TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 577
Tháng 7 - 2025
ISSN: 2734-9284

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

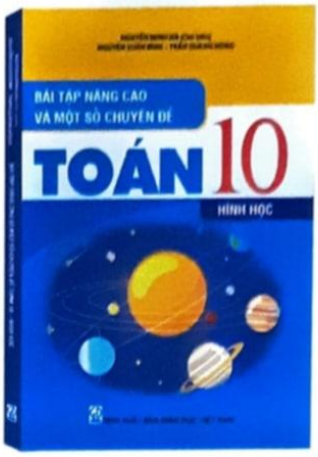


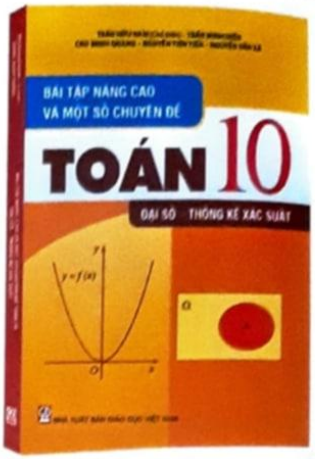
Nhà toán học Hungary
Paul Erdős (1913 – 1996)

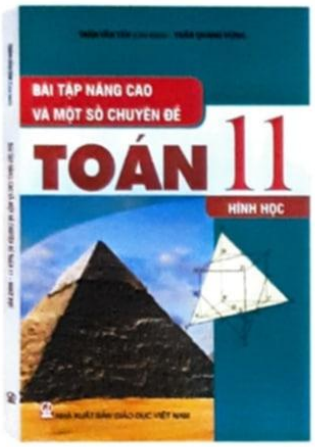
Cảnh đẹp toà nhà Quốc hội Hungary

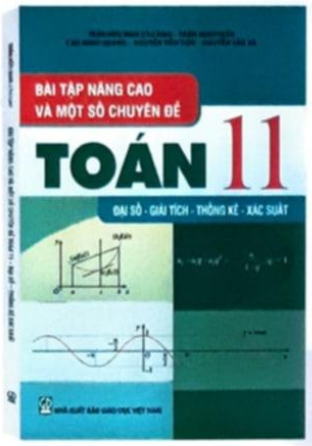
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

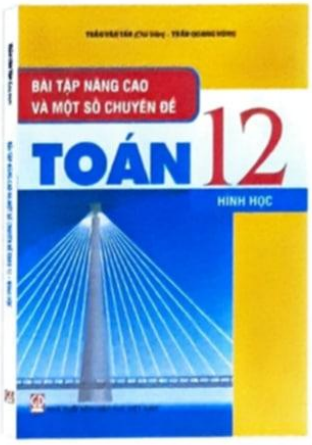
Giới thiệu bộ sách

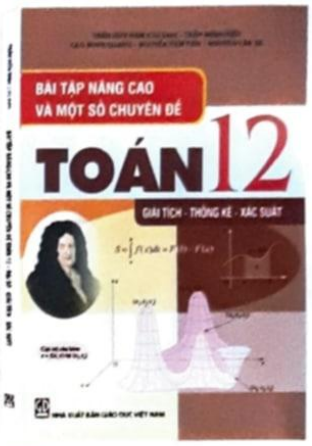












BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN

(DÀNH CHO HỌC SINH THPT – THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018)

TÁC GIẢ: TRẦN VĂN TẤN, NGUYỄN MINH HÀ, TRẦN QUANG HÙNG, TRẦN HỮU NAM...

Bộ sách "Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán" gồm các cuốn:

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Đại số, Giải tích, Xác suất, Thống kê.

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Hình học

Mỗi cuốn sách gồm hai phần:

Phần một gồm các chương, bài bám sát Chương trình giáo dục phổ thông 2018, mỗi bài gồm:

• Tóm tắt kiến thức: tóm tắt những kiến thức trọng tâm của bài, được vận dụng để giải các bài tập, các dạng toán trong bài. Tuỳ theo nội dung từng bài mà ở phần này có thể có thêm phần Kiến thức bổ sung nâng cao liên quan đến chủ đề của bài học.

• Ví dụ minh hoạ: phương pháp giải, các ví dụ giúp học sinh hiểu sâu, rộng hơn những kiến thức đã học, đồng thời có được những kĩ năng cần thiết cho việc giải toán.

• Bài tập để nghị: bổ sung các bài tập để rèn cho mỗi dạng toán. Các bài tập được phân từ cơ bản đến nâng cao.

Phần hai gồm các Chuyên đề (dành cho học sinh khá, giỏi): các dạng toán thường xuất hiện trong các kì thi vào Đại học&Cao đẳng, trong các kì thi học sinh giỏi và Olympic. Các chuyên đề sẽ giúp học sinh phát triển kiến thức học, cung cấp cho học sinh cơ sở của phương pháp giải toán thường sử dụng.

Sách được biên soạn theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 để học sinh có thể củng kiến thức của mình ngay sau mỗi giờ học lớp, đồng thời bổ sung và khắc sâu thêm một vấn đề lí thuyết nhằm bồi dưỡng học sinh giỏi.

BẠN ĐỌC TÌM MUA SÁCH TẠI

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: Tầng 4, Toà Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Q. Thanh Xuân, TP. Hà Nội

Điện thoại: 024.35121533 (số máy lẻ 118) - 0904893398 | **Fax:** 024.35123278

Email: kinhdoanh.heps@gmail.com | **Website:** http://xbgdhn.vn/



MỘT VÀI DẠNG TOÁN TỔ HỢP THƯỜNG GẶP TRONG CÁC KỲ THI HỌC SINH GIỎI THCS VÀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

ĐOÀN KHÁNH TUYÊN *(GV THCS Nguyễn Khuyến, Chư Sê, Gia Lai)*
TRẦN MINH VŨ *(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)*
VÕ TÁ QUANG NHẬT *(SV K67 ĐH Bách Khoa Hà Nội)*

Như chúng ta đã biết, trong các kỳ thi học sinh giỏi lớp 9, các kỳ thi tuyển sinh vào 10, hay nói chung là các kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp THCS thì chúng ta thường thấy có bài toán tổ hợp, bài toán suy luận có lý và nó thường nằm ở bài cuối cùng một đề thi. Điều đó có nghĩa rằng các bài toán này thường được đánh giá là bài toán khó, mức độ của nó có thể thấy là mức độ khó tương đương với các bài bất đẳng thức trong các kỳ thi nói trên. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày một cách ngắn gọn và dễ hiểu nhất đối với các bài toán đó. Chúng tôi đã phân dạng một cách tương đối, mục đích giúp học sinh có cách nhìn tốt hơn các bài toán này, sẽ không bị ngợp bởi những bài toán yêu cầu đọc hiểu nhiều như thế.

I. NHỮNG DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. Những bài toán về quen biết

Những bài toán dạng này thông thường cần sử dụng biểu đồ ven để giải. Chúng ta cùng xem những thí dụ sau

Thí dụ 1.1. (Thi HSG lớp 9, TP Hà Nội, năm học 2011-2012). *Trong một hội nghị có 100 đại biểu, trong đó mỗi người quen biết với ít nhất 67 người khác. Chứng minh rằng trong đó có ít nhất 4 người mà mỗi người đều quen biết với 3 người còn lại.*

Lời giải. Chọn một người bất kỳ, ta gọi đó là A. Gọi B là một người quen của A. Ta ký hiệu X_A, X_B lần lượt là tập hợp các người quen của A và B. Lúc này ký hiệu $X_{A\cap B}$ là tập hợp các người quen chung của A và B. Khi đó bởi vì $100 \geq n(X_A \cup X_B)$ nên

$$100 \geq n(X_A \cup X_B) = n(X_A) + n(X_B) - n(X_{A\cap B}) \geq 67 + 67 - n(X_{A\cap B}).$$

Ta suy ra số phần tử của $X_{A\cap B} \geq 34$. Gọi Y là tập hợp 34 người bất kỳ thuộc $X_{A\cap B}$, ta chỉ cần chứng minh được trong số các người này có ít nhất 2 người quen nhau là chứng minh hoàn tất. Giả sử 34 người trên không có ai quen nhau, khi đó lấy một người C bất kỳ trong nhóm Y này, khi đó C quen ít nhất 65 người khác (trừ A và B) mà không có ai thuộc nhóm 33 người của nhóm Y (được bỏ ra C). Đến đây hội nghị có 2 người A, B với người quen chung là C, có ít nhất 33 người quen chung của A và B và có thêm 65 người quen khác của C mà không nằm trong tập Y nên số người trong hội nghị không ít hơn $2+1+33+65=101$ người, ta suy ra mâu thuẫn. Vậy trong tập Y phải có ít nhất hai người quen nhau.

Thí dụ 1.2. (Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Gia Lai, năm học 2020-2021). *Trong một cuộc họp có 6 đại biểu, người ta nhận thấy cứ 3 đại biểu bất kỳ thì có 2 người quen nhau. Chứng minh rằng luôn có 3 đại biểu mà trong đó mỗi người trong họ đều quen với 2 người còn lại.*

Lời giải. Để tiện cho việc chứng minh, ta có hai kết quả hiển nhiên được suy ra từ yêu cầu bài toán.

Nhận xét 1: Hai người bất kỳ mà cùng không quen một người thì quen lẫn nhau.

Nhận xét 2: Ba người bất kỳ mà cùng không quen một người thì quen lẫn nhau, nhóm này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn ra một nhóm 3 người và theo giả thiết chọn được hai người quen nhau là A và B. Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: nếu 4 người còn lại mà có một người quen cả A và B thì chứng minh hoàn tất.

Trường hợp 2: trong 4 người còn lại có ít nhất 3 người mà không một ai quen A hoặc B thì theo nhận xét 2, chứng minh hoàn tất.

Trường hợp 3: Trong 4 người còn lại có C và D cùng quen A mà không quen B, khi đó theo nhận xét 1 thì họ quen nhau. Lúc này theo nhóm 3 người gồm A,C và D thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chứng minh tới đây là hoàn tất.

Thí dụ 1.3. (Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Nghệ An, năm học 2020-2021). *Trong một hoạt động ngoại khóa, có 20 giáo viên và 80 học sinh đến từ nhiều nơi tham gia. Biết rằng mỗi giáo viên quen biết ít nhất 65 người và mỗi học sinh quen biết tối đa 12 người (mối quan hệ quen biết có tính 2 chiều: Người A quen người B thì người B cũng quen với người A). Ban tổ chức xếp họ thành 41 nhóm. Hỏi ban tổ chức có thể xếp sao cho bất kỳ nhóm nào cũng có hai người quen nhau hay không? Vì sao?*

Lời giải. Giả sử ban tổ chức xếp được thành 41 nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Bởi vì chỉ có 20 giáo viên nên sẽ có ít nhất 21 nhóm toàn học sinh. Như vậy thì cũng có ít nhất 21 cặp học sinh trong 21 nhóm này quen nhau. Khi đó số lượt quen giáo viên tối đa của các em học sinh là

$$80.12 - 2.21 = 918.$$

Xét về giáo viên thì chỉ có 20 người nhưng mỗi người có ít nhất 65 người quen biết, thành ra số quen biết học sinh của mỗi giáo viên không ít hơn 46. Khi đó thì số lượt quen học sinh của giáo viên sẽ không ít hơn $20.46 = 920$.

Vì mối quan hệ quen biết có tính hai chiều nên đến đây ta có mâu thuẫn.

Chúng ta có thể thực hành với thí dụ tương tự sau.

Thí dụ 1.4. (Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Bình Dương, năm học 2024-2025). *Tại một buổi giao lưu có 100 người bao gồm 15 giáo viên và 85 học sinh. Trong số 15 giáo viên, mỗi người quen với ít nhất 70 người khác. Trong số 85 học sinh, mỗi người quen với không quá 10 người khác. Họ được phân vào 21 phòng. Chứng minh rằng có một phòng nào đó không chứa một cặp nào quen nhau.*

Nhận xét. Việc giải những dạng toán này giúp các em bước đầu làm quen với **Lý thuyết đồ thị**, ở đây hai người quen nhau có thể xem mỗi người là một đỉnh, thì điều đó có nghĩa là ta nối được hai đỉnh này bằng một đường đi. Mỗi người quen với k người khác thì ta xem đó là bậc k của đỉnh.

2. Những bài toán có dấu hiệu tổng liên tiếp

Trong phần này, để giải quyết những bài toán có dấu hiệu tổng liên tiếp, chúng ta cần xây dựng một dãy các kết quả liên tiếp và thông thường thì áp dụng nguyên lý Dirichlet.

Thí dụ 2.1. (Đề toán chuyên tin, Gia Lai, năm học 2022-2023). *Người ta viết 11 số tự nhiên khác nhau tùy ý vào một hàng ngang. Chứng minh rằng trong số chúng có một số chia hết cho 11 hoặc là có một vài số liên tiếp có tổng chia hết cho 11.*

Lời giải. Gọi 11 số được viết ở trên là $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{11}$. Ta xây dựng các kết quả là tổng liên tiếp như sau:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$$
$$S_{11} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{11}.$$

Trong 11 tổng trên, ta xét số dư của chúng khi chia cho 11. Nếu tồn tại một tổng chia hết cho 11 thì chứng minh đã hoàn tất.

Trong trường hợp các tổng trên không chia hết cho 11, vì các tổng trên đều khác nhau nên tồn tại hai tổng có cùng số dư. Dễ dàng thấy được rằng, nếu $m > n$ với mọi $m,n \in \{1,2,3,4,5,\ldots,10,11\}$ thì $S_m - S_n = a_{n+1} + \ldots + a_m$ là tổng liên tiếp các số

đã cho. Do đó nếu $S_m; S_n$ có cùng số dư thì $a_{n+1}+\ldots+a_m$ là tổng liên tiếp các số chia hết cho 11. Chứng minh hoàn tất.

Thí dụ 2.2 (Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Gia Lai, năm học 2011-2012). *Trong một hội trại nhân ngày 26 tháng 3, lớp 9A có 7 học sinh tham gia trò chơi ném bóng vào rổ. 7 học sinh này ném được tất cả 100 quả bóng vào rổ, số quả bóng ném vào rổ của các học sinh đều khác nhau. Chứng minh rằng có 3 học sinh ném được tổng số quả bóng vào rổ không ít hơn 30 quả.*

Lời giải. Ta gọi số bóng ném vào rổ của 7 em ở trên theo thứ tự tăng dần là $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Và đặt các tổng liên tiếp là:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3;\ S_2 = a_2 + a_3 + a_4;$$
$$S_3 = a_3 + a_4 + a_5,\ S_4 = a_4 + a_5 + a_6,$$
$$S_5 = a_5 + a_6 + a_7.$$

Ta có tổng $a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 100$. Vì a_1 nhỏ nhất nên $7a_1 < 100$, suy ra $a_1 < 14$.

Giả sử rằng các tổng $S_i, i = \overline{1,7}$ đều nhỏ hơn 30. Khi đó thì:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 100 - (a_5 + a_6 + a_7) > 70$$
$$\Rightarrow a_1 > 70 - (a_2 + a_3 + a_4) > 40.$$

Trong khi đó $a_1 < 14$, ta có ngay mâu thuẫn. Vậy tồn tại ít nhất một tổng $S_m, m \in \{1,2,...,7\}$ không bé hơn 30.

Thí dụ 2.3. (Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Bà Rịa-Vũng Tàu, năm học 2021-2022). *Người ta viết trên bảng 101 số nguyên dương có tổng bằng 300. Chứng minh rằng trong các số trên có thể chọn một số hoặc một vài số có tổng bằng 100.*

Lời giải. Ta ký hiệu các số được viết ở trên là $a_1; a_2; \ldots; a_{101}$. Ta xây dựng các kết quả là tổng liên tiếp như sau:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots$$
$$S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100},\ S_{101} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{101}.$$

Trong 101 tổng trên, ta xét số dư của chúng khi chia cho 100. Nếu tồn tại một tổng trên chia hết cho 100 thì chứng minh hoàn tất.

Xét trường hợp các tổng trên đều không chia hết cho 100. Dễ dàng thấy được rằng, nếu $m > n$ với mọi $m, n \in \{1,2,\ldots,101\}$ thì

$$S_m - S_n = a_{n+1} + \ldots + a_m$$

là tổng liên tiếp các số đã cho.

Do đó nếu S_m, S_n có cùng số dư thì $a_{n+1} + \ldots + a_m$ là tổng liên tiếp các số chia hết cho 100.

Trong 101 tổng sẽ có ít nhất 2 tổng có cùng số dư, giả sử đó là S_n, S_m. Vì các tổng đều khác nhau và chỉ có tổng tất cả bằng 300 cho nên $0 < S_m - S_n < 300$. Do đó chỉ xảy ra khả năng:

$$S_m = S_n + 100,\ S_m = S_n + 200.$$

Khi đó nếu $S_m - S_n = 100$ thì chứng minh hoàn tất.

Nếu có một tổng bằng 100 thì chứng minh hoàn tất.

Nếu $S_m = S_n + 200$ và không có tổng nào bằng 100, khi đó $S_m < S_{101}$. Vì vậy

$$S_{101} - (S_m - S_n) = 100.$$

Chứng minh hoàn tất.

Thí dụ 2.4. *Đặt các số 1, 2, 3, ..., 25 trên một vòng tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng luôn có ba số liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 39.*

Lời giải. Ta ký hiệu các số được viết trên vòng tròn kể từ một vị trí nào đó làm mốc là:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{25}.$$

Ta xây dựng các tổng 3 số nguyên liên tiếp trong vòng tròn trên là:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3;$$
$$S_2 = a_2 + a_3 + a_4;$$
$$\ldots\ldots$$
$$S_{25} = a_{25} + a_1 + a_2.$$

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử các tổng trên đều nhỏ hơn 39, khi đó:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{25} < 25.39 = 975.$$

Trong khi đó thì:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{25} = 3.(1 + 2 + \ldots + 25) = 975.$$

Hai điều trên giúp ta có được mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 2.5 *Một bà mẹ chiều con mỗi ngày cho con một lần kẹo có ít nhất 1 cái nhưng không chế mỗi tuần không cho quá 12 cái kẹo. Chứng minh rằng trong một số ngày liên tiếp nào đó người mẹ cho con tổng là 20 chiếc kẹo.*

Lời giải. Ta ký hiệu số kẹo người mẹ cho hàng ngày, tính trong 3 tuần, theo thứ tự là:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{21}..$$

Ta xây dựng các tổng số kẹo trong các ngày liên tiếp là:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_{21} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{25}.$$

Khi đó thì các tổng trên khác 0 và bé hơn hoặc bằng 36.

Xét số dư của chúng khi chia cho 20, rõ ràng với 21 tổng thì sẽ có ít nhất hai tổng có cùng số dư. Như vậy hiệu của chúng là bội của 20 nhưng không vượt quá 36, vì thế hiệu đó bằng 20. Ta có điều phải chứng minh.

3. Những bài toán sử dụng dấu hiệu bất biến, đơn biến

Để giải những bài toán này, chúng ta cần lưu ý đến những điều không thay đổi trong suốt quá trình thực hiện các thao tác. Điều đó hay được gọi là bất biến và tư duy học sinh cần rèn luyện là tìm ra điều bất biến đó để nhằm giảm tải các thao tác tính toán hoặc trình bày.

Thí dụ 3.1. (Thi HSG lớp 9, Quảng Ninh, năm học 2021-2022). *Trên bảng có 2022 số dương liên tiếp 1, 2, 3, …, 2022. Ta thực hiện thao tác: Mỗi lượt ta xóa đi hai số trên bảng và thay vào đó là một số bằng tổng của chúng cho đến khi còn lại đúng một số trên bảng. Hỏi số còn lại là số chẵn hay số lẻ, vì sao?*

Lời giải. Trong bài toán này, khi thay hai số bởi một số là tổng của chúng, có nghĩa là trong suốt quá trình, tổng của dãy số đã cho là không thay đổi. Và do đó số cuối cùng còn lại trên bảng là tổng của các số trong dãy số đã cho. Bởi vì dãy số đã cho gồm 1011 số chẵn và 1011 số lẻ, cho nên tổng của chúng là một số lẻ.

Thí dụ 3.2 (Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Thái Nguyên, năm học 2024-2025). *Cho 6 hộp được ký hiệu là $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$. Gọi $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ tương ứng là số viên bi có trong các hộp $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$. Biết rằng $n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 + n_5^3 + n_6^3 = 2027$. Bạn Bình thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần, chọn ngẫu nhiên 3 hộp, sau đó bỏ vào mỗi hộp (trong 3 hộp đó) đúng 1 viên bi. Hỏi sau một số lần thực hiện theo quy tắc trên, số lượng viên bi trong 6 hộp có bằng nhau không? Giải thích.*

Lời giải. Trước hết ta biết rằng với mọi số nguyên n thì nó có cùng số dư với n^3 khi chia cho 3, bởi vì $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ luôn chia hết cho 3. Do đó theo giả thiết thì tổng số viên bi trong 6 hộp khi chia cho 3 có số dư cùng số dư khi chia cho 3. Chú ý rằng ở mỗi thao tác, ta thêm vào 3 viên bi nên tổng số dư khi chia cho 3 luôn bằng 2. Vì vậy nếu ở một thao tác của đề bài mà có số lượng bi ở các hộp bằng nhau thì tổng số bi sẽ chia hết cho 3. Ta có mâu thuẫn. Do đó câu trả lời là không thể.

Thí dụ 3.3 (Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Bà Rịa-Vũng Tàu 2024-2025). *Cho tập hợp* $X=\{1, 2, 3, \ldots, 2025\}$. *Tìm số tự nhiên* k *nhỏ nhất sao cho với mọi cách lấy* k *phần tử bất kỳ thuộc* X *thì luôn tồn tại hai phần tử* $a,b\,(a>b)$ *trong* k *phần tử được lấy mà* $a+b$ *chia hết cho* $a-b$.

Lời giải. Ta chia tập X thành 3 tập hợp. Tập S_1 gồm 675 số chia cho 3 dư 1, tập S_2 gồm 675 số chia cho 3 dư 2 và tập S_3 gồm 675 số chia hết cho 3. Rõ ràng rằng cứ hai số a,b bất kỳ thuộc S_1 hoặc S_2 thì chúng có tổng không chia hết cho 3 nhưng hiệu của chúng thì chia hết cho 3. Vì vậy số k phải lớn hơn 675. Ta sẽ chứng minh k nhỏ nhất cần tìm là 676.

Bây giờ ta xét một tập bất kỳ các số thuộc X có 676 số, ta sắp thứ tự chúng như sau:

$$a_1<a_2<\cdots<a_{676}$$

Khi đó vì $a_1\geq 1$ và $a_{676}\leq 2025$ nên $a_{676}-a_1\leq 2024$. Bây giờ ta xét hiệu hai số liên tiếp bất kỳ $a_{i+1}-a_i$, nếu trong các hiệu này có một hiệu bằng 1 hoặc bằng 2 thì hai số đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Thật vậy, giả sử $a-b=1$ thì $a+b$ luôn chia hết cho $a-b$; còn nếu $a-b=2$ thì khi đó a,b cùng tính chẵn lẻ nên $a+b$ chia hết cho 2.

Cuối cùng, ta giả sử rằng tất cả các hiệu liên tiếp đều không bé hơn 3. Khi đó

$$a_{676}-a_1=(a_{676}-a_{675})+(a_{675}-a_{674})+\cdots+(a_2-a_1)\geq 675.3.$$

Mà $675.3=2025>2024$ nên ta có mâu thuẫn.

Thí dụ 3.4 (Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Nam Định, năm học 2021-2022). *Trên một mặt bàn phẳng có 2021 đồng xu kích thước bằng nhau, mỗi đồng xu có hai mặt trong đó có một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, đồng thời tất cả các đồng xu đều ngửa mặt màu xanh lên trên mặt bàn. Thực hiện trò chơi sau đây: mỗi lượt chơi phải đổi mặt 10 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2022 lượt chơi có thể nhận được tất cả 2021 đồng xu trên mặt bàn đều ngửa mặt màu đỏ lên trên hay không? Hãy giải thích vì sao?*

Lời giải. Ta ký hiệu mặt xanh là số 0 và mặt đỏ là số 1. Như vậy lúc bắt đầu trò chơi, tổng các số trên mặt bàn là số chẵn.

Bước 1: Lật được 10 mặt đỏ, tổng các số vẫn là số chẵn.

Bước 2: Nếu úp k mặt đỏ thành mặt xanh và ngửa được $10-k$ mặt đỏ thì khi đó trên bàn vẫn có tổng các số là số chẵn.

Điều đó có nghĩa rằng làm thế nào đi chăng nữa, chúng ta không bao giờ có được tổng các số là số lẻ được.

Thí dụ 3.5 (Thi HSG lớp 9, phòng GD&ĐT Thanh Trì, Hà Nội, năm học 2021-2022). *Trên một bảng có ba số* $\sqrt{2}, 2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. *Ta thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi ta xóa đi hai số trong ba số trên bảng, giả sử đó là* a,b. *Khi đó ta tiếp tục bổ sung hai số* $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ *và* $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$, *đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy mỗi lượt chơi vẫn còn ba số trên bảng, hỏi bao nhiêu lượt chơi thì ta được ba số trên bảng là* $\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải. Giả sử ba số trên bảng là a,b,c. Khi thay a,b bằng $x=\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $y=\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ thì ta có:

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2\\&=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{2}\\&=a^2+b^2.\end{aligned}$$

Như vậy sau khi xóa 2 số a,b thay bởi hai số mới $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ thì tổng bình phương hai số mới không đổi. Do đó tổng bình phương của ba số trên bảng không đổi và bằng $2+4+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$. Tuy nhiên tổng bình phương ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}},\sqrt{2},1+\sqrt{2}$ là

$$\left(\frac{1}{8}+2+3+2\sqrt{2}\right)\neq\frac{13}{2}.$$

Vậy không thể đồng thời trên bảng ba số

$$\frac{1}{2\sqrt{2}},\sqrt{2},1+\sqrt{2}.$$

Thí dụ 3.6 (Thi HSG lớp 9, phòng GD&ĐT Nam Trực, Nam Định, năm học 2021-2022). *Trên một bảng có ba số 3, 4, 5. Ta thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi ta xóa đi hai số trong ba số trên bảng, giả sử đó là a,b. Khi đó ta tiếp tục bổ sung hai số $\frac{3a+4b}{5}$ và $\frac{4a-3b}{5}$, đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy mỗi lượt chơi vẫn còn ba số trên bảng, hỏi bao nhiêu lượt chơi thì ta được ba số trên bảng là $7,1,-1$.*

Lời giải. Ta đi tìm điều bất biến của bài toán trên, ban đầu ta thấy $3^2+4^2=5^2$. Và

$$\left(\frac{3a+4b}{5}\right)^2+\left(\frac{4a-3b}{5}\right)^2=a^2+b^2.$$

Như vậy, cho dù xóa đi thế nào thì tổng bình phương được thay thế đều không đổi. Do đó các số cuối cùng còn lại trên bảng phải có tổng bình phương của hai số nhỏ bằng bình phương số lớn. Điều đó cũng đồng nghĩa không thể nào được ba số trên bảng là $7,1,-1$..

Thí dụ 3.7 (Thi thử vào THPT chuyên ĐHSP lần 3, năm 2021-2022). *Loan ghi lên bảng một số thực dương N. Sau đó Loan thực hiện việc xoá và ghi thêm số, theo quy tắc sau: Mỗi lần xoá một số tuỳ ý trên bảng, gọi là a, rồi ghi lên bảng hai số thực dương b,c sao cho $bc\le 4a^2$. Sau 99 lần thực hiện xoá và ghi thêm số như vậy, trên bảng sẽ có đúng 100 số (không nhất thiết phân biệt). Chứng minh rằng trong 100 số đó, có ít nhất một số không lớn hơn $100N$.*

Lời giải. Khi xóa đi số a và bổ sung hai số b và c thì ta có:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{\sqrt{bc}}\ge\frac{1}{a}.$$

Điều đó có nghĩa là khi xóa đi một số và bổ sung thêm hai số thì tổng nghịch đảo của nó không bé hơn nghịch đảo số được xóa đi. Do đó giả sử 100 số còn lại đều lớn hơn $100N$, khi đó tổng nghịch đảo của 100 số đó sẽ bé hơn $\frac{1}{N}$.

Ta có ngay mâu thuẫn, bài toán được chứng minh.

4. Những bài toán sử dụng nguyên lý cực hạn

Nguyên lý cực hạn là một công cụ rất hữu ích trong nhiều bài toán liên quan đến việc chỉ ra sự tồn tại của một đối tượng có tính chất nào đó. Sau đây là phát biểu của nguyên lý cực hạn.

Định lý (Nguyên lý cực hạn). *Cho S là một tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$, khi đó S có phần tử nhỏ nhất.*

Ngoài ra, nếu biết rằng tập hợp đã cho là hữu hạn, ta còn biết thêm rằng:

Mệnh đề. *Một tập con hữu hạn và khác rỗng của $\mathbb{N}$ thì luôn có phần tử lớn nhất.*

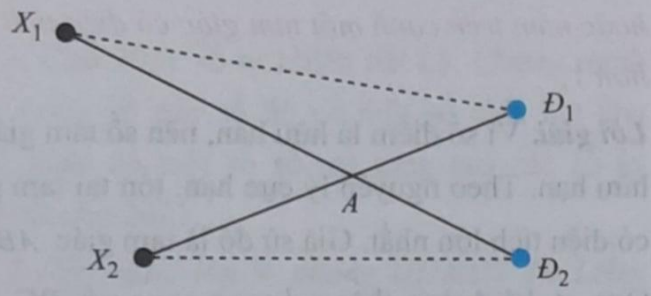
Dưới đây là một số bài toán ví dụ.

Thí dụ 4.1 (Olympic THPT chuyên Hạ Long, Quảng Ninh, năm học 2024-2025). *Cho 20 điểm phân biệt gồm 10 điểm màu xanh và 10 điểm màu đỏ trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể dùng 10 đoạn thẳng nối mỗi điểm xanh với một điểm đỏ tương ứng sao cho 10 đoạn thẳng này đôi một không có điểm chung.*

Lời giải. Vì có 10 điểm màu xanh và 10 điểm màu đỏ nên nếu nối chúng thì chỉ có hữu hạn đoạn thẳng. Gọi T là một cách sử dụng 10 đoạn thẳng để nối các điểm theo yêu cầu mà tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất. Ta sẽ chứng minh T là một phương án nối các điểm màu đỏ và các điểm màu xanh của đề bài mà 10 đoạn thẳng được dùng đôi một không có điểm chung.

Thật vậy, giả sử tồn tại hai đoạn thẳng cắt nhau trong T. Khi đó ký hiệu $X_1Đ_1$ và $X_2Đ_2$ là hai đoạn thẳng cắt nhau đó.

Ta xét một phương án T' là phương án giữ nguyên 8 đoạn của T và thay đổi bằng nối $X_1Đ_2$ và $X_2Đ_1$ như hình vẽ.



Phương án T' có tổng độ dài các cạnh nhỏ hơn phương án T vì

$$X_1Đ_1+X_2Đ_2=X_1A+AĐ_1+X_2A+AĐ_2 > X_1Đ_2+X_2Đ_1.$$

Do đó ta có mâu thuẫn với tính bé nhất của phương án T, vì vậy phương án T mà có tổng các đoạn thẳng nhỏ nhất sẽ là phương án mà các đoạn thẳng không cắt nhau.

Thí dụ 4.2 (Thi HSG lớp 9, Chi Lăng, Lạng Sơn, năm học 2021-2022). *Trên mặt phẳng có 99 điểm phân biệt, trong đó cứ 3 điểm bất kỳ thì tìm được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 50 điểm.*

Lời giải. Với mỗi điểm trong 99 điểm đã cho, vẽ hình tròn có tâm là điểm đó và bán kính là 1. Vì có mỗi hình tròn chỉ có thể chứa hữu hạn điểm (từ 99 điểm đã cho), đồng thời có hữu hạn hình tròn, nên tồn tại hình tròn chứa nhiều điểm nhất. Gọi hình tròn $(A,1)$ là hình tròn đó.

Giả sử, hình tròn (A) chứa không quá 49 điểm. Khi đó có ít nhất 50 điểm không chứa trong hình tròn (A). Xét điểm B là một điểm trong 50 điểm đó. Lúc này, ta có $AB>1$. Bên cạnh đó, hình tròn $(B,1)$ chứa không quá 49 điểm (do tính chất của hình tròn (A)). Vì thế, cả hai hình tròn (A) và (B) chứa không quá $49+49=98$ điểm. Mặt khác, ban đầu có 99 điểm, điều này dẫn đến tồn tại điểm C không chứa trong (A) và (B). Tức là $CA>1$ và $CB>1$. Xét 3 điểm A,B,C, ta có ngay điều mâu thuẫn.

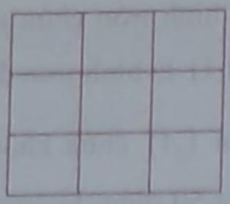
Vậy hình tròn (A) chứa không ít hơn 50 điểm. Ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 4.3 (Thi HSG lớp 9, Quảng Trị, năm học 2021-2022). *Tại điểm tiêm chủng số 1 của trung tâm y tế Thành phố Đông Hà, người ta bố trí một phòng chờ cho những người đến tiêm. Để đảm bảo an toàn phòng chống covid - 19, yêu cầu tối thiểu khoảng cách giữa hai người bất kỳ là 2 m. Hỏi tại một thời điểm, phòng chờ đó chứa tối đa bao nhiêu người? Biết rằng phòng chờ là một hình vuông có diện tích là 16 m^2.*

Lời giải. Phòng chờ là một hình vuông có diện tích 16 m^2, suy ra nó có cạnh dài 4 m. Ta coi mỗi người có mặt trong phòng là một điểm trong hình vuông.

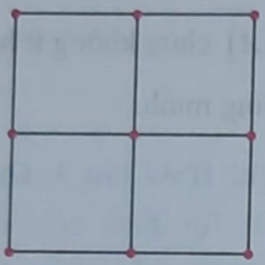
Xét tại một thời điểm nào đó, giả sử trong phòng có k người, ta xét tất cả các đoạn thẳng nối 2 người trong phòng với nhau, khi đó theo nguyên lý cực hạn, tồn tại đoạn thẳng có khoảng cách ngắn nhất. Gọi khoảng cách này là d. Từ giả thiết, ta có ngay $d\geq 2$ (m).

Ta chia phòng chờ thành 9 hình vuông nhỏ bằng nhau như hình sau:



Khi đó, mỗi hình vuông nhỏ có cạnh bằng $\frac{4}{3}$. Hai điểm bất kì trong hình vuông nhỏ sẽ có khoảng cách không vượt quá $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, mà $\frac{4\sqrt{2}}{3} < 2 \le d$, vì thế mỗi hình vuông nhỏ chứa không quá một người. Có 9 hình vuông nhỏ, dẫn đến $k \le 9$.

Ta sẽ chỉ ra một cách xếp với 9 người vào phòng thỏa mãn yêu cầu. Ta chia căn phòng thành 4 hình vuông bằng nhau như hình vẽ sau. Đặt mỗi người tại 9 vị trí điểm "nút" tô tròn.



Dễ dàng kiểm tra được khoảng cách giữa 2 điểm bất kì đều không bé hơn 2 mét. Vậy tại một thời điểm, phòng chờ chứa được tối đa 9 người.

Thí dụ 4.4 (Thi HSG lớp 9, phòng GD&ĐT Đông Anh, Hà Nội, năm học 2021-2022). *Trên mặt phẳng có 2022 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn chứa 1011 điểm đã nêu và 1011 điểm còn lại nằm bên ngoài hình tròn đó.*

Lời giải. Vì có hữu hạn điểm nên có hữu hạn đoạn thẳng được tạo bởi từ 2 điểm nào đó trong 2022 điểm phân biệt đã cho. Với mỗi đoạn thẳng đó, vẽ đường trung trực của nó. Gọi M là một điểm không nằm trên bất kì đường trung trực của đoạn thẳng nào. Khi đó, khoảng cách từ M đến mỗi điểm trong 2022 điểm đã cho đôi một khác nhau.

Theo nguyên lý cực hạn, đồng thời để không mất tính tổng quát, ta gọi các điểm đó lần lượt là $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ thỏa mãn:

$$MA_1 < MA_2 < MA_3 < \ldots < MA_{2021} < MA_{2022}.$$

Xét hình tròn tâm M, bán kính

$$r = \frac{MA_{1011} + MA_{1022}}{2}.$$

Khi đó $MA_{1011} < r < MA_{1012}$. Do đó, các điểm A_1, $A_2, \ldots, A_{1011}$ đều nằm trong đường tròn (M, r) và các điểm $MA_{1012}, MA_{1013}, \ldots, MA_{2022}$ nằm bên ngoài đường tròn (M, r). Ta có điều phải chứng minh.

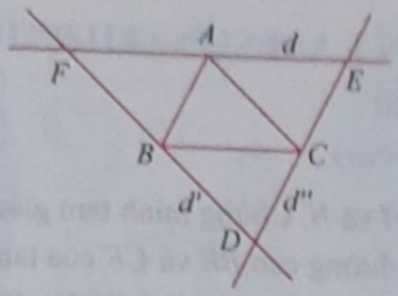
Thí dụ 4.5 (Thi HSG lớp 9, TP. Ninh Bình, năm học 2021-2022). *Có 8045 điểm nằm trên mặt phẳng sao cho cứ ba điểm thì tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng luôn có ít nhất 2012 điểm nằm trong một tam giác hoặc nằm trên cạnh một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.*

Lời giải. Vì số điểm là hữu hạn, nên số tam giác là hữu hạn. Theo nguyên lý cực hạn, tồn tại tam giác có diện tích lớn nhất. Giả sử đó là tam giác ABC.

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC. Khi đó, 8045 điểm sẽ nằm ở cùng một nửa mặt phẳng bờ d chứa B, C (kể cả bờ). Thật vậy, nếu có một điểm M nào đó nằm ở nửa mặt phẳng bờ d không chứa B thì $S_{MBC} > S_{ABC}$, mâu thuẫn với tính lớn nhất của S_{ABC}.

Qua B, C, ta lần lượt kẻ các đường thẳng d', d'' song song với AC, AB. Lập luận tương tự trên, ta cũng có được rằng 8045 điểm sẽ nằm ở cùng một nửa mặt phẳng bờ d' chứa A (kể cả bờ) và cùng một nửa mặt phẳng bờ d'' chứa A (kể cả bờ).

Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của d' và d''; d và d''; d và d'. Khi đó 8045 điểm đã cho sẽ nằm trong tam giác DEF. Dễ thấy tam giác DEF được chia thành 4 tam giác có diện tích bằng nhau là ABC, BCD, ACE, ABF như hình vẽ sau.



Với 8045 điểm chứa trong 4 tam giác, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một tam giác chứa ít nhất 2012 điểm. Mặt khác, dễ thấy rằng 4 tam giác ABC, BCD, ACE, ABF có diện tích bằng nhau, nên mỗi tam giác có diện tích bé hơn 1. Vậy ta có điều cần chứng minh.

II. BÀI TẬP THAM KHẢO THÊM

Bài 1. Chứng minh rằng từ 53 số tự nhiên bất kì luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

Bài 2. Cho 2021 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng trong số các số đó có một số chia hết cho 2021 hoặc có một số số mà tổng của các số ấy chia hết cho 2021.

Bài 3 (*Thi HSG lớp 9, phòng GD&ĐT Từ Liêm, Hà Nội, năm học 2021-2022*). Có 75 bóng đèn, gồm có 30 bóng xanh, 25 bóng đỏ và 20 bóng vàng. Mỗi lượt thì người ta đổi màu hai bóng khác màu sang màu của bóng màu thứ ba. Hỏi tất cả các đều có cùng một màu được không? Giải thích vì sao?

Bài 4 (*Thi HSG lớp 9, THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, năm học 2021-2022*). Có ba đống sỏi với số sỏi tương ứng là 2020, 2021 và 2022 viên. Hai bạn *An* và *Bình* chơi trò chơi như sau: hai người lần lượt chơi tuần tự các lượt chơi của mình, người chơi được phép chọn ra hai đống sỏi có số sỏi tương ứng là a, b, sau đó loại khỏi mỗi đống sỏi được chọn (a,b) viên sỏi. Trong đó (a,b) là ước chung lớn nhất của a, b. Người chơi nào loại được hết số sỏi của một đống nào trước thì thắng. *An* chơi trước, hãy chứng minh rằng *Bình* có chiến thuật để dành chiến thắng.

Bài 5 (*Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Lạng Sơn, năm học 2024-2025*). Xét bảng ô vuông 8×8 được hình thành từ các ô vuông đơn vị có cạnh bằng 1. Điền vào mỗi ô vuông đơn vị một số nguyên dương không vượt quá 8 sao cho hai số ở hai ô vuông đơn vị chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh trong bảng đã cho tồn tại một số được điền ít nhất 11 lần.

Bài 6 (*Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Bắc Ninh, năm học 2021-2022*). Cho đường tròn tâm (O). Bước 1, trên một đường kính của nó ta ghi hai đầu mút số 1. Bước 2, trên điểm chính giữa của hai cung mà đường kính này tạo ra ta ghi số 2. Bước 3, như vậy 4 điểm được ghi số sẽ chia đường tròn thành 4 cung bằng nhau, ở điểm chính giữa các cung này ta ghi số có giá trị bằng tổng hai giá trị của hai đầu mút. Cứ làm liên tiếp như vậy, hỏi sau 2021, các số được ghi trên đường tròn là bao nhiêu?

Bài 7 (*Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Sóc Trăng, năm học 2024-2025*). Trên bàn có 2026 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 2026. Hai bạn *An* và *Bình* tiến hành trò chơi bằng cách thay phiên nhau lấy thẻ, đến lượt chờ mỗi bạn sẽ lấy một thẻ cho đến khi hết tấm thẻ trên bàn. Sau đó mỗi người cộng số trên các thẻ mà mình có, ai ra số chẵn sẽ thắng. Nếu *An* chơi trước thì bạn nào có chiến thuật để luôn thắng và chiến thuật đó như thế nào?

Bài 8 (*Thi HSG lớp 9, Sở GD&ĐT Ninh Bình, năm học 2024-2025*). Trên bảng viết một số nguyên dương $n\,(n\geq 3)$. Hai bạn *Lâm* và *Ngân* chơi một trò chơi như sau: hai người lần lượt thực hiện lượt chơi của mình bằng cách xóa một số xuất hiện trên bảng và thay bởi hai số nguyên dương có tổng bằng nó. Người thắng cuộc là người sau khi kết thúc lượt chơi của mình mà trên bảng chỉ có các số 1 hoặc 2. Lâm là người chơi trước.

a) Chứng minh *Lâm* có chiến thuật để thắng cuộc với $n=6$ và *Ngân* có chiến thuật để thắng với $n=7$.

b) Chứng minh rằng *Ngân* có chiến thuật để thắng cuộc với $n=2025$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TOÁN LAM SƠN, THANH HÓA

Năm học: 2025 - 2026

(Thời gian làm bài 150 phút)

Bài 1. (2,0 *điểm*)

1) Cho hai số thực khác nhau a,b và $ab+1\neq 0$, thỏa mãn: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}=\frac{2}{1+ab}$. Tính giá trị của biểu thức: $M=\frac{1}{a^{2025}+1}+\frac{1}{b^{2025}+1}$.

2) Cho đa thức $f(x)$ là đa thức bậc 4 có các hệ số nguyên. Biết rằng có bốn giá trị nguyên phân biệt của x để $f(x)$ nhận cùng một giá trị bằng 2025. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên x nào để $f(x)$ có giá trị bằng 2028.

Bài 2. (2,0 *điểm*) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3=2(x+y)\\ xy(x^2+y^2-2)-x^2-y^2+2=0\end{cases}.$$

Bài 3. (1,0 *điểm*)

Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5 và 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp M. Tính xác suất chọn được số chia hết cho 3.

Bài 4. (2,0 *điểm*)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$$2x^3+y^3+2x^2y+y^2x=2xy-5.$$

2) Tìm tất cả các bộ số $(x;y;p)$ thỏa mãn: $\frac{xy^3}{x+y}=p$, biết x, y, p là các số nguyên dương và p là số nguyên tố.

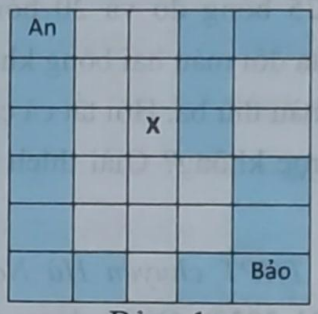
Bài 5. (3,0 *điểm*) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Điểm A di động trên đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

1) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh H của tam giác BHC cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm M và N. Chứng minh tam giác AMN cân.

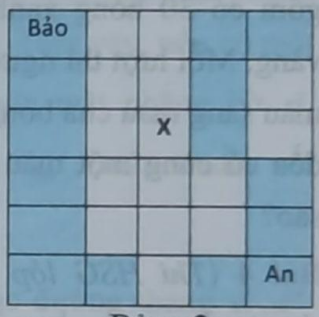
2) Kẻ các đường cao BE và CF của tam giác ABC. Gọi S là giao điểm thứ hai (khác A) của đường thẳng AH với đường tròn (O). Đường thẳng SE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai X (khác S). Chứng minh đường thẳng BX đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

3) Đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMN cắt tia phân giác của góc BAC tại K. Chứng minh điểm K thuộc một đường tròn cố định.

Bài 6. (1,0 *điểm*) Trên sân trường có một bảng ô vuông kích thước $6\text{m}\times 5\text{m}$. Có 15 học sinh mặc áo màu xanh (trong đó chỉ có đúng một học sinh tên An và một học sinh tên Bảo) và 14 học sinh mặc áo màu trắng xếp hình thành chữ **LS** (viết tắt chữ Lam Sơn) sao cho mỗi học sinh đứng ở một ô vuông $1\text{m}\times 1\text{m}$, dư lại một ô vuông trống (đánh dấu X), hai học sinh mặc áo xanh tên An và Bảo đứng ở hai ô vuông góc đối diện như hình vẽ (bảng 1).



Bảng 1



Bảng 2

Cho phép đổi vị trí các học sinh trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần, chọn một học sinh ở ô vuông kề với ô vuông trống, rồi lại chuyển học sinh đó sang ô vuông trống. Hỏi bằng cách thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển theo quy tắc trên (mỗi lần chỉ có 1 học sinh được di chuyển) sao cho An và Bảo đổi chỗ cho nhau còn các học sinh khác giữ nguyên vị trí như hình vẽ (bảng 2) hay không? Vì sao?

HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)



KHAI THÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN TRONG SGK VÀ SBT HƯỚNG DẪN HỌC SINH SUY LUẬN, KHÁM PHÁ

NGUYỄN CÔNG CHUẨN
(GV THPT chuyên Đại học Vinh, Nghệ An)

Làm thế nào để khai thác có hiệu quả sách giáo khoa (SGK) và sách bài tập (SBT) trong các bộ sách Toán của chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 vào việc bồi dưỡng học sinh khá, giỏi. Rất nhiều em khá, giỏi cho rằng các bài tập trong sách giáo khoa, sách bài tập là rất dễ nên hoàn thành rất nhanh và xem như đã hoàn thành bài học. Nếu giáo viên không quan tâm rèn luyện cho học sinh biết suy luận, biết đặt ra cho mình câu hỏi "Liệu có thể sử dụng bài toán này vào chỗ nào nữa không?" và biết tư duy sáng tạo chính là thiết sót lớn.

Bài viết này chúng tôi xin trao đổi cách xuất phát từ những bài toán cơ bản trong SGK, SBT (*Kết nối tri thức với cuộc sống*, *Chân trời sáng tạo*, ...) để hướng dẫn học sinh suy luận, liên hệ các kiến thức đã học, xâu chuỗi lại để phát hiện ra hệ thống các bài toán từ dễ đến các bài toán khó thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi. Hình thành cho học sinh tư duy sáng tạo, khám phá, phát hiện ra kiến thức mới và không chủ quan hay hài lòng trước những bài toán dễ. Chẳng hạn chúng ta bắt đầu bằng bài toán sau đây:

Bài toán gốc (*Ví dụ 2, SBT toán 10, tập 1, tr52, Bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống*). *Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 2MC$.*

a) *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AM}$.

Đây là bài toán dễ, kiến thức cơ bản, lời giải dựa vào định nghĩa và phép toán về vectơ.

Lời giải. a) Do M thuộc cạnh BC và $MB = 2MC$ nên hai vectơ $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ ngược hướng và $\left|\overrightarrow{MB}\right|=\left|2\overrightarrow{MC}\right|$. Suy ra $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$ và do đó $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$.

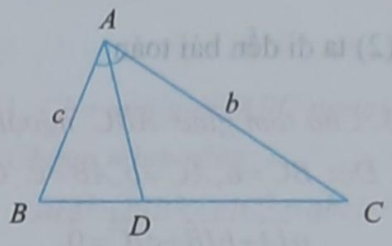
Theo câu a, $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ nên ta có:

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AM}.$$

• Từ câu a) của bài toán này này và theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có bài toán 1 sau

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC với đường phân giác trong AD. Chứng minh rằng $b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ với $AB = c$ và $AC = b$.*

Lời giải.



Áp dụng tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow bDB=cDC.$$

Do $b > 0$, $c > 0$ và $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$ là hai vectơ ngược hướng nên $b\overrightarrow{DB}=-c\overrightarrow{DC}$ hay $b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

• Khai thác kết quả bài toán 1 này ta thu được rất nhiều kết quả thú vị. Từ kết quả trên ta có:

$$b\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+c\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$$

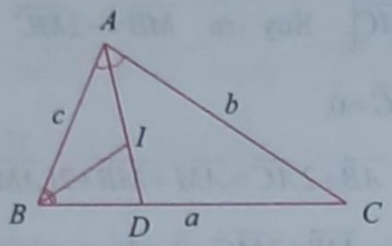
$$\Leftrightarrow(b+c)\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}.$$

Ta đi đến bài toán

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC, kẻ phân giác trong AD. Đặt $AB=c, AC=b$. Chứng minh*

$$\overrightarrow{AD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}.$$

- Ta gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Đặt $BC=a, AC=b, AB=c$. Từ kết quả bài toán 1 ta có: $b\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}\right)+c\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow(b+c)\overrightarrow{ID}=b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\ (1).$$

Từ kết quả $\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}$ suy ra: $DB=\frac{ac}{b+c}$.

Xét tam giác ABD có BI là đường phân giác.

Áp dụng kết quả bài toán 1 ta có:

$$\frac{ac}{b+c}\overrightarrow{IA}+c\overrightarrow{ID}=\vec{0}\ \Leftrightarrow(b+c)\overrightarrow{ID}=-a\overrightarrow{IA}\ (2).$$

Từ (1) và (2) ta đi đến bài toán

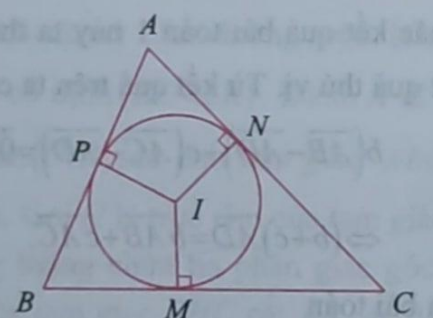
Bài toán 3. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Đặt $BC=a, AC=b, AB=c$. Chứng minh*

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

Bài toán 4. *Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng*

$$a\overrightarrow{IM}+b\overrightarrow{IN}+c\overrightarrow{IP}=\vec{0}.$$

Lời giải.



Theo tích chất tiếp tuyến kẻ từ một điểm nằm ngoài đường tròn ta có:

$$\begin{cases}AP=AN=p-a\\BM=BP=p-b\\CN=CM=p-c\end{cases}$$

(p là nửa chu vi tam giác ABC).

Ta có: $\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{IB}+\frac{BM}{BC}\overrightarrow{BC}$

$$=\overrightarrow{IB}+\frac{p-b}{a}\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}\right)$$

$$=\frac{p-c}{a}.\overrightarrow{IB}+\frac{p-b}{a}.\overrightarrow{IC}$$

hay $a\overrightarrow{IM}=(p-c)\overrightarrow{IB}+(p-b)\overrightarrow{IC}$ (3).

Tương tự ta có:

$$\begin{cases}b\overrightarrow{IN}=(p-a)\overrightarrow{IC}+(p-c)\overrightarrow{IA} & (4)\\c\overrightarrow{IP}=(p-b)\overrightarrow{IA}+(p-a)\overrightarrow{IB} & (5)\end{cases}.$$

Cộng theo vế các đẳng thức (3), (4), (5) ta được:

$$a\overrightarrow{IM}+b\overrightarrow{IN}+c\overrightarrow{IP}=a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

(kết quả bài toán 3)

Ta thu được điều phải chứng minh.

- Ta áp dụng tính chất $AD^2=\overrightarrow{AD}^2$ và $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=b^2+c^2-a^2$. Từ kết quả bài toán 2 ta có:

$$AD^2=\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$=\frac{b^2}{(b+c)^2}AB^2+\frac{c^2}{(b+c)^2}AC^2+\frac{2bc}{(b+c)^2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$$

$$=\frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c)^2-a^2\right]$$

$$=\frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a)$$

$$=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a).$$

Ta có bài toán sau:

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC, kẻ phân giác trong AD. Chứng minh* $AD^2=\dfrac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$.

Chú ý: Nếu kí hiệu l_a,l_b,l_c lần lượt là độ dài các đường phân giác trong các góc A,B,C của tam giác ABC. Ta thu được công thức tính độ dài đường phân giác:

$$l_a^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a);$$

$$l_b^2=\frac{4ac}{(a+c)^2}p(p-b);$$

$$l_c^2=\frac{4ab}{(a+b)^2}p(p-c).$$

• Liên hệ với định lí côsin ta có:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}.$$

Ta thu được bài toán:

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2};\ l_b=\frac{2ca}{c+a}\cos\frac{B}{2};\ l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}.$$

Đây là công thức thứ hai để tính độ dài đường phân giác.

• Đặc biệt hóa kết quả bài toán 6, ta thu được nhiều kết quả thú vị. Chẳng hạn khi góc $\widehat{A}=120^0$ ta có $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $l_a=\dfrac{bc}{b+c}$, ta đi đến bài toán.

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng góc* $\widehat{A}=120^0\Leftrightarrow\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{l_a}$.

Khi góc $\widehat{A}=60^0$ ta có ngay bài toán

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng góc* $\widehat{A}=60^0\Leftrightarrow\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{l_a}$.

• Lại để ý $\cos\dfrac{A}{2}<1\Rightarrow l_a<\dfrac{2bc}{b+c}\Rightarrow\dfrac{1}{l_a}>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

Lập luận tương tự ta có:

$$\frac{1}{l_b}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right);\ \frac{1}{l_c}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Ta đi đến bài toán:

Bài toán 9. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:* $\dfrac{1}{l_a}+\dfrac{1}{l_b}+\dfrac{1}{l_c}>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

• Ta có :

$$\frac{1}{l_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{\cos\dfrac{A}{2}};\ \frac{1}{l_b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{\cos\dfrac{B}{2}}.$$

Nếu $a>b$ thì $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)\\ \dfrac{1}{\cos\dfrac{A}{2}}>\dfrac{1}{\cos\dfrac{B}{2}}\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{1}{l_a}>\frac{1}{l_b}\Rightarrow l_a<l_b$$

Tương tự: Nếu $a<b\Rightarrow l_a>l_b$.

Nếu $a=b$ ta thấy ngay $l_a=l_b$.

Ta có ngay bài toán:

Bài toán 10. *Tam giác ABC là tam giác gì nếu* $l_a=l_b$?

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Chứng minh rằng*

$$aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc.$$

Lời giải. Từ kết quả bài toán 3 ta có

$$\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2+2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+2ca\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}=0$$

$$\Leftrightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2+ab\left(IA^2+IB^2-AB^2\right)+bc\left(IB^2+IC^2-BC^2\right)+ca\left(IC^2+IA^2-CA^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a(a+b+c)IA^2+b(a+b+c)IB^2+c(a+b+c)IC^2=abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc.$$

Ta có điều phải chứng minh.

• Từ các kết quả $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$; $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$, với mọi điểm M ta có:

$aMA^2+bMB^2+cMC^2$

$=a\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+b\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+c\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=aIA^2+bIB^2+cIC^2+(a+b+c)MI^2$

$+2\overrightarrow{MI}\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\right)$

$=abc+(a+b+c)MI^2$. Ta thu được bài toán:

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có: $aMA^2+bMB^2+cMC^2=abc+(a+b+c)MI^2$.*

Để ý rằng $MI^2\geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv I$. Ta thu được bài toán:

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có:*

$$aMA^2+bMB^2+cMC^2\geq abc.$$

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Chứng minh rằng*

$$(IA+IB+IC)^2\leq ab+bc+ca.$$

Lời giải. Từ kết quả bài toán 11 ta thu được:

$$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$1=\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}\geq\frac{(IA+IB+IC)^2}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow(IA+IB+IC)^2\leq ab+bc+ca.$$

Ta thu được điều phải chứng minh.

Bài toán 15. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Chứng minh rằng*

$$\frac{IA.IB.IC}{aIA^2+bIB^2+cIC^2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Lời giải. Ta có $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$. Bài toán quy về chứng minh $\dfrac{IA.IB.IC}{abc}\leq\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$1=\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}\geq 3\sqrt[3]{\frac{IA^2.IB^2.IC^2}{a^2b^2c^2}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{IA.IB.IC}{abc}\right)^2\leq\frac{1}{27}\Leftrightarrow\frac{IA.IB.IC}{abc}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Ta thu được điều phải chứng minh.

Từ công thức tính độ dài đường phân giác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(b+c)^2\geq 4bc\Rightarrow l_a^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)\leq p(p-a).$$

Tương tự ta có: $l_b^2\leq p(p-b)$; $l_c^2\leq p(p-c)$..

Sử dụng kết quả này ta giải ngay các bài toán sau:

Bài toán 16. *Tam giác ABC là tam giác gì nếu $l_a^2=p(p-a)$?*

Bài toán 17. *Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta có:*

a) $l_a^2+l_b^2+l_c^2\leq p^2$;

b) $l_al_bl_c\leq pS$.

• Từ kết quả bài toán 17, kết hợp bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ ta có ngay bài toán:

Bài toán 18. *Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta có: $l_al_b+l_bl_c+l_cl_a\leq p^2$.*

Sử dụng kết quả bài toán 18 và áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta giải ngay được bài toán sau:

Bài toán 19. *Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta có: $\dfrac{a^2}{l_bl_c}+\dfrac{b^2}{l_cl_a}+\dfrac{c^2}{l_al_b}\geq 4$.*

Xem lại "*Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ năm 2023*" tôi thấy kết quả vừa thu được ở bài toán 19 chính là bài T8/553.

• Liên hệ công thức tính diện tích tam giác $S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$, với r_a,r_b,r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A,B,C ta có :

$$l_a r_a \le \sqrt{p(p-a)}.r_a = \sqrt{p(p-a)}\frac{S}{p-a}$$
$$= \sqrt{p(p-a)}\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$$
$$= p\sqrt{(p-b)(p-c)}$$
$$\le p.\frac{p-b+p-c}{2} = p.\frac{a}{2}.$$

Lập luận tương tự ta có :

$$l_b r_b \le p.\frac{b}{2};\ l_c r_c \le p.\frac{c}{2}.$$

Từ các kết quả này ta đi đến bài toán:

Bài toán 20. *Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta có:* $l_a r_a + l_b r_b + l_c r_c \le p^2$.

Bài toán 21. *Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta có:* $\frac{a^2}{l_a r_a} + \frac{b^2}{l_b r_b} + \frac{c^2}{l_c r_c} \ge 4$.

• Khi tam giác ABC đều thì $p = 3(p-a)$ nên từ kết quả trên ta biến đổi như sau:

$$l_a^2 \le p(p-a)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3} l_a \le \sqrt{p.3(p-a)} \le \frac{p+3(p-a)}{2} = b+c-\frac{a}{2}$$

hay $\frac{a}{2} + \sqrt{3} l_a \le b+c$.

Lập luận tương tự ta có:

$$\frac{b}{2} + \sqrt{3} l_b \le a+c, \frac{c}{2} + \sqrt{3} l_c \le a+b.$$

Sử dụng kết quả này ta giải được các bài toán sau:

Bài toán 22. *Tam giác ABC là tam giác gì nếu* $\frac{a}{2} + \sqrt{3} l_a = b+c$?

Bài toán 23. *Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta có:* $l_a + l_b + l_c \le \sqrt{3} p$.

***Chú ý*:** Bài toán 23 có thể giải bằng cách sử dụng kết quả bài toán 17 và bất đẳng thức Bunyakovsky.

• Từ kết quả các bài toán trên bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta giải ngay được bài toán

Bài toán 24. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:*

a) $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \ge \frac{3\sqrt{3}}{p}$;.

b) $\frac{1}{l_a^2} + \frac{1}{l_b^2} + \frac{1}{l_c^2} \ge \frac{9}{p^2}$.

• Bây giờ ta liên hệ với công thức tính độ dài đường trung tuyến và áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \ge \frac{(b+c)^2-a^2}{4} = p(p-a) \ge l_a^2$$

hay $l_a \le m_a$.

Tương tự ta có: $l_b \le m_b$; $l_c \le m_c$. Sử dụng kết quả này ta giải được bài toán sau:

Bài toán 25. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:*

a) $l_a + l_b + l_c \le m_a + m_b + m_c$;

b) $l_a l_b l_c \le m_a m_b m_c$;

c) $m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \le \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Bài toán 26. *Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta có:* $\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$.

Lời giải. Ta có: $l_a l_b l_c \le pS$;

$$h_a h_b h_c = \frac{2S}{a}.\frac{2S}{b}.\frac{2S}{c} = \frac{8S^3}{abc} = \frac{2S^2}{R}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{h_a h_b h_c}{l_a l_b l_c}}$$
$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{2S^2}{R}.\frac{1}{pS}}$$
$$= 3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

• Ta sử dụng các kết quả $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$;

$ab+bc+ca\le 9R^2$; $a+b+c\le 3\sqrt{3}R$; $abc\le 3\sqrt{3}R^3$

(Xem bài viết: "*Từ một bài toán trong sách bài tập toán 10*" của cùng tác giả trên báo TH&TT số 566 tháng 8 năm 2024) và các kết quả tìm được ở trên ta sẽ giải được các bài toán sau:

Bài toán 27. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Chứng minh rằng*:

a) $IA+IB+IC\le 3R$;

b) $IA.IB.IC\le R^3$;

c) $\frac{1}{IA}+\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}\ge\frac{3}{R}$;

d) $\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}+\frac{1}{IC^2}\ge\frac{3}{R^2}$.

Bài toán 28. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có*:

a) $l_a+l_b+l_c\le\frac{9R}{2}$;

b) $l_a^2+l_b^2+l_c^2\le\frac{27R^2}{4}$;

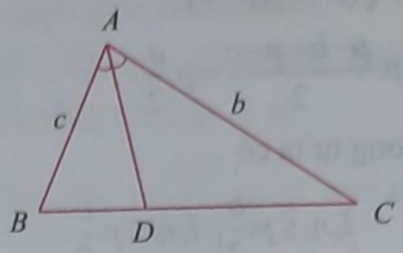
c) $l_al_b+l_bl_c+l_cl_a\le\frac{27R^2}{4}$;

d) $\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\ge\frac{2}{R}$;

e) $\frac{1}{l_a^2}+\frac{1}{l_b^2}+\frac{1}{l_c^2}\ge\frac{4}{3R^2}$;

f) $m_al_a+m_bl_b+m_cl_c\le\frac{27R^2}{4}$.

• Nếu tiếp khai thác ta sẽ thu được nhiều kết quả thú vị nữa, sử dụng kết quả trên vào giải các bài toán trong mặt phẳng tọa độ Oxy liên quan đến tam giác: như tìm tọa độ chân đường phân giác trong, tính độ dài đường phân giác, tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác cũng khá hay. Bạn đọc tiếp tục nhé. Kết thúc bài viết chúng tôi thấy một số vấn đề sau mà các bạn tiếp tục nghiên cứu: Như các bạn đã biết: *Cho tam giác ABC, kẻ phân giác trong AD. Đặt* $AB=c$, $AC=b$. *Khi đó*:



$$\overrightarrow{AD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}.$$

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{DB}{BC}=\frac{c}{b+c}\\ \frac{DC}{BC}=\frac{b}{b+c}\end{cases}.$$

Như vậy kết quả trên có thể viết lại là:

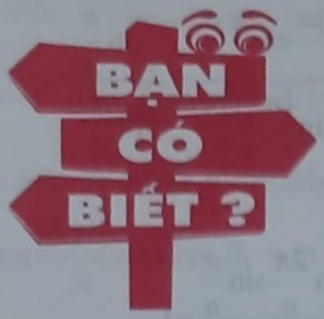
$$\overrightarrow{AD}=\frac{DC}{BC}\overrightarrow{AB}+\frac{DB}{BC}\overrightarrow{AC}.$$

Câu hỏi đặt ra là khi thay D *bởi điểm* M *bất kì nằm trên cạnh* BC *thì kết quả* $\overrightarrow{AM}=\frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$ *có đúng nữa không?*

Ít nhất nó đúng với trường hợp $M\equiv D$ rồi. Lấy thêm một trường hợp nữa khi M là trung điểm của cạnh BC ta thấy ngay tính chất quen thuộc $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Các bạn hãy giải bài toán tổng quát sau và khai thác kết quả bài toán này xem ta thu được những kết quả thú vị nào nhé!

Bài toán. *Cho tam giác ABC, M là một điểm trên cạnh BC. Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{AM}=\frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}.$$



MỞ RỘNG BẤT ĐẲNG THỨC Erdos-Mordell

HOÀNG ĐỨC TÂN
(Hà Nội)

Năm 1935, *Paul Erdos* đề xuất bài toán sau trong Tạp chí toán học Mỹ hàng tháng (*The Americal Mathematical Monthly*):

Từ một điểm O bên trong một tam giác ABC cho trước, các đường vuông góc OP, OQ, OR được hạ xuống các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng

$$OA+OB+OC \geq 2(OP+OQ+OR).$$

Một lời giải lượng giác của *L. J. Mordell* và *D. F. Barrow* đã được công bố vào năm 1937. Bất đẳng thức đó được gọi là *Bất đẳng thức Erdös-Mordell*. Cho tới nay đã có nhiều chứng minh khác đã được công bố. Báo TH&TT cũng có nhiều bài giới thiệu về các chứng minh này.

Trong một bài báo công bố năm 1957 ("*Bất đẳng thức DK Kazarinoff đối với tứ diện*", Toán học Michigan. J., 4, 1957, trang 99-104, *Nicholas D. Kazarinoff* đã chứng minh một sự tương tự của bất đẳng thức Erdös-Mordell cho tứ diện S: *Với P là một điểm không nằm bên ngoài S. Ký hiệu khoảng cách từ P đến các đỉnh và tới các mặt của tứ diện lần lượt là R_i và r_i $(i=1,2,3,4)$. Sự tương tự sau đây của bất đẳng thức Erdös-Mordell là đúng cho bất kỳ khối tứ diện S nào có tâm mặt cầu ngoại tiếp không phải là điểm nằm ở bên ngoài S:* $\dfrac{\sum_{i=1}^{4} R_i}{\sum_{i=1}^{4} r_i} \geq 2\sqrt{2}$ *và $2\sqrt{2}$ là giới hạn dưới lớn nhất có thể.*

Năm 1953 *L.Fejes Tóth* đã nêu giả thuyết sau (một mở rộng bất đẳng thức Erdös-Mordell đối với n −giác lồi):

Giả thuyết L.Fejes Tóth (1953) được phát biểu như sau:

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các đỉnh của một n - giác lồi và P và điểm nằm bên trong nó. Đặt $R_k = PA_k$ và gọi r_k là khoảng cách từ P đến cạnh $A_k A_{k+1}$ thì ta có bất đẳng thức sau:

$$\cos\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k \geq \sum_{k=1}^{n} r_k \quad (T).$$

Năm 1961, *Lenhard* đã chứng minh được kết quả tổng quát hơn.

Định lý 1. *Đối với mỗi $x_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n, x_{n+1} = x_1$ và $\alpha_k \in \mathbb{R}$ với $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = (2r+1)\pi$, $r \in \mathbb{N}$ thì bất đẳng thức Wolstenholme - Lenhard sau đây luôn đúng:*

$$\cos\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1}\cos\alpha_k \quad (1).$$

Tuy nhiên chứng minh của *Lenhard* là khá phức tạp, và từ kết quả này ông đã suy ra một bất đẳng thức mạnh hơn giả thuyết L. Fejes Tóth sau đây:

$$\cos\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k \geq \sum_{k=1}^{n} w_k \quad (T-L),$$

trong đó w_k là đoạn thẳng phân giác của góc $\widehat{A_k P A_{k+1}} = 2\alpha_k$ từ P tới điểm giao cắt của nó với cạnh $A_k A_{k+1}$.

Năm 2009 *Marian Dinca* đưa ra một cách chứng minh độc đáo cho định lý 1 bằng cách sử dụng các đồng nhất thức rất hay sau.

Định lý 2. *Đối với mỗi $a_k \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có đồng nhất thức sau:*

$$\cos\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{k+1}+a_1a_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{2.\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}\left(\frac{(k+1)\pi}{n}a_k+\sin\frac{k\pi}{n}a_{k+1}+\sin\frac{\pi}{n}a_n\right)^2.$$

Đồng nhất thức trên nhận được bằng cách so sánh các hệ số của a_k^2 và a_ka_{k+1}. Chẳng hạn, hệ số của a_k^2 là:

$$\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{2.\sin\frac{k\pi}{n}}+\frac{\sin\frac{(k-1)\pi}{n}}{2.\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{2.\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{2.\sin\frac{k\pi}{n}}=\cos\frac{\pi}{n}$$

đối với $k=2,3,..n-2$, còn hệ số của a_1^2 là:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2.\sin\frac{\pi}{n}}=\cos\frac{\pi}{n},$$

hệ số của a_{n-1}^2 là

$$\frac{\sin\frac{(n-2)\pi}{n}}{2.\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2.\sin\frac{\pi}{n}}=\cos\frac{\pi}{n},$$

và hệ số của a_n^2 là $\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{2.\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2}.\left(\cot\frac{k\pi}{n}-\cot\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2}.\left(\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\cos\frac{\pi}{n}.$$

Hệ số của a_ka_{k+1} là

$$\frac{-2.\sin\frac{(k+1)\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}}{2.\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}=-1$$

đối với $k=1,2,...,n-2$ và hệ số của $a_{n-1}a_n$ là

$$\frac{-2.\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{2.\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}=-1.$$

Hệ số của a_1a_n là

$$\frac{2\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}}=1,$$

và hệ số của a_ka_n đối với $k=2,3,..,n-2$ là

$$\sum_{k=1}^{n-2}\frac{2.\sin\frac{(k+1)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{2.\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}-\sum_{k=1}^{n-3}\frac{2.\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{2.\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}-\sum_{k=1}^{n-3}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}=0.$$

Tương tự như vậy chúng ta có thể chứng minh đồng nhất thức sau đây đối với các biến b_k

$$\cos\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k^2-\sum_{k=1}^{n-1}b_kb_{k+1}+b_1b_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{2.\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}\left(\frac{(k+1)\pi}{n}b_k+\sin\frac{k\pi}{n}b_{k+1}+\sin\frac{\pi}{n}b_n\right)^2.$$

Để chứng minh định lý 1, ta đặt $a_k=R_k\cos\beta_k$ và $b_k=R_k\sin\beta_k$ trong đó $R_k\in R$ và $\beta_k\in R$, bằng cách cộng hai đồng nhất thức ở trên ta có:

$$\cos\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}R_k^2-\sum_{k=1}^{n-1}R_kR_{k+1}\left[\cos\beta_k\cos\beta_{k+1}+\sin\beta_k\sin\beta_{k+1}\right]$$

$$+R_1R_n\left[\cos\beta_1\cos\beta_n+\sin\beta_1\sin\beta_n\right]\geq 0$$

hay là

$$\cos\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}R_k^2-\sum_{k=1}^{n-1}R_kR_{k+1}\cos(\beta_k-\beta_{k+1})$$

$$+R_1R_n\cos(\beta_1-\beta_n)\geq 0 \quad (2).$$

Đặt $\beta_k-\beta_{k+1}=\alpha_k$ đối với $k=1,2,\ldots,n$ và $\beta_1-\beta_n=(2r+1)\pi-\alpha_n$, $r\in\mathbb{N}$, thì ta nhận được bất

đẳng thức Wolstenholme-Lenhard đối với $R_k \in \mathbb{R}$ và $\alpha_k \in \mathbb{R}$ với $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = (2r+1)\pi$ (đpcm).

Nhận xét. *Ta nhận được đẳng thức trong (1) đối với*

$$\sin\frac{(k+1)\pi}{n} R_k \cos\beta_k - \sin\frac{k\pi}{n} R_{k+1}\cos\beta_{k+1} + \sin\frac{\pi}{n} R_n \cos\beta_n = 0$$

và

$$\sin\frac{(k+1)\pi}{n} R_k \sin\beta_k - \sin\frac{k\pi}{n} R_{k+1}\sin\beta_{k+1} + \sin\frac{\pi}{n} R_n \sin\beta_n = 0.$$

Chứng minh (T) *và* (T - L).

Để chứng minh các bất đẳng thức (T) và (T - L), thì trong (1) ta đặt $x_k = \sqrt{R_k}$, vì

$$\sqrt{R_k} \times \sqrt{R_{k+1}} \times \cos\alpha_k \geq \frac{2R_k R_{k+1}}{R_k + R_{k+1}} \times \cos\alpha_k = w_k \geq r_k,$$

nên ta có:

$$\cos\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k \geq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{R_k} \times \sqrt{R_{k+1}} \times \cos\alpha_k \geq \sum_{k=1}^{n} w_k \geq \sum_{k=1}^{n} r_k.$$

Đây là đpcm.

Marian Dinca đã khái quát hóa các kết quả trên như sau.

Định lý 3. *Nếu* $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ *và* $y = (y_1, y_2, ..., y_N)$ *là các vectơ trong* R^N, *có tích vô hướng* $\langle x, y\rangle = \|x\|.\|y\|\cos\theta = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$, *trong đó* θ *là góc giữa các vectơ* x *và* y, *trong đó* $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}$ *là chuẩn tương ứng. Khi đó, bất đẳng thức Erdos-Mordell tổng quát sau luôn đúng:*

$$\cos\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\|X_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^{N}\langle X_k, X_{k+1}\rangle = \sum_{k=1}^{n}\|X_k\|.\|X_{k+1}\|\cos\theta_k$$

trong đó: $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{Nk}), k = 1, 2, ..., n$ *và* $\sum_{k=1}^{n}\theta_k = \pi$.

Trong trường hợp P là một điểm nằm bên ngoài $n-giác$, chúng ta có thể nhận được *bất đẳng thức Erdős-Mordell đối với đa giác lồi và điểm* P *nằm bên ngoài nó*

Định lý 4. *Gọi* $A_1A_2...A_n$ *là một đa giác lồi và* P *là một điểm nằm bên ngoài đa giác lồi và* $\widehat{A_kPA_{k+1}} = \alpha_k, k = 1, ..., n$. *Đặt* $\max\left(\widehat{A_iPA_j}\right) = \alpha$, $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$ *và* $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 2\alpha < 2\pi$ *và* $r_k \leq w_k \leq \sqrt{R_kR_{k+1}}\cos\frac{\alpha_k}{2}$. *Khi đó:*

$$\cos\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n}R_k - \sum_{i=1}^{n}r_k \geq \cos\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}R_k - \sum_{i=1}^{n}r_k \geq \cos\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}R_k - \sum_{i=1}^{n}w_k \geq \cos\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}R_k - \sum_{i=1}^{n}\sqrt{R_kR_{k+1}}\cos\frac{\alpha_k}{2}.$$

Định lý 5. *Gọi* $A_1, A_2, ..., A_p$ *là p điểm tùy ý trong không gian Euclide N chiều* $\mathbb{R}^N$ *và M một điểm tùy ý trong cùng không gian đó và,* $\widehat{A_kMA_{k+1}} = \alpha_k, k = 1, ..., p$. *Đặt* $\max\left(\widehat{A_iMA_j}\right) = \alpha$, $i \neq j \in \{1, 2, ..., p\}$ *và* $\sum_{k=1}^{p}\alpha_k = 2\alpha < 2\pi$, w_k *là đoạn phân giác của góc* $\widehat{A_kMA_{k+1}}$. *Coi rằng* $A_{p+1} = A_1$. *Khi đó ta có bất đẳng thức sau đây:*

$$\cos\frac{\alpha}{p}\sum_{k=1}^{p}R_k - \sum_{k=1}^{p}r_k \geq \cos\frac{\pi}{p}\sum_{k=1}^{p}R_k - \sum_{k=1}^{p}r_k \geq \cos\frac{\pi}{p}\sum_{k=1}^{p}R_k - \sum_{k=1}^{p}w_k \geq \cos\frac{\pi}{p}\sum_{k=1}^{p}R_k - \sum_{k=1}^{p}\sqrt{R_kR_{k+1}}\cos\frac{\alpha_k}{2} \geq 0$$

trong đó R_k *là định chuẩn của* A_kM *và* r_k *là khoảng cách từ M đến đoạn* $A_kA_{k+1}, k \in \{1, 2, ..., p\}$ *và* w_k *là độ dài phân giác của góc* $\widehat{A_kMA_{k+1}}$.

Cho đến nay Bất đẳng thức Erdős-Mordell vẫn luôn là chủ đề được các nhà toán học và những người yêu toán trên thế giới quan tâm.



Bài T1/577 (Lớp 6). Tìm số tự nhiên x nhỏ nhất biết x chia cho 7 dư 1, $2x$ chia cho 11 dư 3, $3x$ chia cho 13 dư 4.

LÊ MINH HÒA
(GV THCS Đông Cửu, Thanh Sơn, Phú Thọ)

Bài T2/577 (Lớp 7). Tìm số nguyên dương n sao cho $2n + 9$ là số nguyên tố và $\dfrac{2n+1}{3n+1}$ là bình phương của một số hữu tỷ.

HUỲNH THANH TÂM
(Bưu điện thị xã An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/577. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n^2}$ là một số nguyên.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/577. Cho tam giác nhọn ABC $(AB > AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi M là giao điểm của BH và đường tròn (O) (M khác B), N là giao điểm của MD và đường tròn (O) (N khác M), I là giao điểm của AN và HF, K là giao điểm của DI và AB. Chứng minh rằng HK song song với DF.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/577. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{z}{x^2}$.

NGUYỄN TÔNG HÙNG
(GV THPT Thành Sen, xã Thạch Trung, TP. Hà Tĩnh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/577. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x}-3\sqrt{y}+\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}=0\\(x+1)\left(-y+4\sqrt[4]{xy^3}\right)=x^3+x^2+4\end{cases}.$$

HOÀNG SỸ LUYỆN
(Học viên cao học Toán K19, Đại học Vinh)

Bài T7/577. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d ta luôn có:

$$\frac{abc+bcd+cda+dab}{a+b+c+d}$$
$$\le\frac{1}{4}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)}$$
$$\le\frac{(a+b+c+d)^2}{16}.$$

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T8/577. Ký hiệu a, b, c, là độ dài các cạnh và S là diện tích tam giác ABC. Hãy chứng minh rằng: $a^2\cos\dfrac{A}{2}+b^2\cos\dfrac{B}{2}+c^2\cos\dfrac{C}{2}\ge 6S$.

VŨ TIẾN
(SV 56 - CĐB12, Cao đẳng Giao thông vận tải, Hà Nội)

Bài T9/577. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $11x^2-3xy+y^2=9$, đồng thời $x^2-3xy+y^2$ là một số nguyên tố.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/577. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn

$$\begin{cases}x_1=5\\x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{8}{x_n},\forall n\ge 1\end{cases}.$$

Với mỗi số nguyên dương n, ta đặt:

$$a_n=\frac{x_n+\sqrt{x_n^2-16}}{2},\ b_n=\frac{x_n-\sqrt{x_n^2-16}}{2}.$$

1) Chứng minh dãy số (a_n) là dãy số giảm và dãy số (b_n) là dãy số tăng.

2) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T11/577. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và có đạo hàm trên khoảng $(0, 1)$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) > 0$. Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (0,1)$ sao cho

$$f'(c)+2cf(c)<2f(1).$$

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T12/577. Cho tứ diện $OXYZ$ và số $k > 0$. Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn YZ, ZX, XY. Các điểm A, B, C theo thứ tự chạy trên các đoạn OX, OY, OZ sao cho:

$$V_{AXNP}+V_{BYPM}+V_{CZMN}=k.$$

Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ chạy trên một mặt phẳng cố định.

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

Bài L1/577. Có hai bình, mỗi bình đựng một chất lỏng nào đó. Một học sinh lần lượt múc từng ca chất lỏng ở bình 2 trút vào bình 1 và ghi lại nhiệt độ khi cân bằng ở bình 1 sau mỗi lần trút : $20^\circ C$, $35^\circ C$, rồi bỏ sót mất một lần không ghi, rồi $50^\circ C$. Hãy tính nhiệt độ khi có cân bằng nhiệt ở lần bị bỏ sót không ghi, và nhiệt độ của mỗi ca chất lỏng lấy từ bình 2 trút vào. Coi nhiệt độ và khối lượng của mỗi ca chất lỏng lấy từ bình 2 đều như nhau. Bỏ qua sự trao đổi nhiệt với môi trường.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/577. Hạt prôtôn có động năng $W_{đp} = 2$ MeV bắn vào hạt nhân ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ đang đứng yên, sau phản ứng thu được hai hạt α có cùng động năng $W_{đ\alpha} = 8{,}2$ MeV. Cho khối lượng hạt nhân $m_p = 1{,}007$ amu ; $m_{Li} = 7{,}014$ amu ; $m_{He} = 4{,}002$ amu. Tính góc hợp bởi hướng chuyển động của hai hạt α.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/57 (Grade 6). Find the smallest natural number x such that: when x is divided by 7, the remainder is 1; when $2x$ is divided by 11, the remainder is 3; when $3x$ is divided by 13, the remainder is 4.

Problem T2/577 (Grade 7). Find the positive integer n such that $2n + 9$ is a prime number and $\dfrac{2n+1}{3n+1}$ is the square of a rational number.

Problem T3/577. Find all pairs of positive integers (m, n) such that $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n^2}$ is an integer.

Problem T4/577. Let ABC be an acute triangle $(AB > AC)$ inscribed in a circle (O). The altitudes AD, BE, and CF of triangle ABC intersect at point H. Let M be the second point of intersection (other than B) of line BH with the circle (O), and let N be the second point of intersection (other than M) of line MD with the circle (O). Point I is the intersection of lines AN and HF, and point K is the intersection of lines DI and AB. Prove that line HK is parallel to line DF.

Problem T5/577. Let x, y, z be positive real numbers satisfying the condition $x + y + z = xyz$. Find the minimum value of the expression:

$$S=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/577. Solve the system of equations:

$$\begin{cases}\sqrt{x}-3\sqrt{y}+\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}=0\\(x+1)\left(-y+4\sqrt[4]{xy^3}\right)=x^3+x^2+4\end{cases}.$$

Problem T7/577. Prove that for all positive numbers a, b, c, d, the following inequality always holds:

(Xem tiếp trang 38)



Bài T1/573. *Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $x^2y + x + y$ chia hết cho $xy^2 + y + 7$.*

Lời giải. Từ giả thiết $xy^2 + y + 7$ là ước số của $x^2y + x + y$ và y là số nguyên dương suy ra $xy^2 + y + 7$ là ước số của $y(x^2y + x + y) = x^2y^2 + xy + y^2 = x(xy^2 + y + 7) + y^2 - 7x$, do đó $xy^2 + y + 7$ là ước số của $y^2 - 7x$ (*). Xét ba trường hợp sau với chú ý rằng $xy^2 + y + 7 > 0$.

• Nếu $y^2 - 7x = 0$ hay là $y^2 = 7x$ thì số nguyên tố 7 là ước số của y^2 nên 7 là ước số của y, hay là $y = 7t$ với t là số nguyên dương, lúc đó $7x = 7^2t^2$ nên $x = 7t^2$.

• Nếu $y^2 - 7x > 0$ thì từ (*) có $y^2 - 7x \geq xy^2 + y + 7$, hay là $y^2(x - 1) + y + 7x + 7 \leq 0$. Do $x \geq 1$ nên bất đẳng thức này không xảy ra.

• Nếu $y^2 - 7x < 0$ thì từ (*) có $7x - y^2$ chia hết cho $xy^2 + y + 7$ (**). Do $7x - y^2 > 0$ nên có $7x - y^2 \geq xy^2 + y + 7$, hay là $x(y^2 - 7) + y^2 + y + 7 \leq 0$.

Với $y \geq 3$ thì $y^2 > 7$ nên bất đẳng thức này không xảy ra, ta chỉ xét $y \leq 2$. Với $y = 1$ từ (**) có $7x - 1$ chia hết cho $x + 8$, hay là $7(x + 8) - 57$ chia hết cho $x + 8$, suy ra $57 = 3.19$ chia hết cho $x + 8$, mà $x + 8 \geq 9$, dẫn đến $x + 8$ hoặc bằng 19 hoặc bằng 57, tức là x hoặc bằng 11 hoặc bằng 49. Với $y = 2$ từ (**) có $7x - 4$ chia hết cho $4x + 9$, hay là $4(7x - 4) = 7(4x + 9) - 79$ chia hết cho $4x + 9$, suy ra số nguyên tố 79 chia hết cho $4x + 9$, dẫn đến $4x + 9 = 79$ hay là $4x = 70$, không tồn tại số nguyên x như thế.

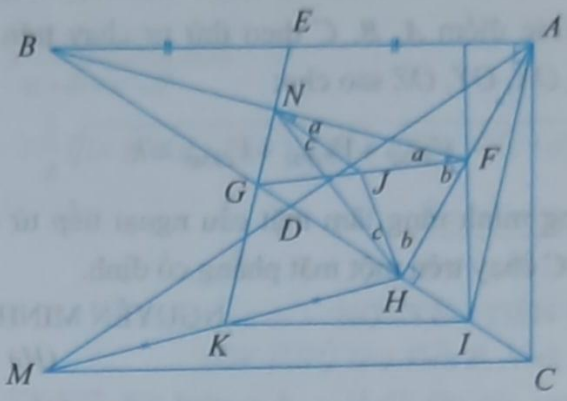
Thử lại, ta thấy bộ số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là (11; 1), (49; 1) và $(7t^2; 7t)$ với t là số nguyên dương.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**, giải được bài, cho đáp số đúng; còn nhiều bạn khác chỉ tìm được nghiệm $(7t^2; 7t)$.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/573. *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB, AH. Trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho $DM = DA$. Gọi K là trung điểm của MH, KE cắt BC, BF lần lượt tại G và N. Biết $\widehat{GHN} = 20^0$, tính góc $\widehat{NGF}$.*

Lời giải.



Ta dễ dàng chứng minh được bổ đề đường trung bình trong tam giác.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của HC và GF. Suy ra $FI // AC$, suy ra FI vuông góc với AB. Từ đó F là trực tâm của tam giác ABI hay BF vuông góc với AI.

Dễ thấy $MC = AB$, suy ra $KI = AE$; $KI = \dfrac{MC}{2}$, hay $KI // AE; KI = AE$. Từ đó suy ra $KE // AI$, nên ta cũng có KI vuông góc với IF, KE vuông góc với BF tại N. Dễ thấy $\Delta NJF, \Delta NJG, \Delta GJH, \Delta HJF$, cân tại J. Đặt $\widehat{JFN} = a; \widehat{JFH} = b; \widehat{JNH} = c$ thì ta có: $\widehat{NJG} = 2a; \widehat{GJH} = 2b$.

Từ đó và do ΔNJH cân tại J ta có:

$$2a + 2b + 2c = 180^0 \Leftrightarrow a + b + c = 90^0.$$

Suy ra: $\widehat{GHN} = a = 20° = \widehat{JFN}$

và $\widehat{NGF} = 90° - \widehat{JFN} = 90° - 20° = 70^0$.

Vậy $\widehat{NGF} = 70^0$.

Nhận xét. Bài này không phải là một bài toán khó, tuy nhiên không có bạn nào tham gia giải.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/573. *Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=2025$ và*

$$a^2+b^2+c^2=2023(a+b+c).$$

Tính giá trị của biểu thức:

$$K=a\sqrt{\frac{(2025+b^2)(2025+c^2)}{2025+a^2}}+b\sqrt{\frac{(2025+c^2)(2025+a^2)}{2025+b^2}}+c\sqrt{\frac{(2025+a^2)(2025+b^2)}{2025+c^2}}.$$

Lời giải. Từ điều kiện $a+b+c=2025$ và $a^2+b^2+c^2=2023(a+b+c)$ suy ra:

$$a^2+b^2+c^2=2023.2025;$$

$$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

$$=2025^2-2023.2025=2025.2$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca=2025.$$

Ta có:

$$2025+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c) \quad (1);$$

$$2025+b^2=ab+bc+ca+b^2=(a+b)(b+c) \quad (2);$$

$$2025+c^2=ab+bc+ca+c^2=(a+c)(b+c) \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) thay vào biểu thức K, ta được:

$$K=a\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)(b+c)}{(a+b)(a+c)}}+b\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)(a+c)(b+c)}{(a+b)(b+c)}}+c\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)(a+b)(b+c)}{(a+c)(b+c)}}$$

$$=a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)=2(ab+bc+ca)=2.2025.$$

Vậy $K=4050$.

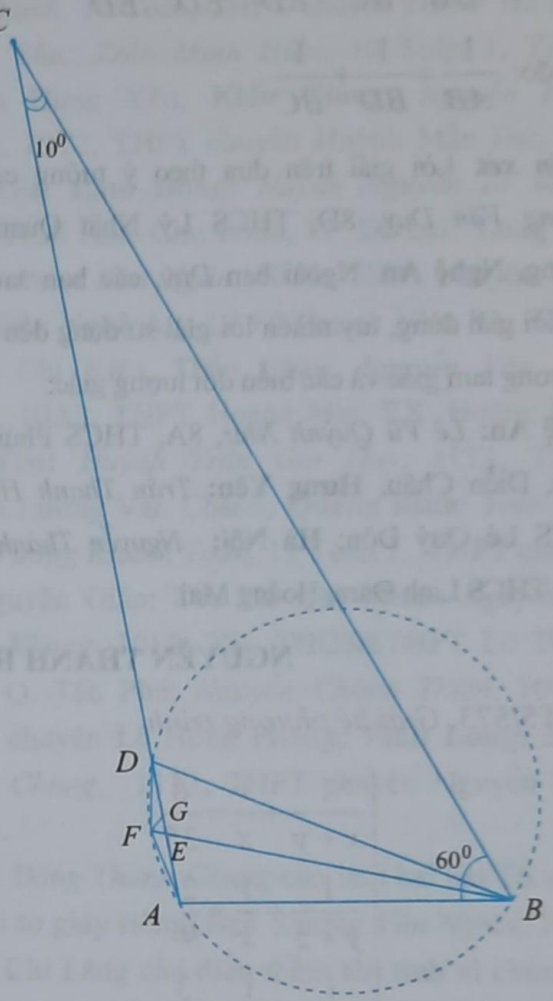
Nhận xét. Bài toán có nhiều bạn tham gia gửi bài và đều cho kết quả đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Trần Thanh Hà,* 8A, THCS Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Lại Đình Mạnh,* 8A1, THCS Linh Đàm, *Nguyễn Thanh Tùng,* 8A8, THCS Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Nghệ An:** *Trần Ngọc Quân*, 7B, *Hoàng Văn Duy, Võ Nhật Hoàng,* 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Vũ Quỳnh Như,* 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Lê Quang Anh,* 8, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Bảo Châu, Nguyễn Hữu Gia Long,* 7A6, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thanh Mai,* 8A, THCS Nguyễn Quang Bích; **Hà Nam:** *Đào Việt Trung*, 8B. THCS Thanh Sơn, TX. Kim Bảng; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng,* 2B, Trường quốc tế song ngữ 2,3 GIBS, TP. Graz.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/573. *Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=60^0$ và $\widehat{C}=10^0$. Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD}=20^0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{BA}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{BC}$.*

Lời giải.



Kẻ tia phân giác trong góc $\widehat{ABD}$ cắt AC tại E. Gọi F là giao điểm của BE với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{EA}{ED}=\frac{BA}{BD}$ (1).

Hơn nữa, do BF là phân giác góc $\widehat{ABD}$ nên

$$\overset{\frown}{FA}=\overset{\frown}{FD}\Rightarrow FA=FD \quad (2).$$

Ta có: $\widehat{FED}=\widehat{EBC}+\widehat{ECB}=60^0;$

$$\widehat{FDE}=\widehat{FBD}=10^\circ=\widehat{BCA}.$$

Từ đó suy ra $\Delta FED \backsim \Delta ABC$, nên

$$\frac{EF}{ED}=\frac{BA}{BC} \quad (3).$$

Lấy điểm G trên đoạn ED sao cho $EG = EF$.

Suy ra ΔEFG đều, nên $FG = FE$ (4).

Từ (2), (4) suy ra $\Delta EFA = \Delta GFD$ (c.g.c), nên $AE = GD$, hay $AG = ED$ (5).

Từ (1), (3), (5) suy ra:

$$\frac{AB}{DB}+\frac{AB}{BC}=\frac{EA}{ED}+\frac{EF}{ED}=\frac{AG}{ED}=1.$$

Do đó: $\frac{1}{AB}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{BC}$.

Nhận xét. Lời giải trên dựa theo ý tưởng của bạn *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**. Ngoài bạn *Duy*, các bạn sau cũng cho lời giải đúng, tuy nhiên lời giải sử dụng đến định lí sin trong tam giác và các biến đổi lượng giác:

Nghệ An: *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Hưng Yên:** *Trần Thanh Hà*, 8A, THCS Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/573. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z}=\frac{6}{35}\\ \frac{1}{y+z}+\frac{1}{x}=\frac{2}{9}\\ \frac{1}{z+x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{16}\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x, y, z, x+y, y+z, x+z$ khác 0.

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\frac{x+y+z}{yz+zx}=\frac{6}{35}\\ \frac{x+y+z}{xy+zx}=\frac{2}{9}\\ \frac{x+y+z}{xy+yz}=\frac{3}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{yz+zx}{x+y+z}=\frac{35}{6}\\ \frac{xy+zx}{x+y+z}=\frac{9}{2}\\ \frac{xy+yz}{x+y+z}=\frac{16}{3}\end{cases}.$$

Đặt $a=\frac{yz}{x+y+z}; b=\frac{zx}{x+y+z}; c=\frac{xy}{x+y+z}$.

Ta được: $\begin{cases}a+b=\frac{35}{6} & (1)\\ b+c=\frac{9}{2} & (2)\\ c+a=\frac{16}{3} & (3)\end{cases}$.

Trừ theo vế của (1) cho (2), có: $a-c=\frac{4}{3}$ (4).

Từ (3), (4) suy ra: $a=\frac{10}{3}; c=2$. Thay vào (2) ta được $b=\frac{5}{2}$. Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}\Rightarrow y=\frac{4x}{3}$;

$$\frac{c}{a}=\frac{x}{z}=\frac{3}{5}\Rightarrow z=\frac{5x}{3}.$$

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ, ta được:

$$\frac{1}{x+\frac{4x}{3}}+\frac{3}{5x}=\frac{6}{35}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{7x}+\frac{3}{5x}=\frac{6}{35}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{x}.\frac{12}{35}=\frac{6}{35}\Leftrightarrow x=6.$$

Từ đó có $y=\frac{4x}{3}=8$; $z=\frac{5x}{3}=10$ thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là:

$$(x,y,z)=(6;8;10).$$

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải là tìm được các kết quả $y=\frac{4x}{3}; z=\frac{5x}{3}$. Từ đó thế vào một phương trình trong đầu bài ta có $(x,y,z)=(6;8;10)$.

2) Có thể làm khác một chút như sau, ta có:

$$\begin{cases}\frac{yz+zx}{x+y+z}=\frac{35}{6}\\ \frac{xy+zx}{x+y+z}=\frac{9}{2}\\ \frac{xy+yz}{x+y+z}=\frac{16}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}yz+zx=\frac{35}{6}(x+y+z)\\ xy+zx=\frac{9}{2}(x+y+z)\\ xy+yz=\frac{16}{3}(x+y+z)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=2(x+y+z) \\ yz=\dfrac{10}{3}(x+y+z). \\ zx=\dfrac{5}{2}(x+y+z) \end{cases}$$

Chia theo vế của hai phương trình trong hệ, ta dễ dàng suy ra $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$ hay $y=\dfrac{4x}{3}; z=\dfrac{5x}{3}$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP Vĩnh Yên; **Nghệ An:** *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Hà Nội:** *Đỗ Hải Nam*, *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **TP. Hồ Chí Minh:** *Vũ Khắc Duy*, 10E2, *Nguyễn Thành Tài*, 10E10, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; **Phú Thọ:** *Chu Ngọc Ánh*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/573. *Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương $n \geq 2$ để 2025^n-2024^n chia hết cho n.*

Lời giải (của *Nguyễn Bá Trung Khang* và nhiều bạn khác).

Bổ đề (Nhị thức Newton): *Với mọi số tự nhiên n có* $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$,

trong đó C_n^k là tổ hợp chập $k\,(0\leq k\leq n)$ của n phần tử, với $k!=1\cdot 2\cdot ...k$, $0!=1!=1$ và

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}.$$

Áp dụng. Đặt $T=2025^n-2024^n$. Ta có:

$T=2025^n-2024^n=(2024+1)^n-2024^n$

$=C_n^0 2024^n+C_n^1 2024^{n-1}+....+C_n^{n-1}2024+C_n^n\cdot 1-2024^n$

$=C_n^1 2024^{n-1}+....+C_n^{n-1}2024+1=$

$=n\cdot 2024^{n-1}+\dfrac{n!}{2!(n-2)!}2024^{n-2}+...+\dfrac{n!}{(n-1)!}2024+1.$

Mà $n\cdot 2024^{n-1}+\dfrac{n!}{2!(n-2)!}2024^{n-2}+...+\dfrac{n!}{(n-1)!}2024$

$=n\left(2024^{n-1}+....+2024\right)$

chia hết cho n và 1 không chia hết cho n với mọi $n\geq 2$. Chứng tỏ T không chia hết cho n với mọi $n\geq 2$.

Nhận xét. 1) Một số bạn đã dùng định lí Fermat nhỏ hoặc định lí Bezout để giải. Tất cả các bài gửi đều có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Hưng Yên:** *Trần Minh Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kiên Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá. **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt. **Long An:** *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Trần Đức Phát*, *Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Bá Trung Khang*, 10E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Long:** *Đặng Thành Chung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

2) Bạn *Đặng Thành Chung* cần làm hai bài T6 và T7 vào hai tờ giấy riêng; Bạn *Lương Văn Nghĩa*, 10A7, THPT Chi Lăng cần điền thêm tên tỉnh vì chúng tôi tra trên mạng thấy rất nhiều tỉnh có THPT Chi Lăng (Lạng Sơn, An Giang, Gia Lai, Pleiku,...).

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/573. *Cho x, y, z, t là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A=(x+y+z+t)^2\times\left[\frac{1}{x(y+z+t)}+\frac{1}{y(z+t+x)}+\frac{1}{z(t+x+y)}+\frac{1}{t(x+y+z)}\right].$$

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{x(y+z+t)}+\frac{1}{y(z+t+x)}+\frac{1}{z(t+x+y)}+\frac{1}{t(x+y+z)}\geq\frac{4}{P.Q} \quad (1)$$

trong đó $P=\sqrt[4]{xyzt}$ và

$$Q=\sqrt[4]{(y+z+t)(z+t+x)(t+x+y)(x+y+z)}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$P.Q\leq\frac{x+y+z+t}{4}\times\frac{(y+z+t)+(z+t+x)+(t+x+y)+(x+y+z)}{4}=\frac{3(x+y+z+t)^2}{16} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $A\geq\frac{64}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=t$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{64}{3}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán bất đẳng thức dễ nên có nhiều bạn gửi lời giải về tòa soạn. Đa số các bạn đều sử dụng bất đẳng thức Schwarz để giải. Các bạn sau đây cũng có lời giải đúng:

Nghệ An: *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; *Lê Vũ Quỳnh Như*, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Diễn Châu; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, *Đỗ Hải Nam*, *Lại Đình Mạnh*, 8A1, THCS Linh Đàm; *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Kiên Giang:** *Nguyễn Lê Gia Thịnh*, 10T1, *Thái Đức Huy*, *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, *Cái Hoàng Quốc Khánh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*, 11 chuyên Toán 1, *Trần Đức Phát*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, *Đoàn Trung Hiếu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Ngãi:** *Võ Thành Nhân*, 10T2, THPT chuyên Lê Khiết; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phạm Minh Phú*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; *Dương Phú Tài*, 8A8, THCS Lam Sơn; **Lâm Đồng:** *Lê Xuân Hải*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Gia Lai:** *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Long An:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Đồng Tháp:** *Đinh Lâm Thiên Thanh*, 10T2, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, *Trần Minh Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

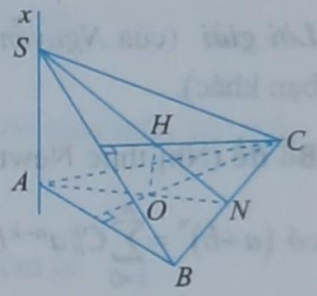
HOÀNG NGỌC MINH

Bài T8/573. *Cho tam giác ABC đều có tâm O, $AB=2$; Ax là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), S là điểm thay đổi trên Ax. Gọi N là trung điểm của BC, H là trực tâm của tam giác SBC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T=OH+HN+NO.$$

Lời giải (dựa theo bạn *Bùi Hoàng Bảo Ngọc*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu, **Long An**).

Ta sẽ chứng minh tam giác OHN vuông tại H.



Do $AB=AC$ và $SA\perp(ABC)$ nên $SB=SC$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AN\\BC\perp SA\end{cases}$ nên $BC\perp(SAN)$. Ta thu được $BC\perp OH$ (1).

Mặt khác, $\begin{cases}CO\perp AB\\CO\perp SA\end{cases}$ suy ra $CO\perp(SAB)$, suy ra $CO\perp SB$. Mà $CH\perp SB$ nên $SB\perp(CHO)$.

Từ đó $SB\perp OH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OH\perp(SBC)$.

Vậy $OH\perp HN$. Ta có: $T=OH+HN+ON$

$$\leq\sqrt{2}.\sqrt{OH^2+HN^2}+ON=\left(\sqrt{2}+1\right).ON.$$

Do tam giác ABC đều có cạnh bằng 2 nên

$$ON=\frac{1}{3}AN=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Từ đó $T \le \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $HO=HN$, khi và chỉ khi $\widehat{ANS}=45^0$, hay $AS=AN=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$.

Nhận xét. Bài toán này không khó, tuy nhiên có ít bạn tham gia giải. Một số bạn đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ với A là gốc tọa độ cũng cho kết quả đúng. Ngoài bạn *Ngọc*, xin nêu tên các bạn cũng có lời giải tốt: **Long An:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 10T1 , THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Đồng Tháp:** *Lê Ngọc Thành*, 10T1, *Liêu Vĩ Hào*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Gia Lai:** *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/573. *Cho tam giác ABC không có góc tù và mỗi góc không nhỏ hơn $\dfrac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng*

$$\cot A+\cot B+\cot C+3\cot A\cot B\cot C \le 4(2-\sqrt{2}).$$

Lời giải. (Theo bạn *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**)

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{\pi}{4} \le \widehat{A},\widehat{B},\widehat{C} \le \dfrac{\pi}{2}$.

Do đó: $0 \le \cot A, \cot B, \cot C \le 1$.

Ta có kết quả quen thuộc:

$$\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1.$$

Đặt $x=\cot A$, $y=\cot B$, $z=\cot C$ thì

$$x,y,z \in [0;1] \text{ và } xy+yz+zx=1.$$

BĐT cần chứng minh trở thành:

$$x+y+z+3xyz \le 4(2-\sqrt{2}) \quad (1).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x=\max\{x,y,z\}$.

Khi đó: $1=x(y+z)+yz \le x(y+z)+\dfrac{(y+z)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow (y+z)^2+4x(y+z)-4 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+z \le -2x-2\sqrt{x^2+1} \\ y+z \ge -2x+2\sqrt{x^2+1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y+z \ge -2x+2\sqrt{x^2+1} \ (\text{do } y+z \ge 0).$$

Ta có:

$$\begin{aligned} x+y+z+3xyz &= x+y+z+3x[1-x(y+z)] \\ &= 4x+(y+z)(1-3x^2) \\ &\le 4x+(2\sqrt{x^2+1}-2x)(1-3x^2) \end{aligned}$$

(do $1=xy+yz+zx \le 3x^2$ nên $1-3x^2 \le 0$). Ta sẽ chứng minh:

$$(3x^2-1)(2\sqrt{x^2+1}-2x)-4x+4(2-\sqrt{2}) \ge 0 \quad (2).$$

Xét hàm số:

$$f(x)=(3x^2-1)(2\sqrt{x^2+1}-2x)-4x+4(2-\sqrt{2})$$

với $x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};1\right]$. Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x(2\sqrt{x^2+1}-2x) \\ &\quad +(3x^2-1)\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-2\right)-4 \\ &= (3x^2-1)\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)+(12x\sqrt{x^2+1}-15x^2-3) \\ &= \frac{(3x^2-1)(2x-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{(12x\sqrt{x^2+1})^2-(15x^2+3)^2}{12x\sqrt{x^2+1}+15x^2+3} \\ &= \frac{(3x^2-1)^2}{\sqrt{x^2+1}(2x+\sqrt{x^2+1})}-\frac{9(3x^2-1)^2}{12x\sqrt{x^2+1}+15x^2+3} \\ &= (3x^2-1)^2\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}(2x+\sqrt{x^2+1})}-\frac{9}{12x\sqrt{x^2+1}+15x^2+3}\right] \\ &= (3x^2-1)^2.\frac{6x^2-6-6x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(2x+\sqrt{x^2+1})(12x\sqrt{x^2+1}+15x^2+3)} \le 0 \end{aligned}$$

(do $x^2 \le 1$). Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};1\right]$.

Cho nên

$$f(x) \ge f(1)=2(2\sqrt{2}-2)-4+4(2-\sqrt{2})=0.$$

Vậy BĐT(2), do đó BĐT(1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$, $y=z=\sqrt{2}-1$ hay khi $\widehat{A}=\dfrac{\pi}{4}$, $\widehat{B}=\widehat{C}=\dfrac{3\pi}{8}$.

Nhận xét. Một số bạn biến đổi đưa về khảo sát hàm số theo $t=\tan\dfrac{A}{2}$ cũng ra kết quả đúng. Ngoài bạn

Huy, các bạn có lời giải đúng là: **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Vũ Khắc Duy*, 10E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/573. *Cho dãy số* (u_n), $n = 1, 2, \ldots$ *được xác định như sau:*

$$u_1 = 1, u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + (n-1)u_1,\ n = 2, 3, \ldots$$

Tìm $\lim \dfrac{u_n\left(1-\left\{2^{n-2}\sqrt{5}\,u_n\right\}\right)}{2^{n-1}}$, *ở đây* $\{x\} = x - [x]$.

Lời giải (Dựa theo lời giải của bạn *Nguyễn Chánh Thiện*,10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**).

Với mọi $n \geq 2$ ta có:

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + (n-1)u_1 \quad (1).$$

$$u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + \ldots + (n-1)u_2 + nu_1 \quad (2).$$

Lấy (2) trừ cho (1) ta được:

$$u_{n+1} - u_n = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1, \forall n \geq 2 \quad (3).$$

Từ đây ta cũng có:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1, \forall n \geq 2 \quad (4).$$

Lấy (4) trừ cho (3) ta được:

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0, \forall n \geq 2 \quad (5).$$

Kết hợp với $u_2 = 1, u_3 = 3$ (tính từ đề bài) ta được công thức tổng quát:

$$u_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}, \forall n \geq 2.$$

Do đó: $2^{n-2}u_n\sqrt{5} = \dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)^{n-1} - \left(3-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{2}, \forall n \geq 2.$

Suy ra: $\left\{2^{n-2}u_n\sqrt{5}\right\} = \left\{\dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)^{n-1} - \left(3-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{2}\right\}$

$$= \left\{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^{n-1} + \left(3-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{2} - \left(3-\sqrt{5}\right)^{n-1}\right\}, \forall n \geq 2,$$

hay $\left\{2^{n-2}u_n\sqrt{5}\right\} = \left\{-\left(3-\sqrt{5}\right)^{n-1}\right\} = 1 - \left\{\left(3-\sqrt{5}\right)^{n-1}\right\}$

$$= 1 - \left(3-\sqrt{5}\right)^{n-1}, \forall n \geq 2.$$

Do đó: $\lim \dfrac{u_n\left(1-\left\{2^{n-2}u_n\sqrt{5}\right\}\right)}{2^{n-1}}$

$$= \lim u_n \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \lim \frac{1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(vì $0 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ nên $\lim \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} = 0$).

Nhận xét. Các bạn tham gia giải bài toán này có lời giải đúng là: **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Kiên Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/573. *Tìm tất cả các hàm số* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sao cho* $f^2(x) + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x))$ (1) *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. (Dựa theo ý đa số của các bạn).

Nhận thấy hàm hằng $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn điều kiện bài ra. Xét trường hợp tồn tại x_0 để $f(x_0) = b \neq 0$.

Thế x bởi x_0 vào (1), ta thu được:

$$f(y+b) - f(y) = b^2 + 2by \quad (2).$$

Do vế phải của (2) là ánh xạ toàn ánh trên $\mathbb{R}$ nên từ (2), với mọi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại cặp $u, v \in \mathbb{R}$ để

$$x = f(u) - f(v).$$

Tiếp theo, lần lượt thay y bởi $-f(x)$ và $-f(y)$ trong (1), ta thu được:

$$f(-f(-x)) = f(0) + [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (3);$$

$$f^2(x) - 2f(x)f(y) + f(-f(y)) = f(f(x) - f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$[f(x)-f(y)]^2+f(0)=f(f(x)-f(y)),\forall x,y\in\mathbb{R}$

hay $f(t)=t^2+f(0),\forall t\in\mathbb{R}$

hay $f(x)=x^2+c,\forall x\in\mathbb{R}$ với $c\in\mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn bài ra.

Kết luận: Phương trình hàm đã cho có hai nghiệm:

$$f(x)\equiv 0 \text{ và } f(x)=x^2+c \text{ với } c\in\mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm trong lớp hàm một biến với cặp số tự do. Các bạn gửi bài đều cho kết quả đúng: **Bình phước:** *Hồ Dương Đức Đạt*, 11T1, THPT chuyên Bình Long; **Gia Lai:** *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Kiên Giang:** *Nguyễn Đức Mạnh*, *Thái Đức Huy*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9H, THCS Phan Chu Trinh, *Lê Xuân Hải*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Quốc Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*, *Trần Đức Phát*, 11CT, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Minh Khải*, 10T2, THPT chuyên Lê Khiết; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/573. *Cho bốn điểm phân biệt A, B, C và D nằm trên đường thẳng l theo thứ tự đó. Giả sử (P) là đường tròn đi qua A và B, (Q) là đường tròn đi qua C và D. Gọi a và b thứ tự là các tiếp tuyến của (P) tại A và B; c và d thứ tự là các tiếp tuyến của (Q) tại C và D. Đặt $K=a\cap c$, $L=a\cap d$, $M=b\cap c$, $N=b\cap d$.*

a) *Chứng minh rằng bốn điểm K, L, M, N cùng nằm trên một đường tròn ký hiệu là (R).*

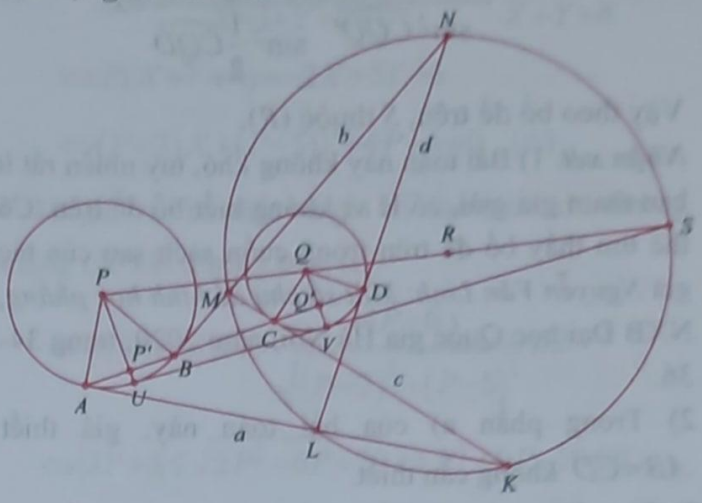
b) *Chứng minh rằng nếu $AB=CD$ thì các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (P) và (Q) cắt nhau trên (R).*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Cho hai đường tròn không đồng tâm (O_1), (O_2) và số $k\neq 1$. Khi đó tập hợp các điểm M sao cho $\mathcal{P}_{M/(O_1)}=k\mathcal{P}_{M/(O_2)}$ là đường tròn (O) thuộc chùm đường tròn xác định bởi (O_1), (O_2) và $\overrightarrow{OO_1}=k\overrightarrow{OO_2}$.*

Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây.

Trở lại giải bài toán T12/573.



a) Vì KC, KA theo thứ tự tiếp xúc với (Q) và (P) nên $(CK,CA)\equiv(CA,CD)\equiv\frac{1}{2}(\overrightarrow{QC},\overrightarrow{QD})(\mathrm{mod}\,\pi)$;

$$(AK,AC)\equiv(AK,AB)\equiv\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Từ đó, áp dụng định lí sin cho tam giác KAC, ta có: $\dfrac{\mathcal{P}_{K/(P)}}{\mathcal{P}_{K/(Q)}}=\dfrac{KA^2}{KC^2}=\dfrac{\sin^2\widehat{KCA}}{\sin^2\widehat{KAC}}=\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}\widehat{CQD}}{\sin^2\frac{1}{2}\widehat{APB}}=k.$

Tương tự, ta có:

$$\frac{\mathcal{P}_{K/(P)}}{\mathcal{P}_{K/(Q)}}=\frac{\mathcal{P}_{L/(P)}}{\mathcal{P}_{L/(Q)}}=\frac{\mathcal{P}_{M/(P)}}{\mathcal{P}_{M/(Q)}}=\frac{\mathcal{P}_{N/(P)}}{\mathcal{P}_{N/(Q)}}=k.$$

Vì K, N tồn tại và $AB=CD$ nên $\widehat{APB}\neq\widehat{CQD}$. Do đó $k\neq 1$.

Vậy, theo bổ đề trên, K, L, M, N cùng thuộc đường tròn (R), hơn thế (R) thuộc chùm đường tròn xác định bởi (P), (Q) và $\overrightarrow{RP}=k\overrightarrow{RQ}$.

b) Gọi UV là tiếp tuyến chung của (P) và (Q) $(U\in(P);V\in(Q))$; S là giao điểm của UV và PQ; P', Q' theo thứ tự trung điểm của AB, CD.

Dễ thấy S chính là giao điểm của các tiếp tuyến chung ngoài của (P) và (Q).

Từ đó, chú ý rằng $AP'=CQ'$, suy ra

$$\frac{\mathcal{P}_{S/(P)}}{\mathcal{P}_{S/(Q)}}=\frac{SU^2}{SV^2}=\frac{PU^2}{QV^2}=\frac{PA^2}{QC^2}=\frac{\frac{PA^2}{AP'^2}}{\frac{QC^2}{CQ'^2}}$$

$$=\frac{\sin^2\widehat{APP'}}{\sin^2\widehat{CQQ'}}=\frac{\sin^2\frac{1}{2}\widehat{APB}}{\sin^2\frac{1}{2}\widehat{CQD}}=k.$$

Vậy theo bổ đề trên, S thuộc (R).

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, tuy nhiên rất ít bạn tham gia giải, có lẽ vì không biết bổ đề trên. Có thể tìm thấy bổ đề trên trong cuốn sách sau của tác giả *Nguyễn Văn Linh*: *Một số chủ đề hình học phẳng*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2020, trang 34-36.

2) Trong phần a) của bài toán này, giả thiết $AB=CD$ không cần thiết.

3) Giao điểm của các tiếp tuyến chung trong (nếu có) của (P) và (Q) cũng thuộc (R).

4) Tòa soạn không chấp nhận các lời giải viết tay, sau đó chụp lại bằng điện thoại thông minh (không đọc được).

5) Sau đây là các bạn có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Trần Việt Tùng*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 11/5, THPT Thái Phiên; **Gia Lai:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Bình Phước:** *Trần Minh Hùng*, 11T, THPT chuyên Bình Long.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/573. *Hai bình có thể tích lần lượt là $V_1 = 40$ L, $V_2 = 10$ L thông nhau qua một cái van. Van chỉ mở khi áp suất trong bình 1 lớn hơn trong bình 2 từ 10^5 Pa trở lên. Ban đầu bình 1 chứa khí ở áp suất $p_0 = 0,9.10^5$ Pa và nhiệt độ $T_0 = 300$ K, còn bình 2 là chân không. Người ta làm nóng đều cả hai bình từ nhiệt độ T_0 lên nhiệt độ $T = 500$ K.*

a) *Tới nhiệt độ nào thì van mở?*

b) *Tính áp suất cuối cùng trong mỗi bình.*

Lời giải. a) $T_m=\frac{p_m}{p_0}T_0=\frac{10^5}{0,9.10^5}.300\approx 333$ K.

b) Bắt đầu từ nhiệt độ T_m, áp suất trong bình 1 tăng nhanh hơn trong bình 2, nhưng khi hiệu áp suất vượt quá 10^5 Pa trong quá trình tăng nhiệt độ cho đến khi T = 500 K. Khi đó:

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p_1V_1}{T}+\frac{p_2V_2}{T};$$

$$p_1=p_2+10^5\ Pa;\ V_1=4V_2.$$

Ta có: $p_1=1,4.10^5\ Pa$, từ đó rút ra:

$$p_2=0,4.10^5\ Pa.$$

Nhận xét. Tuyên dương các bạn *Ngô Bảo Long*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** và bạn *Đỗ Văn Dương*, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, **Bạc Liêu** đã có lời giải đúng cho bài này

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/573. *Một rađa phát một xung sóng điện từ về phía chiếc máy bay đang bay thẳng, đều về phía rađa và thu được sóng phản xạ trở lại sau khoảng thời gian $\Delta t = 2.10^{-4}$s tính từ lúc phát. Biết tốc độ truyền sóng $c = 3.10^8$ m/s. Coi tốc độ của máy bay là rất nhỏ so với tốc độ ánh sáng.*

a) *Tính khoảng cách từ máy bay đến rađa vào thời điểm sóng điện từ phản xạ từ máy bay.*

b) *Hãy đề nghị một phương án để xác định tốc độ của máy bay.*

Lời giải. a) Khoảng cách từ máy bay đến rađa vào thời điểm sóng điện từ phản xạ:

$$\Delta s=\frac{c.\Delta t}{2}=\frac{3.10^8.2.10^{-4}}{2}=30\,\text{km}.$$

b) Để xác định tốc độ của máy bay, vào thời điểm t ta phát một xung sóng điện từ có tần số xác định và ta đo được Δs_1 như nguyên tắc đo ở phần 1. Vào thời điểm $t + \Delta t$ ta lại phát một xung và đo được Δs_2.

Vận tốc của máy bay : $v=\frac{\Delta s_1-\Delta s_2}{\Delta t}$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào có lời giải đúng, trọn vẹn cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT DẠNG TOÁN TÌM GTLN, GTNN

TRẦN VĂN HẠNH
(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Trong các kỳ thi học sinh giỏi, tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán hay mục "*Đề ra kỳ này*" của báo Toán học tuổi trẻ thường xuất hiện một dạng toán: "*Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn*

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \ (*).$$

Tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $P=f(x,y)$".

Tùy theo hệ số A, B, C, D, E, F trong phương trình (*) và biểu thức $P=f(x,y)$ là phân thức hay đa thức hay thuần nhất hay đối xứng, ... mà ta có phương pháp giải phù hợp.

1. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

Nếu phương trình (*) phân tích được phương trình đường tròn $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ còn biểu thức $f(x,y)$ là phân thức bậc nhất theo x, y:

$$f(x,y)=\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}$$

thì ta có thể dùng phương pháp hình học. Cụ thể: Đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ cắt đường tròn $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ có tâm $I(x_0.y_0)$, bán kính R khi và chỉ khi $d(I,\Delta)\le R$.

Thí dụ 1.1. *Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2+4y^2-2x-8y+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{-2x+10y-14}{x+2y+1}.$$

Lời giải. Ta có: $x^2+4y^2-2x-8y+1=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(2y-2)^2=4 \ (1).$$

Đặt $\begin{cases}X=x-1\\Y=2y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=X+1\\2y=Y+2\end{cases}$.

Khi đó (1) trở thành: $X^2+Y^2=4 \ (C)$

và $P=\dfrac{-2(X+1)+5(Y+2)-14}{X+1+Y+2+1}=\dfrac{-2X+5Y-6}{X+Y+4}$

$$\Leftrightarrow P(X+Y+4)=-2X+5Y-6$$

$$\Leftrightarrow (P+2)X+(P-5)Y+4P+6=0 \ (\Delta).$$

P đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất khi đường thẳng (Δ) cắt đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(O,\Delta)\le R\Leftrightarrow\frac{|4P+6|}{\sqrt{(P+2)^2+(P-5)^2}}\le 2$$

$$\Leftrightarrow |2P+3|\le\sqrt{2P^2-6P+29}\Leftrightarrow P^2+9P-10\le 0$$

$$\Leftrightarrow -10\le P\le 1.$$

$P=1$ khi $\begin{cases}X=-\dfrac{6}{5}\\Y=\dfrac{8}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5}\\y=\dfrac{9}{5}\end{cases}$;

$P=-10$ khi $\begin{cases}X=\dfrac{16}{17}\\Y=-\dfrac{30}{17}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{33}{17}\\y=\dfrac{2}{17}\end{cases}$.

Vậy $\max P=1, \ \min P=-10$.

Thí dụ 1.2. *Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $5x^2+2y^2+2xy=9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x-1}{4x-y+9}$.*

Lời giải. Ta có: $5x^2+2y^2+2xy=9$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^2+(x-y)^2=9 \ (2).$$

Đặt $\begin{cases}X=2x+y\\Y=x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{X+Y}{3}\\y=\dfrac{X-2Y}{3}\end{cases}$.

Khi đó (2) trở thành $X^2+Y^2=9$ (C)

và $P=\dfrac{\dfrac{X+Y}{3}-1}{4\dfrac{X+Y}{3}-\dfrac{X-2Y}{3}+9}=\dfrac{X+Y-3}{3X+6Y-27}$

$\Leftrightarrow P(3X+6Y-27)=X+Y-3$

$\Leftrightarrow (3P-1)X+(6P-1)Y-27P+3=0$ (Δ).

P đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất khi đường thẳng (Δ) cắt đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(O,\Delta)\le R\Leftrightarrow \frac{|27P-3|}{\sqrt{(3P-1)^2+(6P-1)^2}}\le 3$$

$$\Leftrightarrow |9P-1|\le\sqrt{45P^2-18P+2}$$

$$\Leftrightarrow 36P^2\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le P\le\frac{1}{6}.$$

$P=\dfrac{1}{6}$ khi $\begin{cases}X=-3\\Y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$;

$P=-\dfrac{1}{6}$ khi $\begin{cases}X=\dfrac{9}{5}\\Y=\dfrac{12}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{5}\\y=-1\end{cases}$.

Vậy $\max P=\dfrac{1}{6}$, $\min P=-\dfrac{1}{6}$.

Thí dụ 1.3. *Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2-2x-4y+4=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=x^2+y^2+4x+2y.$$

Lời giải. Để giải bài toán ta thay giả thiết

$$x^2+y^2-2x-4y+4=0\Leftrightarrow x^2+y^2=2x+4y-4$$

vào biểu thức P ta được $P=6x+6y-4$. Khi đó từ giả thiết ta có:

Ta có: $x^2+y^2-2x-4y+4=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=1\ (C)$$

và $P=6x+6y-4\Leftrightarrow 6x+6y-4-P=0$ (Δ).

P đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất khi đường thẳng (Δ) cắt đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I,\Delta)\le R\Leftrightarrow\frac{|14-P|}{\sqrt{6^2+6^2}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow |14-P|\le 6\sqrt{2}\Leftrightarrow 14-6\sqrt{2}\le P\le 14+6\sqrt{2}.$$

Vậy $\max P=14+6\sqrt{2}$ khi $\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\y=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$;

$\min P=14-6\sqrt{2}$ khi $\begin{cases}x=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\y=2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2-2x+4y=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+1)^2+(y+1)^2$.

2. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $2x^2+2xy+y^2=\dfrac{4}{5}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{7x-2y-3}{4x+y+3}$

(*Bài* T6/569, *Toán học& Tuổi trẻ*)

2. PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

Nếu phương trình (*) và biểu thức $f(x,y)$ là các biểu thức thuần nhất bậc hai theo x,y thì ta có thể dùng phương pháp giải của hệ phương trình thuần nhất bậc hai.

Thí dụ 2.1 *Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $2x^2-3xy+4y^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+2y^2$.*

(*Bài T5/560 Toán học& Tuổi trẻ*)

Lời giải. Từ giả thiết ta nhận xét là x,y không đồng thời bằng 0.

- Nếu $y=0$ thì $x^2=3\Rightarrow P=x^2=3$.
- Xét $y\neq 0$, đặt $x=ty$. Khi đó:

$$\frac{P}{6}=\frac{x^2+2y^2}{2x^2-3xy+4y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+2}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}+4}=\frac{t^2+2}{2t^2-3t+4}$$

$$\Leftrightarrow(2P-6)t^2-3Pt+4P-12=0 \quad (3).$$

+ Nếu $P=3$ thì $t=0\Rightarrow x=0$.

+ Xét $P\neq 3$. Để P đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì phương trình (3) có nghiệm khi

$$\Delta=9P^2-4(2P-6)(4P-12)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 23P^2-192P+288\leq 0\Leftrightarrow\frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\leq P\leq\frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}.$$

$P=\frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}$ khi $t=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}}\\ y=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}}\\ y=-\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}}\end{cases};$$

$P=\frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}$ khi $t=-\sqrt{2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}}\\ y=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}}\\ y=-\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}}\end{cases}.$$

Vậy $\max P=\frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}$, $\min P=\frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}$.

Thí dụ 2.2 *Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2-xy+y^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.*

(Bài toán 87, Nhiều cách giải cho một bài toán, Số 567, Toán học & Tuổi trẻ)

Lời giải. Từ giả thiết ta nhận xét là x,y không đồng thời bằng 0.

Nếu $y=0$ thì $x^2=4\Rightarrow P=x^2=4$.

Xét $y\neq 0$, đặt $x=ty$, khi đó:

$$\frac{P}{4}=\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1}=\frac{t^2+1}{t^2-t+1}$$

$$\Leftrightarrow(P-4)t^2-Pt+P-4=0 \quad (4).$$

Nếu $P=4$ thì $t=0\Rightarrow x=0$.

Xét $P\neq 4$. Để P đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì phương trình (4) có nghiệm khi

$$\Delta=P^2-4(P-4)(P-4)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3P^2-32P+64\leq 0\Leftrightarrow\frac{8}{3}\leq P\leq 8.$$

$P=8$ khi $t=1\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-2\\ y=-2\end{cases}$;

$P=\frac{8}{3}$ khi $t=-1\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\\ y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-\frac{2}{\sqrt{3}}\\ y=\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}$.

Vậy $\max P=8$, $\min P=\frac{8}{3}$.

Thí dụ 2.3 *Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $9x^2-3xy+y^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=9x^2+3xy+y^2$.*

Lời giải. Từ giả thiết ta nhận xét là x,y không đồng thời bằng 0.

Nếu $y=0$ thì $x^2=\frac{2}{9}\Rightarrow P=9x^2=2$.

Xét $y\neq 0$, đặt $x=ty$, khi đó:

$$\frac{P}{2}=\frac{9x^2+3xy+y^2}{9x^2-3xy+y^2}=\frac{9\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\left(\frac{x}{y}\right)+1}{9\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}+1}=\frac{9t^2+3t+1}{9t^2-3t+1}$$

$$\Leftrightarrow 9(P-2)t^2-3(P+2)t+P-2=0 \quad (5).$$

Nếu $P=2$ thì $t=0\Rightarrow x=0$.

Xét $P\neq 2$. Để P đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì phương trình (5) có nghiệm khi

$$\Delta=9(P+2)^2-4.9(P-2)(P-2)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3P^2-20P+12\leq 0\Leftrightarrow\frac{2}{3}\leq P\leq 6.$$

$P=6$ khi $t=\frac{1}{3}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{3}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{3}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$;

$P=\frac{2}{3}$ khi $t=\frac{2}{3}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{6}}{9}\\y=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{6}}{9}\\y=-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$.

Vậy $\max P=6$, $\min P=\frac{2}{3}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $3x^2-2xy-y^2=5$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+xy+2y^2$.

2. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2+10xy+20y^2$

3. PHƯƠNG PHÁP DÙNG DẤU TAM THỨC BẬC HAI

Nếu phương trình (*) phân tích được theo một tam thức bậc hai có ẩn là một biểu thức của $f(x,y)$ thì ta dùng nghiệm của bất phương trình bậc 2.

Thí dụ 3.1 *Cho hai số thực dương x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2+xy-3x-3y+2=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.*

Lời giải. Ta có: $x^2+y^2+xy-3x-3y+2=0$

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4xy-12x-12y+8=0$

$\Leftrightarrow (2x+y)^2-6(2x+y)+5=-3(y-1)^2\le 0$

$\Leftrightarrow (2x+y)^2-6(2x+y)+5\le 0\Rightarrow 1\le 2x+y\le 5.$

Biến đổi biểu thức

$$P=\frac{3x+2y+1}{x+y+6}=\frac{x+y+6+2x+y-5}{x+y+6}=1+\frac{2x+y-5}{x+y+6}.$$

Do $2x+y\le 5\Rightarrow 2x+y-5\le 0\Rightarrow \frac{2x+y-5}{x+y+6}\le 0$

(vì $x+y+6>0$). Suy ra:

$$1+\frac{2x+y-5}{x+y+6}\le 1\Rightarrow P\le 1.$$

$P=1$ khi $\begin{cases}2x+y=5\\y-1=0\\x^2+y^2+xy-3x-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

Vậy $\max P=1$.

Thí dụ 3.2 *Cho hai số thực không âm x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2+2xy-x-7y+12=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^3+y^3$.*

Lời giải. Ta có: $x^2+y^2+2xy-x-7y+12=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-7(x+y)+12=-6x\le 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-7(x+y)+12\le 0\Leftrightarrow 3\le x+y\le 4.$

Biến đổi biểu thức P ta được:

$$P=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)\le (x+y)^3\le 4^3=64.$$

Suy ra: $P\le 64$.

$P=64$ khi $\begin{cases}x=0\\x+y=4\\x^2+y^2+2xy-x-7y+12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$.

Vậy $\max P=64$.

Thí dụ 3.3 *Cho hai số thực dương x,y thay đổi và thỏa mãn $3x^2+4y^2+4xy-9x-10y+8=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{7x+11y+13}{2x+3y+5}$.*

Lời giải. Ta có: $3x^2+4y^2+4xy-9x-10y+8=0$

$\Leftrightarrow x^2+4y^2+4xy-5(x+2y)+6=-2(x^2-2x+1)$

$\Leftrightarrow (x+2y)^2-5(x+2y)+6=-2(x-1)^2\le 0$

$\Leftrightarrow (x+2y)^2-5(x+2y)+6\le 0\Leftrightarrow 2\le x+2y\le 3.$

Biến đổi biểu thức P ta được:

$$P=\frac{7x+11y+13}{2x+3y+5}=\frac{3(2x+3y+5)+x+2y-2}{2x+3y+5}$$

$$=3+\frac{x+2y-2}{2x+3y+5}.$$

Do $x+2y\ge 2\Rightarrow x+2y-2\ge 0\Rightarrow \dfrac{x+2y-2}{2x+3y+5}\ge 0$

(vì $2x+3y+5>0$) $\Rightarrow 3+\dfrac{x+2y-2}{2x+3y+5}\ge 3\Rightarrow P\ge 3.$

$$P=3\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=2\\x-1=0\\3x^2+4y^2+4xy-9x-10y+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy $\min P=3$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $9x^2+21y^2-6xy-18x-18y+13=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5(x+y)+2024$.

2. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $9x^2+18y^2+24xy-10x-15y+3=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{5}{2x+3y+5}.$$

4. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

Nếu phương trình (*) phân tích được thành phương trình đường tròn $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ thì đặt:

$$\begin{cases}x-x_0=R\cos\alpha\\y-y_0=R\sin\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_0+R\cos\alpha\\y=y_0+R\sin\alpha\end{cases}\quad\alpha\in[0;2\pi).$$

Nếu điều kiện x,y trong bài toán thỏa mãn $|x|\le k;\ |y|\le k$ thì đặt $\begin{cases}x=k\cos\alpha\\y=k\sin\alpha\end{cases}\ \alpha\in\mathbb{R}.$

Thí dụ 4.1. *Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2-1=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$.*

(Đề tuyển sinh Đại học khối B, 2008)

Lời giải. Ta có:

$$x^2+y^2-1=0\Leftrightarrow x^2+y^2=1\Rightarrow |x|\le 1 \text{ và } |y|\le 1.$$

Đặt $\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R}$. Thay vào biểu thức P ta có:

$$P=\frac{2\cos^2\alpha+12\cos\alpha\sin\alpha}{1+2\cos\alpha\sin\alpha+2\sin^2\alpha}=\frac{1+\cos2\alpha+6\sin2\alpha}{2+\sin2\alpha-\cos2\alpha}.$$

Để P có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì phương trình $\dfrac{1+\cos2\alpha+6\sin2\alpha}{2+\sin2\alpha-\cos2\alpha}=P$ có nghiệm α

$\Leftrightarrow$ phương trình $(1+P)\cos2\alpha+(6-P)\sin2\alpha=2P-1$ có nghiệm α $\Leftrightarrow(1+P)^2+(6-P)^2\ge(2P-1)^2$

$\Leftrightarrow(1+P)^2+(6-P)^2\ge(2P-1)^2\Leftrightarrow P^2+3P-18\le 0$

$\Leftrightarrow -6\le P\le 3.$

$P=3$ khi $\begin{cases}\cos2\alpha=\dfrac{4}{5}\\\sin2\alpha=\dfrac{3}{5}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\\y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\\y=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{cases};$$

$P=-6$ khi $\begin{cases}\cos2\alpha=\dfrac{5}{13}\\\sin2\alpha=-\dfrac{12}{13}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\\y=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\\y=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\end{cases}.$$

Vậy $\max P=3,\ \min P=-6$.

Thí dụ 4.2 *Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2+2x-2y+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x+2y+4}{x+y+2}$.*

Lời giải. Ta có: $x^2+y^2+2x-2y+1=0$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-1)^2=1.$$

Đặt $\begin{cases}x+1=\cos\alpha\\y-1=\sin\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+\cos\alpha\\y=1+\sin\alpha\end{cases}\quad\alpha\in[0;2\pi).$

Thay vào biểu thức P ta có:

$$P=\frac{3(-1+\cos\alpha)+2(1+\sin\alpha)+4}{-1+\cos\alpha+1+\sin\alpha+2}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{3\cos\alpha+2\sin\alpha+3}{\sin\alpha+\cos\alpha+2}$$

$$\Leftrightarrow P(\sin\alpha+\cos\alpha+2)=3\cos\alpha+2\sin\alpha+3$$

$$\Leftrightarrow (P-3)\cos\alpha+(P-2)\sin\alpha=3-2P \quad (6).$$

Để P có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì phương trình (6) có nghiệm α

$$\Leftrightarrow (P-3)^2+(P-2)^2\geq(3-2P)^2 \Leftrightarrow P^2-P-2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1\leq P\leq 2.$$

$P=2$ khi $\begin{cases}\cos\alpha=1\\ \sin\alpha=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$;

$P=-1$ khi $\begin{cases}\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}\\ \sin\alpha=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=-\dfrac{9}{5}\\ y=\dfrac{2}{5}\end{cases}$.

Vậy $\max P=2$, $\min P=-1$.

Thí dụ 4.3 *Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2-4x-2y-47=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=x^2+y^2-8x+4y+20.$$

Lời giải. Ta có: $x^2+y^2-4x-2y-47=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=52.$$

Đặt $\begin{cases}x-2=2\sqrt{13}\cos\alpha\\ y-1=2\sqrt{13}\sin\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2\sqrt{13}\cos\alpha\\ y=1+2\sqrt{13}\sin\alpha\end{cases}$,

$\alpha\in[0;2\pi)$. Từ giả thiết ta có:

$$x^2+y^2-4x-2y-47=0\Leftrightarrow x^2+y^2=4x+2y+47.$$

Thay vào biểu thức P ta được:

$$P=4x+2y+47-8x+4y+20=-4x+6y+67$$

$$\Leftrightarrow P=-4x+6y+67$$

Khi đó P viết theo biểu thức lượng giác là:

$$P=-4\left(2+2\sqrt{13}\cos\alpha\right)+6\left(1+2\sqrt{13}\sin\alpha\right)+67$$

$$\Leftrightarrow P=-8\sqrt{13}\cos\alpha+12\sqrt{13}\sin\alpha+65$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{13}\cos\alpha-12\sqrt{13}\sin\alpha=65-P \quad (7).$$

Để P có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì phương trình (7) phải có nghiệm α

$$\Leftrightarrow\left(8\sqrt{13}\right)^2+\left(12\sqrt{13}\right)^2\geq(65-P)^2$$

$$\Leftrightarrow (65-P)^2\leq 2704=52^2\Leftrightarrow 13\leq P\leq 117.$$

$P=13$ khi $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\\ \sin\alpha=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=6\\ y=-5\end{cases}$;

$P=117$ khi $\begin{cases}\cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\\ \sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=-2\\ y=7\end{cases}$.

Vậy $\max P=17$, $\min P=13$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $4x^2+9y^2=16$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+3\sqrt{3}y+2$.

2. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2-2x+4y=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2x+2y+2$.

5. PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM

Phương trình (*) giải được theo x hoặc theo y, sau đó thay vào biểu thức $P=f(x,y)$, ta được một hàm số theo x hoặc theo y.

Từ phương trình (*) và biểu thức $P=f(x,y)$ ta tạo ra một biến thứ ba và khi đó xét hàm số theo biến này.

Thí dụ 5.1. *Cho hai số thực dương x,y thay đổi và thỏa mãn $3xy+x+3y-3=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.*

Lời giải. Ta có: $3xy+x+3y-3=0$

$$\Leftrightarrow x(3y+1)=3-3y\Leftrightarrow x=\frac{3-3y}{3y+1} \text{ (vì } y>0).$$

Khi đó $P=\dfrac{3-3y}{3y+1}+y=\dfrac{3y^2-2y+3}{3y+1}$ là hàm số theo biến $y>0$. Ta có: $P'=\dfrac{9y^2+6y-11}{(3y+1)^2}$;

$$P'=0\Leftrightarrow\frac{9y^2+6y-11}{(3y+1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow y_1=\frac{-1-2\sqrt{3}}{3}\ \text{(loại)},\ y_2=\frac{-1+2\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên:

y	y_1	0	y_2	$+\infty$
P'		$-$	0	$+$
P		$\searrow$		$\nearrow$

Hàm số $P(y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $y=\frac{-1+2\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-1+2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}.$$

Vậy $\min P=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$ khi $\begin{cases}x=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\ y=\frac{2\sqrt{3}-1}{3}\end{cases}$.

Thí dụ 5.2. *Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2(x^3+y^3)-3xy$.*

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$x^2+y^2=2\Leftrightarrow(x+y)^2-2xy=2\Leftrightarrow xy=\frac{1}{2}(x+y)^2-1.$$

Ta có: $x^2+y^2\ge\frac{1}{2}(x+y)^2$

$$\Rightarrow 2\ge\frac{1}{2}(x+y)^2\Leftrightarrow(x+y)^2\le 4\Leftrightarrow -2\le x+y\le 2.$$

Đặt $t=x+y, -2\le t\le 2$. Biến đổi biểu thức P ta được: $P=2(x+y)^3-6xy(x+y)-3xy$

$$=2(x+y)^3-3\left[(x+y)^2-2\right](x+y)-\frac{3}{2}(x+y)^2+3$$

$$=-(x+y)^3-\frac{3}{2}(x+y)^2+6(x+y)+3.$$

Khi đó ta có P là hàm theo biến t:

$$P=-t^3-\frac{3}{2}t^2+6t+3\ ;\ t\in[-2;2]$$

Ta có: $P'=-3t^2-3t+6;\ P'=0\Leftrightarrow t=1,\ t=-2.$

$$P(-2)=-7;P(2)=1;P(1)=\frac{13}{2}.$$

Ta có bảng biến thiên:

t	-2		1		2
P'	0	$+$	0	$-$	
P	-7	$\nearrow$	$13/2$	$\searrow$	1

$P=\frac{13}{2}$ khi $t=1$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\ \text{hoặc}\ \begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases};$$

$P=-7$ khi $t=-2\ \Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$.

Vậy $\max P=\frac{13}{2}, \min P=-7.$

Thí dụ 5.3. *Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$.*

Lời giải. Ta có:

$$x^2-xy+y^2=1\Leftrightarrow 1-xy=(x-y)^2\ge 0\Rightarrow xy\le 1;$$

$$x^2-xy+y^2=1\Leftrightarrow 1+xy=x^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow 1+3xy=(x+y)^2\ge 0\Rightarrow xy\ge-\frac{1}{3}$$

Do đó: $-\frac{1}{3}\le xy\le 1$. Đặt $t=xy, -\frac{1}{3}\le t\le 1$.

Ta có: $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2$

$$=(1+xy)^2-2x^2y^2=1+2xy-x^2y^2.$$

Khi đó biểu thức $P=\frac{-t^2+2t+2}{t+2}$ là hàm theo biến $t\in\left[-\frac{1}{3};1\right]$. Ta có: $P'=\frac{-t^2-4t+2}{(t+2)^2}=0\Leftrightarrow\frac{-t^2-4t+2}{(t+2)^2}=0$

$$\Leftrightarrow t_1=-2-\sqrt{6}<-\frac{1}{3}\ \text{(loại)},\ t_2=-2+\sqrt{6}\approx 0{,}45.$$

$P\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{15}$; $P(1)=1$; $P\left(-2+\sqrt{6}\right)=6-2\sqrt{6}$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\frac{1}{3}$	t_2	1
P'	$-$	0	$+$
P	$\frac{11}{15}$	$\nearrow\ 6-2\sqrt{6}\ \searrow$	1

Vậy $\max P=6-2\sqrt{6}$ khi

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3\sqrt{6}-3}+\sqrt{5-\sqrt{6}}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{3\sqrt{6}-3}-\sqrt{5-\sqrt{6}}}{2} \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3\sqrt{6}-3}-\sqrt{5-\sqrt{6}}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{3\sqrt{6}-3}+\sqrt{5-\sqrt{6}}}{2} \end{cases}$;

$\min P=\frac{11}{15}$ khi $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+2xy+2y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^4+y^4+(x+y)^4$.

2. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^4+y^4+x^2+y^2}{x^2+y^2-3}$.

PROBLEMS . . .

(Tiếp theo trang 21)

$$\frac{abc+bcd+cda+dab}{a+b+c+d}$$
$$\le\frac{1}{4}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)}$$
$$\le\frac{(a+b+c+d)^2}{16}.$$

Problem T8/577. Let a, b, c be the side lengths and S the area of triangle ABC. Prove that:

$$a^2\cos\frac{A}{2}+b^2\cos\frac{B}{2}+c^2\cos\frac{C}{2}\ge 6S.$$

Problem T9/577. Find all integers x and y satisfying $11x^2-3xy+y^2=9$ such that $x^2-3xy+y^2$ is a prime number.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/577. Given a sequence (x_n) satisfying $\begin{cases} x_1=5 \\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{8}{x_n},\forall n\ge 1 \end{cases}$.

For each positive integer n, define:

$$a_n=\frac{x_n+\sqrt{x_n^2-16}}{2}, b_n=\frac{x_n-\sqrt{x_n^2-16}}{2}.$$

1) Prove that the sequence (a_n) is decreasing and the sequence (b_n) is increasing.

2) Find $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.

Problem T11/577. Let $f(x)$ be a function defined and continuous on the interval $[0,1]$, and differentiable on the open interval $(0,1)$, satisfying the condition $f(0)=f(1)>0$. Prove that there exists a number $c\in(0,1)$ such that $f'(c)+2cf(c)<2f(1)$.

Problem T12/577. Given a tetrahedron $OXYZ$ and a positive number $k>0$. Points M, N, P lie on the segments YZ,ZX,XY respectively. Points A, B, C move along the segments OX, OY, OZ respectively such that: $V_{AXNP}+V_{BYPM}+V_{CZMN}=k$.

Prove that the center of the circumscribed sphere of tetrahedron $OABC$ lies on a fixed plane.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)



TIẾP TỤC KHAI THÁC ỨNG DỤNG CỦA MỘT ĐẲNG THỨC ĐẸP

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Với nhiều bài toán cũ, nếu chúng ta biết tiếp tục khai thác, thay đổi góc nhìn thì đôi khi chúng ta may mắn nhận được nhiều kết quả mới và đẹp đến bất ngờ. Bài viết chỉ hoàn thành trong đúng một ngày, 10/3/2025, mặc dù nhiều ý tưởng đã có từ rất lâu trước đó. Phiên bản gốc của bài viết đã có trên 10 năm, được trình bày tại Hội thảo khoa học các chuyên đề Toán học bồi dưỡng học sinh giỏi khu vực Đồng Bằng Sông Cửu Long và miền Đông Nam Bộ được tổ chức tại thành phố Cao Lãnh, tỉnh Đồng Tháp tháng 8 năm 2013. Ở phiên bản này, có cập nhật thêm nhiều bài toán mới và đẹp vừa được đề xuất trên tạp chí Crux Mathematicorum của Canada.

Bài viết trình bày ứng dụng của một đẳng thức liên quan đến ba số có tích bằng 1, từ đẳng thức này, chúng ta cùng xây dựng một số bất đẳng thức xuất hiện trong nhiều bài toán ở các kì thi, hoặc các tạp chí toán học.

Xin kính tặng đến anh *Hồ Quang Vinh*, người Thầy, người Anh đầy nhiệt huyết và có nhiều cống hiến dành cho Tạp chí Toán học tuổi trẻ, Tạp chí Toán tuổi thơ 2.

1. Một đẳng thức đẹp

Cho các số thực a,b,c. Nếu $abc=1$ thì ta luôn có đẳng thức sau

1.

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1 \quad (1).$$

Thật vậy, vì $abc=1$ nên ta có thể đặt $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$. Khi đó:

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}}+\frac{1}{1+\frac{y}{z}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}}$$

$$=\frac{yz}{yz+xz+xy}+\frac{zx}{zx+xy+yz}+\frac{xy}{xy+yz+zx}$$

$=1$.

Từ kết quả trên, ta thấy rằng nếu $abc=1$ thì $a^2b^2c^2=1$. Do đó, ta cũng có đẳng thức:

$$\frac{1}{1+a^2+a^2b^2}+\frac{1}{1+b^2+b^2c^2}+\frac{1}{1+c^2+c^2a^2}=1 \quad (2).$$

Ngoài ra, từ (1), ta có:

$$1=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}$$

$$=\frac{c}{c+ca+abc}+\frac{a}{a+ab+abc}+\frac{b}{b+bc+abc}$$

$$=\frac{a}{a+ab+1}+\frac{b}{b+bc+1}+\frac{c}{c+ca+1}.$$

Do đó, nếu $abc=1$ thì

$$\frac{a}{a+ab+1}+\frac{b}{b+bc+1}+\frac{c}{c+ca+1}=1 \quad (3).$$

Sử dụng các đẳng thức (1), (2) và (3), chúng ta cùng giải một số bài toán bất đẳng thức đẹp và đơn giản sau, chú ý trong một số trường hợp, để đơn giản ta dùng kí hiệu $\sum_{cyc} a=a+b+c$.

2. Các bài toán bất đẳng thức

Bài toán 1. *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2a^2+b^2+3}+\frac{1}{2b^2+c^2+3}+\frac{1}{2c^2+a^2+3}\le\frac{1}{2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2a^2+b^2+3=(a^2+b^2)+(a^2+1)+2\ge 2(1+a+ab).$$

Với các đánh giá tương tự, ta suy ra:

$$\frac{1}{2a^2+b^2+3}+\frac{1}{2b^2+c^2+3}+\frac{1}{2c^2+a^2+3}$$
$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}\right)$$
$$=\frac{1}{2}.$$

Bài toán 2. [TS 10 chuyên trường Lê Quí Đôn, Bình Định, năm học 2001 – 2002]. *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$.. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{(1+a+ab)^2}+\frac{b}{(1+b+bc)^2}+\frac{c}{(1+c+ca)^2}\ge\frac{1}{a+b+c}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Schwarz, ta có:

$$\frac{a}{(1+a+ab)^2}+\frac{b}{(1+b+bc)^2}+\frac{c}{(1+c+ca)^2}$$
$$=\sum\frac{\frac{a^2}{(1+a+ab)^2}}{a}=\sum\frac{\left(\frac{a}{1+a+ab}\right)^2}{a}$$
$$\ge\frac{\left(\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}\right)^2}{a+b+c}$$
$$=\frac{1}{a+b+c}.$$

Bài toán 3. [T4/172, TTT2]. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{3a+4b+2c}}+\frac{1}{\sqrt{3b+4c+2a}}+\frac{1}{\sqrt{3c+4a+2c}}\le1.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức

$$(x+y+z)^2\le3(x^2+y^2+z^2),\ \forall x,y,z>0,$$

ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{3a+4b+2c}}+\frac{1}{\sqrt{3b+4c+2a}}+\frac{1}{\sqrt{3c+4a+2c}}$$
$$\le\sqrt{3\left(\frac{1}{3a+4b+2c}+\frac{1}{3b+4c+2a}+\frac{1}{3c+4a+2b}\right)}.$$

Do đó, ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{3a+4b+2c}+\frac{1}{3b+4c+2a}+\frac{1}{3c+4a+2b}\le\frac{1}{3}.$$

Thật vậy, vì $a,b,c>0$ và $abc=1$ nên ta có thể đặt:

$a=x^3,b=y^3,c=z^3$, với $x,y,z>0$ và $xyz=1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được:

$$3a+4b+2c=3x^3+4y^3+2z^3$$
$$=2\left(x^3+y^3+z^3\right)+x^3+2y^3$$
$$\ge2.3xyz+x^3+2y^3$$
$$=x^3+2y^3+6$$
$$=\left(x^3+y^3+1\right)+\left(y^3+1+1\right)+3$$
$$\ge3(xy+y+1).$$

Từ đó suy ra: $\frac{1}{3a+4b+2c}\le\frac{1}{3}.\frac{1}{xy+y+1}$.

Tương tự, ta chứng minh được:

$$\frac{1}{3b+4c+2a}\le\frac{1}{3}.\frac{1}{yz+z+1};\ \frac{1}{3c+4a+2b}\le\frac{1}{3}.\frac{1}{zx+x+1}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên, ta thu được:

$$\frac{1}{3a+4b+2c}+\frac{1}{3b+4c+2a}+\frac{1}{3c+4a+2b}$$
$$\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$.

Bài toán 4. [T6/394, THTT]. *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+2b^3+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+2c^3+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+2a^3+6}}\le1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có $Q^2\le3P$, trong đó

$$Q=\frac{1}{\sqrt{a^3+2b^3+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+2c^3+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+2a^3+6}};$$

$$P=\frac{1}{a^3+2b^3+6}+\frac{1}{b^3+2c^3+6}+\frac{1}{c^3+2a^3+6}.$$

Ta sẽ chứng minh $P\le\frac{1}{3}$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a^3+2b^3+6=\left(a^3+b^3+1\right)+\left(b^3+1+1\right)+3\ge3(ab+b+1).$$

Suy ra:

$$P\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

Do đó $Q^2 \le 1$ hay $Q \le 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Điều thú vị ở bài toán 4 là khởi nguồn của các bài toán 5, 6 sau đây.

Bài toán 5. [T6/402, THTT]. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{a^5-a^2+3ab+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^5-b^2+3bc+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^5-c^2+3ca+6}} \le 1.$$

Lời giải. Đặt

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^5-a^2+3ab+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^5-b^2+3bc+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^5-c^2+3ca+6}}.$$

Ta có:

$$a^5-a^2+6-(3a+3)=(a-1)^2(a^3+2a^2+3a+3) \ge 0.$$

Do đó $a^5-a^2+6 \ge 3a+3$. Đẳng thức xảy ra khi $a=1$. Với các đánh giá tương tự cho các số b,c ta suy ra:

$$P \le \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a+ab}}+\frac{1}{\sqrt{1+b+bc}}+\frac{1}{\sqrt{1+c+ca}}\right).$$

Từ đó, kết hợp bất đẳng thức Bunyakovsky, ta nhận được:

$$P^2 \le \frac{1}{3}.3.\left(\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}\right)=1$$

hay $P \le 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 6. [Thailand TST 2018]. *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a+2b+6}} \le \sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+4\sqrt{b}+4\sqrt{c}}}.$$

Lời giải. Đặt

$$M=\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a+2b+6}}, N=\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+4\sqrt{b}+4\sqrt{c}}}.$$

Chúng ta cần chứng minh bất đẳng thức $M \le N$. Bản chất bài toán này là một sự "lắp ghép" cơ học từ hai bất đẳng thức là $M \le 1$ và $1 \le N$. Thật vậy, từ bài toán 4, ta đã có $M \le 1$. Ngoài cách chứng minh như đã trình bày ở trên, chúng ta còn có thể chứng minh $M \le 1$ theo cách được trình bày dưới đây.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy và Bunyakovsky, ta có:

$$M^2 \le 3\sum_{cyc}\frac{1}{a+2b+6}=3\sum_{cyc}\frac{1}{(a+2)+(b+2)+(c+2)} \le 3\sum_{cyc}\frac{\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b+2}}{9}=\sum_{cyc}\frac{1}{a+2}=\frac{\sum_{cyc}ab+4\sum_{cyc}a+12}{9+2\sum_{cyc}ab+4\sum_{cyc}a} \le 1$$

(vì $\sum_{cyc}ab \ge 3$).

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $N \ge 1$. Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a^2+4\sqrt{b}+4\sqrt{c}=a^2+4\sqrt[4]{b^2.a^2b^2c^2}+4\sqrt[4]{c^2.a^2b^2c^2}$$
$$=a^2+4\sqrt[4]{b^2.ab.bc.ca}+4\sqrt[4]{c^2.ab.bc.ca}$$
$$\le a^2+(b^2+ab+bc+ca)+(c^2+ab+bc+ca)$$
$$=(a+b+c)^2.$$

Do đó $\sqrt{a^2+4\sqrt{b}+4\sqrt{c}} \le a+b+c$.

Suy ra: $\frac{a}{\sqrt{a^2+4\sqrt{b}+4\sqrt{c}}} \ge \frac{a}{a+b+c}$.

Vì vậy: $N=\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+4\sqrt{b}+4\sqrt{c}}} \ge \sum_{cyc}\frac{a}{a+b+c}=1.$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Một chút khéo léo trong việc áp dụng bất đẳng thức Holder và bất đẳng thức Jensen giúp chúng ta đạt được lời giải trong các bài toán sau.

Bài toán 7. [Crux Problem 5005]. *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}\right)^3 \le \frac{a^3}{1+a+ab}+\frac{b^3}{1+b+bc}+\frac{c^3}{1+c+ca}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có:

$$\left(\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}\right)^3$$

$$=\left(\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt[3]{1+a+ab}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+a+ab}}\cdot\frac{a}{\sqrt[3]{1+a+ab}}\right)^3$$

$$\le\left(\sum_{cyc}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+a+ab}}\right)^3\right)\left(\sum_{cyc}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+a+ab}}\right)^3\right)\left(\sum_{cyc}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{1+a+ab}}\right)^3\right)$$

$$=\left(\sum_{cyc}\frac{1}{1+a+ab}\right)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a^3}{1+a+ab}\right)$$

$$=\frac{a^3}{1+a+ab}+\frac{b^3}{1+b+bc}+\frac{c^3}{1+c+ca}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 8. [Crux Problem 5020]. *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{\ln a}{1+a+ab}+\frac{\ln b}{1+b+bc}+\frac{\ln c}{1+c+ca}\le 0.$$

Lời giải. Đặt

$$m=\frac{1}{1+a+ab},n=\frac{1}{1+b+bc},p=\frac{1}{1+c+ca}.$$

Ta đã chứng minh được:

$$m+n+p=1 \text{ và } ma+nb+pc=1.$$

Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$m\ln a+n\ln b+p\ln c\le 0$$

với $m,n,p>0$ và $m+n+p=1$.

Xét hàm số $f(x)=\ln x$, $x\in(0;+\infty)$. Đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số này lần lượt là

$$f'(x)=\frac{1}{x};\ f''(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

Từ đó, $f(x)$ là lõm trên $(0;+\infty)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen, với ta nhận được:

$mf(a)+nf(b)+pf(c)\le f(ma+nb+pc)$, tức là:

$$m\ln a+n\ln b+p\ln c\le\ln(ma+nb+pc)=\ln 1=0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc tự luyện.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho a,b,c là các số thực dương thoả điều kiện $abc=2025$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{2025a}{ab+2025a+2025}+\frac{b}{bc+b+2025}+\frac{c}{ca+c+1}.$$

2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}\le\frac{1}{2}.$$

3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\ge 1.$$

4. [Thi HSG Toán lớp 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2014 - 2015] Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{b+2c+3}+\frac{1}{c+2a+3}$.

5. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a+ab+4}+\frac{1}{b+bc+4}+\frac{1}{c+ca+4}.$$

6. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=\frac{1}{a^4-2a+2b^2+5}+\frac{1}{b^4-2b+2c^2+5}+\frac{1}{c^4-2c+2a^2+5}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Kỉ yếu Hội thảo khoa học: *Các chuyên đề Toán học bồi dưỡng học sinh giỏi khu vực Đồng Bằng Sông Cửu Long và miền Đông Nam Bộ, Đồng Tháp*, tháng 8 năm 2013.

2. *Tạp chí Toán học tuổi trẻ* (số 543, tháng 9/2022).

3. *Tạp chí Toán học Canada* (Crux Mathematicorum and Crux with Mayhem).

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 118

PROBLEM. *Find all real numbers x for which*

$$10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x.$$

Solution. It is easy to check that $x = 2$ is a solution. We claim that it is the only one. In fact, dividing by 13^x on both sides gives

$$\left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x.$$

The left hand side is a decreasing function of x and the right hand side is an increasing function of x. Therefoce their graphs can have most one point of intersection.

***Comment*:** More generally,

$$a^2 + (a+1)^2 + \ldots + (a+k)^2 = (a+k+1)^2 + (a+k+2)^2 + \ldots + (a+2k)^2$$

for $a = k(2k+1), k \in \mathbb{N}$.

Remark: This exercise is selected from the book: *101 problems in algebra* from the training of the USA IMO team – T. Andreesscu, Z. Feng

TỪ VỰNG

solution	*: lời giải, nghiệm*
real number	*: số thực*
function	*: hàm số*
graph	*: đồ thị*
point	*: điểm*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

BÀI DỊCH SỐ 116

BÀI TOÁN. *Lập công thức truy hồi để tính số các số có n chữ số, được tạo thành từ các chữ số 1, 2 và 3, không có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau.*

Lời giải. Ký hiệu x_n là số các số cần tìm.

Rõ ràng rằng $x_1 = 3$ và $x_2 = 3^2 - 1 = 8$ (Tại sao?)

Với $n \geq 3$, ta chia tập các số có n chữ số được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3 mà không có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau, thành hai tập con rời nhau:

Tập A gồm các số có chữ số đầu tiên là 1 và chữ số thứ hai là 2 hoặc 3. Tập B gồm các số có chữ số đầu tiên là 2 hoặc 3.

Dễ dàng chứng minh rằng: $|A| = 2x_{n-2}$ và $|B| = 2x_{n-1}$. Vì vậy ta có công thức truy hồi là:

$$x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}, n \geq 3 \text{ và } x_2 = 8, x_1 = 3.$$

***Lưu ý*:** Bài toán này xây dựng từ một bài toán trong *Mathematical Olympiad Series, tập 4.*

Nhận xét. Kỳ này, bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh bạn.

NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

****

DU LỊCH . . . *(Tiếp theo trang 46)*

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải đúng bài này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31/8/2025.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 107. *Cho tam giác ABC và các điểm L, M, N thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của AL, BM, CN với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng* $\frac{AL}{LP} + \frac{BM}{MQ} + \frac{CN}{NR} \geq 9.$

KHÁNH HỮU *(Hà Nội)*



BÀI TOÁN 97. *Cho a, b dương thỏa mãn $a^2+b^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2ab}{a+b+1}.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2024 – 2025).

Lời giải. *Cách 1.* Ta có:

$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)=2.6=12$ nên $a+b\le 2\sqrt{3}$.

Mặt khác do $4ab\le (a+b)^2$ nên ta có:

$$P=\frac{2ab}{a+b+1}=\frac{4ab}{2(a+b+1)}\le\frac{(a+b)^2}{2(a+b+1)}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{2(a+b+1)}-\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}+\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$$=\frac{11(a+b)^2-12(2\sqrt{3}-1)(a+b)-12(2\sqrt{3}-1)}{22(a+b+1)}$$

$$+\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$$=\frac{11(a+b)^2-22\sqrt{3}(a+b)-(2\sqrt{3}-12)(a+b)+2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-12)}{22(a+b+1)}$$

$$+\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$$=\frac{11(a+b)\left[(a+b)-2\sqrt{3}\right]-\left(2\sqrt{3}-12\right)\left[(a+b)-2\sqrt{3}\right]}{22(a+b+1)}$$

$$+\frac{6\left(2\sqrt{3}-1\right)}{11}$$

$$=\frac{\left(a+b-2\sqrt{3}\right)\left[11(a+b)-\left(2\sqrt{3}-12\right)\right]}{22(a+b+1)}+\frac{6\left(2\sqrt{3}-1\right)}{11}$$

$$\le\frac{6\left(2\sqrt{3}-1\right)}{11}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{6\left(2\sqrt{3}-1\right)}{11}$.

Cách 2. Ta có:

$$a+b=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{2ab+a^2+b^2}=\sqrt{2ab+6}$$

và $2ab\le a^2+b^2=6$, do đó: $\sqrt{2ab+6}\le 2\sqrt{3}$.

Vậy $P=\dfrac{2ab}{a+b+1}=\dfrac{2ab}{\sqrt{2ab+6}+1}$

$$=\frac{2ab}{\sqrt{2ab+6}+1}-\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}+\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$$=\frac{22ab-6(2\sqrt{3}-1)\sqrt{2ab+6}-6(2\sqrt{3}-1)}{11(\sqrt{2ab+6}+1)}+\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$$=\frac{11(2ab+6)-22\sqrt{3}\sqrt{2ab+6}}{11(\sqrt{2ab+6}+1)}$$

$$+\frac{(10\sqrt{3}+6)\sqrt{2ab+6}-2\sqrt{3}(10\sqrt{3}+6)}{11(\sqrt{2ab+6}+1)}+\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$$=\frac{11\sqrt{2ab+6}(\sqrt{2ab+6}-2\sqrt{3})+(10\sqrt{3}+6)(\sqrt{2ab+6}-2\sqrt{3})}{11(\sqrt{2ab+6}+1)}$$

$$+\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$$=\frac{(\sqrt{2ab+6}-2\sqrt{3})(11\sqrt{2ab+6}+10\sqrt{3}+6)}{11(\sqrt{2ab+6}+1)}+\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$\le\dfrac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$.

Cách 3. Ta có:

$$a+b=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{2ab+a^2+b^2}=\sqrt{2ab+6}$$

và $2ab\le a^2+b^2=6$ nên $\sqrt{2ab+6}\le 2\sqrt{3}$.

Do đó:

$$P=\frac{2ab}{a+b+1}=\frac{2ab}{\sqrt{2ab+6}+1}=\frac{(2ab+6)-1}{\sqrt{2ab+6}+1}+\frac{-5}{\sqrt{2ab+6}+1}$$

$$=\sqrt{2ab+6}-1+\frac{-5}{\sqrt{2ab+6}+1}$$

$\le 2\sqrt{3}-1+\dfrac{-5}{2\sqrt{3}+1}=\dfrac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$.

Cách 4. Ta có: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)=2.6=12$

Do đó $a+b\le 2\sqrt{3}$. Vì vậy:

$$P=\frac{2ab}{a+b+1}=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{a+b+1}=\frac{(a+b)^2-6}{a+b+1}$$

$$=\frac{(a+b)^2-1}{a+b+1}+\frac{-5}{a+b+1}=(a+b)-1+\frac{-5}{a+b+1}$$

$$\le 2\sqrt{3}-1+\frac{-5}{2\sqrt{3}+1}=2\sqrt{3}-1+\frac{-5(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$.

Cách 5. Ta có: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)=2.6=12$.

Do đó $a+b\le 2\sqrt{3}$.

$$\frac{a+b+1}{ab}=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{ab}\ge\frac{4}{a+b}+\frac{4}{(a+b)^2}$$

$$\ge\frac{4}{2\sqrt{3}}+\frac{4}{12}=\frac{2\sqrt{3}+1}{3}.$$

Vì vậy $P=\dfrac{2ab}{a+b+1}\le 2:\dfrac{2\sqrt{3}+1}{3}=\dfrac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$.

Cách 6. Ta có:

$0<(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)=12\Rightarrow 0<a+b\le 2\sqrt{3}$.

Từ giả thiết và yêu cầu của bài toán suy ra:

$$\begin{cases}a^2+b^2=6\\(a+b)P+P=2ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=6\\(a+b)P+P=(a+b)^2-6\end{cases}.$$

Nếu đặt $t=a+b$ thì tam thức bậc hai

$$f(t)=t^2-Pt-P-6$$

có nghiệm $t\in\left(0;2\sqrt{3}\right]$. Từ điều kiện có nghiệm này ta cũng tìm được giá nhất lớn nhất của P là $\dfrac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$ khi $a=b=\sqrt{3}$.

Cách 7. Theo cách giải trên ta có $0<a+b\le 2\sqrt{3}$.

Từ giả thiết suy ra $2ab=(a+b)^2-6$. Vậy

$$P=f(t)=\frac{t^2-6}{t+1},\ t=a+b\le\left(0;2\sqrt{3}\right].$$

Ta có:

$$f'(t)=\frac{t^2+2t+6}{t+1}=\frac{(t+1)^2+5}{t+1}>0,\forall t\in\left(0;2\sqrt{3}\right].$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left(0;2\sqrt{3}\right]$. Suy ra:

$$P=f(t)\le f(2\sqrt{3})=\frac{6}{2\sqrt{3}+1}.$$ Vậy

$$\max P=\frac{6(2\sqrt{3}-1)}{11}$$ khi $t=2\sqrt{3}$ hay $a=b=\sqrt{3}$.

Nhận xét. Trong 7 cách giải nêu trên thì 5 cách đầu tiên là của bạn *Nguyễn Đức Tấn*, người giới thiệu bài toán; cách 6 và cách 7 thuộc về bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định.** Các bạn: *Nguyễn Chí Đại*, 10A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh**, *Phan Viết Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**, *Nguyễn Thảo Nguyên*, 10A1, THPT Vũng Tàu, **Bà Rịa – Vũng Tàu**, *Vũ Đức Duy*, CTy TNHH Thuế và Tư vấn PwC cũng đóng góp một cách giải bằng cách sử dụng BĐT để đánh giá. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 99 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31/8/2025.

BÀI TOÁN 99. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, AD // BC, $AD=2a$, $AB=BC=CD=a$. $SA\perp(ABCD)$. Biết $d(A,(SBD))=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).*

NGUYỄN HỮU VĂN
(*GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An*)
HOÀNG THÀNH ĐẠT
(*GV THPT Thanh Chương 3, Nghệ An*)

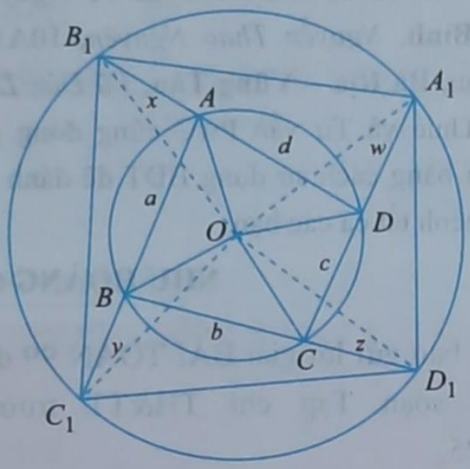


BÀI TOÁN 105 (China 1988 and 1993). *Xét hai đường tròn đồng tâm bán kính R và R_1 ($R_1 > R$) và một tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nhỏ. Các tia AB, BC, CD, DA thứ tự cắt đường tròn lớn tại C_1, D_1, A_1, B_1. Chứng minh rằng*

a) $\dfrac{C_{A_1B_1C_1D_1}}{C_{ABCD}} \ge \dfrac{R_1}{R}$; b) $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \ge \left(\dfrac{R_1}{R}\right)^2$

trong đó C_{MNPQ}, S_{MNPQ} lần lượt kí hiệu là chu vi và diện tích của tứ giác $MNPQ$.

Lời giải. a) Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho các tứ giác $OAB_1C_1, OBC_1D_1, OCD_1A_1, ODA_1B_1$ ta có:



$$(1)\begin{cases} AC_1.R_1 \le B_1C_1.R + AB_1.R_1; \\ BD_1.R_1 \le C_1D_1.R + BC_1.R_1; \\ CA_1.R_1 \le D_1A_1.R + CD_1.R_1; \\ DB_1.R_1 \le A_1B_1.R + DA_1.R_1. \end{cases}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên với chú ý

$$AC_1 = AB + BC_1,\ BD_1 = BC + CD_1,$$
$$CA_1 = CD + DA_1,\ DB_1 = DA + AB_1$$

ta được: $R_1.C_{ABCD} + R_1(BC_1 + CD_1 + DA_1 + AB_1)$

$$\le R.C_{A_1B_1C_1D_1} + R_1(AB_1 + BC_1 + CD_1 + DA_1).$$

Do đó: $\dfrac{C_{A_1B_1C_1D_1}}{C_{ABCD}} \ge \dfrac{R_1}{R}$.

b) Đặt: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AB_1 = x$, $BC_1 = y$, $CD_1 = z$, $DA_1 = w$. Ta có:

$$S_{ABCD} = \frac{ad\sin A + bc\sin C}{2} = \frac{\sin A}{2}(ad + bc);$$
$$= \frac{ab\sin B + cd\sin D}{2} = \frac{\sin B}{2}(ab + cd);$$
$$S_{AB_1C_1} = \frac{x(a+y)\sin(180^0 - A)}{2} = \frac{x(a+y)\sin A}{2};$$

Suy ra: $\dfrac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABCD}} = \dfrac{x(a+y)}{ad+bc}$. Tương tự:

$$\frac{S_{BC_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{y(b+z)}{ab+cd};\ \frac{S_{CD_1A_1}}{S_{ABCD}} = \frac{z(c+w)}{ad+bc};\ \frac{S_{DA_1B_1}}{S_{ABCD}} = \frac{w(d+x)}{ab+cd}.$$

Do đó:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = 1 + \frac{x(a+y)+z(w+c)}{ad+bc} + \frac{y(b+z)+w(d+x)}{ab+cd}.$$

Ta có phương tích của các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 đối với đường tròn (O) bằng nhau và bằng

$$R_1^2 - R^2 = w(w+c) = x(x+d) = y(y+a) = z(z+b).$$

Do đó:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = 1 + (R_1^2 - R^2)\left[\frac{x}{y(ad+bc)} + \frac{z}{w(ad+bc)} + \frac{y}{z(ab+cd)} + \frac{w}{x(ab+cd)}\right]$$
$$\ge 1 + \frac{4(R_1^2 - R^2)}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}.$$

Ta có: $2\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} \overset{(1)}{\le} ad + bc + ab + cd$

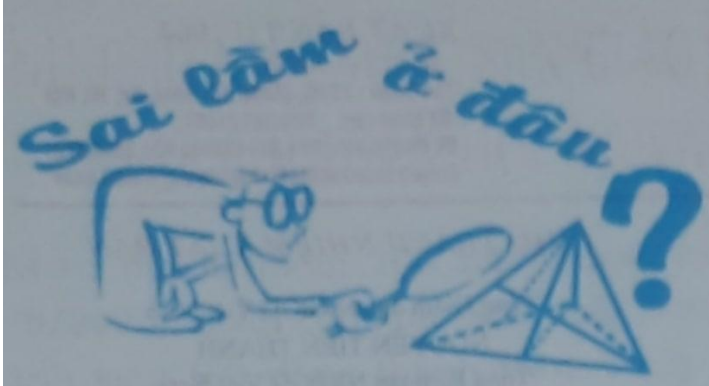
$$= (a+c)(b+d) \le \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 \overset{(2)}{\le} \frac{(4\sqrt{2}R)^2}{4} = 8R^2$$

((1) có được do BĐT Cauchy, (2) có được do thực tế rằng tứ giác nội tiếp đường tròn thì hình vuông có chu vi lớn nhất). Vì vậy:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = 1 + \frac{4(R_1^2 - R^2)}{4R^2} = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $ABCD$ là hình vuông.

Để các BĐT (1) trở thành đẳng thức thì các tứ giác $OAB_1C_1, OBC_1D_1, OCD_1A_1, ODA_1B_1$ phải là các tứ giác nội tiếp, do đó OA, OB, OC, OD lần lượt là phân giác trong các góc A, B, C, D của tứ giác $ABCD$. *(Xem tiếp trang 43)*



GIẢI ĐÁP: GIÁ TRỊ x NÀO?

(Đề đăng trên TH&TT số 573, tháng 3 năm 2025)

Phân tích sai lầm.

Lời giải của bạn *Thái* là sai khi lập luận rằng "ba số a, b, c theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số nhân khi và chỉ khi $ac=b^2$". Nếu ba số a, b, c theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số nhân thì $ac=b^2$. Nhưng điều ngược lại không đúng, ba số a, b, c thoả mãn $ac=b^2$, chưa chắc a, b, c theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số nhân (chẳng hạn $a=0$, $b=0$, $c=1$).

Lời giải của bạn *Cường* cũng sai khi lập luận rằng "ba số a, b, c theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số nhân và $a=b$ cấp số nhân đó có công bội $q=1$" (chẳng hạn $a=0$, $b=0$, $c=0$ nhưng $q=2$).

Lời giải đúng.

Nếu ba số $x^2+x-2, x^2+x-2, 2x^2+4x$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thì

$$(x^2+x-2)^2=(x^2+x-2)(2x^2+4x)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)(x^2+3x+2)=0\Leftrightarrow x=-2, x=-1, x=1.$$

Thử lại ta thấy, với $x=-2$ thì $x^2+x-2=2x^2+4x=0$, ba số 0, 0, 0 là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số nhân. Với $x=-1$ thì $x^2+x-2=2x^2+4x=-2$, ba số -2, -2, -2 là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số nhân. Với $x=1$ thì $x^2+x-2=0, 2x^2+4x=6$, nhưng ba số 0, 0, 6 không phải là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số nhân. Vậy có hai giá trị $x=-2, x=-1$ thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiệnđược sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?



Trong đề kiểm tra có câu hỏi trắc nghiệm sau

Tìm tất cả số thực m sao cho $\dfrac{4^a}{4^a+m}+\dfrac{4^b}{4^b+m}=1$ *với mọi a,b thoả mãn $a+b=1$.*

A. $m=\pm 2$ **B.** $m=4$

C. $m=2$ **D.** $m=16$

Bạn Minh đã chọn A và trình bày lời giải như sau:

Ta có: $a+b=1\Leftrightarrow b=1-a$.

Khi đó: $\dfrac{4^a}{4^a+m}+\dfrac{4^{1-a}}{4^{1-a}+m}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{4+m.4^a+4+m.4^{1-a}}{4+m.4^a+m.4^{1-a}+m^2}=1$$

$$\Leftrightarrow m^2=4$$

$$\Leftrightarrow m=\pm 2.$$

Chọn **A**.

Theo bạn, kết quả Minh chọn đã đúng chưa?

NGUYỄN THANH GIANG

(Trường THPT chuyên Hưng Yên)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 577 (7.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142049, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập* : *TS.* TRẦN HỮU NAM** **Phó tổng biên tập : *CN.* TRẦN THỊ KIM CƯƠNG**
***Thư kí Tòa soạn*: CN. VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Đoàn Khánh Tuyên, Trần Minh Vũ, Võ Tá Quang Nhật – Một vài dạng toán tổ hợp thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi THCS và tuyển sinh vào lớp 10.

10 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2025 – 2026.

11 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Công Chuẩn – Khai thác bài toán cơ bản trong SGK và SBT, hướng dẫn học sinh suy luận, khám phá.

17 **Bạn có biết**
Hoàng Đức Tân – Mở rộng bất đẳng thức Erdos – Mordell.

20 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/577, ..., T12/577, L1/577, L2/577.

22 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/573, ..., T12/573, L1/573, L2/573

31 **Phương pháp giải toán**
Trần Văn Hạnh – Một số phương pháp giải một số dạng toán tìm GTLN, GTNN.

39 **Bạn đọc tìm tòi**
Cao Minh Quang – Tiếp tục khai thác ứng dụng của một đẳng thức đẹp.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 118 – Bài dịch số 116.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 97 – Đề bài toán 99.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 105. Đề bài toán 107.

46 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

LÃNH ĐẠO NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM THĂM, CHÚC MỪNG TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ VĂN HỌC TRONG NHÀ TRƯỜNG

Nhân dịp Kỉ niệm 100 năm Ngày báo chí Cách mạng Việt Nam (21/6/1925 - 21/6/2025), đoàn công tác Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam do ông Phạm Vĩnh Thái, Thành viên Hội đồng thành viên, Tổng biên tập Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam làm trưởng đoàn đã đến thăm, chúc mừng cán bộ, người lao động Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường.

Năm 2020, theo chủ trương của Chính phủ, Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường (trực thuộc Viện nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục), được thành lập trên cơ sở hợp nhất 3 Tạp chí: Toán học và Tuổi trẻ, Toán Tuổi thơ, Văn học và Tuổi trẻ, hoạt động theo Giấy phép hoạt động báo chí của Bộ trưởng Bộ Thông tin và Truyền thông số 534 ngày 19/11/2020. Hiện nay, Tạp chí phát hành mỗi số gồm 5 kì: Toán học và Tuổi trẻ, Toán Tuổi thơ 1, Toán Tuổi thơ 2, Văn học và Tuổi trẻ, Văn Tuổi thơ.



Ông Phạm Vĩnh Thái, Thành viên Hội đồng thành viên, Tổng biên tập Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tặng hoa chúc mừng Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường nhân dịp 21/6

Thăm hỏi, động viên cán bộ, người lao động Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường, ông Phạm Vĩnh Thái đã đánh giá cao sự nỗ lực, cố gắng hoàn thành tốt nhiệm vụ của tập thể đơn vị trong thời gian qua; đồng thời chia sẻ với Tạp chí những khó khăn hiện tại. Tổng biên tập Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam mong rằng, trong thời gian tới, Tạp chí không ngừng được cải tiến cả về nội dung và hình thức để phục vụ bạn đọc ngày càng tốt hơn; cán bộ, người lao động của Tạp chí tiếp tục đoàn kết, tháo gỡ khó khăn, phấn đấu hoàn thành tốt nhiệm vụ, tăng doanh thu, đảm bảo đời sống cho người lao động,...

Cũng nhân dịp này, một số cơ quan có mối quan hệ chặt chẽ với Viện và Tạp chí cũng đến tặng hoa, chúc mừng đơn vị. Đây là nguồn động viên to lớn, tiếp thêm động lực để đơn vị tiếp tục thực hiện tốt nhiệm vụ được giao, phát huy vai trò là nơi khơi nguồn sáng tạo, là người bạn của giáo viên và học sinh yêu Toán, yêu Văn trên cả nước.

QUẢNG SƠN

BỒI DƯỠNG GIÁO VIÊN KIỀU BÀO TẠI ĐÔNG BẮC THÁI LAN

LAN TOẢ TIẾNG VIỆT - "NGỌN LỬA" NGHĨA TÌNH QUÊ HƯƠNG

Trong hai ngày 21-22/6/2025, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã phối hợp với Tổng Lãnh sự quán Việt Nam tại Khỏn Kèn tổ chức thành công Khoá tập huấn bồi dưỡng, nâng cao năng lực dạy học tiếng Việt cho giáo viên kiều bào tại Đông Bắc Thái Lan.

Chương trình tập huấn trực tuyến thu hút hơn 80 giáo viên kiều bào đang trực tiếp giảng dạy tiếng Việt tại nhiều tỉnh Đông Bắc Thái Lan, cùng nhiều chuyên gia giáo dục trong nước, các nhà quản lý văn hóa - ngôn ngữ và đại diện hội đoàn người Việt tại Thái Lan, Nhật Bản, Hàn Quốc.

Khẳng định vai trò đặc biệt của tiếng Việt đối với cộng đồng người Việt Nam ở nước ngoài, Tổng Lãnh sự Đinh Hoàng Linh phát biểu: "Tiếng nói là tài sản thiêng liêng của dân tộc. Nếu văn hoá là ánh sáng soi đường, thì tiếng Việt chính là ngọn lửa thắp sáng tinh thần yêu nước, gắn kết kiều bào với quê hương, với cội nguồn văn hoá Việt Nam". Ông nhắc lại dấu mốc lịch sử, gần 100 năm trước, Chủ tịch Hồ Chí Minh đã mở lớp dạy tiếng Việt cho kiều bào ta lần đầu tiên tại Udon Thani. Từ đó đến nay, nhiều thế hệ người Việt ở Thái Lan đã gìn giữ và truyền lại tiếng Việt như "ngọn lửa thiêng" thắp sáng lòng yêu nước nồng nàn cho các thế hệ sau.

Phát biểu tại lễ khai mạc, bà Ngô Thị Thanh Mai - Phó Chủ nhiệm Ủy ban Nhà nước về người Việt Nam ở nước ngoài, Bộ Ngoại giao - cho biết, tháng 8/2022, Thủ tướng Chính phủ đã phê duyệt và giao Bộ Ngoại giao chủ trì triển khai Đề án "Ngày Tôn vinh tiếng Việt trong cộng đồng người Việt Nam ở nước ngoài", quyết định lấy Ngày 8/9 hàng năm là Ngày Tôn vinh tiếng Việt. "Khoá tập huấn lần này là một trong những hoạt động cụ thể, thiết thực nhằm triển khai Đề án. Chúng tôi đánh giá cao sự chủ động và tâm huyết của Tổng lãnh sự quán Việt Nam tại Khỏn Kèn (Thái Lan) và NXBGDVN khi không chỉ mang đến chương trình chuyên môn chất lượng, mà còn đồng hành thực sự cùng cộng đồng trong suốt quá trình thực hiện nhiệm vụ bảo tồn tiếng Việt", bà khẳng định. Nhân dịp này, bà bày tỏ cảm ơn các tổ chức, cá nhân, trong đó có NXBGDVN, vì sự đồng hành, đóng góp tích cực trong việc triển khai Đề án Ngày Tôn vinh tiếng Việt thông qua việc chung tay xây dựng Tủ sách tiếng Việt cho cộng đồng, biên soạn tài liệu, xây dựng học liệu số, tham gia tổ chức bồi dưỡng giáo viên, phát triển phong trào học tiếng Việt tại các quốc gia có đông người Việt sinh sống... Bà bày tỏ tin tưởng rằng, thông qua các hoạt động như tập huấn, kết nối chuyên môn và cung cấp học liệu phù hợp, tiếng Việt sẽ tiếp tục được nuôi dưỡng trong đời sống của thế hệ trẻ kiều bào - không chỉ như một ngôn ngữ, mà còn như một phần của bản sắc và lòng tự hào dân tộc.

Trong không khí trang trọng và ấm áp, các đại biểu đến từ Ủy ban Trung ương Mặt trận Tổ quốc Việt Nam, Trường Đại học Hoàng Gia Udon Thani (Thái Lan)... đã chia sẻ, động viên và trao đổi kinh nghiệm nhằm phát triển hiệu quả hơn việc dạy học tiếng Việt trong cộng đồng. Các bài giảng trong khoá bồi dưỡng được thực hiện bởi đội ngũ giảng viên có kinh nghiệm. Trong 2 ngày, học viên được trao đổi trực tiếp, thực hành tại chỗ và kết nối mạng lưới hỗ trợ chuyên môn sau khi khoá tập huấn kết thúc. Nhiều giáo viên kiều bào xúc động chia sẻ; đây là một dịp quý báu để các giáo viên vừa được tiếp thêm lửa, vừa được trang bị kiến thức chuyên sâu mà trước đây chưa từng có cơ hội tiếp cận. Kết thúc chương trình, đại diện NXBGDVN cam kết sẽ tiếp tục đồng hành lâu dài với cộng đồng người Việt Nam ở nước ngoài, không chỉ bằng sách vở, học liệu, mà bằng trách nhiệm văn hoá và tâm huyết giáo dục.

Chương trình bồi dưỡng giáo viên kiều bào tại Đông Bắc Thái Lan là một trong những hoạt động thiết thực hưởng ứng Ngày Tôn vinh tiếng Việt trong cộng đồng người Việt Nam ở nước ngoài và cụ thể hoá chủ trương bảo tồn, phát huy tiếng Việt - văn hoá Việt trong thời đại hội nhập.

BAN TRUYỀN THÔNG - NXBGD VIỆT NAM

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT7M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2025
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng