Hà Nội, năm học 2025 – 2026.

9 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Bắc Ninh, năm học 2025 – 2026.

10 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Hữu Tiến – Ứng dụng đạo hàm vào giải quyết bài toán thực tiễn (Kỳ 2).

14 **Bạn đọc tìm tòi**
Nguyễn Xuân Lộc, Nguyễn Thị Minh Anh – Mở rộng một bất đẳng thức trong tam giác.

18 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/579, ..., T12/579, L1/579, L2/579.

20 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/575, ..., T12/575, L1/575, L2/575.

29 **Phương pháp giải toán**
Nguyễn Trường Sơn – Điểm Dumpty trong tam giác và một số thí dụ áp dụng.

39 **Lịch sử toán học**
Trần Hữu Bình Nguyên – Chứng minh định lí Fermat lớn, hành trình vĩ đại trong lịch sử toán học.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 120 – Bài dịch số 118.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 99 – Đề bài toán 101.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 107. Đề bài toán 109.

47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: KIM THANH, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CP ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI

BẠN CÓ ĐANG GẶP KHÓ KHĂN VÌ ÔN TẬP THIẾU ĐỊNH HƯỚNG VÀ KHÔNG CÓ PHẢN HỒI KỊP THỜI?





ÔN LUYỆN THÔNG MINH

Chìa khoá giúp bạn tự học chủ động

Là ứng dụng học tập trực tuyến dành cho học sinh từ lớp 1 đến lớp 12; hỗ trợ học sinh tự ôn luyện, củng cố kiến thức, đánh giá kết quả theo lộ trình cá nhân hoá, nội dung bám sát Chương trình GDPT 2018; đồng thời từng bước hình thành khả năng tự học cho học sinh.

1 **Kho học liệu số đồ sộ – Chất lượng chuẩn mực**

Khai thác kho học liệu đồ sộ, bao quát từ cơ bản đến nâng cao, được biên soạn bởi đội ngũ tác giả, chuyên gia giàu kinh nghiệm, đảm bảo chất lượng theo quy trình làm sách của NXBGDVN và được thẩm định bởi Viện KHGDVN.

2 **Tích hợp LMS – học như ở trường**

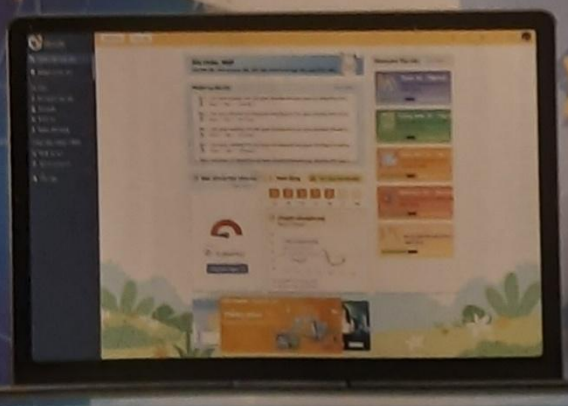
Tham gia lớp học trực tuyến, làm bài tập và kiểm tra theo nhiệm vụ giáo viên giao.

3 **Cá nhân hoá lộ trình ôn luyện**

Công nghệ AI phân tích kết quả, gợi ý kiến thức cần ôn tập, giúp học đúng trọng tâm, đặt mục tiêu và duy trì thói quen học tập.

4 **Động lực học tập bền vững**

Khuyến khích tinh thần học tập tích cực với bảng xếp hạng, điểm thưởng, đổi quà.



5 **Báo cáo thông minh & nhắc nhở học tập**

Theo dõi tiến trình học, nhận thông báo tháo gỡ vướng mắc và nhắc nhở học tập mỗi ngày cùng trợ lí ảo.

6 **Đa nền tảng – học mọi lúc, mọi nơi**

Truy cập dễ dàng, đồng bộ dữ liệu học tập trên mọi thiết bị, giúp học sinh học tập liên tục, không gián đoạn.

QUÉT MÃ ĐỂ TRẢI NGHIỆM

Google Play
App Store
Windows

KẾT NỐI VỚI CHÚNG TÔI

hoclieu.vn
Học liệu
1900 636 011
hotro@hoclieu.vn
Zalo OA: Học liệu

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

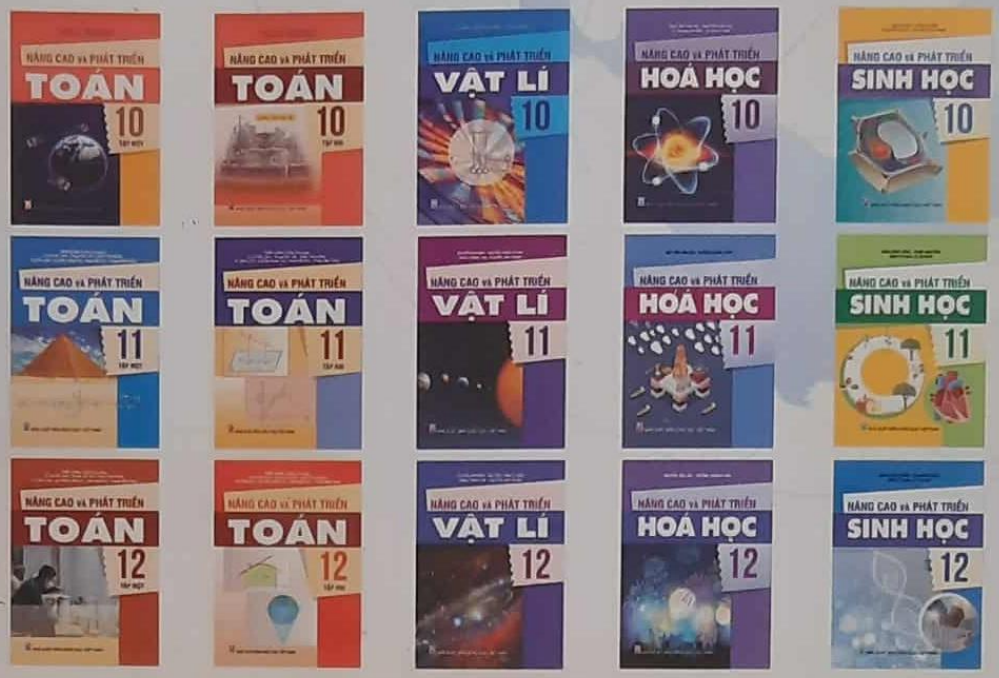
Bộ sách được biên soạn bởi đội ngũ tác giả là các tác giả SGK, các nhà khoa học, quý thầy/ cô giàu kinh nghiệm:

- **Môn Toán:** Trần Quang Hùng, Phạm Việt Hải,...
- **Môn Vật lí:** Tô Giang, Trần Thuý Hằng,...
- **Môn Hoá học:** Lê Trọng Huyền, Nguyễn Văn Hải, Nguyễn Thanh Hưng, Vũ Anh Tuấn.
- **Môn Sinh học:** Nguyễn Thị Nga, Lê Thị Thuỷ,...

Trân trọng giới thiệu bộ sách

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN

(DÀNH CHO HỌC SINH THPT – THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018)



Bộ sách **Nâng cao và phát triển** được biên soạn nhằm giúp các em học sinh củng cố và nâng cao kiến thức lí thuyết, rèn luyện kĩ năng giải quyết các tình huống thực tiễn, từ đó giúp các em phát triển năng lực, phẩm chất và mở rộng tầm hiểu biết.

Sách viết theo chủ đề/bài bám sát chương trình giáo dục phổ thông năm 2018. Mỗi chủ đề/bài thường có:

KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Gồm các kiến thức cơ bản và nâng cao mà học sinh cần phải nắm vững.

BÀI TẬP

Các bài tập đa dạng nhằm củng cố và nâng cao kiến thức, bài tập đi kèm hoạt động, bài tập áp dụng kiến thức để giải quyết các vấn đề trong thực tế cuộc sống.

Các bài tập có hướng dẫn giải hoặc đáp án giúp HS tự kiểm tra, đánh giá trong quá trình ôn luyện.

Bộ sách là tài liệu tham khảo bổ ích dành cho các em học sinh yêu thích môn học, muốn tìm hiểu, đào sâu thêm kiến thức. Sách cũng là tài liệu thiết thực để hỗ trợ, gợi ý cho các thầy cô giáo trong quá trình bồi dưỡng học sinh khá, giỏi.

BẠN ĐỌC TÌM MUA SÁCH TẠI

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: Tầng 4, Toà Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Q. Thanh Xuân, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.35121533 (số máy lẻ 118) - 0904893398 | **Fax:** 024.35123278
Email: kinhdoanh.heps@gmail.com | **Website:** http://xbgdhn.vn/

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT9M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2025

Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng