TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 578
Tháng 8 - 2025
ISSN: 2734-9284

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học cổ Hy Lạp **Eratosthenes** (276-194 TCN)



SÀNG ERATOSTHENES

Bạn đã tìm thấy tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn 100 chưa? Bạn đã sử dụng phương pháp nào? Bạn đã kiểm tra từng số riêng lẻ để xem nó có chia hết cho các số nhỏ hơn không? Nếu đây là cách bạn chọn, bạn chắc chắn đã đầu tư rất nhiều thời gian. *Eratosthenes*, một trong những học giả vĩ đại nhất của thời kì Hy Lạp hóa, sống vài thập kỉ sau *Euclid*. Ông từng là thủ thư trưởng tại thư viện Alexandria, thư viện đầu tiên trong lịch sử và là thư viện lớn nhất thế giới cổ đại. Ông không chỉ quan tâm đến toán học mà còn cả thiên văn học, âm nhạc và địa lí, và là người đầu tiên tính chu vi của Trái Đất với độ chính xác ấn tượng vào thời của ông. Trong số những phát kiến của mình, ông đã nghĩ ra một cách thông minh để tìm tất cả các số nguyên tố cho đến một số cho trước. Vì phương pháp này dựa trên ý tưởng sàng lọc các hợp số; nên nó được gọi là *sàng Eratosthenes*.



Nhà toán học cổ Hy lạp Eratosthenes (276 – 194 TCN)

Chúng ta hãy xem hình minh họa sàng Eratosthenes trong danh sách các số nguyên tố nhỏ hơn 100 (hình bên). Khoanh tròn số 2, vì đây là số nguyên tố đầu tiên, sau đó xóa tất cả các bội số lớn hơn của nó, tức là tất cả các hợp số chẵn. Chuyển sang số không bị xóa tiếp theo, số 3. Vì số 3 không bị xóa, nên nó không phải là tích của các số nhỏ hơn, và ta có thể khoanh tròn nó khi biết rằng nó là số nguyên tố. Một lần nữa, hãy xóa tất cả các bội số lớn hơn của nó. Lưu ý rằng một số trong số chúng, chẳng hạn như 6, đã bị xóa, trong khi những số khác, chẳng hạn như 9, sẽ bị xóa ngay tiếp theo. Số không bị xóa tiếp theo là 5, sẽ được khoanh tròn. Một lần nữa, hãy xóa tất cả các bội số lớn hơn của nó: 10, 15 và 20 đã bị xóa, nhưng 25 và 35, chẳng hạn, sẽ bị xóa tiếp theo. Tiếp tục theo cách tương tự. Cho đến khi nào? Hãy thử nghĩ tại sao sau khi vượt qua $10 = \sqrt{100}$, chúng ta không cần phải tiếp tục quá trình này! Tất cả các số nhỏ hơn 100 mà không bị xóa đều là số nguyên tố và chúng được khoanh tròn một cách chính xác!

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Sàng Eratosthenes

Các hợp số bị gạch bỏ và các số nguyên tố được khoanh tròn

TH&TT



CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

NGUYỄN ANH TUẤN (GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)
LÊ VĂN TUẤN (GV THCS Bạch Liêu, H. Yên Thành, Nghệ An)

Để chứng minh hai đường tròn tiếp xúc nhau, chương trình GDPT 2018 sử dụng dấu hiệu: Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài khi $OO'=R+r$, và tiếp xúc trong khi $OO'=R-r$ (với $R>r$). Tuy nhiên trong một số trường hợp sử việc sử dụng dấu hiệu này gặp rất nhiều khó khăn. Để khắc phục hạn chế đó ta có thể sử dụng kết quả sau đây.

Bài toán 1. *Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $R>r$, có chung điểm A. Nếu tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O;R)$ cũng là tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O';r)$ thì hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc với nhau tại A.*

Chứng minh. Giả sử Ax là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) đồng thời cũng là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O'). Khi đó ta có $OA\perp Ax$ và $O'A\perp Ax$ nên ba điểm O, A, O' thẳng hàng. Do đó $OO'=R+r$ hoặc $OO'=R-r$. Từ đó suy ra hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc với nhau tại điểm A.

Trong bài viết này chúng tôi sử dụng thêm một số kết quả sau đây

1) *Nếu góc $\widehat{BAx}$ có đỉnh A nằm trên đường tròn, cạnh Ax là một tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung AB của đường tròn đó thì góc $\widehat{BAx}$ có số đo bằng nửa số đo của cung bị chắn.*

Chứng minh. Ta xét ba trường hợp sau:

• Nếu tâm O nằm trên cạnh chứa dây cung AB (h.1.1) thì ta có: $\widehat{xAB}=90^0$, sđ$\widehat{AnB}=180^0$.

Do đó $\widehat{xAB}=\dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{AnB}$.

• Nếu tâm O nằm bên ngoài góc $\widehat{xAB}$ (h.1.2) thì ta có: $\widehat{xAB}=90^0-\widehat{OAB}$, $\widehat{OAB}=\dfrac{180^0-\widehat{AOB}}{2}$

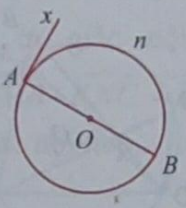
$$=\frac{180^0-\text{sđ}\widehat{AnB}}{2}=90^0-\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AnB}.$$

Suy ra: $\widehat{xAB}=\dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{AnB}$.

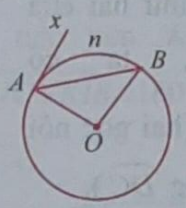
• Nếu tâm O nằm bên trong góc $\widehat{xAB}$ (h.1.3) thì

$$\widehat{BAx}=\widehat{BAO}+\widehat{OAx}=\frac{180^0-\text{sđ}\widehat{AmB}}{2}+90^0$$

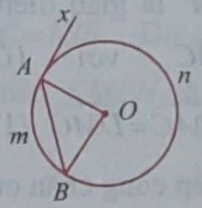
$$=\frac{360^0-\text{sđ}\widehat{AmB}}{2}=\frac{\text{sđ}\widehat{AnB}}{2}.$$



Hình 1.1



Hình 1.2



Hình 1.3

2) *Nếu góc $\widehat{BAx}$ (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung $\widehat{AB}$ căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn đó.*

Chứng minh. Ta xét ba trường hợp sau:

• Nếu tâm O nằm trên cạnh chứa dây cung AB (h.1.1) thì $\dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{AnB}=90^0\Rightarrow\widehat{OAx}=90^0\Rightarrow OA\perp Ax$ nên Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn (O).

• Nếu tâm O nằm bên ngoài góc $\widehat{xAB}$ (h.1.2) thì

$$\widehat{OAx}=\widehat{OAB}+\widehat{BAx}=\frac{180°-\widehat{AOB}}{2}+\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AnB}$$

$$=\frac{180^0-\text{sđ}\overset{\frown}{AnB}}{2}+\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AnB}=90^0\Rightarrow OA\perp Ax$$

nên Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn (O).

• Nếu tâm O nằm bên trong góc $\widehat{xAB}$ (h.1.3) thì

$$\widehat{OAx}=\widehat{BAx}-\widehat{OAB}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AnB}-\frac{180^0-\widehat{AOB}}{2}$$

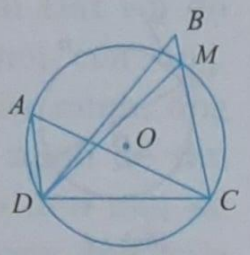
$$=\frac{360^0-\text{sđ}\overset{\frown}{AmB}}{2}-\frac{180^0-\text{sđ}\overset{\frown}{AmB}}{2}=90^0\Rightarrow OA\perp Ax$$

nên Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn (O).

3) Nếu một tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

Chứng minh. Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DAC}=\widehat{DBC}$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC. Khi đó nếu điểm B không thuộc đường tròn (O) thì sẽ có hai khả năng sau:

• B nằm bên ngoài đường tròn (O) (hình 2). Gọi M là giao điểm thứ hai của BC với (O), ta có $\widehat{DAC}=\widehat{DMC}$ (1) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{DC}$).



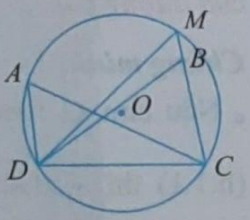
Hình 2

Mặt khác theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có:

$$\widehat{DBC}+\widehat{BDM}=\widehat{DMC}\Rightarrow\widehat{DMC}>\widehat{DBC}\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DAC}>\widehat{DBC}$ (vô lí).

• B nằm bên trong đường tròn (O) (hình 3). Gọi M là giao điểm thứ hai của BC với (O), chứng minh tương tự như trường hợp trên ta có $\widehat{DBC}>\widehat{DAC}$ (vô lí).



Hình 3

Từ đó ta suy ra điểm B thuộc đường tròn (O) nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

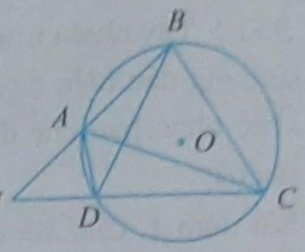
Chú ý: Trường hợp $\widehat{DAC}=\widehat{DBC}=90^0$ thì ta nên chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn bằng phương pháp chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng cách đều một điểm (đó là trung điểm của đoạn thẳng CD)

4) Nếu một tứ giác có tổng số đo của hai góc đối bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

Chứng minh. Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^\circ$, ta xét hai trường hợp sau:

TH1: $ABCD$ là hình chữ nhật. Khi đó ta dễ dàng chứng minh được tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có tâm là giao điểm của AC và BD.

TH2: $ABCD$ không phải là hình chữ nhật. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD (trường hợp $AB//CD$ thì ta lấy M là giao điểm AD và BC rồi chứng minh tương tự).



Hình 4

Ta có: $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^\circ$ (gt)

và $\widehat{ADM}+\widehat{ADC}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow\widehat{ABC}=\widehat{ADM}\Rightarrow\Delta MDA\backsim\Delta MBC$ (g.g)

$\Rightarrow\dfrac{MD}{MB}=\dfrac{MA}{MC}\Rightarrow\Delta DMB\backsim\Delta AMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow\widehat{MBD}=\widehat{MCA}\Rightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp (theo dấu hiệu 1).

Sau đây là một số ví dụ áp dụng bài toán 1 để chứng minh hai đường tròn tiếp xúc nhau

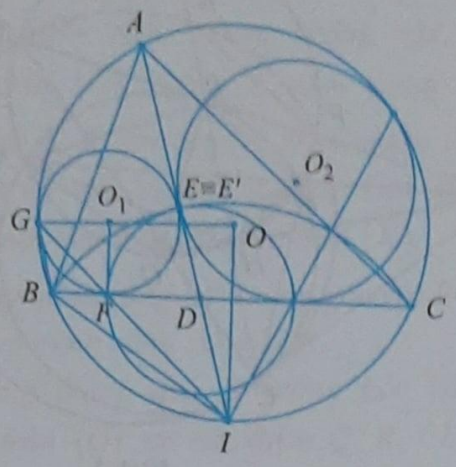
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là chân phân giác trong góc A, (O_1) là đường tròn tiếp xúc với các đoạn DA, DB và tiếp xúc trong với (O); (O_2) là đường tròn tiếp xúc với các đoạn DC, DA và tiếp xúc trong với (O). Chứng minh rằng (O_1) tiếp xúc với (O_2).*

Lời giải. (h.5)

Gọi E, F, G lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O_1) với AD, BD và (O); I là giao điểm thứ hai của AD với (O).

Ta có O, O_1, G thẳng hàng và $FO_1\perp BC$, $IO\perp BC\Rightarrow\widehat{GO_1F}=\widehat{GOI}$

$\Rightarrow \Delta GO_1F \backsim \Delta GOI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{O_1GF} = \widehat{OGI}$ nên ba điểm G, F, I thẳng hàng.



Hình 5

Ta có: $\widehat{FBI} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{IC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{IB} = \widehat{BGI}$

$\Rightarrow \Delta IBF \backsim \Delta IGB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IB}{IG} = \frac{IF}{IB} \Rightarrow IB^2 = IF.IG.$

Mặt khác: $\Delta IEF \backsim \Delta IGE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IF}{IE} = \frac{IE}{IG}$

$\Rightarrow IG.IF = IE^2$. Từ đó suy ra $IE^2 = IB^2 = IC^2$.

Gọi E' là giao điểm của (O_2) và AD, chứng minh tương tự ta có $IC^2 = EI^2$. Từ đó suy ra $IE^2 = IE'^2 \Rightarrow E \equiv E'$. Như vậy IE là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2), suy ra (O_1) tiếp xúc với (O_2).

Bài toán 3 (Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán (chuyên) năm 2024 – 2025 sở GD&ĐT Bà Rịa – Vũng Tàu). *Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O) và có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại F. Các đường thẳng FB, FC lần lượt cắt đường thẳng DE tại M, N. Gọi I là trung điểm BC.*

a) *Chứng minh ME = MB và MI là tia phân giác của* $\widehat{FMN}$.

b) *Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại K (K khác A). Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.*

c) *Chứng minh các điểm F, M, N, K cùng thuộc một đường tròn.*

d) *Gọi đường tròn qua các điểm F, M, N, K là (S). Chứng minh (S) tiếp xúc với (O).*

Hướng dẫn giải câu c, d. (h.6)

c) Tam giác MEB có $ME = MB$ và MI là tia phân giác của $\widehat{BME}$ nên

$MI \perp AB \Rightarrow MI // CE \Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BCH}$.

Mà $\widehat{BHC} = 180^0 - \widehat{BAC} = 180^0 - \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$

$= 180^0 - \widehat{FBC} = \widehat{MBI}$

$\Rightarrow \Delta MBI \backsim \Delta BHC$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BMI} = \widehat{HBC}$ (1).

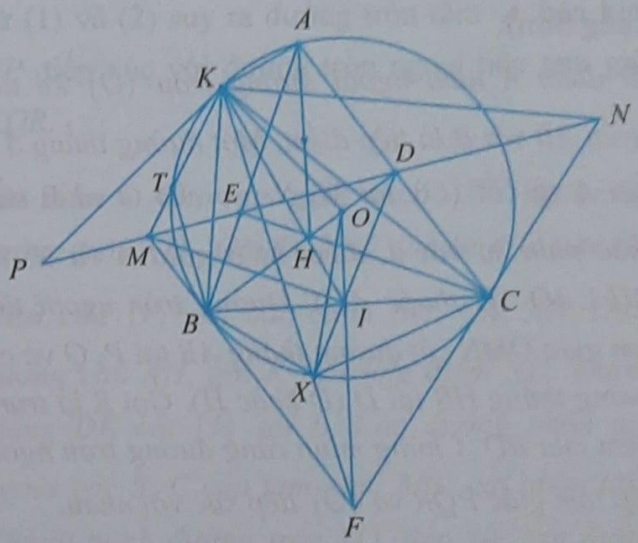
Tứ giác $AKHD$ nội tiếp đường tròn đường kính AH nên $\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{HD} = \widehat{DKI} = \widehat{DAH} = \widehat{DBC} = \widehat{IDH}$

$\Rightarrow ID$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE nên ta dễ dàng suy ra:

$IH.IK = ID^2 = IB^2 \Rightarrow \Delta IBH \backsim \Delta IKB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{IBH} = \widehat{IKB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BMI} = \widehat{IKB}$. Do đó $KMBI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{KMB} = \widehat{KIC}$. Tương tự $KNCI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{KNC} = \widehat{KIB}$. Do đó $\widehat{KMB} + \widehat{KNC} = \widehat{KIC} + \widehat{KIB} = 180^0$ nên $KMFN$ là tứ giác nội tiếp.



Hình 6

d) Gọi X là giao điểm thứ hai của FK với đường tròn (O). Ta chứng minh được:

$FI.FO = FX.FK \Rightarrow \frac{FI}{FX} = \frac{FK}{FO}$

$\Rightarrow \Delta IFK \backsim \Delta XFO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FKI} = \widehat{FOX}$.

Do đó $OKXI$ là tứ giác nội tiếp, suy ra:

$$\widehat{OIK}=\widehat{OXK}=\widehat{OKX}=\widehat{XIF}$$

$$\Rightarrow \widehat{XIB}=\widehat{BIK}=\frac{\widehat{XIK}}{2}=\frac{\widehat{XOK}}{2}=\widehat{KCX} \quad (3).$$

Mà $\widehat{BIK}=\widehat{BCK}+\widehat{CKI}$ và $\widehat{KCX}=\widehat{BCK}+\widehat{BCX}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{CKI}=\widehat{BCX}=\widehat{BKX}$ (5).

Mặt khác, từ $IH.IK=ID^2=IC^2$, suy ra:

$$\Delta ICH \backsim \Delta IKC \ (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \widehat{IKC}=\widehat{ICH}=\widehat{BIM}=\widehat{BKM} \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{MKB}=\widehat{BKX}\Rightarrow KB$ là phân giác của $\widehat{MKF}$.

Do $MB^2=MT.MK \Rightarrow \Delta MBT \backsim \Delta MKB \ (\text{c.g.c})$

$$\Rightarrow \widehat{MTB}=\widehat{MBK} \Rightarrow \widehat{KTB}=\widehat{KBF}$$

$$\Rightarrow \Delta KTB \backsim \Delta KBF (\text{g.g}) \Rightarrow \widehat{TBK}=\widehat{MFK}.$$

Kẻ tiếp tuyến KP của đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{PKT}=\widehat{TBK}=\widehat{MFK}\Rightarrow PK$ là tiếp tuyến của (S).

Vậy (S) tiếp xúc với (O).

Bài toán 4 (Trích bài 3c đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán (chuyên) năm học 2024 – 2025, tỉnh Lạng Sơn).

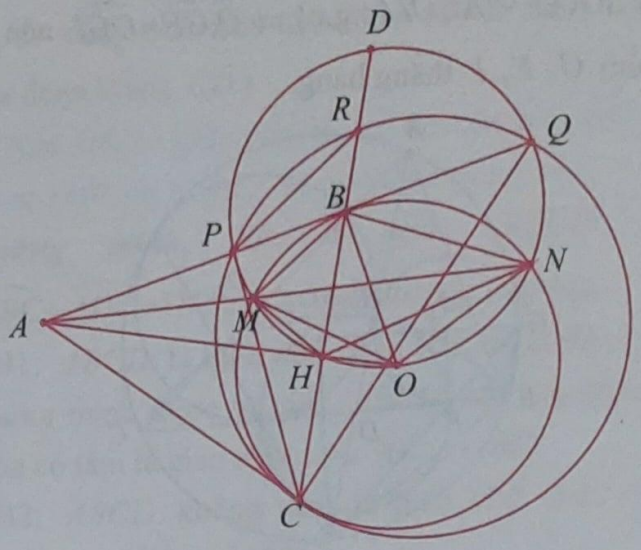
Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến AB với B là tiếp điểm. Một đường thẳng d đi qua A và cắt (O) tại M, N sao cho O và B nằm khác phía so với d, điểm M ở giữa A và N. Kẻ $BH \perp AO$ (H thuộc AO). Đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN cắt đường thẳng AB tại P, Q và cắt đường thẳng HB tại D (D khác H). Gọi R là trung điểm của BD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR và (O) tiếp xúc với nhau.

Lời giải. (h.7) Kéo dài BH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C, ta có:

$$\Delta BOA=\Delta COA \ (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{ACO}=\widehat{ABO}=90^0$$

nên AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ta dễ dàng chứng minh được:



Hình 7

$$AH.AO=AB^2=AM.AN \Rightarrow \frac{AH}{AM}=\frac{AN}{AO}$$

$$\Rightarrow \Delta HAN \backsim \Delta MAO \ (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{HNA}=\widehat{MOA}$$

nên $HONM$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra các điểm D, Q, N, O, H, M, P cùng thuộc một đường tròn. Do đó $DQHP$ là tứ giác nội tiếp nên ta chứng minh được:

$$BH.BD=BQ.BP \Rightarrow BH.2BR=BQ.BP$$

$$\Rightarrow BR.BC=BQ.BP \Rightarrow \frac{BR}{BQ}=\frac{BP}{BC}$$

$$\Rightarrow \Delta RBP \backsim \Delta QBC \ (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{BRP}=\widehat{BQC}.$$

Do đó $PRQC$ là tứ giác nội tiếp (2).

Vì tứ giác $PQOH$ nội tiếp đường tròn nên ta chứng minh được:

$$AP.AQ=AH.AO=AB^2=AC^2$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AC}=\frac{AC}{AQ}\Rightarrow \Delta PAC \backsim \Delta CAQ \ (\text{c.g.c})$$

$\Rightarrow \widehat{ACP}=\widehat{AQC}=\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{PC}$ nên AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQC (3).

Từ (2) và (3) suy ra AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp PQR. Mà AC cũng là tiếp tuyến của (O), nên đường tròn đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR và (O) tiếp xúc nhau.

Bài toán 5 (Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán (vòng 2) năm 2022 trường THPT chuyên KHTN – Hà Nội).

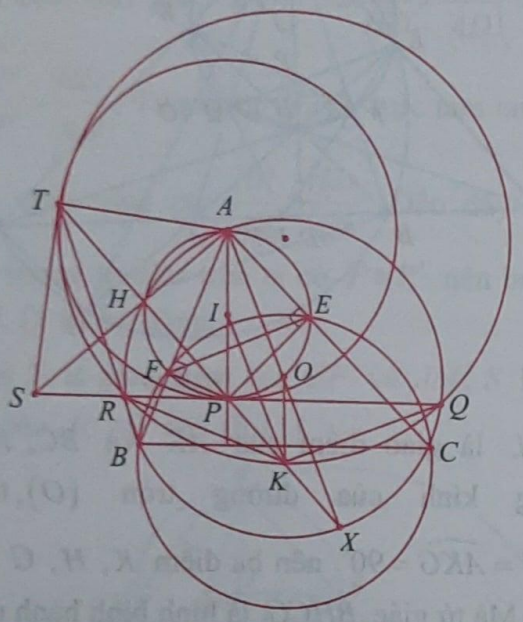
Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Điểm P nằm trong tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh CA, AB. Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp trong đường tròn (K).

a) *Chứng minh rằng AP vuông góc với BC.*

b) *Chứng minh rằng $AP=2OK$.*

c) *Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn (O) tại hai điểm Q, R. Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR.*

Lời giải. (h.8)



Hình 8

a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$, tứ giác $AEPF$ nội tiếp đường tròn đường kính AP nên $\widehat{FAP}=\widehat{FEP}$. Từ đó suy ra:

$$\widehat{FAP}+\widehat{ABC}=\widehat{FEP}+\widehat{AEF}=90^0 \Rightarrow AP\perp BC.$$

b) Gọi I là trung điểm của AP, theo tính chất của đoạn nối tâm ta có $IK\perp EF$. Vẽ đường kính AX của đường tròn (O). Ta có: $\widehat{OAC}+\widehat{AEF}$

$$=\widehat{OAC}+\widehat{ABC}=\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{CX}+\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AC}=90^0$$

nên $OA\perp EF$. Từ đó suy ra $IK//OA$.

Mặt khác ta có OK là đường trung trực của BC nên $OK//AI$. Do đó $AIKO$ là hình bình hành nên $2OK=2AI=AP$.

c) Ta có $AP=2OK$, $AP//OK$ và $AO=OX$ nên suy ra K là trung điểm của PX. Gọi H là giao điểm của (O) và đường tròn đường kính AP, ta có $\widehat{AHX}=\widehat{AHP}=90^\circ$ nên ba điểm H, P, X thẳng hàng $\Rightarrow K\in HX$. Lấy T đối xứng với P qua H, vì ΔAPT có $AH\perp TP$ và $TH=PH$ nên ta có $AP=AT$. Qua T kẻ đường thẳng vuông góc với AT, cắt QR tại S. Suy ra ST là tiếp tuyến của đường tròn tâm A bán kính AP (1).

Ta dễ dàng chứng minh được $PR.PQ=PX.PH$

$$=2PK.PH=PK.PT \Rightarrow \frac{PR}{PK}=\frac{PT}{PQ}$$

$\Rightarrow \Delta RPT\backsim\Delta KPQ$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{PTR}=\widehat{PQK}$ nên tứ giác $TRKQ$ nội tiếp đường tròn.

Ta dễ dàng chứng minh được:

$$SR.SQ=SH.SA=ST^2 \Rightarrow \frac{SR}{ST}=\frac{ST}{SQ}$$

$$\Rightarrow \Delta RST\backsim\Delta TSQ \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{STR}=\widehat{SQT}=\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{TR}$$

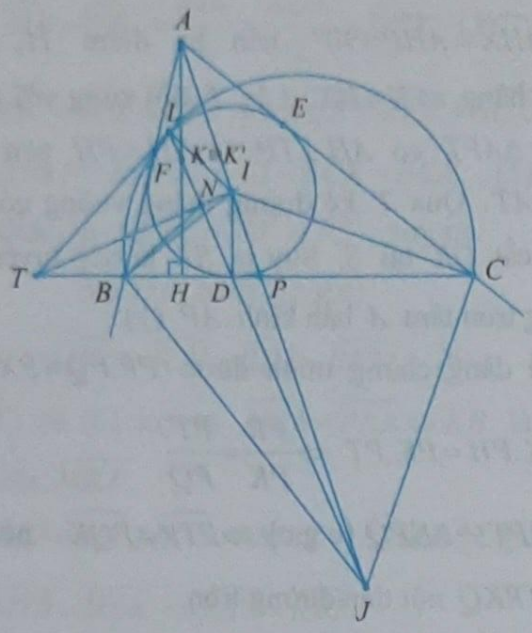
$\Rightarrow ST$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR (2)

Từ (1) và (2) suy ra đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR.

Bài toán 6. *Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB. Dựng đường cao AH, gọi K là trung điểm AH. Đường thẳng DK cắt (I) tại L. Các đường phân giác ngoài góc B, C của tam giác ABC cắt nhau tại J. Chứng minh đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BLC.*

Lời giải. (h.9) Trước hết ta chứng minh ba điểm K, D, J thẳng hàng (kết quả quen thuộc) như sau: Gọi K' là giao điểm của JD với AH; P là giao điểm của AJ và BC. Áp dụng định lý

Menelaus vào ΔAHP với ba điểm thẳng hàng K', D, J ta có: $\frac{AK'}{HK'}.\frac{HD}{PD}.\frac{JP}{JA}=1$ (1).



Hình 9

Mặt khác: BI, BJ lần lượt là các đường phân giác trong và ngoài của ΔABC nên ta có:

$$\frac{IP}{AI}=\frac{JP}{JA}\left(=\frac{PB}{AB}\right) \quad (2).$$

Lại có: $ID//AH$ nên ta có $\frac{HD}{PD}=\frac{AI}{IP}$ (3).

Từ (1); (2) và (3) suy ra:

$$1=\frac{AK'}{HK'}.\frac{HD}{PD}.\frac{JP}{JA}=\frac{AK'}{HK'}.\frac{AI}{IP}.\frac{IP}{AI}=\frac{AK'}{HK'}$$
$$\Rightarrow AK'=HK'\Rightarrow K\equiv K'.$$

Ta có $\widehat{IBJ}=\widehat{ICJ}=90°$ nên $BICJ$ là tứ giác nội tiếp. Lấy T thuộc BC sao cho TL là tiếp tuyến tại L của (I). Gọi N là giao điểm của IT và LD. Ta có TI là đường trung trực LD nên:

$\widehat{INJ}=90°\Rightarrow BNIJ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow BNIC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow TN.TI=TB.TC$.

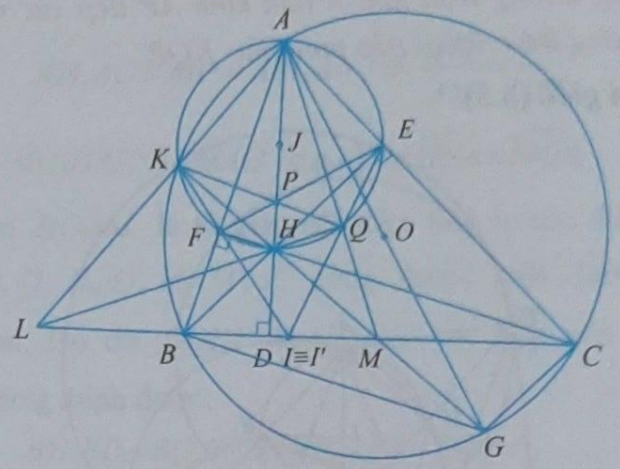
Mà $TL^2=TN.TI$ nên $TL^2=TB.TC\Rightarrow TL$ cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BLC. Vậy đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BLC.

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC ($AB<AC$) nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Đường thẳng AM cắt đường tròn (J) tại điểm thứ hai là Q. EF cắt AD tại P, đoạn PM cắt đường tròn (J) tại N.*

a) *Chứng minh các đường thẳng KF, EQ, BC đồng quy và ba điểm K, P, Q thẳng hàng.*

b) *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC tiếp xúc nhau.*

Lời giải. (h.10) a)



Hình 10

Gọi L là giao điểm của AK và BC, AG là đường kính của đường tròn (O), ta có $\widehat{AKH}=\widehat{AKG}=90^0$ nên ba điểm K, H, G thẳng hàng. Mà tứ giác $BHCG$ là hình bình hành nên ba điểm H, M, G thẳng hàng. Từ đó suy ra bốn điểm K, H, M, G thẳng hàng và H là trực tâm của tam giác ALM nên suy ra ba điểm L, H, Q thẳng hàng. Gọi I là giao điểm của KF và BC, ta có: $\widehat{IFB}=\widehat{KFA}=\widehat{KHA}=\widehat{ILK}$

$\Rightarrow \Delta IFB\backsim\Delta ILK\,(\text{g.g})\Rightarrow\frac{IF}{IL}=\frac{IB}{IK}$

$\Rightarrow IF.IK=IL.IB$ (1). Mặt khác:

$$\widehat{KML}=\widehat{DAL}=\widehat{IFC}\Rightarrow\Delta IMK\backsim\Delta IFC\,(\text{g.g})$$
$$\Rightarrow\frac{IM}{IF}=\frac{IK}{IC}\Rightarrow IM.IC=IF.IK \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $IM.IC=IB.IL\Rightarrow\frac{IM}{IB}=\frac{IL}{IC}$

$\Rightarrow \dfrac{IM}{MB}=\dfrac{IL}{LC} \Rightarrow \dfrac{IM}{IL}=\dfrac{MB}{LC}$ (3).

Gọi I' là giao điểm của EQ và BC. Tương tự như trên ta có:

$I'M.I'C=I'E.I'Q=I'B.I'L \Rightarrow \dfrac{I'M}{I'B}=\dfrac{I'L}{I'C}$

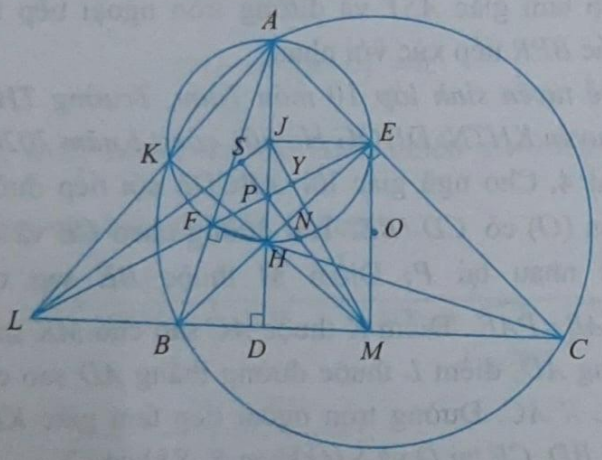
$\Rightarrow \dfrac{I'M}{MB}=\dfrac{I'L}{LC} \Rightarrow \dfrac{I'M}{I'L}=\dfrac{MB}{LC}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{IM}{IL}=\dfrac{I'M}{I'L} \Rightarrow \dfrac{IM}{ML}=\dfrac{I'M}{ML} \Rightarrow IM=I'M \Rightarrow I \equiv I'$

nên các đường thẳng KF, EQ, BC đồng quy.

Gọi P' là giao điểm của KQ và AD. Vì H là trực tâm tam giác ALM nên suy ra QH, QA lần lượt là đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của tam giác $DQP' \Rightarrow \dfrac{HP'}{HD}=\dfrac{AP'}{AD}\left(=\dfrac{QP'}{QD}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{HP'}{AP'}=\dfrac{HD}{AD}$. Tương tự H là trực tam tam giác ABC nên cũng có $\dfrac{HP}{AP}=\dfrac{HD}{AD}$. Đến đây chứng minh tương tự như trên ta có $P \equiv P'$ nên ba điểm K, P, Q thẳng hàng.

b) Gọi Y là giao điểm của EF và JM; S là giao điểm của JL và MN (h.11).



Hình 11

Ta có $JN^2=JE^2=JY.JM=JP.JD=JS.JL$ nên $JN \perp LN \Rightarrow LN$ là tiếp tuyến của đường tròn (J) $\Rightarrow LN^2=LK.LA=LD.LM=LB.LC$. Từ đó suy ra LN là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC tiếp xúc nhau.

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Đường tròn (O_1) đi qua C, tiếp xúc với AI tại I cắt AC tại E và cắt (O) tại H $(E,H \neq C)$.*

a) Chứng minh rằng EH đi qua trung điểm của AI.

b) Đường tròn (O_2) đi qua B, tiếp xúc với AI tại I cắt AB tại F và cắt (O) tại G $(G,F \neq B)$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác EIF và GHI tiếp xúc với nhau.

Lời giải. (h.12) a) Gọi K là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn (O), ta dễ dàng chứng minh được $KI=KB=KC$. Ta có:

$\Delta O_1IK=\Delta O_1CK$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{O_1CK}=\widehat{O_1IK}=90^0$

$\Rightarrow KC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O_1).

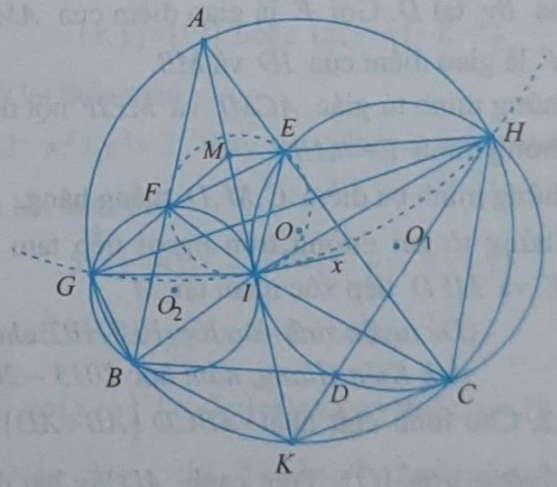
Gọi D là giao điểm thứ hai của HK với (O_1), ta có: $\widehat{KCD}=\widehat{CHD}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{KC}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{KB}=\widehat{KCB} \Rightarrow D \in BC$;

$\widehat{MEA}=\widehat{HEC}=\widehat{HDC}=\dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{HC}+\text{sđ}\overset{\frown}{KB}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{HC}+\text{sđ}\overset{\frown}{KC}\right)=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{HK}=\widehat{HAK}$

$\Rightarrow \Delta MEA \backsim \Delta MAH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MH}=\dfrac{ME}{MA} \Leftrightarrow MA^2=MH.ME$ (1).



Hình 12

Mặt khác: $\widehat{MIE}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{IE}=\widehat{EHI} \Rightarrow \Delta MIE \backsim \Delta MHI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MI}{MH}=\frac{ME}{MI} \Rightarrow MI^2=MH.ME \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $MI=MA$.

b) Tương tự câu a) ta chứng minh được GF đi qua trung điểm của AI. Ta dễ dàng chứng minh được $AE.AC=AI^2=AF.AB \Rightarrow BFEC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFE}=180^\circ-\widehat{BCA}=\widehat{BAC}+\widehat{ABC}$

Lại có $\widehat{BFI}=\frac{1}{2}sđ\widehat{BI}=\widehat{BIK}=\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2}$. Từ đó suy ra $\widehat{BFI}=\frac{1}{2}\widehat{BFE} \Rightarrow \widehat{EFI}=\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2}$ (3).

Kẻ tiếp tuyến Ix của đường tròn ngoại tiếp tam giác GHI, ta có:

$$\widehat{EIx}=\widehat{EIH}+\widehat{HIx}=\widehat{ECH}+\widehat{HGI}=\widehat{AGH}+\widehat{HGI}$$

$$=\widehat{AGI}=\widehat{AGM}+\widehat{MGI}=\widehat{MAF}+\widehat{FBI}=\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{EIx}=\widehat{EFI} \Rightarrow Ix$ cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EIF. Vậy đường tròn ngoại tiếp EIF và GHI tiếp xúc với nhau.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M là một điểm thuộc cung $\widehat{AB}$, I thuộc đoạn thẳng OA. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với (O). Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với IM cắt Ax tại C. Qua I dựng một đường thẳng vuông góc với IC cắt tia By tại D. Gọi E là giao điểm của AM và CI, F là giao điểm của ID và MB.

a) Chứng minh tứ giác $ACMI$ và $MEIF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $EF//AB$.

c) Chứng minh ba điểm C, M, D thẳng hàng.

d) Chứng tỏ hai đường tròn ngoại tiếp tam giác CME và MFD tiếp xúc nhau tại M.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Kiên Giang, năm học 2013 – 2014)

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ $(AB<AD)$ nội tiếp đường tròn (O). Trên cạnh AD lấy hai điểm E và F (E, F không trùng với A, D) sao cho E nằm giữa A và F, đồng thời $\widehat{ABE}+\widehat{DCF}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$.

a) Chứng minh rằng BE và CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

b) Đường thẳng qua O song song với BC cắt BE, CF theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng

$$\widehat{DAM}+\widehat{ADN}+\frac{1}{2}\widehat{AOD}=180^0.$$

c) Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho NQ song song với BD, đồng thời MP song song với AC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MNPQ$ tiếp xúc với đường tròn (O)

(Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà nội, vòng 1, năm 2022)

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{BAC}<90^0$. Gọi P là giao điểm của BE với trung trực của BC. Gọi K là hình chiếu vuông góc của P lên AB. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của E lên AP. Gọi giao điểm của EQ và PK là F.

1) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi giao điểm của KQ và PE là L. Chứng minh LA vuông góc LE.

3) Gọi giao điểm của FL và AB là S. Gọi giao điểm của KE và AL là T. Lấy R là điểm đối xứng với A qua L. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AST và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPR tiếp xúc với nhau.

(Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà nội, vòng 1, năm 2020)

Bài 4. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) có $CD//BE$. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc BE sao cho $\widehat{MAB}=\widehat{PAE}$. Điểm K thuộc AC sao cho MK song song AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho $ML // AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC cắt BD, CE tại Q và S (Q khác B, S khác C)

a) Chứng minh ba điểm K, M, Q thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE cắt BD, CE tại T và R (T khác D, R khác E). Chứng minh M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với (O).

(Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà nội, vòng 2, năm 2018)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

Năm học 2025-2026

Bài 1. 1) *Cho hai số thực khác nhau a, b và $ab+1\neq 0$, thỏa mãn:* $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}=\dfrac{2}{1+ab}$.

Tính giá trị của biểu thức: $M=\dfrac{1}{a^{2025}+1}+\dfrac{1}{b^{2025}+1}$.

2) *Cho đa thức $f(x)$ là đa thức bậc 4 có các hệ số nguyên. Biết rằng có bốn giá trị nguyên phân biệt của x để $f(x)$ nhận cùng một giá trị bằng 2025. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên x nào để $f(x)$ có giá trị bằng 2028.*

Lời giải.

1) Ta có: $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}=\dfrac{2}{1+ab}$

$$\Rightarrow\frac{a^2+b^2+2}{(a^2+1)(b^2+1)}=\frac{2}{1+ab}$$

$$\Rightarrow(a^2+b^2+2)(1+ab)=2(a^2+1)(b^2+1).$$

Khai triển, thu gọn, ta được:

$$2a^2b^2-2ab-ab(a^2+b^2)+a^2+b^2=0$$

$$\Rightarrow(1-ab)(a-b)^2=0.$$

Vì $a\neq b$ nên $1-ab=0$. Hiển nhiên $a\neq 0\Rightarrow b=\dfrac{1}{a}$.

Thay vào biểu thức M, ta được:

$$M=\frac{1}{a^{2025}+1}+\frac{1}{b^{2025}+1}=\frac{1}{a^{2025}+1}+\frac{1}{\frac{1}{a^{2025}}+1}$$

$$=\frac{1}{a^{2025}+1}+\frac{a^{2025}}{1+a^{2025}}=1.$$

2) Từ giả thiết suy ra: $f(x)-2025$ có bốn nghiệm nguyên phân biệt a, b, c, d. Theo định lý Bezout, tồn tại đa thức $g(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn:

$$f(x)-2025=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x).$$

Giả sử tồn tại số nguyên e để $f(e)=2028$, thay $x=e$ vào đẳng thức trên ta được:

$$3=(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)g(e).$$

Vì $e-a, e-b, e-c, e-d$ là bốn ước số phân biệt của 3, nên trong bốn số đó có: 1, −1, 3, −3. Nhưng khi đó: 3 chia hết cho $(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)=9$ (vô lý). Vậy điều giả sử trên sai nên không tồn tại số nguyên x để $f(x)=2028$.

Bài 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3=2(x+y)\\ xy(x^2+y^2-2)-x^2-y^2+2=0\end{cases}.$$

Lời giải. Từ phương trình thứ 2, ta có:

$$(xy-1)(x^2+y^2-2)=0.$$

TH1: $xy=1$. Ta có: $y\neq 0\Rightarrow x=\dfrac{1}{y}$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$\frac{5}{y}-4y+3y^3=\frac{2}{y}+2y,$$

tức là: $\dfrac{3}{y}-6y+3y^3=0\Rightarrow 3y^4-6y^2+3=0$

$\Rightarrow 3(y^2-1)^2=0$. Do đó:

$(x;y)=(1;1)$ hoặc $(x;y)=(-1;-1)$.

Thử lại thỏa mãn.

TH2: $x^2+y^2=2$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$5x^2y-4xy^2+3y^3=(x^2+y^2)(x+y),$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2y+5xy^2-2y^3=0.$$

$$\Leftrightarrow(x-y)^2(x-2y)=0\Rightarrow x=y \text{ hoặc } x=2y.$$

+) Nếu $x=y$ thì $2=x^2+y^2=2y^2\Rightarrow(x;y)=(1;1)$ hoặc $(x;y)=(-1;-1)$ (thử lại thỏa mãn).

+) Nếu $x=2y\Rightarrow 2=x^2+y^2=5y^2$

$\Rightarrow (x;y)=\left(2\sqrt{\frac{2}{5}};\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ hoặc $(x;y)=\left(-2\sqrt{\frac{2}{5}};-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ (thử lại thỏa mãn). Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm $(x;y)$ là:

$$(1;1),(-1;-1),\left(2\sqrt{\frac{2}{5}};\sqrt{\frac{2}{5}}\right),\left(-2\sqrt{\frac{2}{5}};-\sqrt{\frac{2}{5}}\right).$$

Bài 3. *Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5 và 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp M. Tính xác suất chọn được số chia hết cho 3.*

Lời giải. Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5 và 6.

Có 6 cách chọn chữ số cho mỗi hàng. Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=6.6.6.6=1296$.

Gọi A là Biến cố: "*Chọn được số chia hết cho 3 từ tập hợp M*".

Xét một số: $\overline{abcd}$, có 6 cách chọn mỗi chữ số a, b, c. Sau khi chọn a, b, c thì luôn có hai cách chọn chữ số d:

+) Nếu $a+b+c$ chia hết cho 3 thì có thể chọn $d=3$ hoặc $d=6$.

+) Nếu $a+b+c$ chia hết cho 3 dư 1 thì có thể chọn $d=2$ hoặc $d=5$.

+) Nếu $a+b+c$ chia hết cho 3 dư 2 thì có thể chọn $d=1$ hoặc $d=4$.

Số kết quả thuận lợi biến cố A là:

$$n(A)=6.6.6.2=432.$$

Xác suất xảy ra biến cố A là:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{432}{1296}=\frac{1}{3}.$$

Bài 4. 1) *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2x^3+y^3+2x^2y+y^2x=2xy-5$.*

2) *Tìm tất cả các bộ số $(x;y;p)$ thỏa mãn: $\frac{xy^3}{x+y}=p$, biết $x;y;p$ là các số nguyên dương và p là số nguyên tố.*

Lời giải. 1) Ta có:

$$2x^3+y^3+2x^2y+y^2x=2xy-5$$

$$\Rightarrow (x+y)(2x^2+y^2)=2xy-5 \quad (1).$$

+) Nếu $x+y\geq 1$ thì

$$2xy-5\geq 2x^2+y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2+x^2\leq -5 \text{ (vô lý).}$$

+) Nếu $x+y\leq -3$ thì

$$2xy-5\leq -3(2x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+5x^2+2y^2\leq 5, \text{ vô lý vì: } (x+y)^2\geq 9.$$

Vậy $-2\leq x+y<1$, mà từ (1) ta có $x+y$ là số lẻ nên $x+y=-1$. Thay vào (1), ta được:

$$2x^2+y^2=5-2xy \text{ hay } x^2+(x+y)^2=5.$$

Ta được: $x^2=4\Rightarrow (x;y)=(2;-3)$ hoặc $(x;y)=(-2;1)$ (thử lại đều thỏa mãn).

Vậy phương trình có đúng hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(2;-3)$ và $(-2;1)$.

2) Đặt $d=(x,y)$ khi đó $x=da, y=db$, với $a,b,d\in\mathbb{Z}$ và $(a,b)=1$. Thay vào phương trình đã cho, ta được: $p=\frac{d^4ab^3}{da+db}=\frac{d^3ab^3}{a+b}$.

Ta có: $d^3ab^3 \vdots a+b$, mà $(a,a+b)=(b,a+b)=1$ (vì $(a,b)=1$) nên: $d^3 \vdots a+b$.

Ta có: $p=\frac{d^3}{a+b}.ab^3$ mà p là số nguyên tố nên có hai trường hợp xảy ra:

+) TH1: $\frac{d^3}{a+b}=p, a=b=1$. Ta có: $d^3=2p\Rightarrow d$ là số chẵn, suy ra: $2p \vdots 8\Rightarrow p \vdots 4$ (mâu thuẫn với giả thiết p là số nguyên tố)

+) TH2: $\frac{d^3}{a+b}=1, a=p, b=1$. Ta có:

$$d^3=p+1\Rightarrow p=d^3-1=(d-1)(d^2+d+1).$$

Vì $d^2+d+1>1$ là ước của số nguyên tố p nên $d^2+d+1=p$ và $d-1=1$.

Suy ra: $d=2, p=7, x=da=14, y=db=2$ (thử lại thỏa mãn).

Vậy $(x;y;p)=(14;2;7)$ là bộ ba duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

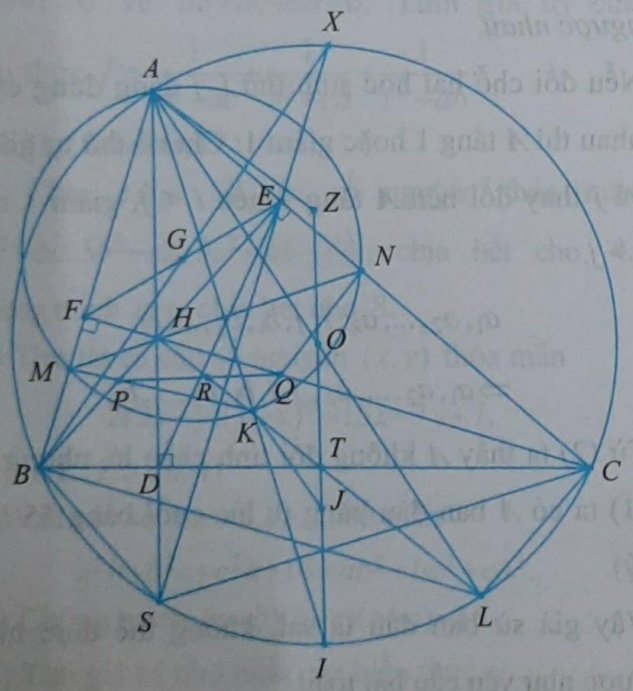
Bài 5. *Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Điểm A di động trên đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.*

1) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh H của tam giác BHC cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm M và N. Chứng minh tam giác AMN cân.

2) Kẻ các đường cao BE và CF của tam giác ABC. Gọi S là giao điểm thứ hai (khác A) của AH với đường tròn (O). Đường thẳng SE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai X (khác S). Chứng minh đường thẳng BX đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

3) Đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMN cắt tia phân giác của góc BAC tại K. Chứng minh điểm K thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải.



1) Ta có HM, HN là tia phân giác của góc $\widehat{BHF}, \widehat{CHE}$. Suy ra:

$$\widehat{MHF}=\frac{1}{2}\widehat{BHF}=\frac{1}{2}\widehat{CHE}=\widehat{NHE}.$$

Suy ra: $\widehat{AMN}=90^0-\widehat{MHF}=90^0-\widehat{NHE}=\widehat{ANM}$

$\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A.

2) Gọi AH cắt BC tại D, G là trung điểm của EF.

Vì các tứ giác $CDHE$ và $ABSC$ nội tiếp và $\widehat{ASB}=\widehat{ACB}=\widehat{BHD}$ (cùng phụ với $\widehat{HBD}$) suy ra tam giác BHS cân tại B.

Mặt khác các tứ giác $BCEF$ và $CDHE$ là các tứ giác nội tiếp, ta có: $\widehat{BEF}=\widehat{BCF}=\widehat{DEH}$;

$$\widehat{BFE}=180^0-\widehat{BCE}=\widehat{DHE}.$$

Suy ra: $\Delta BEF\sim\Delta DEH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BF}{HD}=\frac{FE}{HE}$.

Vì G và D thứ tự là trung điểm của EF và HS nên suy ra: $\frac{BF}{SH}=\frac{FG}{HE}$.

Ta thấy $\Delta BFG\sim\Delta SHE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{FBG}=\widehat{HSE}=\widehat{ABX}\Rightarrow B,G,X$ thẳng hàng

Vậy đường thẳng BX đi qua trung điểm G của EF.

3) Vì ΔAMN cân tại A nên AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Suy ra: $\widehat{AMK}=\widehat{ANK}=90^0$ và $MK \parallel CF$, $NK \parallel BE$.

MK cắt BH tại P, NK cắt CF tại Q, HK cắt PQ tại R. Vì tứ giác $HPKQ$ là hình bình hành, nên R là trung điểm của PQ.

Vì $\Delta HBF\sim\Delta HCE$, áp dụng tính chất đường phân giác, ta có: $\frac{PH}{PB}=\frac{MF}{MB}=\frac{NE}{NC}=\frac{QH}{QC}$

Suy ra $PQ \parallel BC$ mà R là trung điểm của PQ, áp dụng bổ đề về hình thang, ta có HR đi qua trung điểm của T của đoạn thẳng BC.

Kẻ đường kính AL của đường tròn (O). Gọi Z là điểm đối xứng với T qua O. Đường thẳng AK cắt đường tròn $(O;R)$ tại I khác A.

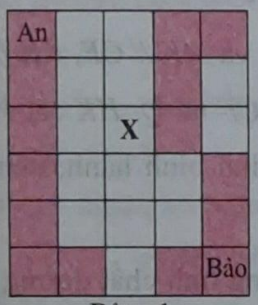
Nhận thấy I là điểm chính giữa của cung BC không chứa A của đường tròn (O) và đường tròn $(O;R)$ có dây BC cố định, các điểm I,T,O,Z thẳng hàng là các điểm cố định, tứ giác $HBLC$ là hình bình hành, suy ra T là trung điểm của HL và tứ giác $AZLT$ là hình bình hành, suy ra $AZ // LT$

Đường thẳng qua K song song với AO cắt OI tại J và $AO // KJ$ và $AZ // KT$, nên: $\frac{IJ}{IZ}=\frac{JK}{OA}=\frac{IK}{IA}=\frac{IT}{IZ}$ (không đổi)

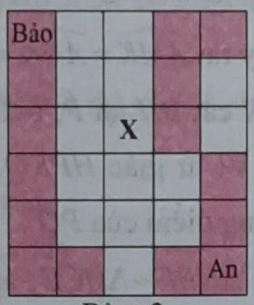
Suy ra điểm J cố định và $JK=\frac{IT}{IZ}.R$ (không đổi).

Vậy điểm K thuộc đường tròn $\left(J;\frac{IT}{IZ}.R\right)$ cố định.

Bài 6. *Trên sân trường có một bảng ô vuông kích thước* $6\text{m}\times 5\text{m}$. *Có* 15 *học sinh mặc áo màu xanh (trong đó chỉ có đúng một học sinh tên An và một học sinh tên Bảo) và* 14 *học sinh mặc áo màu trắng xếp hình thành chữ* ***LS*** *(viết tắt chữ Lam Sơn) sao cho mỗi học sinh đứng ở một ô vuông* $1\text{m}\times 1\text{m}$, *dư lại một ô vuông trống (đánh dấu X), hai học sinh mặc áo xanh tên An và Bảo đứng ở hai ô vuông góc đối diện như hình vẽ (bảng 1)*



Bảng 1



Bảng 2

Cho phép đổi vị trí các học sinh trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần, chọn một học sinh ở ô vuông kề với ô vuông trống, rồi lại chuyển học sinh đó sang ô vuông trống. Hỏi bằng cách thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển theo quy tắc trên (mỗi lần chỉ có 1 học sinh được di chuyển) sao cho An và Bảo đổi chỗ cho nhau còn các học sinh khác giữ nguyên vị trí như hình vẽ (bảng 2) hay không? Vì sao?

Lời giải. Giả sử bài toán có thể thực hiện được như yêu cầu. Đánh số các học sinh tại thời điểm ban đầu từ 1 đến 29 theo thứ tự từ trái sang phải, từ trên xuống dưới. Ở mỗi thời điểm, ta xếp các học sinh theo thứ tự từ trên xuống dưới, từ trái sang phải thành 1 hàng ngang. Lúc đó:

+) Thời điểm ban đầu hàng ngang là 1, 2, …, 29.

Thời điểm cuối hàng ngang là

29, 2, 3, …, 28, 1 (1).

+) Nếu một học sinh di chuyển sang trái hoặc sang phải thì hàng ngang không thay đổi. Nếu một học sinh di chuyển lên hoặc xuống thì học sinh đó tiến lên hoặc lùi xuống 4 vị trí trong hàng ngang.

Tóm lại: Ta đã thực hiện một số chẵn lần đổi chỗ 2 học sinh cạnh nhau trong hàng ngang đang xét (2).

Ta nói cặp học sinh thứ i và thứ j ở vị trí *ngược nhau* nếu học sinh thứ i đứng trước học sinh thứ j nhưng $i > j$. Gọi A là số cặp học sinh ở vị trí *ngược nhau.*

Nếu đổi chỗ hai học sinh thứ i, j đang đứng cạnh nhau thì A tăng 1 hoặc giảm 1: Chỉ có thứ tự giữa i và j thay đổi nên A tăng 1 nếu $i < j$, giảm 1 nếu $i > j$.

$$a_1,a_2,...,a_k,i,j,b_1,b_2,...,b_l$$

$$\Rightarrow a_1,a_2,...,a_k,j,i,b_1,b_2,...,b_l.$$

Từ (2) ta thấy A không đổi tính chẵn lẻ, nhưng từ (1) ta có A ban đầu bằng 0, lúc cuối bằng 55 (vô lý).

Vậy giả sử ban đầu là sai, không thể thực hiện được như yêu cầu bài toán.

HÀ VĂN NHÂN
(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

Giới thiệu

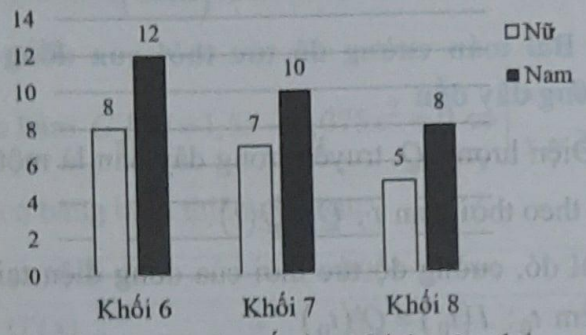
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Môn thi Toán (Chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 150 *phút*

Câu I. (*2,0 điểm*)

1) Giải bơi của một trường Trung học cơ sở ban đầu chỉ có học sinh khối 6, 7 và 8 đăng kí tham gia với số liệu học sinh được cho như trong biểu đồ cột kép ở hình dưới. Ngay trước khi giải đấu diễn ra, có thêm 6 học sinh nam khối 9 và một số học sinh nữ khối 9 đăng kí bổ sung. Biết rằng tỉ lệ học sinh nữ so với tổng số học sinh đăng kí tham gia giải trước và sau khi các học sinh khối 9 đăng kí bổ sung là không thay đổi. Tìm số học sinh nữ khối 9 đã đăng kí thi đấu.



2) Cho a,b,c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a+b+c\neq 0$ và $ab+bc+ca=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2-bc}+\dfrac{1}{b^2-ca}+\dfrac{1}{c^2-ab}$.

Câu II. (*2,0 điểm*)

1) Cho a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $3a^2-bc, 3b^2-ca, 3c^2-ab$ đều chia hết cho 4. Chứng minh abc chia hết cho 8.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn

$$2(2x-y)(y-x)^2=15x-7y+7.$$

Câu III. (*2,0 điểm*)

1) Với các số thực a,b,c thỏa mãn

$$a^2b+b^2c+c^2a+16=ab^2+bc^2+ca^2$$

a) Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=16$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^2+b^2+c^2.$$

2) Tìm tất cả các số hữu tỉ dương m và n sao cho các biểu thức $m+n+mn; \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{mn}$ và $\dfrac{m}{n}$ đều nhận giá trị là số nguyên.

Câu IV. (*3,0 điểm*) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB<AC$), nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao AD, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm T. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O).

1) Chứng minh ba điểm T,H,K thẳng hàng.

2) Đường thẳng qua B và vuông góc với đường thẳng AM tại điểm E, cắt đường thẳng AD tại điểm G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC tại hai điểm D và N. Chứng minh đường thẳng NE song song với đường thẳng BF.

3) Kẻ dây cung AX của đường tròn (O) sao cho đường thẳng AX song song với đường thẳng BC. Chứng minh ba đường thẳng MX, TD và AN đồng quy.

Câu V. (*1,0 điểm*) Hai trường trung học cơ sở A và B tổ chức chung một buổi liên hoan cho các học sinh tiêu biểu. Biết rằng trong buổi liên hoan này:

(*i*) mỗi học sinh trường A quen với đúng 5 học sinh khác cũng của trường A;

(*ii*) mỗi học sinh trường A quen với đúng 4 học sinh trường B;

(*iii*) mỗi học sinh trường B quen với đúng 3 học sinh trường A;

(*iv*) tổng số học sinh của hai trường tham dự không vượt quá 80.

1) Số học sinh trường A tham dự buổi liên hoan có thể là 25 học sinh được không? Vì sao?

2) Tổng số học sinh của hai trường tham dự buổi liên hoan có thể nhiều nhất là bao nhiêu? Vì sao?

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

(*GV THCS Giảng Võ 2, Hà Nội*)

Giới thiệu



ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀO GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN THỰC TIỄN

NGUYỄN HỮU TIẾN
(GV Khoa Kỹ thuật Cơ sở, Học viện PK-KQ, Sơn Tây, Hà Nội)

(Kỳ I)

Trong các đề thi tốt nghiệp THPT Quốc gia môn Toán những năm gần đây đã đề cập nhiều đến các bài toán có nội dung thực tiễn. Trong các bộ SGK của các lớp THPT hiện hành theo chương trình Giáo dục phổ thông 2018 (*Kết nối tri thức với cuộc sống*, *Chân trời sáng tạo*, ...), nhiều ví dụ, bài tập có nội dung gắn với thực tiễn cũng đã được đưa ra. Để giúp các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh lớp 12 hiểu và nắm được cách giải những bài toán thực tiễn này, chuẩn bị tốt cho kì thi tốt nghiệp THPT sắp tới, bài viết này xin giới thiệu đến các em phương pháp dùng đạo hàm để giải quyết một số bài toán thực tiễn đó.

A. LÝ THUYẾT

1. Bài toán vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chuyển động

• Quãng đường S của một chuyển động là một hàm số của thời gian t, $S = S(t)$.

Khi đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0: $v(t_0) = S'(t_0)$ và gia tốc tức thời của chuyển động: $a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.

Thí dụ 1. *Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí $S(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $S(t) = t^3 + 3t^2 - 9t + 27, t \geq 0$.*

a) Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ (giây).

b) Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc của chất điểm bị triệt tiêu.

Lời giải. a) Ta có:

$$v(t) = S'(t) = (t^3 + 3t^2 - 9t + 27)' = 3t^2 + 6t - 9$$

nên tại thời điểm $t = 2$ (giây), vận tốc của vật là:

$$v = 3.2^2 + 6.2 - 9 = 15 \ (\text{m/s}).$$

b) Ta lại có: $a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0) = 6t + 6$.

Tại thời điểm vận tốc triệt tiêu thì:

$$3t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Với $t = 1$ thì gia tốc chuyển động là:

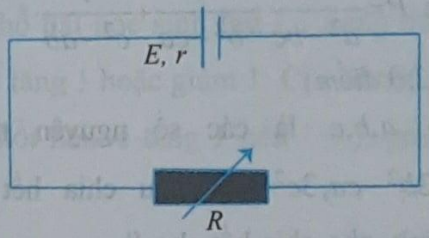
$$a = 6.1 + 6 = 12 \ \left(\text{m/s}^2\right).$$

2. Bài toán cường độ tức thời của dòng điện trong dây dẫn

• Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số theo thời gian t, $Q = Q(t)$.

Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Thí dụ 2. *Một nguồn điện với suất điện động E và điện trở r được nối với một biến trở R như hình vẽ.*



Công suất toả nhiệt trên toàn mạch được tính theo công thức $P = \dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$. Với giá trị nào của biến trở thì công suất toả nhiệt trên toàn mạch sẽ đạt cực đại?

A. $R = r$ **B.** $R = 2r$

C. $R = 3r$ **D.** $R = 4r$.

Lời giải. Ta có:

$$P'(R) = E^2.\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = E^2.\frac{r-R}{(R+r)^3};$$

$$P'(R) = 0 \Rightarrow R = r.$$

Ta có bảng biến thiên:

R	0		r		$+\infty$
$P'(R)$		$+$	0	$-$	
$P(R)$		↗	$P(r)$	↘	

Vậy công suất toả nhiệt toàn mạch đạt cực đại khi $R=r$.

3. Bài toán tối ưu

Thí dụ 3. *Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân là $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân $(0<x<30)$. Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu?*

Lời giải.

Đạo hàm $G'(x)=1,5x-0,075x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=20\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	0		20		30
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	↗	$G(20)$	↘	0

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $x=20\,(\text{mg})$.

Thí dụ 3. *Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=480-20n\,(\text{gam})$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được khối lượng cá là nhiều nhất (giả sử số lượng cá không thay đổi trong quá trình nuôi)?*

Lời giải. Gọi n là số con cá trên một đơn vị diện tích hồ $(n>0)$. Sau một vụ cân nặng của một con cá là: $P(n)=480-20n\,(\text{gam})$;

Cân nặng của n con cá là:

$$n.P(n)=480n-20n^2\ (\text{gam}).$$

Sản lượng cá thu hoạch được trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ sau một vụ là:

$$480n-20n^2\ (\text{gam}).$$

Xét hàm số $f(n)=480n-20n^2, n\in(0;+\infty)$ có:

$$f'(n)=480-40n=0\Leftrightarrow n=12.$$

Ta có bảng biến thiên:

n	0		12		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$	0	↗	2880	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để có thu hoạch nhiều nhất thì số cá phải thả trên một đơn vị diện tích hồ là 12 con.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. *Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 2000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi quy luật $N(t)=2000+\dfrac{500t}{100+t^2}$ (con), với t tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.*

Lời giải. Ta có:

$$N'(t)=500.\frac{1\left(100+t^2\right)-t.2t}{\left(100+t^2\right)^2}=500.\frac{100-t^2}{\left(100+t^2\right)^2};$$

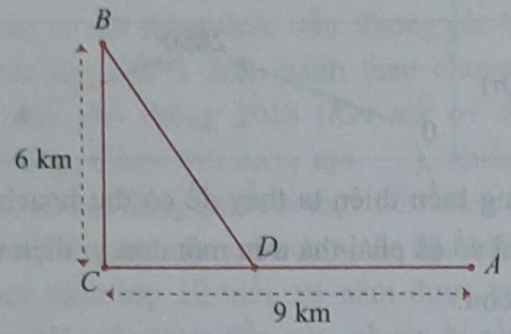
$$N'(t)=0\Rightarrow t=10.$$

Bảng biến thiên:

t	0		10		$-\infty$
$N'(t)$		$+$	0	$-$	
$N(t)$	2000	↗	2025	↘	2000

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất là 2025 con.

Câu 2. *Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100000000 đồng và dưới nước là 260000000 đồng.*



Lời giải. Đặt $AD = x$ km, $0 \le x \le 9$; $CD = 9 - x$; $BD = \sqrt{36 + (9-x)^2}$.

Giá thành lắp đặt là:

$$100.10^6 x + \sqrt{36 + (9-x)^2}.260.10^6 = 10^7\left[10x + 26\sqrt{36 + (9-x)^2}\right].$$

Xét hàm số

$$f(x) = 10x + 26\sqrt{36 + (9-x)^2} \quad (0 \le x \le 9)$$

có: $f'(x) = 10 - 26.\dfrac{9-x}{\sqrt{36 + (9-x)^2}} = 0$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{36 + (9-x)^2} - 26(9-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 9 \\ 4x^2 - 72x + 299 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{13}{2}$		9
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \dfrac{13}{2}$. Vậy $AD = 6{,}5$ km.

C. LUYỆN TẬP

C.1. CÂU TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

Trong mỗi câu hỏi, hãy chọn 1 đáp án.

Câu 1. *Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $S(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.*

A. $v = 10$ m/s **B.** $v = 12$ m/s

C. $v = 14$ m/s **D.** $v = 16$ m/s.

Lời giải. Ta có vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:

$$v = S'(t) = -3t^2 + 6t + 9.$$

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a = S''(t) = -6t + 6$.

Gia tốc triệt tiêu khi $S'' = 0 \Leftrightarrow -6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là:

$$v(1) = S'(1) = 12 \text{ (m/s)}.$$

Câu 2. *Một vật được bắn thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức: $h(t) = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2$. Tìm độ cao lớn nhất vật có thể đạt được.*

A. 23,625 m **B.** 32,625 m

C. 23,256 m **D.** 32,256 m.

Lời giải. Ta có: $h'(t) = 24{,}5 - 9{,}8t$.

Suy ra: $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2{,}5$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		2,5		$+\infty$
$h'(t)$		+	0	−	
$h(t)$		↗	32,625	↘	

Vậy độ cao lớn nhất vật có thể đạt được là 32,625 m.

Câu 3. *Sau khi phát hiện một bệnh dịch X, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh X kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t)=45t^2-t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:*

A. 25 **B.** 30

C. 20 **D.** 15.

Lời giải. Ta có: $G'(t)=90t-3t^2$;

$$G''(t)=90-6t=0\Leftrightarrow 90-6t=0\Leftrightarrow t=15.$$

Ta có bảng biến thiên:

t	0		15		$+\infty$
$G''(t)$		+	0	−	
$G'(t)$		↗	675	↘	

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Câu 4. *Vi khuẩn HP (Helicobacter Pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ m với số lượng là $F(m)=500\ln(2m+1)+2000$ con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Biết nếu phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày? Bệnh nhân đó có cứu chữa được không?*

A. 5434 con và không cứu được.

B. 1499 con và cứu được.

C. 283 con và cứu được.

D. 3717 con và cứu được.

Lời giải. Ta có: $F(m)=500\ln(2t+1)+2000$.

Khi $m=15$ (ngày) thì ta có lượng vi khuẩn là:

$$F(15)=500\ln(2.15+1)+2000\approx 3717 \text{ (con).}$$

Do $3717<4000$ nên bệnh nhân còn cứu chữa được.

Câu 5. *Sau khi phát hiện một bệnh dịch Y, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh Y kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t theo hàm số $f(t)=45t^2-t^3+10t$, và $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất.*

A. 15 **B.** 30

C. 31 **D.** 685.

Lời giải. Số người nhiễm bệnh Y kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là:

$$f(t)=45t^2-t^3+10t.$$

Ta có: $f'(t)=90t-3t^2+10$, $f''(t)=90-6t$,

$$f''(t)=0\Leftrightarrow t=15.$$

Ta có bảng biến thiên:

t	0		15		$+\infty$
$f''(t)$		+	0	−	
$f'(t)$		↗	685	↘	

Vì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t, từ bảng biến thiên suy ra tốc độ truyền bệnh là lớn nhất vào ngày thứ 15.

Câu 6. *Cho biết số lượng người của một thành phố từ năm 2020 trở đi được tính bởi công thức $P(t)=\dfrac{t^2+3t+1}{t+1}.16900+1000000$ (người), trong đó $t=T-2020$ với T là thời điểm của năm đó. Tính tốc độ gia tăng dân số tại thời điểm năm 2025.*

A. 17370 **B.** 17369

C. 17576 **D.** 17577.

Lời giải. $P(t)=16900.\left(t+2-\dfrac{1}{t+1}\right)+1000000$

$$\Rightarrow P'(t)=16900.\left(1+\frac{1}{(t+1)^2}\right).$$

Với $T=2025\Rightarrow t=5$

$$\Rightarrow P'(5)=16900\left(1+\frac{1}{6^2}\right)\approx 17369 \text{ (người).}$$

(Kỳ sau đăng tiếp)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/578 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương phân biệt a, b sao cho $P=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2025$ là một số nguyên.

TẠ MINH HIẾU

(GV THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Phú Thọ)

Bài T2/578 (Lớp 7). Đặt

$$S=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+...+\frac{1}{2026^2-1}.$$

Chứng minh $\frac{1}{5}<S<\frac{1}{2}$.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, TX. Phong Điền, TP. Huế)

Bài T3/578. Tìm các bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $x^6+(y^2+3)^3=z(3x^2y^2+9x^2-z^2)$.

LÊ XUÂN DƯƠNG

(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Bài T4/578. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm H và L. Điểm X nằm trên (O'). Các đường thẳng HX, LX cắt (O) lần lượt tại E, F (E, F khác H, L). Các tiếp tuyến tại H và L của (O') cắt nhau tại Y. Chứng minh rằng đường thẳng XY đi qua trung điểm của EF.

TRẦN ANH TUẤN

(GV THCS Phú Phúc, Lý Nhân, Hà Nam)

Bài T5/578. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=(1-5ab)^2+(1-5bc)^2+(1-5ca)^2.$$

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

(GV THCS Đa Tốn, xã Bát Tràng, TP. Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/578. Giải phương trình

$$(8\cos^3 x+1)^3=162\cos x-27.$$

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Bài T7/578. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^4+b+c}+\frac{b}{b^4+c+a}+\frac{c}{c^4+a+b}\le\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}.$$

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/578. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta có: $\frac{1}{IA}+\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}\le\frac{1}{HA}+\frac{1}{HB}+\frac{1}{HC}$ trong đó H và I lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

PHẠM DUY KHÁNH

(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T9/578. Tồn tại hay không $2n$ ($n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$) số hữu tỷ $a_i, b_i, i=\overline{1,n}$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i\sqrt{2})^{2n}=1+\sqrt{2}\ ?$$

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/578. Cho số nguyên $n\ge 2$. Tìm các đa thức $Q(x)$ có hệ số thực bậc cao nhất là $n-1$ sao cho $x(x-1)...(x-n)Q(x)+x^2+1$ là bình phương của một đa thức.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG

(Pleiku)

Bài T11/578. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases}x_0=a\\ x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}\end{cases}$$

với mọi $n=1, 2, 3, \ldots$ và $a>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+2n}<x_n<\sqrt{a^2+2n}+\frac{1}{2a}$ với mọi $n=1, 2, 3, \ldots$

PHẠM KIỀU HƯNG

(ĐL-44-2, ĐH Thủy sản Nha Trang, Khánh Hòa)

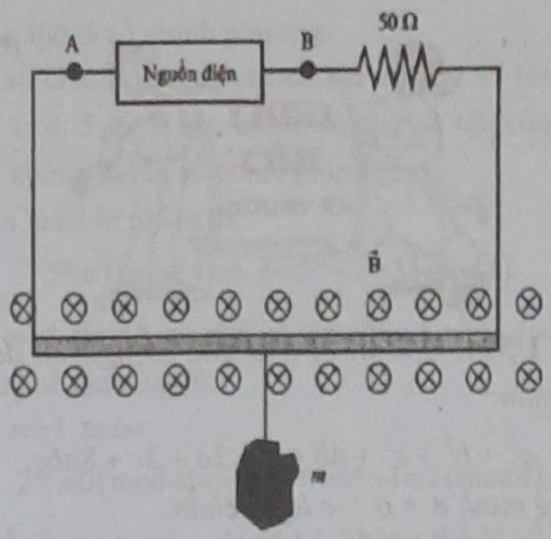
Bài T12/578. Cho tam giác đều ABC với bán kính đường tròn ngoại tiếp R và P là điểm nằm trong tam giác đó. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $PA.PB.PC+PD.PE.PF\le\frac{9R^3}{8}$.

NGUYỄN VĂN QUÝ (*Hà Nội*)

Bài L1/578. Mỗi lần bơm đưa được $V_0 = 80$ cm^3 không khí vào ruột xe. Sau khi bơm diện tích tiếp xúc của vỏ xe với mặt đường là 30 cm^2. Thể tích của ruột xe sau khi bơm là 2000 cm^3. Áp suất khí quyển $p_0 = 1$ atm. Trong lượng xe là 600 N. Coi nhiệt độ là không đổi. Tìm số lần bơm.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/578. Mạch điện trong hình dưới được sử dụng để chế tạo một "cân từ" có thể xác định trọng lượng các vật. Vật khối lượng m được treo tại trọng tâm của thanh nằm ngang nằm trong một từ trường đều hướng thẳng vào mặt phẳng hình vẽ và có độ lớn $B = 1{,}5$ T. Hiệu điện thế của nguồn điện có thể điều chỉnh để làm thay đổi cường độ dòng điện trong mạch và có giá trị tối đa là 17,5V. Thanh nằm ngang có độ dài $L = 60$ cm và được làm bằng vật liệu cực nhẹ. Nó được nối với nguồn điện bởi hai dây dẫn treo thẳng đứng rất mảnh, không chịu được lực căng. Toàn bộ trọng lượng của vật phải được cân bằng với lực từ tác dụng lên thanh. Một điện trở $R = 50\ \Omega$ được mắc nối tiếp với thanh và điện trở của phần còn lại trong mạch điện nhỏ hơn nhiều so với giá trị này. Lấy $g = 10$ m/s^2.



Cho biết cực dương của nguồn điện là đầu A hay đầu B. Tính khối lượng lớn nhất mà thiết bị này có thể cân được.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

ĐÍNH CHÍNH: Bài T12/576 trang 19, số 576, tháng 6.2025

Đã viết: a) … tiếp xúc với OB.

Xin được sửa là: a) … tiếp xúc với OB tại N.

Thành thực xin lỗi bạn đọc

TH&TT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/578 (Grade 6). Find distinct positive integers a, b such that $P=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2025$ is an integer.

Problem T2/578 (Grade 7). Let

$$S=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\ldots+\frac{1}{2026^2-1}.$$

Prove that $\frac{1}{5}<S<\frac{1}{2}$.

Problem T3/578. Find all triplets of positive integers (x, y, z) that satisfy

$$x^6+(y^2+3)^3=z\left(3x^2y^2+9x^2-z^2\right).$$

Problem T4/578. Suppose that two circles (O) and (O') intersect at two points H and L. A point X lies on (O'). Two lines HX, LX intersect (O) at E, F respectively (E, F are different from H, L). The tangents at H and L of (O') intersect at Y. Prove that the line XY passes through the midpoint of EF.

Problem T5/578. Given non-negative real numbers a, b, c satisfying $a + b + c = 1$. Find the minimum and maximum values of the expression

$$P=(1-5ab)^2+(1-5bc)^2+(1-5ca)^2.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/578. Solve the equation

$$(8\cos^3 x+1)^3=162\cos x-27.$$

Problem T7/578. Let a, b, c be positive real numbers satisfying $abc=1$. Show that

$$\frac{a}{a^4+b+c}+\frac{b}{b^4+c+a}+\frac{c}{c^4+a+b}\le\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}.$$

(Xem tiếp trang 45)



Bài T1/574. *Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn:*

$$a^2+b^2+c^2+4b+6=2a+2c+8abc.$$

Chứng minh $a+b+c$ là số chẵn.

Lời giải. Từ giả thiết

$$a^2+b^2+c^2+4b+6=2a+2c+8abc$$

suy ra rằng $a^2+b^2+c^2$ là số chẵn. Từ đây có nhiều cách để chứng tỏ $a+b+c$ là số chẵn.

Cách 1. Số $R=a^2+b^2+c^2+a+b+c$

$$=a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)$$

là tổng của ba số chẵn (do tích hai số nguyên liên tiếp là số chẵn) nên R là số chẵn, mà $a^2+b^2+c^2$ là số chẵn nên $a+b+c$ là số chẵn.

Cách 2. Giải tương tự như cách 1 khi xét số

$$a^2+b^2+c^2-(a+b+c)$$

$$=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1).$$

Cách 3. Nếu số $a^2+b^2+c^2$ là số chẵn thì số

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

là số chẵn, từ $(a+b+c)^2$ là số chẵn suy ra $a+b+c$ là số chẵn.

Cách 4. Số nguyên a có cùng tính chẵn lẻ với số a^2. Tương tự như thế với các số nguyên b và c. Tổng ba số $a^2+b^2+c^2$ là số chẵn thì chỉ xảy ra hai trường hợp: hoặc là ba số a^2, b^2, c^2 đều là số chẵn lúc đó tổng $a+b+c$ là số chẵn, hoặc có một số chẵn và hai số lẻ, chẳng hạn số a^2 chẵn còn b^2, c^2 là số lẻ, lúc đó số a chẵn còn b, c là số lẻ, suy ra tổng $a+b+c$ là số chẵn. Lập luận tương tự khi b^2 hoặc c^2 là số chẵn. Vậy tổng ba số $a^2+b^2+c^2$ là số chẵn thì tổng $a+b+c$ là số chẵn.

Nhận xét. Có thể thay điều kiện giả thiết số

$$2a+2c+8abc-4b-6$$

bởi số chẵn dạng khác. Hãy xét bài toán tổng quát: *Chứng minh rằng tổng các số hạng là số chẵn nếu tổng các bình phương của các số hạng đó là số chẵn.*

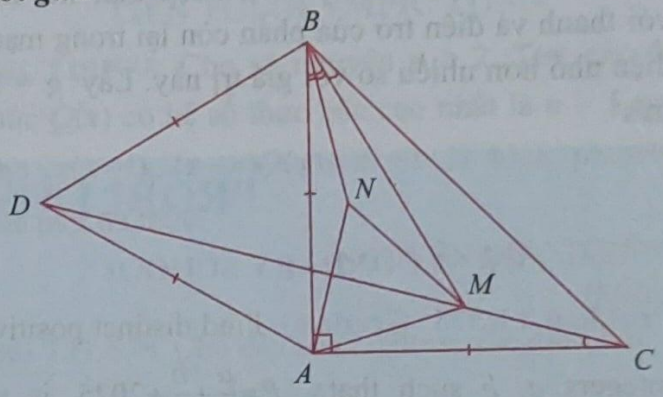
Các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Nguyễn Phương Hoa*, 6A2, THCS Linh Đàm, Q. Hoàng Mai; **Nghệ An**: *Đặng Văn Hoàng*, 6A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Bùi Hữu Anh Quân, Trương Đình Quốc Anh, Đinh Trí Dũng*, 6E, *Nguyễn Tất Thuận*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Trần Phạm Minh Thúy*; 6B, THCS Hành Trung, *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, *Phạm Thị Bảo Uyên*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/574. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Lấy điểm M bên trong tam giác sao cho $\widehat{MBC}=\widehat{MCA}=15^0$. Đường thẳng qua M song song với BC cắt tia phân giác của góc $\widehat{MBA}$ tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác đều.*

Lời giải.



Ngoài ΔABC vẽ tam giác đều ABD.

Vì $AD=AB=AC$ nên ΔACD cân tại A.

Do đó: $\widehat{DCA}=\dfrac{180^0-\widehat{DAC}}{2}=\dfrac{180^0-60^0-90^0}{2}=15^0$.

Suy ra: $\widehat{DCA}=\widehat{MCA}=15^0$ hay D, M, C thẳng hàng.

Do đó: $\widehat{BDM}=60^0-15^0=45^0$,

$$\widehat{BMD}=\widehat{MBC}+\widehat{MCB}=15^0+30^0=45^0$$

(do ΔABC vuông cân và $\widehat{MCA}=15^0$).

Suy ra ΔMBD vuông cân tại B, suy ra:

$$MB=DB=BA.$$

Xét ΔNBA và ΔNBM có: BN cạnh chung, $\widehat{NBA}=\widehat{NBM}$, $MB=MA$ nên

$\Delta NBA=\Delta NBM$ (c.g.c),

suy ra $NA=NM$ (1).

Mặt khác, $\widehat{NMB}=\widehat{MBC}=15^0$ (hai góc so le trong),

$$\widehat{NBM}=\frac{1}{2}\widehat{MBA}=\frac{1}{2}(45^0-15^0)=15^0,$$

do đó $\widehat{BNA}=\widehat{BNM}=180^0-15^0-15^0=150^0$,

suy ra $\widehat{ANM}=60^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tam giác AMN là tam giác đều.

Nhận xét. Bài toán này, ngoài cách giải tác giả đưa ra còn có nhiều cách giải khác được các bạn gửi về Toà soạn, tuy nhiên lời giải được trình bày hơi dài. Một số bạn có lời giải đúng nhưng trình bày ẩu và không rõ ràng. Tất cả các bài gửi có lời giải đúng:

Nghệ An: *Nguyễn Thái Dũng*, *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, *Nguyễn Tất Thuận*, *Trần Ngọc Quân*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Trần Văn Phụng*, 7C, THCS Nguyễn Kim Vang, Đình Cương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc (bạn không ghi rõ địa chỉ).

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/574. *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ sao cho 2^m+5^n+1 là một số chính phương.*

Lời giải. Đặt $A=2^m+5^n+1$.

Nếu $m>1$ ta có $A=2^m+5^n+1\equiv 2\pmod 4$ nên A không thể là số chính phương.

Do đó: $m\le 1\Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=1$.

Nếu $m=0$ ta có $A=5^n+2\equiv 3\pmod 4$ nên A không thể là số chính phương.

Nếu $m=1$ ta có $A=5^n+3$.

Nếu $n=0$ thì $A=4$ là số chính phương, bài toán thoả mãn.

Nếu $n\ge 1$ thì $A=5^n+3$ có chữ số tận cùng là 8 nên A không thể là số chính phương.

Vậy cặp số tự nhiên duy nhất thoả mãn bài toán là $(m,n)=(1;0)$.

Nhận xét. 1) Một số chính phương chia cho 4 chỉ có các số dư 0;1 do đó khi $A\equiv\begin{bmatrix}2\pmod 4\\3\pmod 4\end{bmatrix}$ thì A không thể là số chính phương.

Một số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9 nên khi A có chữ số tận cùng là 8 thì A không thể là số chính phương.

Nếu n là số tự nhiên thì

$$5^n\equiv 1\pmod 4\Rightarrow A=5^n+2\equiv 3\pmod 4.$$

Nếu $n\ge 1$ thì 5^n có chữ số tận cùng 5 nên $A=5^n+3$ có chữ số tận cùng 8.

Nếu $m>1$ ta có:

$$2^m\equiv 0\pmod 4\Rightarrow A=2^m+5^n+1\equiv 2\pmod 4.$$

2) Để chứng minh $A=5^n+3$ không thể là số chính phương khi $n\ge 1$, có thể làm như sau: nếu n là số lẻ thì $A=5^n+3\equiv 2\pmod 3$ nên A không thể là số chính phương; nếu n là số chẵn, giả sử $n=2k$ $(k\in\mathbb{N}, k\ge 1)$ và giả sử

$$A=5^{2k}+3=a^2\Rightarrow 3=(a-5^k)(a+5^k)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-5^k=1\\a+5^k=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\k=0\end{cases}\text{ (loại).}$$

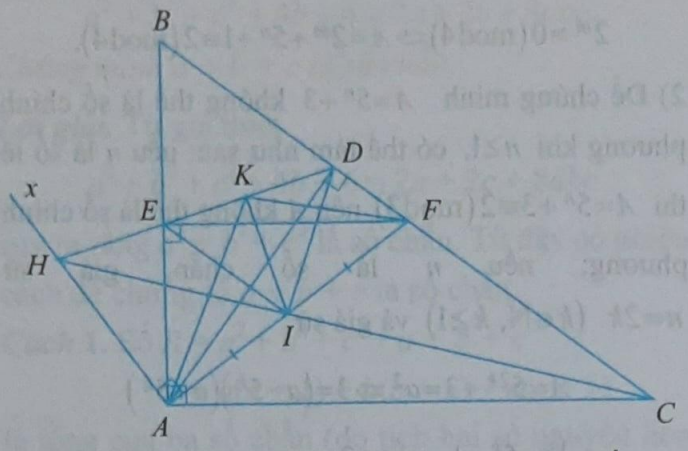
Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Nghệ An: *Nguyễn Trương Việt Anh*, 8D, *Bùi Hữu Anh Quân*, *Trương Đình Quốc Anh*, 6E, *Nguyễn Tất Thuận*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Hải Thanh*, *Lê Thị Tuyết Nhung*, 8A1, THCS Quỳnh Thiện, TX. Hoàng Mai, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Phú Thọ:** *Chu Ngọc Ánh*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông , *Hà Lê Đức Anh*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Hoàng*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP Vĩnh Yên; **Kiên Giang:** *Phan Ngọc Tuyết Trân*, THCS TT. Tân Hiệp, Tân Hiệp; **Quảng Ngãi:** *Trần Văn Phụng*, 7C, THCS Nguyễn Kim Vang, Hành Đức, Nghĩa Hành; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai, *Hà Sĩ An*, 8A3, THCS Nguyễn Trãi, xã Thường Tín ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/574. *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD (D thuộc cạnh BC). Trên đoạn CD lấy điểm F (F khác C, D). Kẻ FE vuông góc với AB tại E. Qua A kẻ đường thẳng Ax vuông góc với AF. Ax cắt đường thẳng DE tại H. Gọi I là trung điểm của AF. Chứng minh ba điểm C, I, H thẳng hàng.*

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của DE. Theo tính chất tam giác vuông, ta có:

$$EI=DI=\frac{1}{2}AF.$$

Suy ra tam giác EID cân tại I, nên $IK\perp DE$.

Tứ giác $AHKI$ nội tiếp do có $\widehat{IAH}=\widehat{IKH}=90^0$.

Suy ra $\widehat{HKA}=\widehat{HIA}$ (1).

Mặt khác, tứ giác $AEDF$ nội tiếp do

$$\widehat{ADF}=\widehat{AEF}=90^0,$$

kết hợp với EF // AC, ta có:

$$\widehat{EDA}=\widehat{EFA}=\widehat{FAC};\ \widehat{AED}=\widehat{AFC}.$$

Từ đó $\Delta AED\backsim\Delta CFA$ (g.g). Suy ra:

$$\frac{CF}{AE}=\frac{AF}{DE}=\frac{IF}{KE}.$$

Dẫn tới $\Delta AEK\backsim\Delta CFI$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{AKE}=\widehat{CIF}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AIH}=\widehat{CIF}$.

Từ đó suy ra C, I, H thẳng hàng.

Nhận xét. Chỉ có ba bạn có lời giải đúng cho bài toán trên. Đó là các bạn: **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Hải Phòng:** *Nguyễn Vũ Tuấn Minh*, 9F, THCS Võ Thị Sáu, TP. Hải Phòng.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/574. *Giải phương trình*

$$\sqrt{2x+6}=x^2+3x.$$

Lời giải. Cách 1. Ta có:

$$\sqrt{2x+6}=x^2+3x\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x\ge0\\2x+6=(x^2+3x)^2\end{cases}(1).$$

Ta có: $x^2+3x\ge0\Leftrightarrow x\ge0$ hoặc $x\le-3$ (2).

Biến đổi phương trình (1) như sau:

$$2x+6=x^4+6x^3+9x^2$$
$$\Leftrightarrow x^4+6x^3+9x^2-2x-6=0$$
$$\Leftrightarrow(x^4+x^3)+(5x^3+5x^2)+(4x^2+4x)-(6x+6)=0$$
$$\Leftrightarrow(x+1)(x^3+5x^2+4x-6)=0$$
$$\Leftrightarrow(x+1)\left[(x^3+3x^2)+(2x^2+6x)-(2x+6)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow(x+1)(x+3)(x^2+2x-2)=0.$$

Xảy ra các khả năng sau:

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1.$

$x+3=0\Leftrightarrow x=-3.$

$x^2+2x-2=0\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{3};x=-1-\sqrt{3}.$

Đối chiếu với điều kiện (2), chỉ có $x=-3$ và $x=-1+\sqrt{3}$ thoả mãn. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là -3 và $-1+\sqrt{3}$.

Cách 2. Ta có: $\sqrt{2}.\sqrt{x+3}=x(x+3)$ (*).

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x+3\ge0\\x(x+3)\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x\ge0\end{array}\right.$.

- Với $x=-3$, thay vào phương trình (*) thấy thỏa mãn. Vậy $x=-3$ là một nghiệm của phương trình.
- Với $x\ge0$, thì $\sqrt{x+3}>0$. Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{2}=x\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x^2(x+3)=2$$
$$\Leftrightarrow x^3+3x^2-2=0\Leftrightarrow(x+1)(x^2+2x-2)=0.$$

Do $x\ge0$ nên $x+1>0$, suy ra $x^2+2x-2=0$; phương trình này có hai nghiệm $x_1=-1+\sqrt{3}$ và $x_2=-1-\sqrt{3}$.

Đối chiếu với điều kiện $x\ge0$, chỉ có $x_1=-1+\sqrt{3}$ thoả mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là -3 và $-1+\sqrt{3}$.

Nhận xét. Phương trình bài ra có dạng

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)=(g(x))^2\end{cases}.$$

Tuy nhiên, rất nhiều bạn lại hiểu sai là $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ f(x)=(g(x))^2\end{cases}$, dẫn đến kết luận phương trình có tập nghiệm

$$\{-3;-1;-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\}$$

là không đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt. lập luận chặt chẽ.

Phú Thọ: *Hà Lê Đức Anh,* 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Hà Nội:** *Trần Thu Hà,* 8C, THCS Phú Minh, Sóc Sơn; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu,*10A1, THPT Tiền Hải; **Nghệ An:** *Lê Kim Ngân*, 7A1, *Nguyễn Hải Thanh*, 8A1,THCS Quỳnh Thiện, TX. Hoàng Mai, *Lê Vũ Quỳnh Như,* 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Kiên Giang:** *Phan Thị Tuyết Trần,* 9/5, THCS thị trấn Tân Hiệp; **Long An:** *Vũ Duy Khang,* 9/3, THCS thị trấn Thạch Hoá; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đinh Gia Kỳ,* 9/3, THCS Hoà Phú, Củ Chi, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa. **Lâm Đồng:** *Trần Đức Hiếu,* 9A2, THCS Hoà Lạc; **Cộng hoà Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng,* 2B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/574. *Cho ba số thực a, b, c đều khác 0 và hai đa thức*

$$f(x)=ax^2+2bx+c,\ g(x)=ax^2+bx+2c$$

có nghiệm chung. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S=25a^2-60b^2+4c^2+30.$$

Lời giải. Gọi m là nghiệm chung của hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$, tức là $f(m)=g(m)=0$. Khi đó $bm-c=f(m)-g(m)=0$ hay $m=\dfrac{c}{b}$ (do $b\neq 0$).

Suy ra: $a.\left(\dfrac{c}{b}\right)^2+2b.\left(\dfrac{c}{b}\right)+c=0$

hay $ac^2+3b^2c=0$ hay $ac=-3b^2$ (do $c\neq 0$).

Khi đó

$S=25a^2+20ac+4c^2+30=(5a+2c)^2+30\geq 30.$

Khi $(a,b,c)=\left(2,\sqrt{\dfrac{10}{3}},-5\right)$ thì hai đa thức có nghiệm chung là $m=-\dfrac{\sqrt{30}}{2}$ và $S=30$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 30.

Nhận xét. Đây là một bài toán dễ, ngay cả với các bạn THCS cũng có thể làm tốt. Tuy nhiên có vài bạn giải sai do nhầm dấu, biến đổi nhầm, sử dụng dấu tương đương tùy tiện, khai căn không có dấu trị tuyệt đối, không chỉ ra dấu bằng xảy ra khi nào hoặc chỉ ra nhưng sai. Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất, ta cần phải chỉ ra dấu bằng xảy ra khi nào, tuy nhiên không nhất thiết phải chỉ ra tất cả các trường hợp dấu bằng xảy ra (nếu đề bài không yêu cầu). Có một bạn giải đúng nhưng không ghi tên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Phùng Phong Huy*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP Vĩnh Yên; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; *Lê Nguyễn Tuyết Minh*, 7A6, THCS Trần Đại Nghĩa; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; *Nguyễn Tuấn Khải*, 10A2, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phương Nam*, *Lê Ánh Dương*, *Nguyễn Văn Hợp*, 11 chuyên Toán 2, *Vương Khánh Toàn*, *Trần Đức Phát*, 11 chuyên Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Kiên Giang:** *Cái Hoàng Quốc Khánh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Long An:** *Võ Tiến Phát*, 10A1, THPT Nguyễn Thông; *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10T2, *Lê Trọng Phúc*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Phúc Vĩnh Nguyên*, 11T1, *Hồ Thành Đạt*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T7/574. *Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt qua x. Cho dãy số (u_n) với*

$$u_n=\left[\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right],\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Tìm $P=\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\ldots+\dfrac{1}{u_{2025}}$.

Lời giải. (của *Trương Khánh Chi*) Ta có:

$$u_n=\left[\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{l}\left[\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}\right]+\left\{\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}\right\}\\ -\left[\sqrt{n^2+1}\right]-\left\{\sqrt{n^2+1}\right\}\end{array}\right]$$

$$=\left[\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}\right]-\left[\sqrt{n^2+1}\right]$$

$$+\left[\left\{\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}\right\}-\left\{\sqrt{n^2+1}\right\}\right].$$

Do $n^2<n^2+1<(n+1)^2$ nên

$$n<\sqrt{n^2+1}<n+1 \text{ hay } \left[\sqrt{n^2+1}\right]=n$$

Mặt khác, $(n^2+2n)^2=n^4+4n^3+4n^2$

$$<n^4+4n^3+6n^2+1$$

$$<n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$

$$=(n^2+2n+1)^2$$

nên $n^2+2n<\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}<n^2+2n+1$

hay $\left[n^4+4n^3+6n^2+1\right]=n^2+2n.$

Ta chứng minh: với mọi n thì

$$\left\{\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}\right\}>\left\{\sqrt{n^2+1}\right\} \quad (1).$$

Thật vậy, $(1)\Leftrightarrow\left\{\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}\right\}=$

$$=\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}-\left[\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}\right]$$

$$>\left\{\sqrt{n^2+1}\right\}=\sqrt{n^2+1}-\left[\sqrt{n^2+1}\right].$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}-(n^2+2n)>\sqrt{n^2+1}-n.$$

$$\Leftrightarrow\frac{n^4+4n^3+6n^2+1-(n^2+2n)^2}{\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}+(n^2+2n)}>\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2n^2+1}{\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}+(n^2+2n)}>\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$\Leftrightarrow(2n^2+1)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)$$

$$>\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}+(n^2+2n) \quad (2).$$

$\text{VT}(2)>2n^2\cdot 2n=4n^3.$

Mà $\text{VP}(2)<n^2+2n+1+n^2+2n=2n^2+4n+1.$

Suy ra (2) đúng vì: với $n=1$ thì (2) đúng, với $n>1$ thì

$$\text{VT}(2)-\text{VP}(2)>4n^3-(2n^2+4n+1)$$

$$=(2n+1)(2n^2-2n-1)$$

$$=(2n+1)[2n(n-1)-1]>0.$$

Do đó (1) đúng và

$$0<\left\{\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}\right\}-\left\{\sqrt{n^2+1}\right\}<1$$

nên $\left[\left\{\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}\right\}-\left\{\sqrt{n^2+1}\right\}\right]=0.$

Cuối cùng ta có:

$$u_n=\left[\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right]$$

$$=n^2+2n-n-0=n^2+n=n(n+1).$$

Áp dụng:

$$P=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_{2025}}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2025\cdot 2026}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2025}-\frac{1}{2026}\right)=\frac{2025}{2026}.$$

Nhận xét. Bài không khó. Nhiều bạn nhiều tỉnh tham gia giải bài. Tất cả các bài gửi đều có lời giải tốt, có vài bạn còn sơ suất trong đánh giá số hạng. **An Giang:** *Trần Khưu Nhật Anh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Bình Định**: *Nguyễn Duy Tiến*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Hồ Thành Đạt*, 10T1, *Nguyễn Thanh Anh Thư*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Gia Lai**: *Lương Xuân Nghĩa*, 10A7, THPT Chi Lăng, *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 chuyên Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kiên Giang:** *Thái Đức Huy, Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, *Cái Hoàng Quốc Khánh*, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá. **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt, *Huỳnh Quang Phổ*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc; **Long An:** *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu,

Võ Tiến Phát, 10A1, THPT Nguyễn Thông. **Nghệ An:** *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai. **Phú Thọ:** *Vũ Tuấn Minh*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Lê Ánh Dương*, CT2, *Trần Đức Phát*, *Vương Khánh Toàn*, 11CT1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, *Trần Nhật Tiến*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Bá Trung Khang*, 10E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Vĩnh Phúc**: *Trần Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Vĩnh Long** *Đặng Thành Chung* , 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

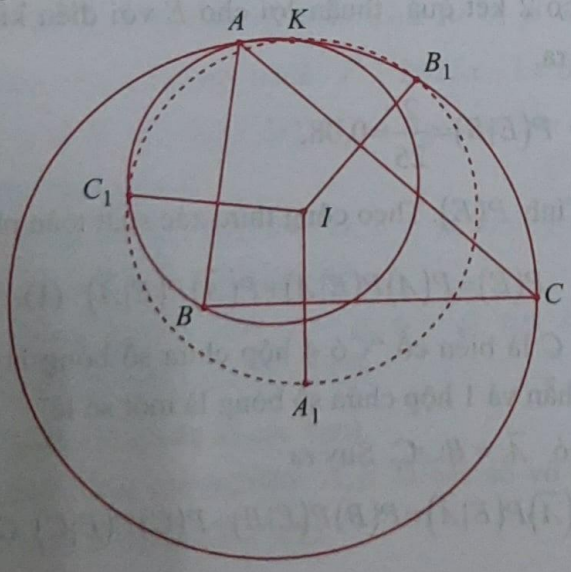
TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T8/574. *Cho tam giác ABC nhọn không cân. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác; A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng của I qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng:*

a) *Đường tròn ngoại tiếp các tam giác A_1BC, C_1AB, B_1CA cùng đi qua một điểm. Gọi điểm đó là K.*

b) *Chứng minh rằng bốn điểm A_1, B_1, C_1, K cùng thuộc một đường tròn và đường tròn đó có tâm là I.*

Lời giải.



a) Gọi K là giao điểm thứ hai của (AB_1C) và (AC_1B), ta có:

$$\begin{aligned}(KB,KC)&\equiv(KB,KA)+(KA,KC)\\&\equiv(C_1B,C_1A)+(B_1A,B_1C)\equiv(IA,IB)+(IC,IA)\\&\equiv(IC,IB)\equiv(A_1B,A_1C)(\mathrm{mod}\,\pi)\end{aligned}$$

Nên $K\in(BA_1C)$ hay ba đường tròn đồng quy tại K.

b) Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $IA_1=IB_1=IC_1$. Vậy ta chỉ cần chứng minh $K\in(A_1B_1C_1)$. Thật vậy, vì IC,IB lần lượt vuông góc với B_1A_1 và C_1A_1 nên

$$\begin{aligned}(KB_1,KC_1)&\equiv(KB_1,KA)+(KA,KC_1)\\&\equiv(CB_1,CA)+(BA,BC_1)\equiv(CA,CI)+(BI,BA)\\&\equiv(IC,BC)+(BC,IB)\equiv(IC,IB)\\&\equiv(B_1A_1,C_1A_1)(\mathrm{mod}\,\pi).\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Đây không phải là bài toán khó, có nhiều bạn tham gia giải bài này với cùng cách tiếp cận như lời giải. Xin nêu tên các bạn có lời giải tốt: **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Kiên Giang:** *Nguyễn Đức Mạnh*, 10T2; *Hoàng Quốc Khánh*; *Nguyễn Gia Bảo*, 10T1 và *Trần Khưu Nhật Anh*, 10T1, đều từ THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Đồng Tháp,** *Nguyễn Mai Thúy Vi*, 10 Lý; *Lê Ngọc Thanh*, 10T1; *Huỳnh Phúc Vĩnh Nguyên*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; đặc biệt có em *Lê Vũ Quỳnh Như*, học sinh lớp 8A, THCS Phùng Chí Kiên, **Nghệ An** và *Huỳnh Lê Minh*, học sinh lớp 9A7, THCS Phan Chu Trinh, Đà Lạt, **Lâm Đồng** là học sinh cấp 2, cũng tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên các bạn học sinh cần lưu ý, nếu không sử dụng góc định hướng, thì phải giả sử vị trí các điểm được cho như hình vẽ. Có một vài lời giải khác sử dụng phép biến hình, cũng đúng nhưng có phần dài dòng hơn. Cuối cùng, thực chất, K là ảnh của điểm Feuerbach tam giác ABC qua phép vị tự tâm I, tỉ số 2.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/574. *An xếp ngẫu nhiên 5 quả bóng vào 5 chiếc hộp rỗng.*

a) *Gọi A là biến cố: "Số bóng trong cả 5 hộp là một số lẻ"; B là biến cố: "Có đúng 3 hộp có số bóng là số lẻ". Tính P(A) và P(B).*

b) *Lát sau An lại xếp ngẫu nhiên thêm 2 quả bóng vào 5 chiếc hộp đó. Gọi E là biến cố: "Số bóng trong cả 5 hộp là một số lẻ". Tính $P(E|A)$, $P(E|B)$ và P(E).*

Lời giải (Của tác giả bài toán).

a) Số kết quả có thể là $5.5.5.5.5 = 5^5$.

1) A là biến cố "Mỗi hộp có đúng 1 quả bóng". Số kết quả thuận lợi cho A là $5! = 120$.

Vậy $P(A) = \dfrac{120}{5^5} = 0,0384.$

2) Ký hiệu 5 hộp là H1, H2, H3, H4, H5. Ta có B là biến cố "có 2 hộp chứa số bóng là một số chẵn và 3 hộp chứa số bóng là một số lẻ" .

Có hai khả năng:

+) Khả năng 1: 2 hộp không chứa quả bóng nào, 1 hộp chứa 3 quả bóng, 2 hộp còn lại, mỗi hộp chứa 1 quả bóng:

(H1,H2,H3,H4,H5) = (0,0,1,1,3); (1,0,0,1,3); …

Có $C_5^2 = 10$ cách chọn 2 hộp không chứa quả bóng nào, 3 cách chọn 1 hộp chứa 3 quả bóng, 1 cách chọn 2 hộp còn lại, mỗi hộp chứa 1 quả bóng. Vậy khả năng 1 có (10)(3) = 30 tổ hợp.

Với mỗi tổ hợp chẳng hạn

(H1,H2,H3,H4,H5) = (0,0,1,1,3): có 5 cách xếp 1 quả bóng vào H3, 4 cách xếp 1 quả bóng vào H4, 1 cách xếp 3 quả bóng vào H5.

Vậy có (5)(4) = 20 cách xếp bóng cho tổ hợp này. Thành thử có (30)(20) = 600 kết quả thuận lợi cho khả năng 1.

+) Khả năng 2: 1 hộp không chứa quả bóng nào, 1 hộp chứa 2 quả bóng, 3 hộp còn lại mỗi hộp chứa 1 quả bóng:

(H1,H2,H3, H4,H5) = (2,0,1,1,1);(2,1,1,0,1); ...

Có 5 cách chọn 1 hộp chứa 2 quả bóng, 4 cách chọn 1 hộp không chứa quả bóng nào.

Vậy khả năng 2 có (5)(4) = 20 tổ hợp. Với mỗi tổ hợp, chẳng hạn (H1,H2,H3,H4,H5) = (0,2,1,1,1): có $C_5^2 = 10$ cách xếp 2 quả bóng vào H2, 3 cách xếp 1 quả bóng xếp vào H3, 2 cách xếp 1 quả bóng vào H4, 1 cách xếp 1 quả bóng vào H5.

Vậy (10)(3)(2) = 60 cách xếp cho tổ hợp này. Thành thử có (20)(60) = 1200 kết quả thuận lợi cho khả năng 2.

Tổng cộng, số kết quả thuận lợi cho B là:

$$600+1200=1800.$$

Vậy $P(B) = \dfrac{1800}{5^5} = \dfrac{72}{125} = 0,576.$

b) +) Tính $P(E|A)$ và $P(E|B)$. Giả sử u, v là 2 quả bóng mới xếp. Mỗi kết quả có thể là cặp (U, V) với U là hộp chứa u, V là là hộp chứa v . Vậy số kết quả có thể là $5.5 = 25$.

• Nếu A xảy ra thì mỗi hộp có đúng 1 quả bóng. Khi đó để E xảy ra u và v phải được xếp vào cùng một hộp. Do đó có 5 kết quả thuận lợi cho E với điều kiện A xảy ra.

Vậy $P(E \mid A) = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = 0,2.$

• Nếu B xảy ra thì có đúng 2 hộp, chẳng hạn H1, H2, mỗi hộp chứa một số chẵn quả bóng . Khi đó để E xảy ra u và v mỗi quả bóng phải được xếp vào một hộp khác nhau trong hai hộp H1, H2. Do đó có 2 kết quả thuận lợi cho E với điều kiện B xảy ra.

Vậy $P(E|B) = \dfrac{2}{25} = 0,08.$

+) Tính $P(E)$: Theo công thức xác suất toàn phần

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(\overline{A})P(E|\overline{A}) \quad (1).$$

Gọi C là biến cố "Có 4 hộp chứa số bóng là một số chẵn và 1 hộp chứa số bóng là một số lẻ".

Ta có $\overline{A} = B \cup C$. Suy ra

$$P(\overline{A})P(E|\overline{A}) = P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)$ (3).

Nếu C xảy ra thì có đúng 4 hộp chứa một số chẵn quả bóng, Khi đó để E xảy ra mỗi quả bóng u và v phải đặt vào một hộp khác nhau trong 4 hộp này. Đó là điều không thể. Vậy $P(E|C)=0$. Từ đó và từ (3) suy ra:

$$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B).$$

Sử dụng các kết quả ở đã tính ở trước ta có

$$P(E)=(0,0384)(0,2)+(0,576)(0,08)=0,05376.$$

Nhận xét. a) Chỉ có 4 bạn tham gia giải bài toán này nhưng rất tiếc không có bạn nào có lời giải đúng.

b) Bài toán có thể phát biểu với nội dung thực tiễn hơn như sau: *Một đoàn tàu có 5 toa. Tại ga xuất phát với các toa đều trống, có 5 hành khách lên tàu, mỗi người độc lập với nhau, chọn ngẫu nhiên một toa.*

a) *Gọi A là biến cố "số hành khách trong mỗi toa là một số lẻ". B là biến cố "có đúng 3 toa có số hành khách là một số lẻ". Tính P(A) và P(B).*

b) *Đến ga tiếp theo không có khách xuống và có hai hành khách lên. Mỗi người độc lập với nhau, chọn ngẫu nhiên một toa. Gọi E là biến cố "số hành khách trong mỗi toa là một số lẻ". Tính P(E|A), P(E|B) và P(E).*

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/574. *Xét dãy số (x_n) thỏa mãn:*

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_{n+1}=[ax_n]+[bx_n] \end{cases}, \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

trong đó a, b là các số thực. Giả sử α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2-2025x-1=0$, và biết $\alpha>\beta$. Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt qua x.

a) *Trong trường hợp $a=\alpha$, $b=\beta$, chứng minh rằng $x_{2025}+1$ chia hết cho 45.*

b) *Trong trường hợp $a=\alpha$, $b=0$, tìm số dư trong phép chia x_{2025} cho 2025.*

Lời giải (Theo đa số các bạn).

Dễ thấy rằng các nghiệm α,β là các số vô tỷ và $\alpha>1>0>\beta$ và $\alpha+\beta=2025$.

a) Khi $a=\alpha,b=\beta$ thì $\begin{cases} x_1=1, \\ x_{n+1}=[\alpha x_n]+[\beta x_n], \forall n\ge 1 \end{cases}$

Để ý rằng x_n nguyên với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ ta có:

$$\begin{cases} \alpha x_n=(2025-\beta)x_n=2025x_n-\beta x_n \\ \beta x_n=(2025-\alpha)x_n=2025x_n-\alpha x_n, \forall n\ge 1 \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} [\alpha x_n]=2025x_n+[-\beta x_n] \\ [\beta x_n]=2025x_n+[-\alpha x_n], \forall n\ge 1 \end{cases} \quad (1).$$

Để ý rằng khi x không nguyên thì $[x]<x<[x]+1$ nên: $-[x]>-x>-[x]-1$ và $[-x]=-[x]-1$.

Do đó $[x]+[-x]=-1$. Từ (1) suy ra:

$$[\alpha x_n]+[\beta x_n]=2.2025x_n+[-\beta x_n]+[-\alpha x_n]$$

$$\Leftrightarrow 2([\alpha x_n]+[\beta x_n])=2.2025x_n+[\beta x_n]+[-\beta x_n]+[\alpha x_n]+[-\alpha x_n]$$

$$=2.2025x_n-2$$

hay $[\alpha x_n]+[\beta x_n]=2025x_n-1$. Suy ra:

$x_{n+1}=2025x_n-1$ hay $x_{n+1}+1=2025x_n=0 \pmod{45}$.

Vậy $x_{2025}+1=2025x_{2024}=0 \pmod{45}$.

b) Với $a=\alpha,b=0$ thì $x_1=1$, $x_{n+1}=[\alpha x_n]$ là các số nguyên với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Từ giả thiết, ta có:

$$\alpha=2025+\frac{1}{\alpha} \text{ nên } \alpha x_n=2025x_n+\frac{x_n}{\alpha}.$$

Suy ra: $[\alpha x_n]=2025x_n+\left[\frac{x_n}{\alpha}\right], \forall n\in\mathbb{N}^*$

và với $2\le n\in\mathbb{N}$ thì $\alpha x_{n-1}-1\le x_n=[\alpha x_{n-1}]<\alpha x_{n-1}$

hay $x_{n-1}-1<x_{n-1}-\frac{1}{\alpha}\le\frac{x_n}{\alpha}<x_{n-1}$.

Do đó $\left[\frac{x_n}{\alpha}\right]=x_{n-1}-1$. Suy ra:

$$x_{n+1}=[\alpha x_n]=2025x_n+\left[\frac{x_n}{\alpha}\right]$$

$$=2025x_n+x_{n-1}-1 \equiv x_{n-1}-1 \pmod{2025}.$$

Từ đó suy ra:

$$x_{2025}=x_{2023}-1=x_{2021}-2=\ldots=x_1-1012$$

$$=-1011\equiv 1014 \pmod{2025}.$$

Kết luận:

Số dư của phép chia x_{2025} cho 2025 là 1014.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về dãy số trong số học nên có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Gia Lai: *Lương Xuân Nghĩa*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 10T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Kiên Giang:** *Thái Đức Huy*, *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Long An:** *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10T, THPT chuyên Trần Văn Giàu, *Võ Tấn Phát*, 10A1, THPT Nguyễn Thông; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Vĩnh Phúc:** *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/574. *Tìm hàm số* $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ *liên tục tại điểm* $x_0=1$ *và thỏa mãn*

$$f(xy)+\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{f(x)}{\sqrt{y}}+\frac{f(y)}{\sqrt{x}}+\sqrt{xy},$$

$\forall x,y\in(0;+\infty)$.

Lời giải. (Của đa số các bạn) Từ giả thiết ta có:

$$f(xy)\sqrt{xy}+x+y=f(x)\sqrt{x}+f(y)\sqrt{y}+xy, \quad \forall x,y\in(0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(xy)\sqrt{xy}-xy=f(x)\sqrt{x}-x+f(y)\sqrt{y}-y, \quad \forall x,y\in(0;+\infty) \quad (1).$$

Đặt $g(x)=f(x)\sqrt{x}-x$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Từ (1) ta có: $g(xy)=g(x)+g(y), \forall x,y\in(0;+\infty)$ (2).

Đặt $h(u)=g(e^u), \forall u\in\mathbb{R}$. Từ (2) ta có:

$$h(u+v)=h(u)+h(v), \forall u,v\in\mathbb{R} \quad (3).$$

Vì f liên tục tại $x_0=1$ nên g liên tục tại $x_0=1$. Do đó h liên tục tại $u=0$. Nghiệm của phương trình hàm (3) (phương trình hàm Cauchy cộng tính) là: $h(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}$, a là hằng số

$$\Rightarrow g(x)=\ln x, \ \forall x\in(0;+\infty)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a\ln x+x}{\sqrt{x}}, \ \forall x\in(0;+\infty).$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn bài toán. Vậy $f(x)=\frac{a\ln x+x}{\sqrt{x}}, \forall x\in(0;+\infty)$ là hàm số cần tìm.

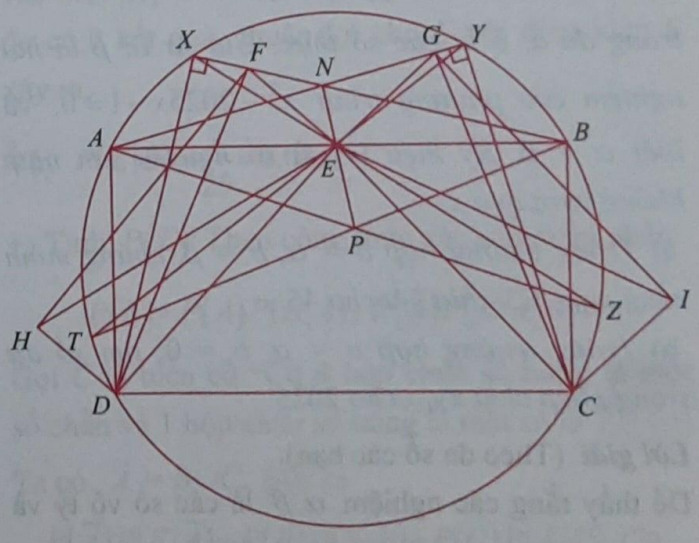
Nhận xét. Chìa khóa lời giải bài toán là biến đổi phương trình đã cho về phương trình (1). Một số bạn có lời giải còn dài vì đã chứng minh lại công thức nghiệm của phương trình hàm Cauchy cộng tính. Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Yên: *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Kiên Giang:** *Thái Đức Huy*, 10T2, *Trần Khưu Nhật Anh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Quảng Bình:** *Trần Đức Phát*, *Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Gia Lai:** *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương, *Nguyễn Minh Hiếu*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai.

TRẦN HỮU NAM

Bài T12/573. *Cho hình chữ nhật* $ABCD$ *và* $\alpha,\beta\in(0;90^0)$. *Điểm* E *thay đổi trên cạnh* AB. *Về phía ngoài tam giác* ECD *dựng các hình chữ nhật* $DEFH$, $CEGI$ *sao cho* $\widehat{DEH}=\alpha,\widehat{CEI}=\beta$. *Gọi* N *là giao điểm của* FB *và* AG. *Chứng minh rằng* NE *luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải.



Hình 1

Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên BF, AG. Gọi P là điểm thoả mãn

$$(AB,AP)\equiv(DF,DE)\ (\mathrm{mod}\,\pi)$$

và $(BA,BP)\equiv(CG,CE)\ (\mathrm{mod}\,\pi)$.

Gọi Z là giao điểm (khác A) của AP và đường tròn $(ABCD)$. Gọi T là giao điểm (khác B) của BP và đường tròn $(ABCD)$ (h.1).

Dễ thấy X, D, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính DF. Ta có:

$$(XB,XE)\equiv(XF,XE)\equiv(DF,DE)\equiv(AB,AP)$$
$$\equiv(AB,AZ)\equiv(XB,XZ)\ (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Do đó X, E, Z thẳng hàng. Tương tự, Y, E, T thẳng hàng. Áp dụng định lý Pascal cho bộ điểm

$$\begin{pmatrix} T & A & X \\ Z & B & Y \end{pmatrix}$$

với $TB\cap AZ=P$, $AY\cap BX=N$, $TY\cap ZX=E$

ta được N, E, P thẳng hàng.

Vậy NP luôn đi qua điểm E cố định.

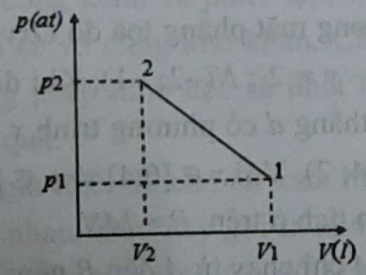
Nhận xét.

+ Các điểm H, I trong đề bài là không cần thiết.

+ Bài toán không khó nhưng không có học sinh nào tham gia trình bày lời giải.

LƯU CÔNG ĐÔNG

Bài L1/574. *Một lượng khí biến đổi rất chậm từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 theo đồ thị như hình dưới. Hãy tìm nhiệt độ cực đại của khí trong quá trình này. Cho biết* $V_1 = 6$ L; $V_2 = 2$ L; $p_1 = 1{,}8$ atm; $p_2 = 4{,}2$ atm *và nhiệt độ ở trạng thái 1 là* 225 °C.



Lời giải. Theo đồ thị, áp suất p là hàm số bậc nhất của V: $p = aV + b$

với $a=\dfrac{p_2-p_1}{V_2-V_1}=\dfrac{4{,}2-1{,}8}{2-6}=-0{,}6$ at/L;

$b = p_1 - aV_1 = 1{,}8-(-0{,}6).6 = 5{,}4$ (at).

T là hàm số của V:

$$T=T_1\frac{pV}{p_1V_1}=T_1\frac{(aV+b)V}{p_1V_1}$$

Đại lượng $(aV+b)V=(-0{,}6V+5{,}4)V$

$$=-0{,}6(V-4{,}5)^2+12{,}15$$

đạt cực đại là 12,15(atm.L) khi

$V = 4{,}5$ L $(V_2 < V < V_1)$.

Do đó: $T_{\max}=T_1\dfrac{(aV+b)V}{p_1V_1}$

$$=498.\frac{12{,}15}{1{,}8.6}=560{,}25\,\mathrm{K}\ \ (225^\circ\mathrm{C}=498^\circ\mathrm{K}).$$

Tính ra °C thì $T_{\max} = 560{,}25 - 273 = 287{,}25^\circ$C.

Nhận xét. Chúc mừng bạn *Ngô Bảo Long*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu, Đồng Tháp là bạn duy nhất đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/574. *Một vòng dây tròn, mảnh có bán kính r đặt trong mặt phẳng vuông góc với các đường sức của một từ trường đều có cảm ứng từ B thay đổi theo quy luật: B = kt, trong đó k là một hằng số dương. Hãy tính cường độ điện trường E tại các điểm nằm trên vòng dây.*

Lời giải. Từ thông qua vòng dây ở thời điểm t là:

$$\Phi = k\pi r^2 t \text{ nên } \Delta\Phi = k\pi r^2\Delta t.$$

Trong vòng dây có suất điện động:

$$\mathscr{E}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{k\pi r^2\Delta t}{\Delta t}=k\pi r^2.$$

Mặt khác: $\mathscr{E}=\dfrac{A}{q}=\dfrac{2\pi rEq}{q}=2\pi rE$

nên $k\pi r^2 = 2\pi rE$; $E=\dfrac{k\pi r^2}{2\pi r}=\dfrac{kr}{2}$.

Nhận xét. Bạn *Ngô Bảo Long*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu, **Đồng Tháp** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

NGUYỄN XUÂN QUANG



ĐƠN GIẢN HÓA MỘT SỐ DẠNG TOÁN TÌM MIN, MAX BẰNG HÌNH HỌC

NGUYỄN HỮU TRÍ
(GV THPT số 2 Phù Cát, Bình Định)

• Dạng toán tìm min, max của một biểu thức nào đó đã không còn quá xa lạ đối với học sinh THPT. Nhằm giúp bạn đọc có một cái nhìn sâu sắc hơn về dạng toán này, tác giả đã đưa ra vài hướng tiếp cận mới nhằm đơn giản hóa một số mô hình tìm min, max quen thuộc, mà đa phần các bạn sẽ giải quyết chúng bằng công cụ đại số khá phức tạp.

• ***Nguyên tắc chung***: *Đưa một bài toán đại số phức tạp về một bài toán hình học quen thuộc.*

MÔ HÌNH 1. Tìm min, max khoảng cách giữa 1 điểm cố định và 1 điểm di động

1. Một điểm cố định, điểm còn lại di động trên một đường thẳng

Thí dụ 1. *Cho các số thực x, y thỏa mãn*

$$2x - y + 1 = 0.$$

Tìm GTNN của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Phân tích. Đây là một bài toán khá cơ bản và quen thuộc. Chúng ta có thể biểu diễn y theo x rồi đưa biểu thức P về một ẩn. Tuy nhiên, trong chuyên đề này chúng ta sẽ giải quyết bài toán trên theo một hướng tư duy khác: hình học.

Lời giải. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi điểm $M(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $2x - y + 1 = 0$.

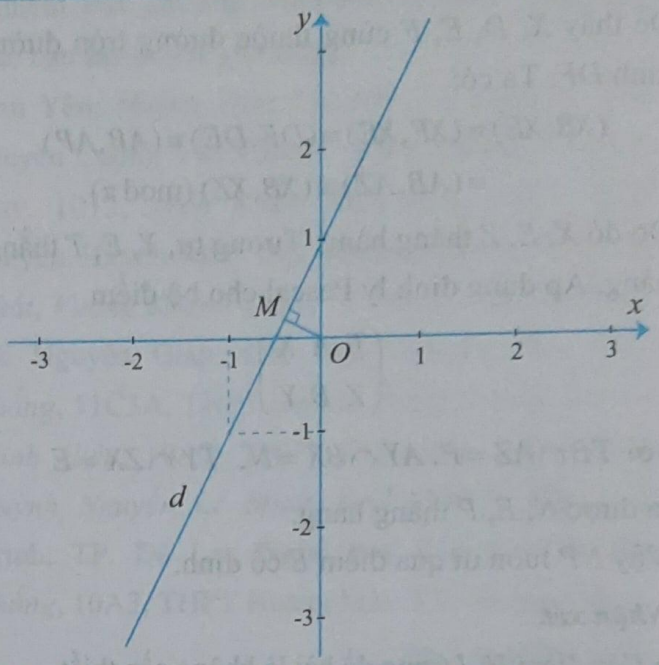
Khi đó, quỹ tích của M là một đường thẳng d có phương trình: $2x - y + 1 = 0$. Khi đó:

$$P = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = OM.$$

P đạt GTNN $\Leftrightarrow$ OM nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của O trên đường thẳng d. Suy ra:

$$\min P = d(O;d) = \frac{|2.0 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $\min P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.



Thí dụ 2. *Cho các số thực x, y thỏa mãn $x - y = 2$, trong đó $0 \le x \le 4$. Tìm GTNN, GTLN của biểu thức* $P = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5}$.

Phân tích. Biểu thức P được biến đổi lại như sau:

$$P = \sqrt{(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1)}$$
$$= \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2}.$$

Như vậy nếu ta gọi $M(x; y)$; $N(-2; -1)$ thì ta được $P = MN$. Bài toán được quy về tìm GTNN, GTLN của MN.

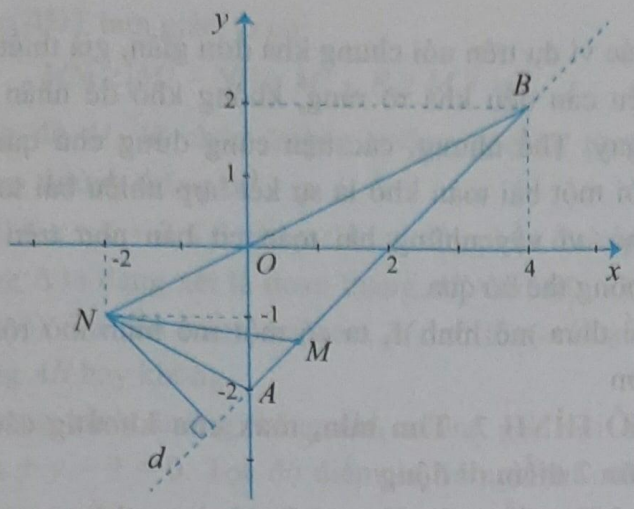
Lời giải. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M(x; y)$ thỏa mãn $x - y = 2$; $N(-2; -1)$. Khi đó M di động trên đường thẳng d có phương trình $x - y = 2$. Gọi $A(-2; 0)$, $B(4; 2)$. Với $x \in [0;4] \Rightarrow y \in [-2; 2]$.

Như đã phân tích ở trên, $P = MN$.

Để ý rằng, M chỉ chạy từ A đến B nên:

MN lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv B(4; 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$.

MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv A(0; -2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$.



(*Chú ý*: Vì chân đường vuông góc H hạ từ N xuống đường thẳng d nằm ngoài đoạn AB mà ta đang xét nên GTNN chỉ đạt được khi $M \equiv A$ mà thôi).

Vậy: $\min P = \min MN = NA$

$$= \sqrt{(-2-0)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{5}.$$

$\max P = \max MN = NB$

$$= \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-2)^2} = 3\sqrt{5}.$$

2. Một điểm cố định, điểm còn lại di động trên đường tròn

Thí dụ 3. *Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Phân tích. Ở các thí dụ 1 và 2, nếu chúng ta giải bằng phương pháp đại số thì rất đơn giản, chỉ cần biểu diễn biểu thức ta quan tâm theo 1 ẩn. Thế nhưng, đến với thí dụ 3, bạn đọc không thể nào đưa biểu thức P về 1 ẩn được, vì nếu như vậy biểu thức sẽ rất cồng kềnh và phức tạp. Dùng phương pháp đại số sẽ vô cùng khó khăn. Chính ở thí dụ này, phương pháp hình học sẽ phát huy được lợi thế và hiệu quả.

Nhận thấy giả thiết đề cho có xuất hiện x^2, y^2 với hệ số bằng nhau, điều này gợi ta nhớ đến phương trình đường tròn trong hệ tọa độ Oxy. Cùng biến đổi giả thiết: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1 \quad (*).$$

Như vậy, trong hệ tọa độ Oxy, nếu gọi $M(x; y)$ thỏa mãn (*) thì M sẽ di động trên đường tròn tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 1$. Lúc này biểu thức P trở thành: $P = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$.

Bài toán quy về tìm GTNN & GTLN của OM.

Lời giải. Giả thiết được biến đổi lại thành:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1.$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu gọi $M(x; y)$ thỏa mãn (*), thì quỹ tích của M là một đường tròn (C) tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 1$.

Do đó:

$$P = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = OM.$$

Từ hình vẽ ta thấy:

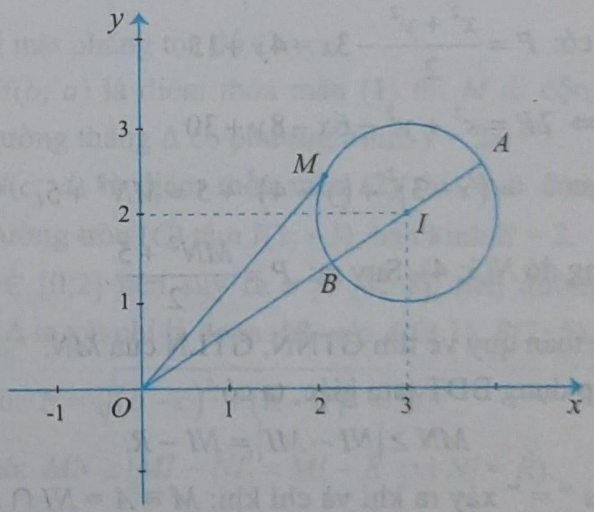
- P đạt GTNN $\Leftrightarrow$ OM đạt GTNN
$\Leftrightarrow M \equiv B = OI \cap (C)$.

Khi đó: $\min P = OB = OI - R = \sqrt{13} - 1$.

- P đạt GTLN $\Leftrightarrow$ OM đạt GTLN
$\Leftrightarrow M \equiv A = OI \cap (C)$.

Khi đó: $\max P = OA = OI + R = \sqrt{13} + 1$.

Vậy: $\min P = \sqrt{13} - 1$, $\max P = \sqrt{13} + 1$.



Bài toán được giải theo hướng hình học rất gọn gàng, dễ hiểu! Theo mạch tư duy đó, chúng ta cùng nhau giải quyết một thí dụ tương tự:

Thí dụ 4. *Xét các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + 10x + 21 = 0$, trong đó y không âm. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức*

$$P = \frac{x^2 + y^2}{2} - 3x - 4y + 15.$$

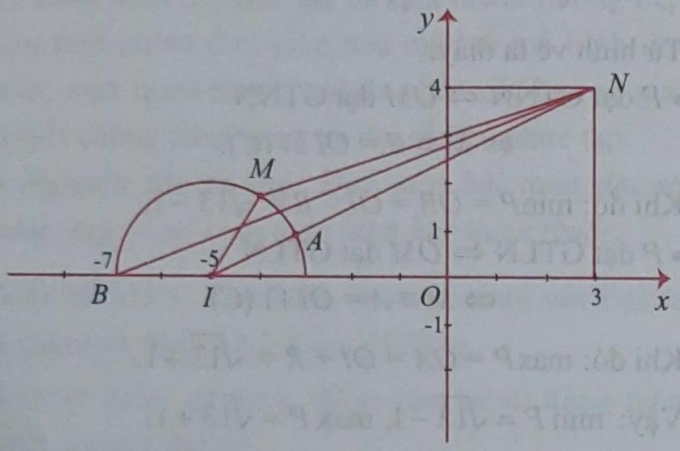
Phân tích. Nhìn đề bài thì có vẻ giống thí dụ 3, nhưng giả thiết lúc này đã được bổ sung thêm: y không âm. Rõ ràng, đường tròn sắp tới ta vẽ sẽ có

một chút thay đổi so với thí dụ 3. Nhưng khác nhau như thế nào thì chúng ta cùng bắt tay vào giải quyết nhé!

Lời giải. Giả thiết được biến đổi như sau:

$$x^2+y^2+10x+21=0\Leftrightarrow(x+5)^2+y^2=4\ (*).$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu gọi $M(x;y)$ thỏa mãn (*) thì quỹ tích của M là đường tròn (C) tâm $I(-5;0)$, bán kính $R=2$. Lưu ý rằng, vì $y\geq 0$ nên M chỉ di động trên nửa đường tròn (C) (phía trên trục Ox).



Ta có: $P=\dfrac{x^2+y^2}{2}-3x-4y+15$

$$\Leftrightarrow 2P=x^2+y^2-6x-8y+30$$

$$=(x-3)^2+(y-4)^2+5=MN^2+5,$$

trong đó $N(3;4)$. Suy ra: $P=\dfrac{MN^2+5}{2}$.

Bài toán quy về tìm GTNN, GTLN của MN.

• Áp dụng BĐT tam giác, ta có:

$$MN\geq|NI-MI|=NI-R.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $M\equiv A=NI\cap(C)$ (nửa trên trục Ox).

Khi đó: $\min P=\dfrac{NA^2+5}{2}=\dfrac{(NI-R)^2+5}{2}$

$$=\frac{\left(4\sqrt{5}-2\right)^2+5}{2}=\frac{89-16\sqrt{5}}{2}.$$

• MN đạt GTLN $\Leftrightarrow M\equiv B(-7;0)$.

Khi đó: $\max P=\dfrac{NB^2+5}{2}=\dfrac{(10^2+4^2)+5}{2}=\dfrac{121}{2}$.

Vậy: $\min P=\dfrac{89-16\sqrt{5}}{2}$, $\max P=\dfrac{121}{2}$.

Các ví dụ trên nói chung khá đơn giản, giả thiết & yêu cầu đều khá rõ ràng, không khó để nhận ra ngay. Thế nhưng, các bạn cũng đừng chủ quan, bởi một bài toán khó là sự kết hợp nhiều bài toán nhỏ, vì vậy những bài toán cơ bản như trên là không thể bỏ qua.

Kế thừa mô hình 1, ta có một mô hình mở rộng hơn

MÔ HÌNH 2. Tìm min, max của khoảng cách giữa 2 điểm di động

1. Một điểm di động trên đường thẳng, một điểm di động trên đường tròn

Thí dụ 5. *Cho các số thực x, y, z, t là các số thực luôn thỏa mãn:* $\begin{cases}y-x=2\\z^2+t^2-12z-6t+41=0.\\0\leq x\leq z\leq 8\end{cases}$

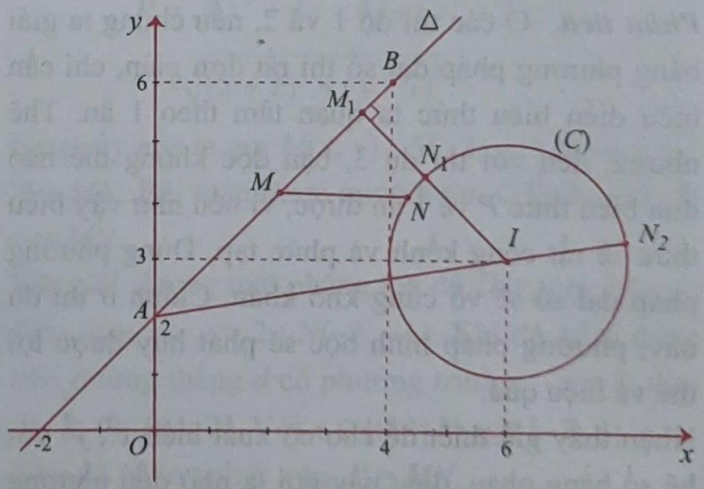
Tìm GTNN và GTLN của biểu thức:

$$P=\sqrt{(x-z)^2+(y-t)^2+1}.$$

Lời giải. Đây là một ví dụ kết hợp dạng toán mục 1 và 2 trong mô hình 1.

Giả thiết được biến đổi thành:

$$\begin{cases}y-x=2\\(z-6)^2+(t-3)^2=4\quad(*).\\0\leq x\leq z\leq 8\end{cases}$$



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M(x;y)$ và $N(z;t)$ lần lượt thỏa mãn (*). Khi đó M di động trên đường thẳng $\Delta: x-y+2=0$. N di động trên đường tròn (C) tâm $I(6;3)$, bán kính $R=2$.

Ta có: $P=\sqrt{(x-z)^2+(y-t)^2+1}=\sqrt{MN^2+1}$.

Bài toán quy về tìm GTNN, GTLN của MN.

Theo BĐT tam giác, ta có:

$$MN \geq |MI - NI| = MI - R \geq M_1I - R,$$

trong đó M_1 là chân đường vuông góc hạ từ I xuống đường thẳng Δ.

Do $0 \leq x = y + 2 \leq 8$ nên $y \leq 6$, vì vậy phần đường thẳng Δ ta đang xét là đoạn thẳng AB với $A(0; 2)$, $B(4; 6)$. Ta cần kiểm tra xem M_1 có thuộc đoạn thẳng AB hay không.

Phương trình đường thẳng IM_1 vuông góc với Δ là: $x + y - 9 = 0$. Tọa độ điểm M_1 là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{11}{2} \end{cases}$. Suy ra $M_1 \in AB$.

• MN đạt GTNN $\Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv M_1 \\ N \equiv N_1 \end{cases}$. Suy ra:

$$\min MN = M_1N_1 = IM_1 - R = d(I; \Delta) - R$$
$$= \frac{6 - 3 + 2}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{5}{\sqrt{2}} - 2.$$

Do đó: $\min P = \sqrt{(M_1N_1)^2 + 1} = \sqrt{\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}} - 2\right)^2 + 1}$

$$= \frac{\sqrt{70 - 40\sqrt{2}}}{2}.$$

• $MN \leq MI + NI = MI + R \leq AI + R = AN_2$ với $N_2 = AI \cap (C)$, $AN_2 > AI$.

MN đạt GTLN $\Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv A \\ N \equiv N_2 \end{cases}$. Suy ra:

$$\max MN = AN_2 = AI + R$$
$$= \sqrt{(6 - 0)^2 + (3 - 2)^2} + 2$$
$$= \sqrt{37} + 2.$$

Do đó: $\max P = \sqrt{(AN_2)^2 + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{37} + 2\right)^2 + 1}$

$$= \sqrt{42 + 4\sqrt{37}}.$$

Vậy $\min P = \dfrac{\sqrt{70 - 40\sqrt{2}}}{2}$, $\max P = \sqrt{42 + 4\sqrt{37}}$.

Xét một thí dụ khác khó hơn.

Thí dụ 6. *Xét các số thực a, b, c, d thỏa mãn:*

$$\frac{a^3 + 3a}{8b^3 + 12b^2 + 12b + 4} = 3^{2b - a + 1},$$

trong đó $b \in [0;2]$, $a \geq 0$ và

$$c^2 + d^2 - 6c + 6d + 14 = 0.$$

Tìm GTNN và GTLN của biểu thức

$$P = \sqrt{(b - c)^2 + (a - d)^2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{a^3 + 3a}{8b^3 + 12b^2 + 12b + 4} = 3^{2b - a + 1}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3a = (8b^3 + 12b^2 + 12b + 4).\ 3^{2b - a + 1}$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + 3a).3^a = (8b^3 + 12b^2 + 12b + 4).\ 3^{2b + 1}$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + 3a).3^a = \left[(2b + 1)^3 + 3(2b + 1)\right].\ 3^{2b + 1}.$$

Xét hàm số $f(t) = (t^3 + 3t).3^t$, $t \geq 0$ có:

$$f'(t) = (3t^2 + 3).3^t + (t^3 + 3t).3^t.\ln 3 > 0,\ \forall t \geq 0$$

$\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó: $f(a) = f(2b + 1) \Leftrightarrow a = 2b + 1$ (1).

Ta cũng có: $c^2 + d^2 - 6c + 6d + 14 = 0$

$$\Leftrightarrow (c - 3)^2 + (d + 3)^2 = 4 \quad (2).$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy:

Gọi $M(b; a)$ là điểm thỏa mãn (1) thì M di động trên đường thẳng Δ có phương trình: $y = 2x + 1$.

Gọi $N(c; d)$ là điểm thỏa mãn (2) thì N di động trên đường tròn (C) tâm $I(3; -3)$, bán kính $R = 2$.

Vì $b \in [0;2]$ nên suy ra $a \in [1; 5]$, nên đường thẳng Δ ta xét chỉ là đoạn AB, với $A(0; 1)$, $B(2; 5)$.

Khi đó: $P = \sqrt{(b - c)^2 + (a - d)^2} = MN$.

• Ta có: $MN \geq |MI - NI| = MI - R$ (vì $NI = R$).

MI đạt GTNN $\Leftrightarrow M \equiv A(0; 1)$.

(Chú ý rằng, đáng ra MI đạt GTNN khi và chỉ khi M là chân đường vuông góc hạ từ I xuống Δ, nhưng vì chân đường vuông góc đó nằm ngoài đoạn AB mà ta đang xét, nên tại đó không tồn tại min. Do đó $\min MI$ chỉ có thể có được khi $M \equiv A$).

Khi đó: $\min P = \min MN = IA - R$

$$= \sqrt{(0 - 3)^2 + (1 + 3)^2} - 2 = 3.$$

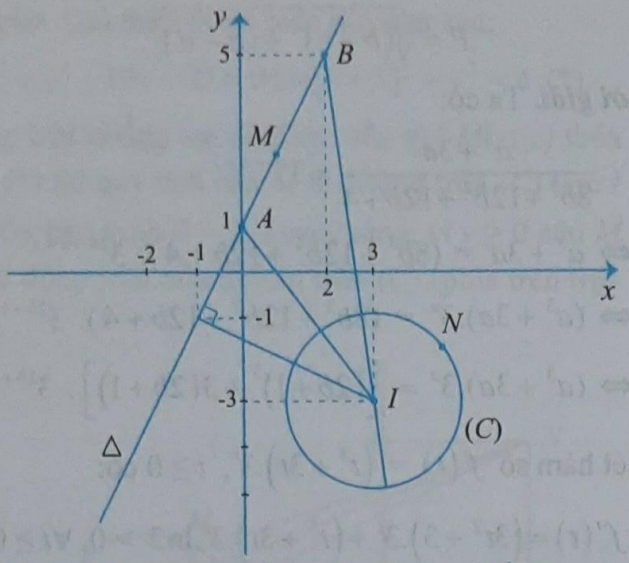
• Ta có: $MN \leq MI + NI = MI + R$ (vì $NI = R$).

MI đạt GTLN $\Leftrightarrow M \equiv B(2; 5)$.

Khi đó: $\max P = \max MN = IB + R$

$$= \sqrt{(2-3)^2 + (5+3)^2} + 2 = \sqrt{65} + 2.$$

Vậy: $\min P = 3$, $\max P = \sqrt{65} + 2$.



Thí dụ 7. *Xét các số thực a, b thay đổi thỏa mãn* $\log_{a^2+b^2+20}(6a-8b-4)=1$ *và c, d là các số thực dương thay đổi thỏa mãn*

$$\sqrt{c^2 + c + \log_2 \frac{c}{d} - 7} = \sqrt{2.(2d^2 + d - 3)}.$$

GTNN của biểu thức $P = \sqrt{(a-c+1)^2 + (b-d)^2}$ *bằng* $\sqrt{u} + v$, *trong đó u là một số nguyên tố, v là một số nguyên. Giá trị của biểu thức u.v bằng:*

A. 29 **B.** –32

C. –320 **D.** –29.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 6a - 8b - 4 > 0 \\ d \geq 1 \end{cases}$. Khi đó:

- $\log_{a^2+b^2+20}(6a-8b-4)=1$

$\Leftrightarrow 6a - 8b - 4 = a^2 + b^2 + 20$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b+4)^2 = 1$ (1).

- $\sqrt{c^2 + c + \log_2 \frac{c}{d} - 7} = \sqrt{2.(2d^2 + d - 3)}$

$\Leftrightarrow c^2 + c + \log_2 \frac{c}{d} - 7 = 2.(2d^2 + d - 3)$

$\Leftrightarrow c^2 + c + \log_2 c - \log_2 d - 7 = 4d^2 + 2d - 6$

$\Leftrightarrow c^2 + c + \log_2 c = 4d^2 + 2d + 1 + \log_2 d$

$\Leftrightarrow c^2 + c + \log_2 c = (2d)^2 + 2d + \log_2 2d.$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + \log_2 t$, $t > 0$ có:

$$f'(t) = 2t + 1 + \frac{1}{t \cdot \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó: $f(c) = f(2d) \Leftrightarrow c = 2d$ (2).

Nhận xét. Như những thí dụ trước, ở thí dụ này, ta cũng sẽ biến đổi biểu thức P về một khoảng cách giữa 2 điểm nào đó, trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Tuy nhiên biểu thức P trong thí dụ này lại có xuất hiện số 1, khiến chúng ta cảm thấy "khó chịu". Có khi nào bạn đọc tự hỏi: "Giá như con số 1 mất đi thì có phải bài toán trở nên quen thuộc hơn không?". Và, tác giả tin rằng sẽ có một vài bạn đọc khi tự hỏi như thế, trong đầu chắc hẳn sẽ lóe sáng lên 1 ý tưởng đầy tinh tế:

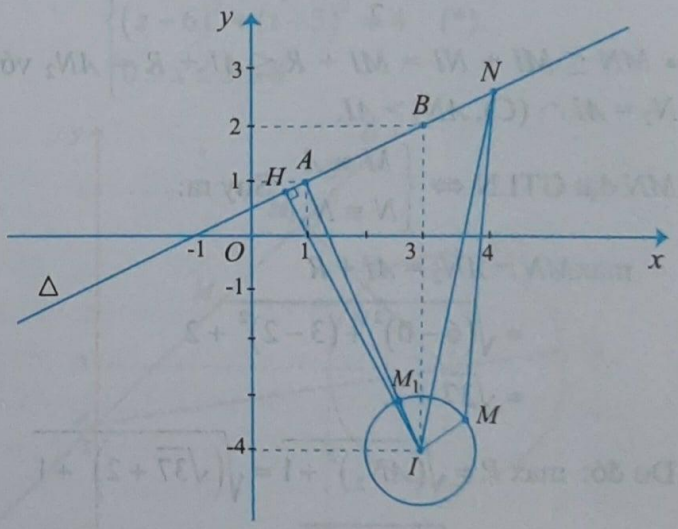
$$P = \sqrt{(a-c+1)^2 + (b-d)^2}$$

$$= \sqrt{[a-(c-1)]^2 + (b-d)^2}.$$

Đặt $e = c - 1$, biểu thức P lại được đưa về dạng quen thuộc: $P = \sqrt{(a-e)^2 + (b-d)^2}$.

Với $e = c - 1 \Rightarrow c = e + 1$. Kết hợp với (2), suy ra:

$e + 1 = 2d \Rightarrow d = \frac{e+1}{2}$ (3).



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy:

Nếu gọi $M(a; b)$ thỏa mãn (1) thì M thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 1$.

Nếu gọi $N(e; d)$ thỏa mãn (3) thì N thuộc đường thẳng Δ có phương trình $y = \frac{x+1}{2}$, trong đó $y \geq 1$, điều này nghĩa là N thuộc tia AB với $B(3; 2)$.

Khi đó: $P=\sqrt{(a-e)^2+(b-d)^2}=MN$.

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$MN \geq |IN-IM| = IN-R \text{ (vì } IM=R).$$

IN nhỏ nhất $\Leftrightarrow N \equiv A(1;1)$.

Đáng ra IN nhỏ nhất khi N là chân đường vuông góc H hạ từ I xuống đường thẳng Δ. Nhưng H nằm ngoài tia AB đang xét nên tại H không tồn tại min thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy:

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{2} & (\Delta) \\ 2x+y-2=0 & (IH) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{4}{5}<1 \end{cases}.$$

Vậy H không nằm trong tia AB ta đang xét.

Do vậy: $IN \geq IA \Rightarrow MN \geq IA-R$

$$=\sqrt{(1-3)^2+(1+4)^2}-1=\sqrt{29}-1.$$

Khi đó: $\min P = M_1A = IA-R=\sqrt{29}-1$

($M_1 = IA \cap (C)$). Suy ra: $\begin{cases} u=29 \\ v=-1 \end{cases}$.

Vậy: $u.v=-29$. Chọn **D** là chính xác.

2. Một điểm thuộc đường thẳng, 1 điểm thuộc đường conic (ellipse, parabol, hyperbol)

Ở phần này, tác giả chỉ đề cập đến mô hình 1 đường thẳng – 1 đường parabol. Với các đường conic khác thì khá phức tạp, tác giả không đề cập ở đây, bạn đọc có thể tự tìm hiểu thêm.

Thí dụ 8. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$, có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{16}{9}x-\dfrac{8}{3}, \forall x \in [0;+\infty)$ và $f(3)=3$. Xét các số thực a, b thỏa mãn*

$$2a-3b-6=0.$$

Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\sqrt{(x-a)^2+[b-f(x)]^2}.$$

Lời giải. Đây là một thí dụ có sự kết hợp với kiến thức về nguyên hàm – tích phân đã được đề cập trong SGK toán lớp 12 chương trình mới.

Bạn đọc cần nắm rõ định nghĩa & định lí về nguyên hàm như sau:

Cho hàm số f xác định trên khoảng K. Hàm số F được gọi là nguyên hàm của của f trên K nếu $F'(x)=f(x), \forall x \in K$. Khi đó:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

với C là một hằng số.

Trở lại bài toán, ta có:

$$f'(x)=\frac{16}{9}x-\frac{8}{3}, \forall x \in [0;+\infty)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx = \int\left(\frac{16}{9}x-\frac{8}{3}\right)dx$$

$$=\frac{16}{9}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{8}{3}x+C.$$

Theo giả thiết: $f(3)=3 \Leftrightarrow \dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{3^2}{2}-\dfrac{8}{3}.3+C=3$

$\Rightarrow C=3$. Suy ra: $f(x)=\dfrac{8}{9}x^2-\dfrac{8}{3}x+3$ (*).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy:

Gọi $A(x; f(x))$ thỏa mãn (*) thì khi đó A di động trên parabol (P) có phương trình:

$$y=\frac{8}{9}x^2-\frac{8}{3}x+3.$$

Gọi $B(a; b)$ thỏa mãn $2a-3b-6=0$, khi đó B di động trên đường thẳng Δ có phương trình:

$$2x-3y-6=0.$$

Biểu thức P trở thành: $P=AB$. Bài toán quy về tìm GTNN của AB.

AB đạt GTNN khi và chỉ khi A nằm trên tiếp tuyến Δ' của (P) tại nó và $\Delta' // \Delta$, và $AB \perp \Delta$, tức là:

$$\min P = \min AB = d(\Delta;\Delta').$$

Phương trình tiếp tuyến Δ' của (P) tại điểm $A(x_0; f(x_0))$:

$$y=f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)$$

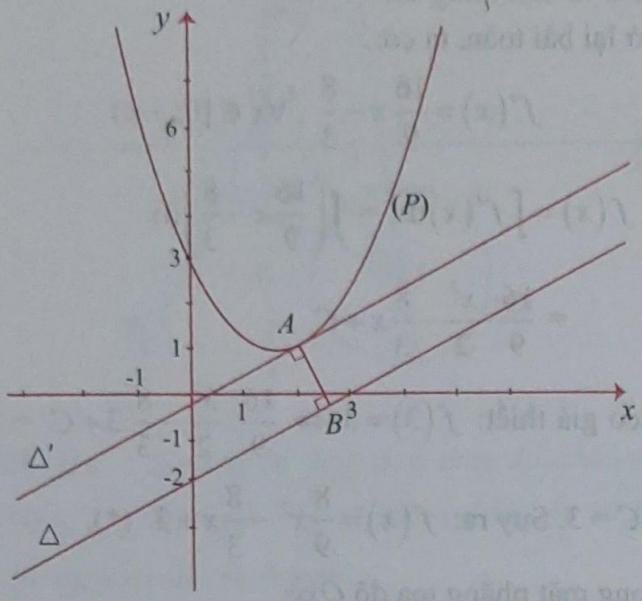
$$\Leftrightarrow y=\left(\frac{16x_0}{9}-\frac{8}{3}\right).(x-x_0)+\left(\frac{8}{9}x_0^2-\frac{8}{3}x_0+3\right)$$

$$\Rightarrow \Delta': \left(\frac{16x_0}{9}-\frac{8}{3}\right).x-y-\frac{8}{9}x_0^2+3=0.$$

$$\Delta // \Delta' \Leftrightarrow \frac{\frac{16x_0}{9}-\frac{8}{3}}{2}=\frac{-1}{-3}\neq\frac{\frac{-8}{9}x^2+3}{-6} \Rightarrow x_0=\frac{15}{8}$$

$\Rightarrow \Delta': \frac{2}{3}x - y - \frac{1}{8} = 0$ hay $2x - 3y - \frac{3}{8} = 0$.

Do đó: $\min P = d(\Delta; \Delta') = \frac{\left|2.\frac{3}{16} - 6\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{45\sqrt{13}}{104}$.



MÔ HÌNH 3. Hai điểm di động + Một điểm cố định. Bài toán "đường gấp khúc" – tư duy lấy đối xứng qua các yếu tố cố định

Thí dụ 9. *Xét các số thực a, b, c sao cho b lớn hơn a một đơn vị. Tìm GTNN của biểu thức*

$$P = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + 4} + \sqrt{(a-2)^2 + (b-c)^2}.$$

Lời giải. Ta có: b lớn hơn a một đơn vị nên $b = a + 1$ hay $a - b + 1 = 0$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy: Nếu gọi $M(a;b)$ thỏa mãn $a - b + 1 = 0$ thì M di động trên đường thẳng Δ có phương trình: $x - y + 1 = 0$. Nếu gọi $N(2; c)$ thì N di động trên đường thẳng Δ': $x = 2$.

Khi đó: $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$; $ON = \sqrt{c^2 + 4}$;

$$MN = \sqrt{(a-2)^2 + (b-c)^2}.$$

Biểu thức P trở thành: $P = OM + ON + MN$.

Lấy O' đối xứng với O qua Δ, O'' đối xứng với O qua Δ'. Suy ra O' và O'' cố định.

Khi đó: $P = OM + ON + MN$

$= O'M + O''N + MN$.

Áp dụng BĐT tam giác 2 lần liên tiếp, ta có:

$P = (O'M + MN) + O''N$

$\geq O'N + O''N \geq O'O''$: không đổi.

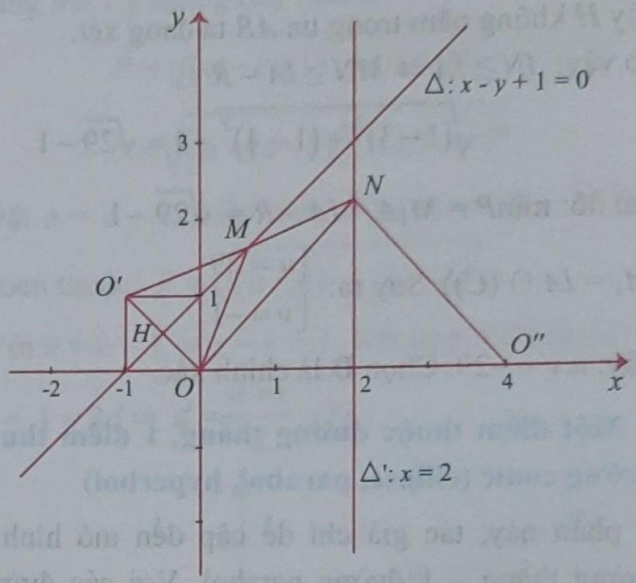
Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow O', M, N, O''$ thẳng hàng theo thứ tự đó.

Đường thẳng qua O và vuông góc với Δ có phương trình: $x + y = 0$. Gọi H là giao điểm của OO' và Δ, tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra: } H\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow O'(-1; 1)$ (do O' đối xứng với O qua H). Do O'' đối xứng với O qua đường thẳng $x = 2$ nên $O''(4; 0)$. Do đó:

$$\min P = O'O'' = \sqrt{(4+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{26}.$$



Chú ý: Đối với những dạng toán tìm GTNN của biểu thức là tổng của 3 hoặc nhiều đoạn thẳng, thông thường ta sẽ tư duy "gom" các đoạn thẳng đó về một "đường gấp khúc". Để tạo ra đường gấp khúc, ta sẽ lấy đối xứng điểm cố định qua các yếu tố cố định khác.

Thí dụ 10*. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 1 liên tục trên $\mathbb{R}$ và đạo hàm luôn là hằng số dương, có đồ thị đi qua gốc tọa độ và $f(1) = \frac{1}{3}$.*

Xét các số thực a, b thỏa mãn:

$$2.2^a - \left(\frac{2}{2^b}\right)^2 + a^3 + 3a(a+1) - 24b(b-1) = 7 - 8b^3.$$

Tìm GTNN của biểu thức:

$$Q = \sqrt{10x^2 + 48x + 90} + 3.\sqrt{5b^2 - 18b + 17} + \sqrt{10x^2 + 45b^2 + 30xb - 18x - 36b + 9}.$$

Nhận xét – Tản mạn: Gợi ý cho bạn đọc, đây là một bài toán kế thừa thí dụ 9. Tức là, mỗi biểu thức căn bậc hai sẽ biểu thị độ dài của một đoạn thẳng nào đó. Tuy nhiên, cái khó của bài này đó là: làm sao đưa biểu thức Q về tổng độ dài các đoạn thẳng giống như thí dụ 9! Sẽ có nhiều bạn đọc thắc mắc: "Giả thiết có đề cập đến $f(x)$, x, a, b, thế mà biểu thức Q chỉ chứa 2 ẩn x và b?" Nhưng bạn đọc đừng vội đặt ra thắc mắc này. Đã có lần, tác giả đã từng chia sẻ với bạn đọc: "*Một bài toán hay và khó là một chuỗi phức tạp gồm nhiều mắc xích bài toán nhỏ xâu chuỗi lại. Giải một bài toán khó tức là đi giải quyết từng mắc xích một*". Cũng giống như, "*Muốn bẻ cả một bó đũa, phải bẻ từng chiếc*". Đây chính là thủ thuật **cơ bản nhất** có thể được áp dụng cho hầu hết các bài toán, dù nó có khó đến mức nào. Tác giả hi vọng rằng, khi gặp một bài toán khó hoặc bài toán đó ta chưa từng gặp lần nào, bạn đọc vẫn giữ tâm thế vững vàng, thật bình tĩnh, phân tích bài toán, đối chiếu với những gì ta đã học để tìm ra mấu chốt của bài toán, và cứ lần theo mấu chốt ấy, những "nút thắt" còn lại ắt ta sẽ gỡ được, bài toán được giải quyết dần, bạn đọc sẽ có niềm tin chinh phục được cái khó của bài toán thôi!

Trở lại thí dụ 10.

Lời giải. • *Xử lý f(x)*:

$f(x)$ có đạo hàm cấp 1 liên tục trên $\mathbb{R}$ và đạo hàm luôn là hằng số dương nên

$$f'(x)=m\ (m>0).$$

Đồ thị $f(x)$ đi qua gốc tọa độ nên $f(0)=0$.

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int m\mathrm{d}x=mx+C$

(C là hằng số).

Kết hợp với $f(0)=0$ và $f(1)=\dfrac{1}{3}$, ta được:

$$\begin{cases} m.0+C=0 \\ m.1+C=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{1}{3}. \\ C=0 \end{cases}$$

Do đó: $f(x)=\dfrac{x}{3}$ hay $x-3f(x)=0$ (1).

• *Xử lý a, b*: Ta có:

$$2.2^a-\left(\frac{2}{2^b}\right)^2+a^3+3a(a+1)-24b(b-1)$$
$$=7-8b^3$$
$$\Leftrightarrow 2^{a+1}-\left(2^{1-b}\right)^2+a^3+3a^2+3a-24b^2+24b$$
$$=7-8b^3$$
$$\Leftrightarrow 2^{a+1}+(a^3+3a^2+3a+1)$$
$$=2^{2-2b}+(8-24b+24b^2-8b^3)$$
$$\Leftrightarrow 2^{a+1}+(a+1)^3=2^{2-2b}+(2-2b)^3.$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t^3$, $t\in\mathbb{R}$ có:

$$f'(t)=2^t\ln 2+3t^2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $f(a+1)=f(2-2b)$

$\Leftrightarrow a+1=2-2b \Leftrightarrow a=1-2b$ (2).

Ta biết rằng, trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu gọi $M(x_1;y_1)$ và $N(x_2;y_2)$ thì

$$MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

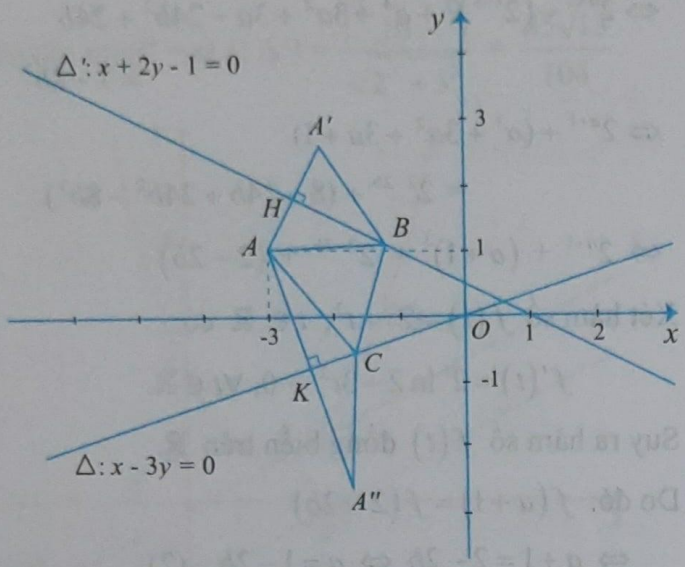
Vì thế, để đưa mỗi biểu thức căn bậc hai về độ dài một đoạn thẳng nào đó, trước hết ta cố gắng biến đổi biểu thức trong căn thành tổng các biểu thức bình phương. Ta có:

$$Q=\sqrt{10x^2+48x+90}+3\sqrt{5b^2-18b+17}$$
$$+\sqrt{10x^2+45b^2+30xb-18x-36b+9}$$
$$=\sqrt{9x^2+x^2+48x+81+9}+3\sqrt{4b^2+b^2-18b+16+1}$$
$$+\sqrt{9x^2+x^2+36b^2+9b^2+30xb-18x-36b+9}$$
$$=\sqrt{(9x^2+54x+81)+(x^2-6x+9)}$$
$$+3\sqrt{(4b^2-16b+16)+(b^2-2b+1)}$$
$$+\sqrt{(9x^2+36b^2+9+36xb-18x-36b)+(x^2-6xb+9b^2)}$$
$$=\sqrt{9(x+3)^2+(x-3)^2}+3\sqrt{(2b-4)^2+(b-1)^2}$$
$$+\sqrt{9(x+2b-1)^2+(x-3b)^2}$$

Suy ra:

$$Q=3\left[\sqrt{(x+3)^2+\left(\frac{x}{3}-1\right)^2}+\sqrt{(4-2b)^2+(b-1)^2}\right.$$
$$\left.+\sqrt{(x+2b-1)^2+\left(\frac{x}{3}-b\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow Q=3\left[\sqrt{(x+3)^2+(f(x)-1)^2}+\sqrt{(4-2b)^2+(b-1)^2}\right.$$
$$\left.+\sqrt{(x+2b-1)^2+(f(x)-b)^2}\right].$$



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy:

Nếu gọi $C(x;\ y=f(x))$ thỏa mãn (1) thì C di động trên đường thẳng Δ có phương trình:

$$x-3y=0.$$

Nếu gọi $B(a;\ b)$ thỏa mãn (2) thì B di động trên đường thẳng Δ' có phương trình là $x=1-2y$ hay $x+2y-1=0$. Xét điểm A có tọa độ $A(-3;\ 1)$.

Khi đó biểu thức Q trở thành:

$$Q=3(AC+AB+BC).$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy A' đối xứng với A qua Δ', A'' đối xứng với A qua Δ.

Gọi $H=AA'\cap\Delta';\ K=AA''\cap\Delta$.

Khi đó: $\begin{cases}AB=A'B\\AC=A''C\end{cases}$. Suy ra:

$$Q=3.(AC+AB+BC)=3.(A''C+A'B+BC).$$

Áp dụng BĐT tam giác 2 lần liên tiếp:

$$A''C+(A'B+BC)\ge A''C+A'C$$
$$\ge A''A'\text{: không đổi.}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A', B, C, A'' thẳng hàng theo thứ tự đó.

Đường thẳng qua A vuông góc với Δ' có phương trình: $2(x+3)-(y-1)=0$ hay $2x-y+7=0$.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x+2y-1=0\\2x-y+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{13}{5}\\y=\dfrac{9}{5}\end{cases}.$$

Suy ra $H\left(-\dfrac{13}{5};\dfrac{9}{5}\right)$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng được $K\left(-\dfrac{12}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$. Khi đó: $HK=\dfrac{\sqrt{170}}{5}$.

Để ý rằng tam giác $AA'A''$ có HK là đường trung bình nên $A'A''=2HK=\dfrac{2\sqrt{170}}{5}$.

Vậy: $\min Q=3A'A''=\dfrac{6\sqrt{170}}{5}$.

TỔNG HỢP - ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP

Bài 1 (THPT 2020). *Xét tất cả các số thực x, y thỏa mãn*

$$2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x.$$

Tìm GTLN của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$.

Lời giải. Ta có:

$$2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$$
$$\Leftrightarrow\frac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}}\le x^2+y^2-2x+2$$
$$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2+1-2x}\le x^2+y^2-2x+2$$
$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2}\le(x-1)^2+y^2+1.$$

Đặt $t=(x-1)^2+y^2$, ta được:

$$2^t\le t+1\ (t\ge 0)$$
$$\Rightarrow 2^t-(t+1)\le 0.$$

Biểu diễn đồ thị hai hàm số $y=2^x$ và $y=x+1$ trên hệ trục tọa độ Oxy.

Xét hàm số $f(t)=2^t-(t+1)$ có:

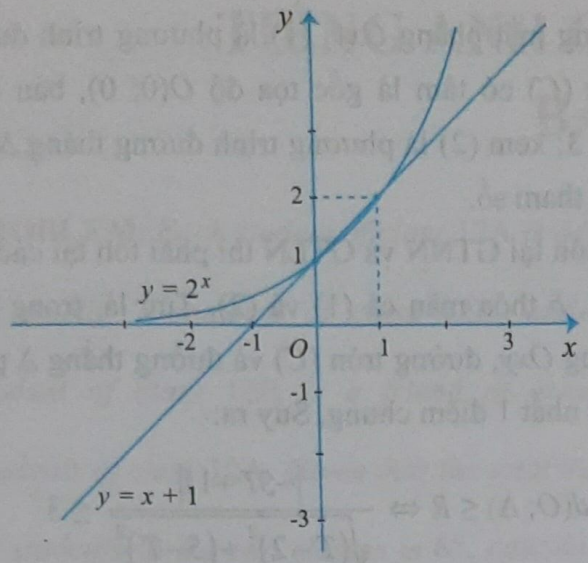
$$f(t)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=0\\t=1\end{bmatrix}.$$

Ta có bảng xét dấu:

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Khi đó: $f(t)\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 1$.

$$\Rightarrow(x-1)^2+y^2\le 1\ \ (1)$$



Lại có: $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$

$\Rightarrow (2P-8)x-Py+P-4=0$ (2).

Trong hệ trục tọa độ Oxy, miền nghiệm của (1) là hình tròn (C) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$ (kể cả biên). Có thể xem (2) là phương trình đường thẳng Δ: $(2P-8)x-Py+P-4=0$.

Để biểu thức P tồn tại GTLN thì cần phải tồn tại bộ số $(x;y)$ thỏa mãn (1) và (2).

Xét trong hệ trục tọa độ Oxy, thì đường thẳng Δ và hình tròn (C) phải có ít nhất 1 điểm chung. Suy ra:

$$d(I;\Delta)\le R \Leftrightarrow \frac{|2P-8+P-4|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow |3P-12|\le \sqrt{(2P-8)^2+P^2}$$

$$\Leftrightarrow 5-\sqrt{5}\le P\le 5+\sqrt{5}.$$

Vậy: $\max P=5+\sqrt{5}$.

Bài 2 (THPT 2022). *Xét tất cả các số thực x, y sao cho $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}$ với mọi số thực dương a. Tìm GTLN của biểu thức $P=x^2+y^2+x-3y$.*

Lời giải. Ta có: $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}$

$\Leftrightarrow (4x-\log_5 a^2).\log_5 a\le (40-y^2)\log_5 25$

(lấy logarit cơ số 5 hai vế.)

$\Leftrightarrow (4x-2\log_5 a).\log_5 a\le 2.(40-y^2)$

$\Leftrightarrow \log_5^2 a-2x.\log_5 a+40-y^2\ge 0$, với mọi số thực dương a.

Đặt $t=\log_5 a$. Vì a là số thực dương nên $t\in\mathbb{R}$.

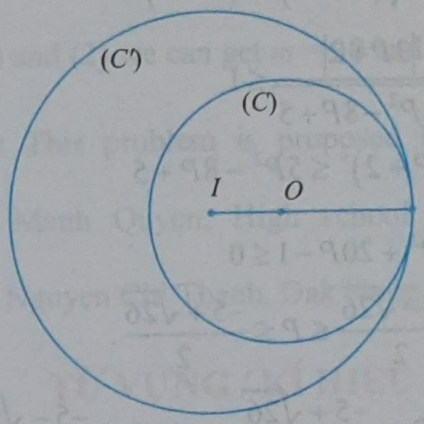
Ta được: $t^2-2xt+40-y^2\ge 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\le 40$ (1).

Từ biểu thức $P=x^2+y^2+x-3y$ suy ra:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=P+\frac{5}{2}\quad (2).$$

- Nếu $P=-\dfrac{5}{2}$ thì $x=-\dfrac{1}{2}$ và $y=\dfrac{3}{2}$.
- Xét $P>-\dfrac{5}{2}$.



Trong hệ trục tọa độ Oxy, miền nghiệm của (1) là hình tròn (C) tâm là gốc tọa độ, bán kính $R=2\sqrt{10}$. Xem (2) là phương trình đường tròn (C') tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, bán kính $R'=\sqrt{P+\dfrac{5}{2}}$.

Để (C) và (C') có điểm chung thì

$$R'\le R+OI \Leftrightarrow \sqrt{P+\frac{5}{2}}\le 2\sqrt{10}+\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Suy ra: $P\le 60$. Vậy: $\max P=60$.

Bài 3. *Xét các số thực a, b thỏa mãn:*

$$x^2+y^2-2x-6y+9=0.$$

Tìm GTNN, GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{x-2y+3}{2x-y+4}.$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=1 \quad (1).$$

Ta có: $P=\dfrac{x-2y+3}{2x-y+4}$

$\Rightarrow (2P-1)x+(2-P)y-3+4P=0$ (2).

Trong mặt phẳng Oxy, (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(1;3)$, bán kính $R=1$; xem (2) là phương trình đường thẳng Δ với P là tham số.

Điều kiện để tồn tại bộ số $(x;y)$ thỏa mãn giả thiết và yêu cầu bài toán là đường tròn (C) và đường thẳng Δ có điểm chung với nhau, tức là:

$$d(I;\Delta)\le R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|(2P-1)+(2-P).3-3+4P|}{\sqrt{(2P-1)^2+(2-P)^2}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3P+2|}{\sqrt{5P^2-8P+5}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow (3P+2)^2\le 5P^2-8P+5$$

$$\Leftrightarrow 4P^2+20P-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5-\sqrt{26}}{2}\le P\le \frac{-5+\sqrt{26}}{2}.$$

Vậy $\max P=\frac{-5+\sqrt{26}}{2}$; $\min P=\frac{-5-\sqrt{26}}{2}$.

Bài 4 (TH&TT, phát triển bài 3). *Xét tất cả các số thực a, b thỏa mãn:*

$$a^2+5b^2+4ab+2a-4=0.$$

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $T=\frac{2a-b+1}{a+b-2}$.

Lời giải. Ta có: $a^2+5b^2+4ab+2a-4=0$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+4b^2+1+4ab+2a+4b\right)+(b^2-4b-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (a+2b+1)^2+(b-2)^2=9 \quad (*).$$

Đặt $\begin{cases} x=a+2b+1 \\ y=b-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x-2y-5 \\ b=y+2 \end{cases}$.

Khi đó (*) trở thành: $x^2+y^2=9$ (1). Khi đó:

$$T=\frac{2a-b+1}{a+b-2}$$

$$=\frac{2(x-2y-5)-(y+2)+1}{(x-2y-5)+(y+2)-2}$$

$$=\frac{2x-5y-11}{x-y-5}.$$

$$\Rightarrow (x-y-5)T=2x-5y-11$$

$$\Leftrightarrow (T-2)x+(5-T)y-5T+11=0 \quad (2).$$

Trong mặt phẳng Oxy, (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$, bán kính $R=3$; xem (2) là phương trình đường thẳng Δ với T là tham số.

Để tồn tại GTNN và GTLN thì phải tồn tại các giá trị a, b thỏa mãn cả (1) và (2). Tức là, trong mặt phẳng Oxy, đường tròn (C) và đường thẳng Δ phải có ít nhất 1 điểm chung. Suy ra:

$$d(O;\Delta)\le R \Leftrightarrow \frac{|-5T+11|}{\sqrt{(T-2)^2+(5-T)^2}}\le 3$$

$$\Leftrightarrow |-5T+11|\le 3\sqrt{(T-2)^2+(5-T)^2}$$

$$\Leftrightarrow (-5T+11)^2\le 9[(T-2)^2+(5-T)^2]$$

$$\Leftrightarrow 7T^2+16T-140\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8-6\sqrt{29}}{7}\le T\le \frac{-8+6\sqrt{29}}{7}.$$

Vậy: $\max T=\frac{-8+6\sqrt{29}}{7}$; $\min T=\frac{-8-6\sqrt{29}}{7}$.

Trên đây là những kiến thức cũng như những kĩ năng cơ bản nhất về dạng toán tìm min, max bằng hình học. Với những gì tác giả cung cấp, mong rằng các bạn đọc sẽ có những góc nhìn sâu hơn về các bài toán. Không những thế, tác giả còn mong muốn hình thành ở người đọc một tư duy giải toán, tuy đơn giản nhưng không ít người bỏ qua: Một bài toán khó là tổ hợp của nhiều bài toán nhỏ. Vì thế, ngay cả khi gặp câu hỏi hóc búa hoặc phức tạp mà bản thân chưa từng làm hoặc đọc qua, thì bạn đọc nên hết sức bình tĩnh, liên hệ lại với kiến thức đã học trước đó, móc nối chúng lại với nhau. Quá trình này đòi hỏi người học cần có sự kiên trì nhưng không thể thiếu sáng tạo. "*Có công mài sắt, có ngày nên kim*"

Vì quỹ thời gian cũng như kiến thức còn hạn hẹp, nên trong quá trình làm chuyên đề có thể có nhiều sai sót. Tác giả vô cùng phấn khởi khi nhận được những lời góp ý chân thành từ các thầy cô dạy toán trên và từ các bạn học sinh trên toàn quốc.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 119

PROBLEM. *Each student of class* 12A *is a friend of exactly* 7 *students of class* 12B, *and each student of class* 12B *is a friend of exactly* 6 *students of class* 12A. *Given that the total number of students in the two classes is* 65, *calculate the number of students in each class.*

***Solution*:** Suppose that class 12A has m students and class 12B has n students. We present each student by a point and we connect a point from class 12A to a point from class 12B by a line segment if they are friend.

Counting by the endpoints from class 12A, we see that the number of line segments is $7m$. And counting by the endpoints from class 12B, we see that the number of line segments is $6n$.

Hence $7m = 6n$ (1).

On the other hand, $m + n = 65$ (2).

From (1) and (2) we can get $m = 30$ and $n = 35$.

***Remark*:** This problem is proposed by teacher Nguyen Manh Quyen, High school for gifted students Nguyen Chi Thanh, Dak Nong.

TỪ VỰNG / KÍ HIỆU

point : *điểm*

line segment : *đoạn thẳng*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 117

BÀI TOÁN. *Cho các số nguyên dương* m, n *sao cho* $mn \mid m^2+n^2$. *Chứng minh rằng* $m = n$.

Lời giải. Giả sử rằng $(m, n) = d$. Khi đó, ta có thể viết $m = m_1 d$ và $n = n_1 d$ với $(m_1, n_1) = 1$.

Từ $mn \mid m^2+n^2$ nên $m_1 n_1 d^2 \mid (m_1^2+n_1^2)d^2$.

Do đó, $m_1 n_1 \mid (m_1^2+n_1^2)$.

Dễ thấy rằng $m_1 \mid (m_1^2+n_1^2)$. Điều này kéo theo $m_1 \mid n_1^2$ (*).

Nhưng $(m_1, n_1) = 1$, nên từ (*) suy ra $m_1 = 1$. Tương tự, ta cũng có $n_1 = 1$.

Vậy ta có $m = n$.

***Lưu ý*:** Bài toán này dựa theo một bài trong *Mathematical Olympiad Series*, Tập 2.

Nhận xét. Kỳ này, các bạn: *Hồ Thành Đạt*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**, *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo**, *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh các bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)



BÀI TOÁN 98. *Cho tam giác ABC với $BC=a, CA=b, AB=c$, thỏa mãn*

$$\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}.$$

Tính số đo của góc A.

Lời giải. *Cách 1.* Từ $\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}$, ta suy ra $\cos B>0, \cos C>0 \Rightarrow B, C$ là góc nhọn.

Theo định lý cô sin ta có:

$$\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b} \Leftrightarrow \frac{c^2+a^2-b^2}{2c^2a}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b^2a}$$

$$\Leftrightarrow (c^2+a^2-b^2)b^2=(a^2+b^2-c^2)c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2-c^2a^2-(b^4-c^4)=0$$

$$\Leftrightarrow (b^2-c^2)(a^2-b^2-c^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} b^2-c^2=0 \\ a^2-b^2-c^2=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b=c \\ a^2=b^2+c^2 \end{bmatrix}.$$

TH1: $b=c$. Theo định lý sin, ta có:

$\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\cos B}{2R\sin B}$, và $\frac{\sin A}{a}=\frac{1}{2R}$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó: $\frac{\cos B}{c}=\frac{\sin A}{a} \Leftrightarrow \frac{\cos B}{\sin C}=1 \Leftrightarrow \cos B=\sin C$.

Mà B, C là hai góc nhọn nên từ $\cos B=\sin C$, ta suy ra : $\widehat{B}+\widehat{C}=90^0 \Rightarrow \widehat{A}=90^0$.

TH2: $a^2=b^2+c^2$. Từ $a^2=b^2+c^2$, ta suy ra ΔABC vuông tại A và thỏa mãn:

$$\frac{\cos B}{c}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac^2}=\frac{1}{a}=\frac{\sin A}{a}.$$

Vậy $\widehat{A}=90^0$.

Nhận xét. Có một số bạn sẽ mắc sai lầm trong TH2 như sau: Từ $a^2=b^2+c^2$, suy ra $\widehat{A}=90^0$ và kết luận luôn $\widehat{A}=90^0$, mà không kiểm tra khi $\widehat{A}=90^0$ $\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}$ có thỏa mãn không.

Cách 2. Theo định lý sin ta có $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ và theo giả thiết bài toán ta có $\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}$. Hai điều này tương đương với: $\begin{cases} \frac{\cos B}{c}=\frac{\sin C}{c} \\ \frac{\cos C}{b}=\frac{\sin B}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos B=\sin C \\ \cos C=\sin B \end{cases}$

$\Leftrightarrow \widehat{B}+\widehat{C}=90^0 \Rightarrow \widehat{A}=90^0$. Vậy $\widehat{A}=90^0$.

Cách 3. Từ $\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}$, ta suy ra $\cos B>0, \cos C>0 \Rightarrow B, C$ là góc nhọn. Theo định lý sin ta có $\frac{\sin A}{a}=\frac{1}{2R}$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó,

$$\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c^2+a^2-b^2}{2c^2a}=\frac{1}{2R} \\ \frac{a^2+b^2-c^2}{2b^2a}=\frac{1}{2R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2+a^2-b^2=\frac{c^2a}{R} \\ a^2+b^2-c^2=\frac{b^2a}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=\frac{a}{R}(b^2+c^2) & (1) \\ 2(b^2-c^2)=\frac{a}{R}(b^2-c^2) & (2) \end{cases}.$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b^2-c^2=0 \\ \frac{a}{R}=2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b=c \\ \frac{a}{R}=2 \end{bmatrix}$.

TH1: $b=c$. Ta có $(1) \Leftrightarrow 2a^2=\frac{a}{R}2b^2 \Leftrightarrow b^2=aR$.

Khi đó, ta có: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2b^2-a^2}{2b^2}$

$$=\frac{2aR-a^2}{2aR}=1-\frac{a}{2R}=1-\sin A$$

$\Leftrightarrow \sin A=1-\cos A \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2 A}=1-\cos A$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+\cos A}=\sqrt{1-\cos A}$ (do $\sin A>0, \cos A<1$).

$\Leftrightarrow \cos A=0 \Leftrightarrow \widehat{A}=90^0$.

TH2: $\frac{a}{R}=2$. Thay vào (1) ta có $a^2=b^2+c^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A hay $\widehat{A}=90^0$. Vậy $\widehat{A}=90^0$.

Nhận xét. Từ cách 3 ta có kết quả: *Nếu tam giác ABC có $b=c=\sqrt{aR}$ hoặc $R=2a$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì $\widehat{A}=90^0$.*

Cách 4. Từ $\dfrac{\cos B}{c}=\dfrac{\cos C}{b}=\dfrac{\sin A}{a}$, ta suy ra $\cos B>0, \cos C>0\Rightarrow B,C$ là góc nhọn. Theo định lý cô sin ta có:

$$\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}\Leftrightarrow\frac{c^2+a^2-b^2}{2c^2a}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b^2a}\ (1).$$

Ta thấy $b=c$ thỏa mãn (1), khi đó:

$$\frac{\cos B}{c}=\frac{a}{2c^2}=\frac{\sin A}{a}\Leftrightarrow\sin A=\frac{a^2}{2c^2}.$$

Ta có: $1-\cos^2 A=\sin^2 A\Leftrightarrow 1-\dfrac{(2c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}=\dfrac{a^4}{4c^4}$

$\Leftrightarrow a^2-2c^2=0\Leftrightarrow a^2=2c^2=b^2+c^2$ (do $b=c$), suy ra ΔABC vuông tại A hay $\widehat{A}=90^0$.

Với $b\neq c$, từ (1) ta có:

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2c^2a}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b^2a}=\frac{2c^2-2b^2}{2ac^2-2ab^2}=\frac{1}{a}.$$

Lúc này, ta có $\dfrac{\cos B}{c}=\dfrac{\cos C}{b}=\dfrac{1}{a}$, kết hợp với giả thiết $\dfrac{\cos B}{c}=\dfrac{\cos C}{b}=\dfrac{\sin A}{a}$, suy ra:

$\sin A=1\Leftrightarrow\widehat{A}=90^0$. Vậy $\widehat{A}=90^0$.

Nhận xét. Từ cách 4, ta có: *Nếu ΔABC có $\sin A=\dfrac{a^2}{2c^2}=\dfrac{a^2}{2b^2}$ thì $\widehat{A}=90^0$.*

Cách 5. Từ $\dfrac{\cos B}{c}=\dfrac{\cos C}{b}=\dfrac{\sin A}{a}$, ta suy ra $\cos B>0, \cos C>0\Rightarrow B,C$ là góc nhọn. Ta có:

$$\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos B=\dfrac{c}{a}\sin A\\ \cos C=\dfrac{b}{a}\sin A\end{cases}$$

và từ định lý sin ta có: $\begin{cases}\sin B=\dfrac{b}{a}\sin A\\ \sin C=\dfrac{c}{a}\sin A\end{cases}$.

Khi đó: $\cos(B+C)=\cos B.\cos C-\sin B.\sin C$

$=\dfrac{c}{a}\sin A.\dfrac{b}{a}\sin A-\dfrac{b}{a}\sin A.\dfrac{c}{a}\sin A=0\Leftrightarrow\widehat{B}+\widehat{C}=90^0$.

Suy ra $\widehat{A}=90^0$.

Cách 6. Từ $\dfrac{\cos B}{c}=\dfrac{\cos C}{b}=\dfrac{\sin A}{a}$, ta suy ra $\cos B>0, \cos C>0\Rightarrow B,C$ là góc nhọn.

Đặt $\dfrac{\cos B}{c}=\dfrac{\cos C}{b}=\dfrac{\sin A}{a}=t, t>0$. Suy ra:

$$\begin{cases}\cos B=ct\\ \cos C=bt\\ \sin A=at\end{cases}\text{ và theo định lý sin ta có }\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases},$$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có

$t^2(b^2+c^2)=\cos^2 B+\cos^2 C=1-\sin^2 B+1-\sin^2 C$

$$=2-\frac{1}{4R^2}(b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow\left(t^2+\frac{1}{4R^2}\right)(b^2+c^2)=2\Leftrightarrow 2\frac{\sin^2 A}{a^2}(b^2+c^2)=2$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 A=\frac{a^2}{b^2+c^2}\Leftrightarrow\sin^2 A=\frac{t^2a^2}{t^2b^2+t^2c^2}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 B+\cos^2 C}$$

$\Leftrightarrow\cos^2 B+\cos^2 C=1$ (do $\sin A>0$)

$\Leftrightarrow\cos^2 B=\sin^2 C\Leftrightarrow\cos B=\sin C\Leftrightarrow\widehat{B}+\widehat{C}=90^0\Leftrightarrow\widehat{A}=90^0$.

Cách 7. Từ $\dfrac{\cos B}{c}=\dfrac{\cos C}{b}=\dfrac{\sin A}{a}$, ta suy ra $\cos B>0, \cos C>0\Rightarrow B,C$ là góc nhọn.

Theo định lý sin ta có $\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có:

$$\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}\Rightarrow\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B+\cos C+\sin A}{b+c+a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2R}=\frac{\cos B+\cos C+\sin A}{2R(\sin B+\sin C+\sin A)}\Leftrightarrow\sin B+\sin C=\cos B+\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{B+C}{2}\quad\left(\text{do }\cos\frac{B-C}{2}>0\right)$$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{B+C}{2}=1\Leftrightarrow\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=45^0\Leftrightarrow\widehat{A}=90^0.$$

Nhận xét.

1) Nếu ΔABC thỏa mãn $\sin B+\sin C=\cos B+\cos C$ thì ΔABC vuông.

2) Ta có thể giải cách 7 lại như sau:

Với A, B, C là ba góc của một ta giác thì ta có:

$$\cos\frac{B-C}{2}>0,\ \frac{\widehat{A}}{2}<90^0.$$

Theo định lý sin ta có $\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Từ $\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}\Rightarrow\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B+\cos C}{b+c}$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos B+\cos C}{\sin B+\sin C}=1\Leftrightarrow\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=1\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}=1\Leftrightarrow\frac{\widehat{A}}{2}=45^0\Leftrightarrow\widehat{A}=90^0.$$

Cách 8. Theo định lý sin ta có $\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó,

$$\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}\Leftrightarrow\cos B\sin B=\cos C\sin C$$

$$\Leftrightarrow\sin 2B=\sin 2C\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\widehat{B}=\widehat{C}+k\pi\\ \widehat{B}+\widehat{C}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Do B, C là hai góc của một tam giác nên ta có:

$\widehat{B}=\widehat{C}$ hoặc $\widehat{B}+\widehat{C}=90^0$.

TH1: $\widehat{B}=\widehat{C}$. Ta có $\widehat{B}=\widehat{C}\Rightarrow b=c$, khi đó, kết hợp với định lý cô sin ta có :

$$\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2-c^2}{2b^2a}=\frac{\sin A}{a}\Leftrightarrow\sin A=\frac{a^2}{2b^2}.$$

Do đó: $\cos^2 A=1-\sin^2 A\Leftrightarrow\left(1-\frac{a^2}{2b^2}\right)^2=1-\frac{a^4}{4b^4}$

$$\Leftrightarrow a^2=2b^2\Rightarrow\sin A=1\Leftrightarrow\widehat{A}=90^0.$$

TH2: $\widehat{B}+\widehat{C}=90^0$. Ta có $\widehat{B}+\widehat{C}=90^0\Rightarrow\widehat{A}=90^0$.

Kiểm tra lại, với $\widehat{A}=90^0$ thỏa mãn $\frac{\cos B}{c}=\frac{\cos C}{b}=\frac{\sin A}{a}$. Vậy $\widehat{A}=90^0$.

Nhận xét. Từ cách 4 và cách 8, ta có: *Nếu ΔABC cân tại A và $\sin A=\frac{a^2}{2b^2}$ thì $\widehat{A}=90^0$*. Từ kết quả này, ta có thể nghĩ đến xét ΔABC thỏa mãn $\sin A=\frac{a^2}{b^2+c^2}$.

Tiếp theo ta khảo sát ΔABC thỏa mãn $\sin A=\frac{a^2}{b^2+c^2}$. Ta có: $\cos^2 A=1-\sin^2 A$

$$\Leftrightarrow\cos^2 A=(1-\sin A)(1+\sin A)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\left(1-\frac{a^2}{b^2+c^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{b^2+c^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b^2+c^2-a^2=0\\ \frac{b^2+c^2-a^2}{4b^2c^2}=\frac{b^2+c^2+a^2}{(b^2+c^2)^2}\end{array}\right.\cdot$$

Đến đây, ta có thể đặt bài toán như sau:

Cho tam giác ABC có $\widehat{A}\ge 90^0$ và $\sin A=\frac{a^2}{b^2+c^2}$.

Chứng minh $\widehat{A}=90^0$.

Ta tiếp tục khai thác đẳng thức:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{4b^2c^2}=\frac{b^2+c^2+a^2}{(b^2+c^2)^2}\ (*).$$

Từ (*) ta có $b^2+c^2-a^2>0\Rightarrow A$ là góc nhọn. Ta có

$$(*)\Leftrightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2+c^2+a^2}=\frac{4b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}\Leftrightarrow\frac{\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}-1}{\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}+1}=\frac{4\frac{c^2}{b^2}}{\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)^2}.$$

Đặt $x=\frac{b^2}{a^2},y=\frac{c^2}{a^2}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{c^2}{b^2}$. Khi đó, ta có đẳng thức $\frac{x+y-1}{x+y+1}=\frac{4xy}{(x+y)^2}$. Từ đây, ta có thể đặt bài toán sau: *Cho ΔABC với $BC=a,CA=b,AB=c$ thỏa mãn $\sin A=\frac{a^2}{b^2+c^2}$. Đặt $x=\frac{b^2}{a^2},y=\frac{c^2}{a^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=(x+y)^3-2x^2-2y^2-2x-2y-8xy-\frac{2}{x+y+1}.$$

HD: Ta có:

$$P=(x+y)^3-2x^2-2y^2-2x-2y-8xy-\frac{2}{x+y+1}$$

$$=(x+y)^3-2(x+y)^2-2(x+y)-4xy-\frac{2}{x+y+1}.$$

Từ $\sin A=\dfrac{a^2}{b^2+c^2}$, ta có: $\cos^2 A=1-\sin^2 A$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A=(1-\sin A)(1+\sin A)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2+c^2-a^2=0 \\ \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4b^2c^2}=\dfrac{b^2+c^2+a^2}{(b^2+c^2)^2} \end{array}\right.$$

Suy ra : $\left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ \dfrac{x+y-1}{x+y+1}=\dfrac{4xy}{(x+y)^2} \end{array}\right.$.

Với $x+y=1$, ta có $P=-4-4xy\geq -4-(x+y)^2\geq -5$.

Với $\dfrac{x+y-1}{x+y+1}=\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$

$$\Leftrightarrow 4xy=\frac{(x+y)^3-(x+y)^2}{x+y+1}=(x+y)^2-2(x+y)+2-\frac{2}{x+y+1}.$$

Khi đó: $P=(x+y)^3-2(x+y)^2-2(x+y)-(x+y)^2$

$$+2(x+y)-2+\frac{2}{x+y+1}-\frac{2}{x+y+1}$$

$$=(x+y)^3-3(x+y)^2-2.$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2-2, t>0$.

Khảo sát hàm $f(t)=t^3-3t^2-2$, ta có:

$$f(t)=t^3-3t^2-2\geq f(2)=-6, \forall t>0.$$

Vậy trong tất cả các trường hợp ta đều có $P\geq -6$.

Dấu "=" xảy ra khi $x+y=2\Leftrightarrow b^2+c^2=2a^2$

$\Leftrightarrow \sin A=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \hat{A}=30^0 \\ \hat{A}=150^0 \end{array}\right.$. Vậy $\min P=-6$.

Lời bình. Việc giải bài toán bằng nhiều cách giúp cho bạn rèn luyện sự linh hoạt, đa dạng trong tư duy, giúp cho bạn ôn luyện các kiến thức liên qua đến bài toán tốt nhất..., ngoài ra còn giúp cho bạn phát hiện những kết quả mới.

NGUYỄN ANH VŨ

*(GV THPT chuyên Chu Văn An, **Bình Định**)*

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đóng góp hai cách giải; các bạn: *Lương Sĩ An*, 11A8, THPT Nguyễn Hữu Huân, *Nguyễn Chí Đại*, 10A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh**, *Huỳnh Phúc Vĩnh Nguyên*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**, *Vũ Đức Duy*, CTy TNHH Thuế và Tư vấn PwC Việt Nam, mỗi bạn đóng góp một cách giải tương tự như những cách trong lời giải trên của bạn *Nguyễn Anh Vũ*, người giới thiệu bài toán. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 99 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/9/2025.

BÀI TOÁN 100. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+2x+6}=2x^2+4x-3.$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Lê Khiết năm học 2025-2026)

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

****

PROBLEMS IN ... *(Tiếp theo trang 19)*

Problem T8/578. Prove that for every acute triangle ABC we have

$$\frac{1}{IA}+\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}\leq \frac{1}{HA}+\frac{1}{HB}+\frac{1}{HC}$$

where H and I are the orthocenter and the incenter of the triangle ABC respectively.

Problem T9/578. Do there exist $2n$ $\left(n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2\right)$ rational numbers $a_i, b_i, i=\overline{1,n}$ satisfying

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i\sqrt{2})^{2n}=1+\sqrt{2}?$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/578. Given an integer $n \geq 2$. Find the polynomial $Q(x)$ with the real coefficient and $\deg(Q(x)) \leq n-1$ such that $x(x-1)...(x-n)Q(x)+x^2+1$ is a square of some polynomial.

Problem T11/578. Given the sequence (x_n) determined by $\left\{\begin{array}{l} x_0=a \\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n} \end{array}\right.$ with all $n = 1, 2, 3, \ldots$ and $a > 0$. Prove that

$$\sqrt{a^2+2n}<x_n<\sqrt{a^2+2n}+\frac{1}{2a} \text{ for every } n = 1, 2, \ldots$$

Problem T12/578. Given an equilateral triangle ABC with circumradius R and P is a point inside the triangle. Let D, E, F be the orthogonal projections of P on the sides BC, CA, AB respectively. Prove that

$$PA.PB.PC+PD.PE.PF\leq \frac{9R^3}{8}.$$

NGUYEN PHU HOANG LAN

(University of Education, VNU, Hanoi)



BÀI TOÁN 106. *Các số 1000, 1001, ..., 2999 được viết trên một cái bảng. Mỗi lần được phép xóa hai số, chẳng hạn a và b và thay chúng bởi số $\frac{1}{2}\min(a,b)$. Sau 1999 lần thực hiện như vậy trên bảng còn đúng một số c. Chứng minh $c<1$.*

Lời giải. Do tính chất đối xứng ta có thể giả sử $a \le b$. Khi đó: $\frac{1}{2}\min(a,b)=\frac{a}{2}$.

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{2}{a}=\frac{1}{\frac{a}{2}}$, từ đây ta suy ra tổng nghịch đảo của tất cả các số trên bảng là không giảm. Ban đầu tổng này là:

$$S=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+...+\frac{1}{2999}\le\frac{1}{c},$$

ở đó $\frac{1}{c}$ là tổng sau cùng. Chú ý rằng, với $1\le k\le 999$ thì

$$\frac{1}{2000-k}+\frac{1}{2000+k}=\frac{4000}{2000^2-k^2}>\frac{4000}{2000^2}=\frac{1}{1000}.$$

Sắp xếp lại các số hạng trong S kéo theo

$$\frac{1}{c}\ge\frac{1}{1000}+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{2999}\right)+\left(\frac{1}{1002}+\frac{1}{2998}\right)+...+\left(\frac{1}{1999}+\frac{1}{2001}\right)+\frac{1}{2000}$$

$$>\frac{1}{1000}\times 1000+\frac{1}{2000}>1.$$ Do đó: $c<1$ (đpcm).

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** dùng phương pháp phản chứng cũng có lời giải đúng. Xin hoan nghênh bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/9/2025.

BÀI TOÁN 108. *Cho hai dãy số thực $x_1, x_2, ...$ và $y_1, y_2, ...$ được xác định như sau:*

$$x_1=y_1=\sqrt{3},\ x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2}$$

và $y_{n+1}=\frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$ *với mọi $n\ge 1$. Chứng minh rằng $2<x_n y_n<3$ với mọi $n>1$.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

SAI LẦM . . . (*Tiếp theo trang 47*)

Đẳng thức $P=\frac{17}{2}$ xảy ra khi

$$\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0\\ \left(y-\frac{7}{2}\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=\frac{7}{2}\end{cases}.$$

Vậy $\min P=-\frac{21}{2}$, đạt được khi $\begin{cases}x=-\frac{7}{2}\\ y=\frac{9}{2}\end{cases}$,

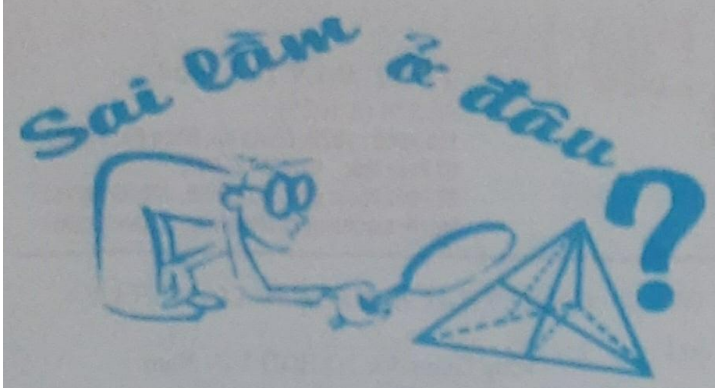
và $\max P=\frac{17}{2}$, đạt được khi

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=\frac{7}{2}\end{cases}.$$

Các bạn có tìm ra đáp số giống như đáp số của bạn Hữu Thắng không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)



GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(*Đề đăng trên TH&TT số 574, tháng 4 năm 2025*)

Phân tích sai lầm. Khi xét đỉnh A_1, số các tam giác cân đỉnh A_1 là 8 trong đó có một tam giác $A_1A_7A_{13}$ là tam giác đều. Khi xét đỉnh A_7 ta cũng có tam giác đều $A_7A_1A_{13}$; khi xét đỉnh A_{13} ta cũng có tam giác đều $A_{13}A_7A_1$. Ba tam giác $A_1A_7A_{13}$, $A_7A_1A_{13}$, $A_{13}A_7A_1$ là một. Do đó với lời giải của *Hoàng* đã trừ tam giác $A_7A_1A_{13}$ ba lần dẫn đến kết quả sai.

Lời giải đúng. Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác đều 18 cạnh là $n(\Omega)=C_{18}^3$.

Xét đỉnh A_1 của đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{18}$, ta có thể chọn được 8 cặp đỉnh (mỗi cặp đỉnh đối xứng nhau qua OA_1) để cùng với đỉnh A_1 tạo được 8 tam giác cân có đỉnh A_1.

Tương tự các đỉnh còn lại $A_2, A_3, \ldots, A_{18}$ thì cũng cho ta 8 tam giác cân.

Do đó số tam giác cân là 18 x 8 = 144.

Xét số tam giác đều có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác đều 18 cạnh. Với mỗi đỉnh A_i $(i=\overline{1;6})$ của đa giác ta có một tam giác đều $A_iA_{i+6}A_{i+12}$, khi đó có 6 tam giác đều. Với mỗi đỉnh A_i $(i=\overline{7;18})$ ta có một tam giác đều là một trong 6 tam giác đều kể trên.

Suy ra số tam giác cân (không phải tam giác đều) là: 144 – 6 = 138.

Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{128}{C_{18}^3}=\dfrac{23}{136}$.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiệnđược sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?



Đề bài. *Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2+4x-8y+13=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x-y+9$.*

Lời giải của bạn Hữu Thắng:

Ta có: $P=3x-y+9$

$$=3x-y+9+\left(x^2+y^2+4x-8y+13\right)$$

$$=x^2+y^2+7x-9y+22$$

$$=x^2+7x+\frac{49}{4}+y^2-9y+\frac{81}{4}-\frac{21}{2}$$

$$=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{21}{2}$$

$$\geq-\frac{21}{2}.$$

Đẳng thức $P=-\dfrac{21}{2}$ xảy ra khi

$$\begin{cases}\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2=0\\ \left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{7}{2}\\ y=\dfrac{9}{2}\end{cases}.$$

Ta lại có: $P=3x-y+9$

$$=3x-y+9-\left(x^2+y^2+4x-8y+13\right)$$

$$=-x^2-y^2-x+7y-4$$

$$=-x^2-x-\frac{1}{4}-y^2+7y-\frac{49}{4}+\frac{17}{2}$$

$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$$

$$\leq\frac{17}{2}.$$

(Xem tiếp trang 46)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 578 (8.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142849, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập*: TS. TRẦN HỮU NAM** ***Thư kí Tòa soạn*: CN. VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Anh Tuấn, Lê Văn Tuấn – Chứng minh hai đường tròn tiếp xúc nhau.

9 Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2025 – 2026.

13 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hà Nội, năm học 2025 – 2026.

14 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Hữu Tiến – Ứng dụng đạo hàm vào giải quyết bài toán thực tiễn.

18 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/578, ..., T12/578, L1/578, L2/578.

20 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/574, ..., T12/574, L1/574, L2/574

30 **Phương pháp giải toán**
Nguyễn Hữu Trí – Đơn giản hóa một số dạng toán tìm min, max bằng hình học

40 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 119 – Bài dịch số 117.

42 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 98 – Đề bài toán 100.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 106. Đề bài toán 108.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM RA MẮT ...

(Tiếp theo bìa 4)

Thay mặt Đảng ủy Bộ GD-ĐT, ông *Doãn Hồng Hà* - Phó Trưởng Ban Tuyên giáo và Dân vận Đảng ủy Bộ GD&ĐT bày tỏ sự vui mừng khi được tham dự Chương trình ra mắt hai ấn phẩm có ý nghĩa là *Bác là Hồ Chí Minh* và *Bác Hồ ở Thái Lan*. Đây cũng là công trình chào mừng Đại hội Đảng bộ Bộ GD&ĐT nhiệm kì 2025-2030 của NXBGDVN và được Đảng bộ Bộ GD&ĐT đánh giá cao sự chủ động, sáng tạo của Đảng bộ NXBGDVN trong việc tổ chức các hoạt động thiết thực, ý nghĩa gắn với nhiệm vụ chính trị của đơn vị và toàn ngành. Việc ra mắt hai cuốn sách không chỉ là sự kiện văn hóa quan trọng mà còn có ý nghĩa trong việc giáo dục truyền thống cách mạng, thúc đẩy học tập và làm theo tư tưởng, đạo đức, phong cách Hồ Chí Minh.



Ông Doãn Hồng Hà - Phó Trưởng Ban Tuyên giáo và Dân vận Đảng ủy Bộ Giáo dục và Đào tạo phát biểu tại Chương trình



Các diễn giả tại Chương trình tọa đàm giới thiệu sách.
Ảnh: Thanh Tùng

Tại Chương trình, ông *Nguyễn Nguyên* - Cục trưởng Cục Xuất bản, In và Phát hành, Bộ Văn hóa, Thể thao và Du lịch đã đánh giá cao hai cuốn sách *Bác là Hồ Chí Minh* và *Bác Hồ ở Thái Lan*, các tác giả đã thành công khi chọn những lát cắt mới để tiếp cận khi viết về Bác. Ông tin tưởng rằng ngoài việc xuất bản sách giáo khoa, NXBGDVN sẽ tiếp tục đẩy mạnh việc xuất bản mảng sách chất lượng cao. Tại Chương trình, NXBGDVN đã được Tổng Lãnh sự quán Việt Nam tại Khỏn Kèn, Vương quốc Thái Lan gửi Công điện đến chúc mừng.

Nhân dịp này, NXBGDVN cũng đã tổ chức tọa đàm về hai cuốn sách trên. Buổi tọa đàm diễn ra trong bầu không khí thân thiện. Các diễn giả đã tập trung thảo luận để làm rõ hơn về cuộc đời, sự nghiệp cách mạng của Hồ Chí Minh, những bài học của Bác để lại cho thế hệ sau và cho ngành giáo dục, những góc nhìn chuyên sâu về giá trị tư tưởng và ý nghĩa thực tiễn của hai cuốn sách.

BAN TRUYỀN THÔNG - NXBGDVN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM RA MẮT HAI CUỐN SÁCH

Bác là Hồ Chí Minh và Bác Hồ ở Thái Lan

Ngày 30 tháng 7 năm 2025, tại Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã tổ chức Chương trình ra mắt hai cuốn sách *Bác là Hồ Chí Minh* và *Bác Hồ ở Thái Lan*.

Đây là những tác phẩm có giá trị nhân văn sâu sắc, được đầu tư công phu, góp phần làm phong phú thêm tư liệu về cuộc đời và sự nghiệp vĩ đại của Chủ tịch Hồ Chí Minh.

Cuốn sách *Bác là Hồ Chí Minh* do tác giả *Lương Văn Phú* biên soạn và tuyển chọn, là kết quả của tình cảm kính yêu sâu sắc và niềm say mê nghiên cứu về Chủ tịch Hồ Chí Minh. Tác phẩm đã khắc họa chân dung một vị lãnh tụ vĩ đại, một con người giản dị nhưng có tầm nhìn xa trông rộng, thông qua việc hành trình tìm đường cứu nước của Bác Hồ ở nước ngoài.

Cuốn sách *Bác Hồ ở Thái Lan* của tác giả *Hà Lam Danh* được biên soạn dưới dạng song ngữ Việt - Thái là tập hợp những tư liệu lịch sử quý báu, những câu chuyện chân thực về khoảng thời gian Chủ tịch Hồ Chí Minh hoạt động cách mạng tại Thái Lan từ năm 1928 đến 1929. Tác phẩm không chỉ tái hiện một cách sống động cuộc sống và hoạt động cách mạng của Bác trên đất nước Chùa Vàng, mà còn làm nổi bật sự giản dị, trí tuệ và tình yêu thương bao la của Người dành cho cộng đồng kiều bào ta.

Phát biểu tại Chương trình, ông *Nguyễn Chí Bính* - Phó Bí thư Đảng ủy, Chủ nhiệm Ủy ban kiểm tra Đảng ủy, Phó Tổng Giám đốc NXBGDVN đã nhấn mạnh: "Cuốn sách *Bác là Hồ Chí Minh* và *Bác Hồ ở Thái Lan* là sự tiếp nối sứ mệnh phục vụ giáo dục của NXBGDVN. Nếu sách giáo khoa cung cấp kiến thức nền tảng, thì những cuốn sách về Chủ tịch Hồ Chí Minh là sự bồi đắp tư tưởng, đạo đức, nhân cách cho các thế hệ học sinh, sinh viên. Hai công trình sách này là minh chứng cho tinh thần lao động nghiêm túc, trách nhiệm và lòng kính yêu vô hạn của đội ngũ NXBGDVN đối với Chủ tịch Hồ Chí Minh".

Ông *Nguyễn Chí Bính* đã gửi lời cảm ơn đến tác giả *Lương Văn Phú*, tác giả *Hà Lam Danh* cùng các dịch giả và các chuyên gia đã lao động miệt mài, tâm huyết để cho ra đời hai công trình ý nghĩa này, đồng thời cảm ơn Tổng Lãnh sự quán Việt Nam tại Khỏn Kèn, Thái Lan đã phối hợp chặt chẽ để cuốn sách "*Bác Hồ ở Thái Lan*" được ra mắt bạn đọc.

(Xem tiếp bìa 3)



Ông Nguyễn Chí Bính - Phó Bí thư Đảng ủy, Chủ nhiệm Ủy ban kiểm tra Đảng ủy, Phó Tổng Giám đốc nêu bật giá trị ý nghĩa của hai cuốn sách.

Ảnh: Thanh Tùng

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT8M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2025
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng