TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 576
Tháng 6 - 2025
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học Anh
Isaac Barrow
(1630-1677)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bộ sách được biên soạn bởi đội ngũ tác giả là các tác giả SGK, các nhà khoa học, quý thầy/ cô giàu kinh nghiệm:
- **Môn Toán:** Trần Quang Hùng, Phạm Việt Hải,...
- **Môn Vật lí:** Tô Giang, Trần Thuý Hằng,...
- **Môn Hoá học:** Lê Trọng Huyền, Nguyễn Văn Hải, Nguyễn Thanh Hưng, Vũ Anh Tuấn.
- **Môn Sinh học:** Nguyễn Thị Nga, Lê Thị Thuỷ,...

Trân trọng giới thiệu bộ sách

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN

(DÀNH CHO HỌC SINH THPT – THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018)



Bộ sách **Nâng cao và phát triển** được biên soạn nhằm giúp các em học sinh củng cố và nâng cao kiến thức lí thuyết, rèn luyện kĩ năng giải quyết các tình huống thực tiễn, từ đó giúp các em phát triển năng lực, phẩm chất và mở rộng tầm hiểu biết.

Sách viết theo chủ đề/bài bám sát chương trình giáo dục phổ thông năm 2018. Mỗi chủ đề/bài thường có:

KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Gồm các kiến thức cơ bản và nâng cao mà học sinh cần phải nắm vững.

BÀI TẬP

Các bài tập đa dạng nhằm củng cố và nâng cao kiến thức, bài tập đi kèm hoạt động, bài tập áp dụng kiến thức để giải quyết các vấn đề trong thực tế cuộc sống.

Các bài tập có hướng dẫn giải hoặc đáp án giúp HS tự kiểm tra, đánh giá trong quá trình ôn luyện.

Bộ sách là tài liệu tham khảo bổ ích dành cho các em học sinh yêu thích môn học, muốn tìm hiểu, đào sâu thêm kiến thức. Sách cũng là tài liệu thiết thực để hỗ trợ, gợi ý cho các thầy cô giáo trong quá trình bồi dưỡng học sinh khá, giỏi.

BẠN ĐỌC TÌM MUA SÁCH TẠI

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: Tầng 4, Toà Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Q. Thanh Xuân, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.35121533 (số máy lẻ 118) - 0904893398 | **Fax:** 024.35123278
Email: kinhdoanh.heps@gmail.com | **Website:** http://xbgdhn.vn/



MỘT CÁCH HỌC TOÁN

NGUYỄN ĐỨC TẤN - TRẦN QUỐC LUẬT
(TP. Hồ Chí Minh)

Sau khi tìm được lời giải của một bài toán, chớ vội dừng lại mà hãy tiếp tục suy nghĩ nhiều lần giúp chúng ta thiết lập hoặc giải quyết được những bài toán mới, hay và khó. Bài viết này chúng tôi sẽ cùng bạn đọc tìm tòi, khai thác từ bài toán sau

Bài toán A. *Tính giá trị của biểu thức*

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{288}+\sqrt{289}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{288}+\sqrt{289}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+...+\frac{\sqrt{289}-\sqrt{288}}{289-288}$$
$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{289}-\sqrt{288}$$
$$=-\sqrt{1}+\sqrt{289}=-1+17=16.$$

Chắc hẳn các bạn cũng nhận ra bài toán tổng quát của bài toán A.

Bài toán 1. *Cho $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$. Tính giá trị của biểu thức*

$$A_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$A_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$
$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$
$$=\sqrt{n}-1.$$

Từ đây, ta có bài toán mới sau

Bài toán 2. *Tìm các số nguyên dương n sao cho*

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

là một số nguyên.

- Hơn thế nữa, nếu chúng ta có

$$a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_n-a_{n-1}=d$$ thì

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$
$$=\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\right).$$

Từ đó chúng ta có nhiều bài toán mới, chẳng hạn:

Bài toán 3. *Tính giá trị của biểu thức*

$$B=\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{103}}+\frac{1}{\sqrt{103}+\sqrt{106}}+\frac{1}{\sqrt{106}+\sqrt{109}}+...+\frac{1}{\sqrt{358}+\sqrt{361}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$B=\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{103}}+\frac{1}{\sqrt{103}+\sqrt{106}}+\frac{1}{\sqrt{106}+\sqrt{109}}+...+\frac{1}{\sqrt{358}+\sqrt{361}}$$
$$=\frac{\sqrt{103}-\sqrt{100}}{103-100}+\frac{\sqrt{106}-\sqrt{103}}{106-103}+\frac{\sqrt{109}-\sqrt{106}}{109-106}+...+\frac{\sqrt{361}-\sqrt{358}}{361-358}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{103}-\sqrt{100}+\sqrt{106}-\sqrt{103}+\sqrt{109}-\sqrt{106}+...+\sqrt{361}-\sqrt{358}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(-\sqrt{100}+\sqrt{361}\right)=\frac{1}{3}(-10+19)=3.$$

Từ $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}$ cho ta nghĩ đến

$$\frac{1}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}=\frac{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}.$$

Từ đó ta có nhiều bài toán mới nữa, chẳng hạn

Bài toán 4. *Tính giá trị của biểu thức*

$$C=\frac{1}{\sqrt{103}-\sqrt{100}}-\frac{1}{\sqrt{106}-\sqrt{103}}+\frac{1}{\sqrt{109}-\sqrt{106}}-...-\frac{1}{\sqrt{358}-\sqrt{355}}+\frac{1}{\sqrt{361}-\sqrt{358}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$C=\frac{1}{\sqrt{103}-\sqrt{100}}-\frac{1}{\sqrt{106}-\sqrt{103}}+\frac{1}{\sqrt{109}-\sqrt{106}}$$
$$-...-\frac{1}{\sqrt{358}-\sqrt{355}}+\frac{1}{\sqrt{361}-\sqrt{358}}$$
$$=\frac{\sqrt{103}+\sqrt{100}}{103-100}-\frac{\sqrt{106}+\sqrt{103}}{106-103}+\frac{\sqrt{109}+\sqrt{106}}{109-106}$$
$$-...-\frac{\sqrt{358}+\sqrt{355}}{358-355}+\frac{\sqrt{361}+\sqrt{358}}{361-358}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{103}+\sqrt{100}-\sqrt{106}-\sqrt{103}+\sqrt{109}+\sqrt{106}\right.$$
$$\left.-...-\sqrt{358}-\sqrt{355}+\sqrt{361}+\sqrt{358}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{100}+\sqrt{361}\right)=\frac{1}{3}(10+19)=\frac{29}{3}.$$

Bài toán 5. *Tính giá trị của biểu thức*

$$D=\frac{1}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)\sqrt{1.2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{2.3}}+\frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\sqrt{3.4}}$$
$$+...+\frac{1}{\left(\sqrt{99}+\sqrt{100}\right)\sqrt{99.100}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$D=\frac{1}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)\sqrt{1.2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{2.3}}+\frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\sqrt{3.4}}$$
$$+...+\frac{1}{\left(\sqrt{99}+\sqrt{100}\right)\sqrt{99.100}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1.2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2.3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3.1}}+...+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{99.100}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$$
$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

- Ta cũng biết $\frac{1}{\sqrt[3]{a_1^2}+\sqrt[3]{a_1}\sqrt[3]{a_2}+\sqrt[3]{a_2^2}}=\frac{\sqrt[3]{a_2}-\sqrt[3]{a_1}}{a_2-a_1}$,

từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 6. *Tính*

$$E=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}}$$
$$+...+\frac{1}{\sqrt[3]{342^2}+\sqrt[3]{342.343}+\sqrt[3]{343^2}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$E=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}}$$
$$+...+\frac{1}{\sqrt[3]{342^2}+\sqrt[3]{342.343}+\sqrt[3]{343^2}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}}{2-1}+\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}+\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}{4-3}+...+\frac{\sqrt[3]{343}-\sqrt[3]{342}}{343-342}$$
$$=\sqrt[3]{343}-\sqrt[3]{1}=6.$$

Bài toán 7. *Chứng minh* $F<\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ *với*

$$F=\frac{1}{\left(\sqrt{1}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{1.3}\right)}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\left(3+\sqrt{2.4}\right)}$$
$$+...+\frac{1}{\left(\sqrt{100}+2\sqrt{101}+\sqrt{102}\right)\left(101+\sqrt{100.102}\right)}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{n(n+2)}+n+1\right)\left(\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=$$
$$=\frac{n+1-\sqrt{n(n+2)}}{\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{4(n+1)-\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)^2}{2\left(\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$
$$=\frac{-\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{2}.$$

Suy ra:

$$F=\frac{-\sqrt{1}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}+\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{4}}{2}$$
$$+...+\frac{-\sqrt{100}+2\sqrt{101}-\sqrt{102}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}-\frac{\sqrt{102}-\sqrt{101}}{2}$$
$$<\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Bài toán 8. *Tính*

$$G=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2^2-1}}}+...+\frac{1}{\sqrt{100+\sqrt{100^2-1}}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} \text{ với } n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra: $G=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{0}+...+\sqrt{101}-\sqrt{99}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{101}+9}{\sqrt{2}}$.

Bài toán 9. *Tính*

$$H=\frac{4+\sqrt{1.3}}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{8+\sqrt{3.5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{12+\sqrt{5.7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\frac{48+\sqrt{23.25}}{\sqrt{23}+\sqrt{25}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{2n+2+\sqrt{n}.\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\frac{(\sqrt{n+2})^3-(\sqrt{n})^3}{2} \text{ với } n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra:

$$H=\frac{(\sqrt{3})^3-(\sqrt{1})^3+...+(\sqrt{25})^3-(\sqrt{23})^3}{2}=62.$$

• Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{289}}=$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{289}+\sqrt{289}}\right)$$

$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{288}+\sqrt{289}}\right)$$

$=2.16=32.$

Từ đó, chúng ta có bài toán bất đẳng thức sau

Bài toán 10. *Chứng minh*

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{289}}<32.$$

Tiếp tục ta còn có:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{289}}$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{289}+\sqrt{289}}\right)$$

$$>2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{289}+\sqrt{290}}\right)$$

$$=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{290}-\sqrt{289}\right)$$

$$=2\left(-\sqrt{2}+\sqrt{290}\right)$$

$$>2\left(-\sqrt{2,25}+\sqrt{289}\right)$$

$$=2(-1,5+17)$$

$$=31.$$

Như vậy: $31<\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{289}}<32.$

Do $31, 32$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên chúng ta có hai bài toán hay như sau

Bài toán 11. *Chứng minh*

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{289}}$$

không thể là số nguyên.

Bài toán 12. *Cho* $I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{289}}$.

Tìm $[I]$.

• Chúng ta cùng đến với các bài toán BĐT hay sau

Bài toán 13. *Chứng minh*

$$J=\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2024\sqrt{2023}}<2.$$

Lời giải. Ta có: $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n}}{(n+1)n}=\dfrac{\sqrt{n}}{n}-\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Suy ra:

$$J=\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2024\sqrt{2023}}$$

$$=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}+...+\frac{\sqrt{2023}}{2023}-\frac{\sqrt{2023}}{2014}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}+...+\frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}{2023}-\frac{\sqrt{2023}}{2014}$$

$$<1+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1.2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2.3}}+...+\frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}{\sqrt{2022.2023}}$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2022}}-\frac{1}{\sqrt{2023}}$$

$$=2-\frac{1}{\sqrt{2023}}<2.$$

Bài toán 14. *Chứng minh*

$$K=\frac{1}{\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{342}\sqrt[3]{343}}>18.$$

Lời giải. Do

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2+3\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}>3\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$$

khi $a\neq b$ nên ta có:

$$\frac{K}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{3\sqrt[3]{342}\sqrt[3]{343}}$$

$$>\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}}$$

$$+...+\frac{1}{\sqrt[3]{342^2}+\sqrt[3]{342.343}+\sqrt[3]{343^2}}$$

$$=E=6.$$

Suy ra $K>18$.

Bài toán 15. *Chứng minh rằng*

$$L=\frac{1}{2\left(\sqrt{1}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{3\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}+\ldots+\frac{1}{101\left(\sqrt{100}+2\sqrt{101}+\sqrt{102}\right)}<\sqrt{2}-1.$$

Lời giải. Do $\sqrt{n(n+2)}<n+1$ nên ta có:

$$\frac{L}{2}=\frac{1}{(2+2)\left(\sqrt{1}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{(3+3)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}+\ldots+\frac{1}{(101+101)\left(\sqrt{100}+2\sqrt{101}+\sqrt{102}\right)}$$

$$<\frac{1}{(2+\sqrt{1.3})\left(\sqrt{1}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{(3+\sqrt{2.4})\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}+\ldots+\frac{1}{(101+\sqrt{100.102})\left(\sqrt{100}+2\sqrt{101}+\sqrt{102}\right)}$$

$$=F<\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Suy ra $L<\sqrt{2}-1$.

Bài toán 16. *Chứng minh*

$$M=\frac{1}{\sqrt[3]{1^4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3^4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}<4.$$

Lời giải. Với $n\in\mathbb{N},n\geq 2$, ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}<3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\quad(1).$$

Thật vậy: $(1)\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)>\frac{\sqrt[3]{n-1}}{n}$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n}.\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2}}>\frac{\sqrt[3]{n-1}}{n},$$

BĐT cuối đúng do

$$\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n}.\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}>\frac{\sqrt[3]{n-1}}{n}.$$

Do vậy:

$$M<\frac{1}{\sqrt[3]{1^4}}+3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)+\ldots+3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

$$=4-\frac{3}{\sqrt[3]{n}}<4.$$

Bài toán 17. *Cho* $u_1=2;u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n^2}$ *với* $n\in\mathbb{N}^*$.

Chứng minh $\frac{1}{u_1^4}+\frac{1}{u_2^4}+\ldots+\frac{1}{u_n^4}<4$ *với* $n\in\mathbb{N}^*,n\geq 2$.

Hướng dẫn. Dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh $u_n>\sqrt[3]{n}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Sau đó sử dụng kết quả trong Bài toán 16.

Bài toán 18. *Tìm* $[N]$ *với*

$$N=\frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024^3}}.$$

Lời giải. Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{2\sqrt{n^3}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$

với mọi $n\in\mathbb{N},n\geq 2$. Suy ra:

$$N=\frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024^3}}$$

$$<1+2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2023}}-\frac{1}{\sqrt{2024}}\right)<3$$

và $N>1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}\right)$

$$=1+\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2025}}>2.$$

Do vậy $[N]=2$.

• Nếu $a_1,a_2,\ldots,a_{289}$ là các số nguyên dương khác nhau thì

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{289}}}\leq\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{289}}<33.$$

Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 19. *Cho* $a_1,a_2,\ldots,a_{289}$ *là các số nguyên dương thỏa mãn* $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{289}}}=33$.

Chứng minh trong 289 *số* $a_1,a_2,\ldots,a_{289}$ *có ít nhất hai số bằng nhau.*

Bài toán 20. *Tìm số nguyên dương lớn nhất n sao cho ta luôn có*

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{289}}}>n$$

với $a_1,a_2,\ldots,a_{289}$ *là các số nguyên dương khác nhau bất kỳ.*

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN, LỚP 9, TỈNH NAM ĐỊNH

Năm học 2024-2025

Câu 1. 1) *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn* $a+b+c\neq 0$ *và* $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$.

Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5=1.$$

2) *Cho* $x>0,\ y>0$ *và*

$$xy+\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(y^2+3\right)}=3\sqrt{3}.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$P=x\sqrt{y^2+3}+y\sqrt{x^2+3}.$$

Lời giải. `1) Ta có:

$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+c^3+3(a+b)c(a+b+c)$$
$$=a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3(a+b)c(a+b+c)$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)\left[ab+c(a+b+c)\right]$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

nên $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$ tương đương với

$$3(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

• Xét trường hợp $a+b=0$.

Điều kiện $a+b+c\neq 0$ trở thành $c\neq 0$.

Khi đó $\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5$

$$=\left(\frac{a}{0+c}\right)^5+\left(\frac{-a}{0+c}\right)^5+\left(\frac{c}{0+c}\right)^5$$
$$=\left(\frac{a}{c}\right)^5-\left(\frac{a}{c}\right)^5+1=1.$$

• Các trường hợp $b+c=0$ và $c+a=0$ xét tương tự cũng thu được kết quả:

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5=1.$$

Vậy với giả thiết cho ta luôn có đẳng thức

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5=1.$$

2) Từ giả thiết cho ta có:

$$\left(xy+\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(y^2+3\right)}\right)^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2+\left(x^2+3\right)\left(y^2+3\right)+2xy\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(y^2+3\right)}=27$$
$$\Leftrightarrow 2x^2y^2+3x^2+3y^2+2xy\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(y^2+3\right)}=18.$$

Lại có:

$$P^2=x^2\left(y^2+3\right)+y^2\left(x^2+3\right)+2xy\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(y^2+3\right)}$$
$$=2x^2y^2+3x^2+3y^2+2xy\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(y^2+3\right)}$$

nên có $P^2=18$.

Vì $x>0$ và $y>0$ nên

$$P=x\sqrt{y^2+3}+y\sqrt{x^2+3}>0.$$

Suy ra $P=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Câu 2. 1) *Có ba xe ô tô xuất phát cùng thời điểm từ vị trí A, chạy cùng một tuyến đường đi qua vị trí B. Trong mỗi giờ, xe thứ nhất chạy nhanh hơn xe thứ hai* 15 km *và chạy nhanh hơn xe thứ ba* 5 km. *Một người quan sát đứng tại B thấy rằng: Xe thứ hai tới B chậm hơn so với xe thứ nhất* 28 phút *và chậm hơn so với xe thứ ba* 20 phút. *Tìm tốc độ của mỗi xe ô tô theo đơn vị km/h (xem như cả ba xe đều duy trì tốc độ trên suốt hành trình từ A đến B).*

2) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{1}{xy}=3\\ 2x\left(x+y^2-1\right)=2y^2+y-1\end{cases}.$$

Lời giải. 1) Gọi x km/h là tốc độ của xe thứ nhất, khi đó tốc độ của xe thứ hai là $x-15$ km/h và tốc độ của xe thứ ba là $x-5$ km/h, trong đó $x>15$.

Gọi S km là quãng đường từ A đến B theo tuyến đường đang xét $(S>0)$. Thời gian đi từ A

đến B của xe thứ nhất là $\frac{S}{x}$ giờ, của xe thứ hai là $\frac{S}{x-15}$ giờ, của xe thứ ba là $\frac{S}{x-5}$ giờ.

Xe thứ hai đến B chậm hơn so với xe thứ nhất 28 phút tức là $\frac{7}{15}$ giờ nên $\frac{S}{x-15}-\frac{S}{x}=\frac{7}{15}$ (1).

Xe thứ hai đến B chậm hơn so với xe thứ ba 20 phút tức là $\frac{1}{3}$ giờ nên

$$\frac{S}{x-15}-\frac{S}{x-5}=\frac{1}{3} \quad (2).$$

Do $S>0$ nên từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{1}{x-15}-\frac{1}{x}=\frac{7}{5}\left(\frac{1}{x-15}-\frac{1}{x-5}\right)$$

hay $\frac{15}{(x-15)x}=\frac{7}{5}\cdot\frac{10}{(x-15)(x-5)}$

hay $15(x-5)=14x$, giải được $x=75$ (thỏa mãn $x>15$).

Vậy tốc độ của xe ô tô thứ nhất là 75 km/h, tốc độ của xe thứ hai là 60 km/h, tốc độ của xe thứ ba là 70 km/h.

2) Xét hệ $\begin{cases}\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+\frac{1}{xy}=3 & (1)\\ 2x\left(x+y^2-1\right)=2y^2+y-1 & (2)\end{cases}$

ĐKXĐ: $x\neq 0$ và $y\neq 0$.

Phương trình (1) được viết lại thành:

$$x^3+y^3+1=3xy$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3+1-3xy(x+y)-3xy=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)\left[(x+y)^2-(x+y)+1\right]-3xy(x+y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)\left[x^2+y^2-xy-x-y+1\right]=0.$$

• TH1: $x+y+1=0$, khi đó $x=-y-1$.

Thay vào (2) ta được:

$$2(-y-1)\left(-y-1+y^2-1\right)=2y^2+y-1$$

$$\Leftrightarrow 2y^3+2y^2-5y-5=0\Leftrightarrow (y+1)\left(2y^2-5\right)=0.$$

Tìm được: $y=-1$, $y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Với $y=-1$ thì $x=-y-1=0$, không thỏa mãn ĐKXĐ.

Với $y=\frac{\sqrt{10}}{2}$ thì $x=-y-1=-\frac{\sqrt{10}}{2}-1$, thỏa mãn ĐKXĐ.

Với $y=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ thì $x=-y-1=\frac{\sqrt{10}}{2}-1$, thỏa mãn ĐKXĐ.

• TH2: $x^2+y^2-xy-x-y+1=0$. Khi đó:

$$2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0\Rightarrow x=y=1.$$

Cặp số $(x;y)=(1;1)$ thỏa mãn (2) và ĐKXĐ của hệ đã cho. Vậy hệ phương trình cho có đúng ba bộ nghiệm $(x;y)$ là:

$$(1;1),\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}-1;\frac{\sqrt{10}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{10}}{2}-1;-\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$$

Câu 3. *1) Chứng minh rằng với n là số nguyên thì*

$$\left(n^4-1^3\right)\left(n^4-2^3\right)\left(n^4-3^3\right)...\left(n^4-2027^3\right)$$

chia hết cho 2027.

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn

$$x^2-xy^2-2y+2=0.$$

Lời giải. 1) Giả sử ngược lại, có số nguyên n mà các số n^4-1^3, n^4-2^3, ..., n^4-2027^3 đều không chia hết cho 2027. Khi đó các số dư thu được khi chia mỗi số trong n^4-1^3, n^4-2^3, ..., n^4-2027^3 cho 2027 đều thuộc tập hợp $\{1;2;...;2026\}$. Có 2027 số dư thuộc vào tập hợp có 2026 phần tử nên phải có hai số dư nào đó trùng nhau, nghĩa là tồn tại hai số nguyên dương a,b mà $1\leq a<b\leq 2027$ và $n^4-a^3\equiv n^4-b^3 \pmod{2027}$.

Ta có $n^4-a^3\equiv n^4-b^3 \pmod{2027}$ tương đương với $a^3\equiv b^3 \pmod{2027}$.

Suy ra: $\left(a^3\right)^{675}\equiv\left(b^3\right)^{675} \pmod{2027}$

hay $a^{2025}\equiv b^{2025} \pmod{2027}$.

• TH1: Nếu $b=2027$ thì dẫn đến

$$a^3\equiv b^3\equiv 0 \pmod{2027},$$

kết hợp 2027 là số nguyên tố suy ra:

$a \equiv 0 \pmod{2027}$.

Điều này không xảy ra với $1 \le a < b = 2027$.

• TH2: $1 \le a < b < 2027$. Từ 2027 là số nguyên tố suy ra $(a, 2027) = (b, 2027) = 1$, theo định lí Fermat có: $a^{2026} \equiv 1 \equiv b^{2026} \pmod{2027}$. Từ đó suy ra $b^{2026} \equiv a^{2026} \equiv ab^{2025} \pmod{2027}$, dẫn đến $b^{2025}(b-a) \vdots 2027$. Điều này không xảy ra với $0 < b-a,\ b < 2027$.

Vậy trong cả hai trường hợp đều có điều vô lí, do đó điều giả sử là sai, yêu cầu của bài toán được giải quyết.

2) Phương trình cho tương đương với

$$4x^2 - 4xy^2 - 8y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - y^2\right)^2 = y^4 + 8y - 8 \quad (3).$$

+ Nếu $y = 0$ thì vế phải của (3) nhận giá trị âm nên (3) không xảy ra.

+ Nếu $y = 1$ thì (3) trở thành $(2x-1)^2 = 1$, tìm được $x = 0$ hoặc $x = 1$.

+ Với mọi $y > 1$, ta có:

$$y^4 + 8y - 8 = y^4 + 8(y-1) > y^4$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2+1\right)^2 - \left(y^4 + 8y - 8\right) = 2y^2 - 8y + 9$$

$$= 2(y-2)^2 + 1 > 0$$

nên thu được $\left(y^2\right)^2 < y^4 + 8y - 8 < \left(y^2+1\right)^2$, chứng tỏ $y^4 + 8y - 8$ không là số chính phương, do đó (3) không xảy ra.

Vậy có đúng hai cặp số tự nhiên thỏa mãn là:

$$(x; y) = (0; 1),\ (x; y) = (1; 1).$$

Câu 4. *1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, $AB = AC$ và $\widehat{BAC} > 90^0$. Gọi H là trung điểm của cạnh BC và E là điểm chính giữa của cung lớn BC trên đường tròn (O). Xét điểm M thay đổi trên cạnh BC sao cho $BM > MC$, D là giao điểm khác A của đường thẳng AM và đường tròn (O), N là giao điểm của đường thẳng ED và đường thẳng BC.*

a) Chứng minh rằng $MA.MD = MB.MC$ và $BN.CM = BM.CN$.

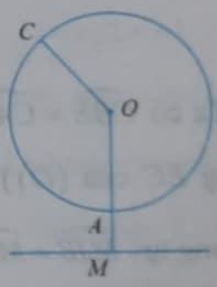
b) Gọi J là giao điểm giữa đường thẳng BE và đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD $(J \ne B)$. Chứng minh rằng đường thẳng MJ vuông góc với đường thẳng BC.

c) Cho biết $AB = \dfrac{R}{2}$. Khi biểu thức $f = 2AM + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính tỉ số $\dfrac{OM}{f}$.

2) Bạn Joe và gia đình đang nghỉ dưỡng ở một khu sinh thái rộng lớn. Tại đây có một vòng quay mà trên đó có các cabin để du khách có thể ngắm nhìn phong cảnh toàn khu vực từ trong cabin của vòng quay (tham khảo hình vẽ bên dưới). Vòng quay ngoài cùng có dạng đường tròn với chu vi bằng 350 mét, tâm của vòng quay nằm ở độ cao 60 mét so với mặt đất. Mỗi cabin đều có đỉnh được gắn cố định vào vòng quay ngoài cùng và có một cơ cấu hạn chế rung lắc. Joe lựa chọn trải nghiệm vòng quay này, khi Joe vào một cabin ở vị trí thấp nhất A của vòng quay thì nó bắt đầu hành trình quay đều và duy trì ở tốc độ an toàn.

Bộ phận điều khiển cho biết với tốc độ đang quay, vòng quay sẽ đi hết một vòng trong thời gian 45 phút. Tính bán kính của vòng quay ngoài cùng và tính độ cao của đỉnh cabin C mà Joe ngồi so với mặt đất tại thời điểm 20 phút kể từ lúc Joe lên cabin theo đơn vị mét (kết quả tính làm tròn đến hàng phần chục).





Lời giải: 1)

a) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) hay $\widehat{ABM} = \widehat{CDM}$.

Tương tự cũng có: $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$.

Suy ra hai tam giác ABM và CDM đồng dạng (g.g). Suy ra: $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{BM}{DM} \Leftrightarrow MA.MD = MB.MC$.

Ta có: $\widehat{BDA}=\widehat{BCA}$ và $\widehat{CDA}=\widehat{CBA}$.

Lại có ΔABC cân tại A nên $\widehat{BCA}=\widehat{CBA}$, từ đó suy ra $\widehat{BDA}=\widehat{CDA}$, dẫn đến DA là phân giác của góc $\widehat{CDB}$.

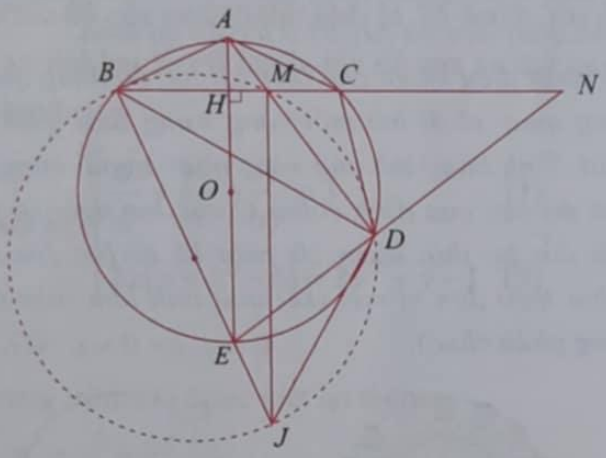
Ta có $AB=AC$, $OB=OC$, H là trung điểm của BC, E là điểm chính giữa của cung lớn BC nên suy ra A,H,O,E thẳng hàng (cùng nằm trên đường trung trực của BC) và khi đó có AE là đường kính của đường tròn (O).

Suy ra $\widehat{ADE}=90^0$ hay $DA\perp EN$, dẫn đến DN là phân giác ngoài tại đỉnh D của ΔDBC.

Theo tính chất đường phân giác có:

$$\frac{BM}{CM}=\frac{BD}{CD};\frac{BN}{CN}=\frac{BD}{CD}.$$

Suy ra: $\frac{BM}{CM}=\frac{BN}{CN}$ hay $BM.CN=BN.CM$.



b) Ta có $\widehat{CBE}=\widehat{CAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC của (O)) hay $\widehat{MBJ}=\widehat{CAH}$.

Tương tự: $\widehat{MJB}=\widehat{MDB}=\widehat{ADB}=\widehat{ACB}=\widehat{ACH}$.

Từ đó suy ra:

$\widehat{MBJ}+\widehat{MJB}=\widehat{CAH}+\widehat{ACH}=180^0-\widehat{AHC}=90^0$.

Vậy $\widehat{BMJ}=180^0-\left(\widehat{MBJ}+\widehat{MJB}\right)=90^0$, do đó:

$$JM\perp BM \text{ hay } MJ\perp BC.$$

Cách khác: Chỉ ra $\widehat{BEH}=\widehat{BJM}$, suy ra $JM\,//\,EH$, suy ra $JM\perp BC$.

c) ΔAHM và ΔADE có chung nhau góc ở đỉnh A và có $\widehat{AHM}=90^0=\widehat{ADE}$ nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{AH}{AD}=\frac{AM}{AE}$ hay $AM.AD=AH.AE$.

ΔABE vuông tại B và BH là đường cao nên $AH.AE=AB^2=\frac{R^2}{4}$, suy ra:

$$AH=\frac{R^2}{4.2R}=\frac{R}{8} \text{ và } AM.AD=\frac{R^2}{4}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy có:

$$f=2AM+AD\ge 2\sqrt{2AM.AD}$$

$$=2\sqrt{2.\frac{R^2}{4}}=R\sqrt{2} \quad (*).$$

Dấu bằng ở (*) xảy ra khi và chỉ khi

$$2AM=AD=\frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ hay } AM=\frac{R\sqrt{2}}{4}.$$

Ta thấy $\frac{R}{8}=AH<\frac{R\sqrt{2}}{4}=AM<AC=\frac{R}{2}$ nên tồn tại điểm M thuộc đoạn HC để các yêu cầu của đề bài được thỏa mãn và dấu bằng của (*) xảy ra (hoặc tính HC, HM khi $AM=\frac{R\sqrt{2}}{4}$, thấy $HM<HC$ nên tồn tại M).

Khi f đạt giá trị nhỏ nhất bằng $R\sqrt{2}$ thì $AD=2AM$, suy ra M là trung điểm của AD, dẫn đến OM là đường trung tuyến của tam giác cân OAD ($OA=OD$).

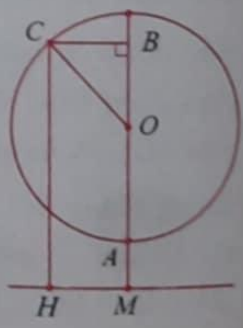
Suy ra $OM\perp AD$ hay $OM\perp AM$. Suy ra:

$$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{8}}=R\sqrt{\frac{7}{8}}.$$

Vậy $\frac{OM}{f}=\frac{R\sqrt{\frac{7}{8}}}{R\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

2) Bán kính của vòng quay ngoài cùng là

$$R=\frac{C}{2\pi}=\frac{350}{2\pi}\approx 55,7 \text{ (m)}.$$



Ban đầu đỉnh cabin tại A, sau 20 phút đỉnh cabin đến vị trí C, tâm vòng quay là O, B là

hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng OM và H là hình chiếu vuông góc của C trên mặt đất. Đu quay thực hiện một vòng mất 45 phút, do đó trong thời gian 20 phút thì cabin sẽ quét một góc là $\frac{360^0}{45}.20=160^0$. Do $90^0<160^0<180^0$ nên: $\widehat{BOC}=180^0-\widehat{AOC}=20^0$.

ΔOCB vuông tại B có:

$$OB=OC.\cos\widehat{COB}=R.\cos 20^0=\frac{350}{2\pi}.\cos 20^0.$$

Độ cao của đỉnh cabin tại C là:

$$CH=OM+OB=60+\frac{350}{2\pi}\cos 20^0\approx 112,3 \text{ (m)}.$$

Câu 5. 1) *Xét 100 số thực tùy ý có tổng bằng 0 và có tổng các bình phương của chúng bằng 1. Gọi T là tích của số lớn nhất và số bé nhất trong 100 số đó. Tìm giá trị lớn nhất của T.*

2) *Cho bảng vuông kích thước 2025×2025 gồm 2025 dòng, 2025 cột, bảng được phân đều thành 2025^2 ô vuông con. Xét việc điền tất cả các số nguyên dương 1, 2, 3,..., 2025^2 lên bảng theo ba điều kiện:*

- Mỗi ô vuông con điền đúng một số, hai ô vuông con khác nhau điền hai số khác nhau.

- Hai số bất kì có hiệu bằng 1 thì được điền vào hai ô vuông con có chung cạnh.

- Hai số bất kì có hiệu chia hết cho 2025 thì được điền ở hai ô vuông con không cùng hàng và cũng không cùng cột.

Chứng minh rằng không thể điền được số lên bảng thỏa mãn tất cả các điều kiện trên.

Lời giải. 1) Xét 100 số thực là $x_1,x_2,...,x_{100}$, trong dãy này có a là giá trị lớn nhất và b là giá trị nhỏ nhất và có: $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=0$,

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2=1,$$

$a\le x_i\le b$ với mọi $i=1,2,...,100$. Với mỗi i có:

$(x_i-a)(x_i-b)\le 0$ hay $x_i^2+ab\le(a+b)x_i$.

Cộng theo vế 100 BĐT trên ứng với các giá trị của i ta thu được: $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2+100ab$

$$\le(a+b)(x_1+x_2+\cdots+x_{100})$$

hay $1+100ab\le 0$, do đó có: $T=ab\le-\frac{1}{100}$.

Dấu bằng của BĐT trên xảy ra, chẳng hạn khi ta chọn 50 số có giá trị bằng $-\frac{1}{10}$ và 50 số có giá trị bằng $\frac{1}{10}$. Vậy $\max T=-\frac{1}{100}$.

2) Giả sử điền được số vào bảng thỏa mãn cả ba điều kiện đã nêu. Đặt $n=2025$.

Quy ước đánh số thứ tự các hàng là 1, 2, ..., n từ trên xuống dưới, đánh số thứ tự các cột là 1, 2, ..., n từ trái qua phải.

Với mỗi ô vuông con nằm ở hàng i và cột j, ta đặt tương ứng nó với trọng số $a_{ij}=i+j$.

Xét tập hợp A gồm n ô con điền các số $1,\ 1+n,\ 1+2n,\ ...,\ 1+(n-1)n$. Hiệu của hai số bất kì trong dãy này đều chia hết cho n nên A gồm n ô đôi một khác hàng và khác cột. Vậy tổng của tất cả các trọng số xét trên tập A là $T_A=2(1+2+\cdots+n)$.

Xét tập hợp B gồm n ô con điền các số $2,\ 2+n,\ 2+2n,\ ...,\ 2+(n-1)n$. Ta cũng có tổng của tất cả các các trọng số xét trên tập B là $T_B=2(1+2+\cdots+n)$. Suy ra $T_B-T_A=0$.

Mặt khác ta có sự tương ứng mỗi ô con trong A với một ô con trong B chung cạnh (vì có n cặp số liên tiếp là $(1;\ 2)$, $(1+n;2+n)$, ... $(1+(n-1)n;2+(n-1)n)$), khi đó với một ô có trọng số là a_{ij} ở trong A thì ô tương ứng của nó trong B có trọng số là $a_{ij}\pm 1$. Vậy hiệu T_B-T_A biểu diễn được thành tổng của n số mà mỗi số có giá trị là 1 hoặc -1. Điều này có nghĩa là giá trị 0 được viết thành tổng của n ($n=2025$ lẻ) số lẻ, điều này không thể xảy ra. Vậy điều giả sử là sai, không thể điền số được theo các yêu cầu đã cho.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP Nam Định)

Giới thiệu

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

1. D	2. B	3. B	4. D	5. A	6. C
7. C	8. C	9. A	10. B	11. A	12. B

Câu 4. Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(3;-5;-1)$.

Câu 5.

Cự li (m)	[19;19,5)	[19,5;20)	[20;20,5)	[20,5;21)	[21;21,5)
Giá trị đại diện	19,25	19,75	20,25	20,75	21,25
Tần số	13	45	24	12	6

Cỡ mẫu là $n=13+45+24+12+6=100$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\overline{x}=\frac{13.19,25+45.19,75+24.20,25+12.20,75+6.21,25}{100}$$

$$=20,015$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$S^2=\frac{1}{100}\left[13.(19,25)^2+45.(19,25)^2+24.(19,25)^2\right.$$

$$\left.+12.(19,25)^2+6.(19,25)^2\right]-(20,015)^2\approx 0,277.$$

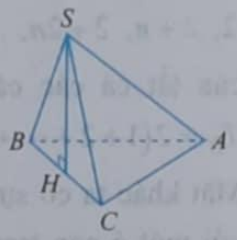
Câu 6. ΔABC vuông tại A

$$\Rightarrow BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=2a;$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2};$$

$$SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$



Câu 7. $y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-2025$.

Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'=3x^2-6x+3(m+2)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\ 9-9(m+2)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq -1.$$

Vậy $m\geq -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $m\in[-10;10)$ nên tổng các giá trị nguyên của tham số là 44.

Câu 8. Theo tính chất của cấp số cộng, ta có:

$$x=\frac{-2+6}{2}=2 \text{ và } 6=\frac{x+y}{2}.$$

Vì $x=2$ nên $6=\frac{2+y}{2}\Rightarrow y=10$.

Câu 9. Vì $d(B;(P))=2d(A;(P))$ và (P) cắt đoạn AB tại I nên $\overrightarrow{BI}=-2\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\begin{cases}a-5=-2(a-1)\\ b+4=-2(b-2)\\ c+1=-2(c-3)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow a=\frac{7}{3},b=0,c=\frac{5}{3}\Rightarrow a+b+c=4.$$

Câu 10. Gọi V_1 là thể tích của chiếc cốc thủy tinh và V_2 là thể tích của chất lỏng mà cốc có thể chứa. Ta có: $V_1=\pi.4,8^2.12=\frac{6912}{25}\pi(\text{cm}^3)$

và $V_2=\pi.\left(\frac{9,6-2.0,24}{2}\right)^2.(12-1,8)\approx 666,32\,(\text{cm}^3)$.

Vậy lượng thuỷ tinh cần sử dụng là:

$$\frac{6912}{25}\pi-666,32\approx 202,27\,(\text{cm}^3).$$

Câu 11. Gọi A là biến cố "lần thứ nhất lấy được bi màu đỏ". Gọi B là biến cố "lần thứ hai lấy được bi màu xanh". Ta cần tìm $P(B|A)$.

Không gian mẫu $n(\Omega)=16.15$ cách chọn.

Lần thứ nhất lấy 1 viên bi màu đỏ có 7 cách chọn, lần thứ hai lấy 1 viên bi trong 15 bi còn lại có 15 cách chọn, do đó $P(A)=\frac{7.15}{16.15}=\frac{7}{16}$.

Lần thứ nhất lấy 1 viên bi màu đỏ có 7 cách chọn, lần thứ hai lấy 1 viên bi màu xanh có 9 cách chọn, do đó $P(A\cap B)=\frac{7.9}{16.15}=\frac{21}{80}$.

Vậy xác suất để viên bi lấy lần thứ hai là màu xanh nếu biết rằng viên bi lấy lần thứ nhất là màu đỏ là $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{21}{80}}{\frac{7}{16}}=\frac{3}{5}$.

Câu 12. Do hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x=-1,x=1$ nên phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x=-1,x=1$.

Ta có: $y'=(2x-2)f'(x^2-2x+1)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x-2=0\\x^2-2x+1=-1\\x^2-2x+1=1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x=0.\\x=2\end{bmatrix}$$

Ta có: $y'>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}2x-2>0\\f'(x^2-2x+1)>0\end{cases}\\\begin{cases}2x-2<0\\f'(x^2-2x+1)<0\end{cases}\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}x>1\\\begin{bmatrix}x^2-2x+1>1\\x^2-2x+1<-1\end{bmatrix}\end{cases}\\\begin{cases}x<1\\-1<x^2-2x+1<1\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\begin{cases}x>1\\\begin{bmatrix}x>2\\x<0\end{bmatrix}\end{cases}\\\begin{cases}x<1\\0<x<2\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x>2\\0<x<1\end{bmatrix}.$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số

$y=f(x^2-2x+1)+2025$ có 3 cực trị.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Sai.

a) Ta có: $P(\overline{A})=0,4\Rightarrow P(A)=1-0,4=0,6$;

$P(B)=0,8\Rightarrow P(\overline{B})=1-0,8=0,2$; $P(A\cap B)=0,4$.

b) Ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,4}{0,8}=\dfrac{1}{2}$

c) Ta có: $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=1-\dfrac{0,4}{0,6}=\dfrac{1}{3}$.

d) Ta có: $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A}|B).P(B)$.

Mà $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=1-\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-\dfrac{0,4}{0,8}=\dfrac{1}{2}$,

do đó $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A}|B).P(B)=\dfrac{1}{2}.0,8=\dfrac{2}{5}$.

Câu 2. a) Sai; b) Sai ; c) Sai; d) Đúng.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(3;0;2)$ và bán kính $R=5$.

b) Thế tọa độ điểm $M(-2;-4;-6)$ vào PT Δ ta có:

$$\begin{cases}-2=-1+t\\-4=-2+2t\\-6=-3+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-\dfrac{3}{2}\\t=-1\end{cases}.$$

c) $H\in\Delta\Rightarrow H(-1+t;-2+2t;-3+2t)$. Suy ra:

$\overrightarrow{IH}=(-4+t;-2+2t;-5+2t)$.

H là hình chiếu của I trên $\Delta\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}\perp\Delta$

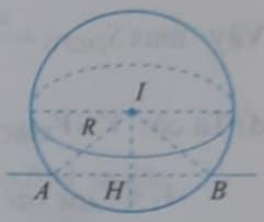
$\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_\Delta}=0$ với $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;2;2)$

$\Leftrightarrow 1(-4+t)+2(-2+2t)+2(-5+2t)=0$

$\Leftrightarrow 9t-18=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow H(1;2;1)$.

d) Ta có: $IH=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3<R$

nên Δ cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm A, B. Khi đó:



$AH=\sqrt{IA^2-IH^2}=4$

$\Rightarrow AB=2AH=8$.

Diện tích ΔIAB là

$$S_{IAB}=\frac{1}{2}IH.AB=\frac{1}{2}.3.8=12.$$

Câu 3. a) Sai; b) Đúng; c) Sai; d) Sai.

$$f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=4x^3+3x^2.$$

a) Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$xf(x)=\int(4x^3+3x^2)dx=x^4+x^3+C.$$

Với $x=1$ ta có: $f(1)=2+C$. Theo bài ra:

$$f(1)=2\Leftrightarrow 2+C=2\Leftrightarrow C=0.$$

Do đó: $xf(x)=x^4+x^3\Leftrightarrow f(x)=x^3+x^2$.

b) Ta có: $f'(x)=3x^2+2x$; $f'(2)=16$; $f(2)=12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là:

$$y=16(x-2)+12\Leftrightarrow y=16x-20.$$

c) $f'(x)=3x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0, x=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{2}{3}$

d) Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, trên $(0;+\infty)$ không đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. a) Đúng; b) Sai ; c) Đúng; d) Sai.

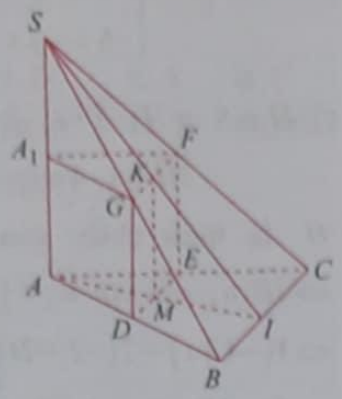
a) Thiết diện $DEFG$ là hình chữ nhật.

b) Ta có: $\frac{AM}{AI}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow DE=\frac{bx}{h}$.

Lại có: $\frac{IM}{AI}=\frac{BD}{BA}=\frac{DG}{AS}$

$\Rightarrow DG=\frac{a(h-x)}{h}$

$\Rightarrow S_{DEFG}=\frac{abx(h-x)}{h^2}$.



c) $S_{DEFG}=DE.DG$

$=\frac{abx(h-x)}{h^2}$

$\le\frac{ab}{h^2}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)^2 \overset{\text{BĐT Cauchy}}{=}\frac{ab}{4}$.

Vậy $\max S_{DEFG}=\frac{ab}{4}$ khi $x=\frac{h}{2}$.

d) Ta có: $V=V_{SABC}=\frac{1}{3}a.\frac{1}{2}bh=\frac{abh}{6}$;

$V_1=V_{ADE.SGF}=V_{S.A_1GF}+V_{ADE.A_1GF}$;

$V_{ADE.A_1GF}=DG.S_{ADE}=\frac{a(h-x)}{h}.\frac{x}{2}.\frac{bx}{h}=\frac{abx^2(h-x)}{2h^2}$

Lại có: $SA_1=a-DG=a-\frac{a(h-x)}{h}=\frac{ax}{h}$;

$S_{A_1GF}=S_{ADE}=\frac{bx^2}{2h}$;

$V_{S.A_1GF}=\frac{1}{3}.SA_1.S_{A_1GF}=\frac{1}{3}.\frac{ax}{h}.\frac{bx^2}{2h}=\frac{abx^3}{6h^2}$

Suy ra: $V_1=\frac{abx^2(h-x)}{2h^2}+\frac{abx^3}{6h^2}=\frac{abx^2}{2h^2}\left(h-\frac{2x}{3}\right)$.

Do đó: $V_1=\frac{1}{2}V\Leftrightarrow\frac{abx^2}{2h^2}\left(h-\frac{2x}{3}\right)=\frac{abh}{12}$

$\Leftrightarrow 4x^3-6hx^2+h^3=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{h}{2}\right)(4x^2-4hx-2h^2)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{h}{2}$, $x=\frac{h(1\pm\sqrt{3})}{2}$. Vì $0<x<h$ nên $x=\frac{h}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. *Đáp số*: 71.

Không mất tính tổng quát, giả sử độ dài cạnh rubik bằng 1. Gọi các đỉnh khối rubik là A, B, C, D và I là trung điểm AB, khi đó $CI\perp AB; DI\perp AB$

$\Rightarrow\widehat{CID}=\alpha$ là góc nhị diện cạnh AB.

Ta có: $CI=DI=\frac{\sqrt{3}}{2}; DC=1\Rightarrow\Delta CDI$ có:

$\cos\alpha=\frac{CI^2+DI^2-CD^2}{2.CI.DI}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha\approx 71^0$.

Câu 2. *Đáp số*: 6,7.

Ta có: $\begin{cases}k.a^2=3\%\\k.a^5=10\%\end{cases}$ (1).

Ta tìm t sao cho $k.a^t=20\%$ (2).

Từ (1) ta có: $\begin{cases}k=\frac{3\%}{a^2}\\a^3=\frac{10}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{3\%}{a^2}\\a=\sqrt[3]{\frac{10}{3}}\end{cases}$,

do đó (2) $\Leftrightarrow\frac{3\%}{a^2}.a^t=20\%\Leftrightarrow a^{t-2}=\frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow t-2=\log_a\frac{20}{3}\Rightarrow t=2+\log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}}\frac{20}{3}\approx 6,7$.

Câu 3. *Đáp số*: 0,4.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=6!$.

Gọi A là biến cố "học sinh lớp C không ngồi cạnh học sinh lớp B".

Xếp 1 học sinh lớp C vào chỗ, xảy ra 2 trường hợp:

• TH1: học sinh lớp C ngồi ở một trong 2 đầu, có 2 cách xếp.

Khi đó, có A_4^2 cách xếp 2 học sinh lớp B và A_3^3 cách xếp 3 học sinh lớp A.

$\Rightarrow$ có $2.A_4^2.A_3^3$ cách xếp cho trường hợp 1.

• TH2: học sinh lớp C không ngồi ở hai đầu, có 4 cách xếp.

Khi đó, có A_3^2 cách xếp 2 học sinh lớp B và A_3^3 cách xếp 3 học sinh lớp A.

$\Rightarrow$ có $4.A_3^2.A_3^3$ cách xếp cho trường hợp 2.

$n(A)=2.A_4^2.A_3^3+4.A_3^2.A_3^3$.

Vậy $P(A)=\frac{2.A_4^2.A_3^3+4.A_3^2.A_3^3}{6!}=\frac{2}{5}=0,4$

Câu 4. *Đáp số*: 43.

Gọi số tiền ban đầu gia đình bạn A vay ngân hàng là T_0, lãi suất vay là r, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là N. Ta có: $T_0=600$ (triệu đồng), $r=0,6\%$/tháng, $N=16$ (triệu đồng).

Số tiền gia đình bạn A nợ ngân hàng sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay là: $T_1=T_0(1+r\%)-N$.

Số tiền gia đình bạn A nợ ngân hàng sau 2 tháng là: $T_2=T_1(1+r\%)-N=\left[T_0(1+r\%)-N\right](1+r\%)-N$.

$=T_0(1+r\%)^2-N\left[(1+r\%)+1\right]$.

Số tiền gia đình bạn A nợ ngân hàng sau 3 tháng là: $T_3=T_2(1+r\%)-N$

$=T_0(1+r\%)^3-N\left[(1+r\%)^2+(1+r\%)+1\right]$.

Cứ như vậy số tiền gia đình bạn A nợ ngân hàng sau n tháng là:

$T_n=T_0(1+r\%)^n-N\left[(1+r\%)^{n-1}+(1+r\%)^{n-2}+\ldots+(1+r\%)+1\right]$

$=T_0(1+r\%)^n-N\left[\dfrac{1-(1+r\%)^n}{1-(1+r\%)}\right]$.

Giả sử sau n tháng, gia đình bạn A trả hết nợ

$\Leftrightarrow T_n=0\Leftrightarrow T_0(1+r\%)^n-N\left[\dfrac{1-(1+r\%)^n}{1-(1+r\%)}\right]=0$

$\Leftrightarrow 600(1+0{,}6\%)^n-16\left[\dfrac{1-(1+0{,}6\%)^n}{1-(1+0{,}6\%)}\right]=0$

$\Leftrightarrow 600(1+0{,}6\%)^n-16\left[\dfrac{(1+0{,}6\%)^n-1}{0{,}6\%}\right]=0$

$\Leftrightarrow 600(1+0{,}6\%)^n-\dfrac{8000}{3}\left[(1+0{,}6\%)^n-1\right]=0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{6200}{3}(1+0{,}6\%)^n+\dfrac{8000}{3}=0$

$\Leftrightarrow (1+0{,}6\%)^n=\dfrac{40}{31}\Leftrightarrow n=\log_{(1+0{,}6\%)}\dfrac{40}{31}\Leftrightarrow n=42{,}609$.

Vậy sau 43 tháng gia đình bạn A sẽ trả hết nợ.

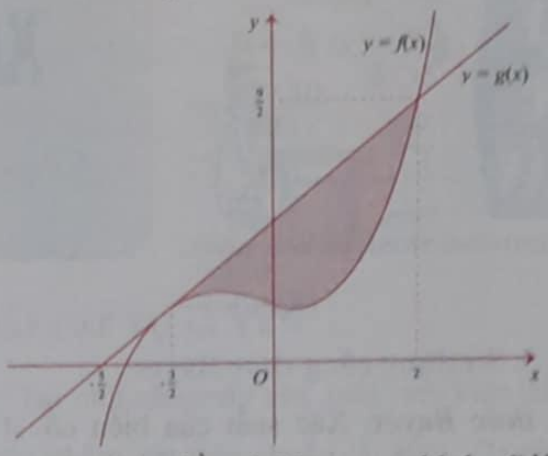
Câu 5. *Đáp số*: 4,17.

Ta có đường thẳng $y=mx+n$ đi qua các điểm $\left(-\dfrac{5}{2};0\right)$ và $\left(2;\dfrac{9}{2}\right)$ nên $y=g(x)=x+\dfrac{5}{2}$. Khi đó $g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=f(0)=1$ (dựa vào hình vẽ) và $g(0)=\dfrac{5}{2}$.

Do đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x=-\dfrac{3}{2}$ và cắt nhau tại điểm thứ hai có hoành độ $x=2$ nên ta có:

$$g(x)-f(x)=k(2x+3)^2(x-2).$$

Mà $g(0)-f(0)=\dfrac{3}{2}$ nên $-18k=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{12}$.



Khi đó diện tích phần tô đậm trong hình vẽ là:

$$S=\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{2}\left[-\frac{1}{12}(2x+3)^2(x-2)\right]dx$$

$=\dfrac{2401}{576}\approx 4{,}17$.

Câu 6. *Đáp số*: 80.

Điều kiện: $x>0$; với giả thiết $a,b>1$ ta có:

$$\log_a(ax)\log_b(bx)=2025$$

$$\Leftrightarrow(1+\log_a x)(1+\log_b x)=2025.$$

Đặt $t=\log_a x$, suy ra: $\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}=\dfrac{t}{\log_a b}$.

Phương trình trên trở thành:

$$(1+t)\left(1+\frac{t}{\log_a b}\right)=2025$$

$$\Leftrightarrow t^2+(1+\log_a b)t-2025\log_a b=0.$$

Nhận xét. Vì tích $1.(-2025\log_a b)<0,\forall a,b>1$ nên phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $t_1+t_2=-1-\log_a b$. Ứng với $t_1=\log_a m$, $t_2=\log_a n$ suy ra:

$$\log_a m+\log_a n=-1-\log_a b$$

$$\Leftrightarrow mn=a^{-1-\log_a b}\Leftrightarrow mn=\frac{1}{ab}$$

thay vào biểu thức P ta có:

$$P=\left(4a^2+b^2\right)\left(\frac{100}{a^2b^2}+1\right)\geq 4ab.\frac{20}{ab}=80.$$

Vậy $\min P=80$ khi $2a=b;\dfrac{10}{ab}=1\Rightarrow a=\sqrt{5};b=2\sqrt{5}$.

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)



XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

TRẦN QUANG THUẬN
(GV Vinschool Ocean Park, Hà Nội)
HÀ VĂN THẮNG
(GV THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang)

(Kỳ 2)

Dạng 5. Sử dụng công thức Bayes

Công thức Bayes. Xác suất của biến cố A, với điều kiện B đã xảy ra là

$$P(A|B)=\frac{P(B|A).P(A)}{P(B|A).P(A)+P(B|\overline{A}).P(\overline{A})}.$$

Như vậy để tính được $P(A|B)$ ta cần tính đủ bộ 4 xác suất, gồm: $P(A),P(\overline{A}),P(B|A)$ và $P(B|\overline{A})$.

Thí dụ 1. *Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rộng rãi các con bò để phát hiện những con bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm X có kết quả như sau:* ***Độ nhạy*** *(Sensitivity) của xét nghiệm là xác suất chọn được một mẫu dương tính biết rằng mẫu bị nhiễm bệnh, xét nghiệm X có độ nhạy là 84%;* ***Dương tính giả*** *(False Positive) là kết quả sai lệch khi mà xét nghiệm dương tính nhưng thực tế không bị nhiễm bệnh, xét nghiệm X có xác suất dương tính giả là 8%. Biết rằng tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1000000 con. Chọn ngẫu nhiên một con bò để xét nghiệm. Tính xác suất để con bò bị bệnh biết rằng con bò được xét nghiệm dương tính.*

(Nguồn: F. M. Dekking et al., *A modern introduction to probability and statistics - Understanding why and how*, Springer, 2005).

Lời giải. Xét hai biến cố:

B : "Con bò được chọn ra bị mắc bệnh bò điên".

T^+ : "Con bò được chọn ra có phản ứng dương tính".

Từ giả thiết:

- Xác suất chọn được con bò phản ứng dương tính, biết rằng con bò bị bệnh là 84% suy ra:

$$P(T^+|B)=84\%.$$

- Xác suất chọn được con bò phản ứng dương tính, biết con bò không bị bệnh là 8% suy ra:

$$P(T^+|\overline{B})=8\%.$$

- Tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1000000 con suy ra $P(B)=0,000013$. Sử dụng công thức biến cố đối ta được:

$$P(\overline{B})=1-0,000013=0,999987.$$

- Sử dụng công thức Bayes ta có:

$$P(B|T^+)=\frac{P(B)\cdot P(T^+|B)}{P(B)\cdot P(T^+|B)+P(\overline{B})\cdot P(T^+|\overline{B})}$$
$$=\frac{13.10^{-6}.84.10^{-2}}{13.10^{-6}.84.10^{-2}+0,999987.8.10^{-2}}.$$
$$\approx 0,000136.$$

Vậy khi một con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm X thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là khoảng 0,000136.

Thí dụ 2. *Có 10 sinh viên thi môn Tiếng Anh. Biết đề thi gồm 20 câu hỏi và kết quả thu được chia làm 3 nhóm: Nhóm 1 gồm 2 sinh viên (trả lời đúng*

được 20 câu hỏi); Nhóm II gồm 3 sinh viên (trả lời đúng được16 câu hỏi); Nhóm III gồm 5 sinh viên (trả lời đúng được 10 câu hỏi). Gọi ngẫu nhiên một sinh viên và đưa cho sinh viên này gói 4 câu hỏi (trong số 20 câu hỏi đã làm), tính xác suất để chọn được sinh viên được thuộc Nhóm II biết rằng sinh viên này trả lời đúng được gói 4 câu hỏi.

Lời giải.

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố chọn một sinh viên thuộc Nhóm I, Nhóm II, Nhóm III.

Nên A_1, A_2, A_3 là hệ biến cố đầy đủ.

Gọi B: " Sinh viên trả lời được gói 4 câu hỏi".

Ta có: $P(A_1)=\dfrac{C_2^1}{C_{10}^1}=\dfrac{1}{5}$;

$P(A_2)=\dfrac{C_3^1}{C_{10}^1}=\dfrac{3}{10}$;

$P(A_3)=\dfrac{C_5^1}{C_{10}^1}=\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $P(B|A_1)=\dfrac{C_{20}^4}{C_{20}^4}=1$;

$P(B|A_2)=\dfrac{C_{16}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{364}{969}$;

$P(B|A_3)=\dfrac{C_{10}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{14}{323}$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(B)=P(B|A_1).P(A_1)+P(B|A_2).P(A_2)+P(B|A_3).P(A_3)$$

$$=1.\frac{1}{5}+\frac{364}{969}.\frac{3}{10}+\frac{14}{323}.\frac{1}{2}$$

$$=\frac{108}{323}.$$

Xác suất để chọn được sinh viên thuộc Nhóm II biết rằng sinh viên trả lời được cả 4 câu hỏi là $P(A_2|B)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2).P(A_2)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{364}{969}.\frac{3}{10}}{\frac{108}{323}}$$

$$=\frac{91}{270}\approx 0{,}337.$$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tại một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên: Nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 được đóng dấu OTK; Nếu một linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,95 không được đóng dấu OTK.

Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy này trên thị trường. Tính xác suất để linh kiện điện tử được chọn không được đóng dấu OTK.

Bài 2. Có 5% dân số mắc bệnh X. Có một xét nghiệm để phát hiện bệnh X. Đối với người mắc bệnh X, xác suất xét nghiệm này không dương tính là 2%. Đối với người không mắc bệnh X, xác suất xét nghiệm này dương tính là 3%. Chọn ngẫu nhiên một người và tiến hành xét nghiệm. Tính xác suất các biến cố:

W: "người đó không bị bệnh X và kết quả xét nghiệm dương tính";

Y: "người đó bị bệnh X và kết quả xét nghiệm không dương tính".

Bài 3. Theo một số liệu thống kê, năm 2004 ở Canada có 65% nam giới là thừa cân và 53,4% nữ giới là thừa cân. Nam giới và nữ giới ở Canada đều chiếm 50% dân số cả nước. Hỏi rằng, trong

năm 2004, xác suất để một người Canada được chọn ngẫu nhiên là người thừa cân bằng bao nhiêu?

Bài 4. Một hộp có 60 viên bi màu xanh và 40 viên bi màu đỏ; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi thống kê, người ta thấy: có 50% số viên bi màu xanh có dán nhãn và 75% số viên bi màu đỏ có dán nhãn; những viên bi còn lại không dán nhãn. Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Sử dụng công thức xác suất toàn phần, tính xác suất để viên bi được lấy ra có dán nhãn.

Câu 5. Giả sử có một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1%. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính giả là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh có 5% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính). Khi một người xét nghiệm có phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Câu 6. Có hai chiếc hộp, hộp I có 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen, hộp II có 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II.

a) Tính xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi màu trắng.

b) Giả sử viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi màu trắng. Tính xác suất viên bi màu trắng đó thuộc hộp I.

Câu 7. Một loại linh kiện do hai nhà máy số I, số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là: 4%;3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó.

a) Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt.

b) Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là: cao hơn?

Câu 8. Một chiếc hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Số viên bi màu đỏ có đánh số là 30.

b) Số viên bi màu vàng không đánh số là 15.

c) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số là $\frac{3}{5}$.

d) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra không có đánh số là $\frac{7}{16}$.

Câu 11. Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh Khánh Hòa nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Xác suất người không nghiện thuốc lá của tỉnh Khánh Hòa là 0,8.

b) Xác suất mà một người dân của tỉnh Khánh Hòa bị bệnh phổi trong trường hợp không nghiện thuốc là 0,15.

c) Khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh Khánh Hòa thì khả năng mà đó bị bệnh phổi là 31%.

d) Xác suất một người tỉnh Khánh Hòa là người nghiện thuốc lá trong trường hợp bị bệnh phổi là $\frac{6}{13}$.

Câu 12. Một phân xưởng có 3 máy cùng sản xuất một loại sản phẩm. Sản lượng của các máy sản xuất ra chiếm tỉ lệ 35%, 40%, 25% toàn bộ sản lượng của phân xưởng. Tỉ lệ phế phẩm của các máy này tương ứng là 1%, 1,5%, 0,8%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của phân xưởng để kiểm tra. Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) Gọi A là biến cố: "Lấy được phế phẩm" khi đó $P(A)=0,0115$.

b) Xác suất lấy được phế phẩm của máy 1 là 0,43 .

c) Xác suất lấy được phế phẩm của máy 2 là $\frac{12}{23}$

d) Giả sử sản phẩm lấy ra là phế phẩm, nhiều khả năng sản phẩm đó do máy 3 sản xuất.

Câu 13. Cho hai biến cố A,B sao cho $P(A)=0,3$; $P(B)=0,5$; $P(A|B)=0,4$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $P(\overline{A})=0,7$.

b) $P(AB)=0,2$.

c) $P(B|A)=0,06$.

d) $P(B|\overline{A})=\frac{241}{350}$.

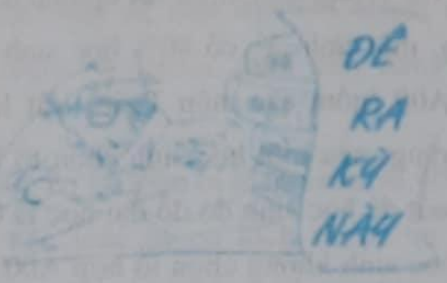
Câu 14. Giả sử tỉ lệ người dân của một tỉnh nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh đó thì khả năng mà đó bị bệnh phổi là bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

Câu 15. Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00. *Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2*

Câu 16. Có hai chuồng thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 7 con thỏ đen và 3 con thỏ trắng. Trước tiên, từ chuồng II lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ rồi cho vào chuồng I. Sau đó, từ chuồng I lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ. Tính xác suất để con thỏ được lấy ra là con thỏ trắng. (*Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2*).

Câu 17. Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó. Xét phương án tác chiến sau: *Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa.*

Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Tính xác suất bắn hạ máy bay đối phương trong phương án tác chiến nêu trên? (*làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân*).



Bài T1/576 (Lớp 6). Tính giá trị của tổng gồm 2025 số hạng sau:

$$S=\frac{1^2}{1^2-1.2026+2052338}+\frac{2^2}{2^2-2.2026+2052338}+\frac{3^2}{3^2-3.2026+2052338}+...+\frac{2025^2}{2025^2-2025.2026+2052338}.$$

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS P. Bình Định. An Nhơn. Bình Định)

Bài T2/576 (Lớp 7). Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn: $|a+2025b-1|^9+|a+2027b-2|^{10}=2+2026b-2028^b$.

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài T3/576. Với mỗi số thực x, kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Chứng minh rằng $\left[(9+4\sqrt{5})^{2025}\right]$ là số lẻ.

NGUYỄN KIM SƠ

(TT Bồi dưỡng và Phát triển tài năng Toán học Nam Sáng - SMART)

Bài T4/576. Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho $AB < AC$ và hai đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng qua A và vuông góc với AH cắt EF ở I, đường thẳng qua A và vuông góc với AB cắt BE ở K, đường thẳng qua A và vuông góc với IK cắt BC ở M. IK cắt AH tại P. Chứng minh độ dài đoạn MP không đổi khi A thay đổi trên cung lớn BC.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/576. Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^4-5x^3-13x^2-3x-3}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3x-2}+2x+1=0.$$

BÙI HẢI QUANG

(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/576. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1\\ \sqrt{x+y}=x^2-y\end{cases}.$$

TRẦN VĂN LÂM

(Phổ Yên, Thái Nguyên)

Bài T7/576. Cho dãy số (u_n), $n=1, 2, 3, \ldots$ được xác định như sau:

$$\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1-2u_n-u_n^2}\end{cases}.$$

Tính $\lim\left(u_1+u_2+...+u_n+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$.

ĐÀO VĂN TRUNG

(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Nghệ An)

Bài T8/576. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB, SC, SD và gọi $\dfrac{SM}{SA}=a, \dfrac{SN}{SB}=b, \dfrac{SP}{SC}=c, \dfrac{SQ}{SD}=d$ (với a, b, c, d là các số dương). Biết rằng bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng, chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{cd}}.$$

NGUYỄN VĂN NHO

(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghệ An)

Bài T9/576. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$Q=xy+yz+2zx\leq\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

HIẾU ĐOÀN

(TP. Tuy Hòa, Phú Yên)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/576. Xét dãy số (a_n) với: $a_0=a_1=1$ và $a_{n+1}=7a_n-a_{n-1}-2$ với mọi số tự nhiên $n\geq 1$. Có phải với mọi số tự nhiên n thì các số hạng a_n luôn là số chính phương không?

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG

(Pleiku

Bài T11/576. Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\big(f(xy)+2xy\big)=3xf(y)+3yf(x),$$

với mọi $x, y\in(0;+\infty)$.

ĐỖ LÊ HẢI THỤY

(GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Bài T12/576. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, $B\in(O)$ sao cho $\widehat{AOB}=90^0$, C là điểm chính giữa cung nhỏ AB của đường tròn (O). Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên OB, OA. F là điểm thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O) sao cho CE là đường phân giác của góc $\widehat{BEF}$. Đường thẳng qua F và vuông góc với OB cắt BE tại điểm I.

a) Chứng minh rằng đường tròn (I) (tâm I, bán kính IF) tiếp xúc với OB.

b) Từ B kẻ tiếp tuyến BK với đường tròn (I) (điểm K khác điểm N). Chứng minh rằng $K\in(O)$.

NGUYỄN NGỌC TỬ

(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài L1/576. Người ta bơm 10 m^3 khí nóng ở nhiệt độ $T = 300$ K vào khinh khí cầu. Nhiệt độ và áp suất khí quyển khi ấy là $T_0 = 279$ K và $p_0 = 1{,}00$ bar. Khối lượng khinh khí cầu là 240 kg. Khi đó khinh khí cầu chưa thể bay lên được.

a) Hãy tính lượng không khí chứa khinh khí cầu khi ấy.

Muốn khinh khí cầu bay lên người ta phải tăng nhiệt độ của khối khí lên bên trong khinh khí cầu mà không thêm vào hoặc lấy bớt không khí ra. Đây là quá trình đẳng áp. Xem không khí là phân tử lưỡng nguyên tử có nhiệt dung riêng đẳng áp là $c_{mp}=\dfrac{7}{2}$R. Cho biết hằng số khí lí tưởng là $R = 8{,}31$ J/mol.K và khối lượng mol của không khí là $M_A = 29$/mol.

b) Tính thể tích của khinh khí cầu đạt được để nó bắt đầu đi lên.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/576. Chất phóng xạ X có chu kì bán rã T, phân rã biến đổi thành hạt nhân con Y bền. Ở thời điểm ban đầu ($t = 0$) có một mẫu chất X nguyên chất, tại thời điểm t_1, tỉ số giữa số hạt nhân Y sinh ra và số hạt nhân X còn lại là $\dfrac{1}{4}$. Tại thời điểm $t_2 = t_1 + 141{,}2$ (s), tỉ số giữa hạt nhân Y sinh ra và số hạt nhân X còn lại là 4. Xác định T.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/576 (Grade 6). Find the value of the following sum which consists of 2025 terms

$$S=\frac{1^2}{1^2-1.2026+2052338}+\frac{2^2}{2^2-2.2026+2052338}+\frac{3^2}{3^2-3.2026+2052338}+\ldots+\frac{2025^2}{2025^2-2025.2026+2052338}.$$

Problem T2/576 (Grade 7). Find all the integers a and b that satisfy:

$$|a+2025b-1|^9+|a+2027b-2|^{10}=2+2026b-2028^b.$$

Problem T3/576. For each real number x, denote by $[x]$ the largest integer not exceeding x. Prove that $\left[(9+4\sqrt{5})^{2025}\right]$ is an odd number.

Problem T4/576. Given a circle (O) and a fixed chord BC. A point A is moving on the major arc BC so that $AB < AC$ and two altitudes BE, CF of the triangle ABC intersect at H which is inside the triangle. The line through A and perpendicular to AH intersects EF at I, the line through A and perpendicular to AB intersects BE at K, the line through A and perpendicular to IK intersects BC at M. IK intersects AH at P. Prove that length of MP does not change when A is moving on the major arc BC.

Problem T5/576. Solve the equation

$$\sqrt[3]{x^4-5x^3-13x^2-3x-3}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3x-2}+2x+1=0.$$

(Xem tiếp trang 47)



Bài T1/572. *Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn $6x^2-3y^2-4xy+5x-y+1=0$. Chứng tỏ rằng $5x+y+2$ là một số chính phương.*

Lời giải. Đề bài yêu cầu chỉ ra $5x+y+2$ là một số chính phương, trong đó $5x+y+2$ là một biểu thức bậc nhất của x và y, vì thế ta tìm cách phân tích một vế của đẳng thức ở giả thiết thành tích của hai biểu thức bậc nhất của x và y, còn vế kia là một số chính phương (biểu thức bậc hai đơn giản). Biến đổi như sau.

$$\begin{aligned}y^2&=4x^2-4xy+2(x^2-y^2)+5x-y+1\\&=2x(2x-2y)+(2x-2y)(x+y)+5x-y+1\\&=(2x-2y)(3x+y)+2x-2y+3x+y+1\\&=(2x-2y)(3x+y+1)+3x+y+1\\&=(3x+y+1)(2x-2y+1),\end{aligned}$$

tức là $y^2=(3x+y+1)(2x-2y+1)$ (1).

Xét ước số chung $a>0$ của hai thừa số ở vế phải của (1). Giả sử $3x+y+1=ab$ và $2x-2y+1=ac$ với a, b, c là các số nguyên mà $(b, c)=1$ thì có:

$6x+2y+2=2ab$ và $6x-6y+3=3ac$.

Trừ theo từng vế của hai đẳng thức này được $8y-1=a(2b-3c)$, suy ra a là ước số của $8y-1$. Mặt khác từ (1) có $y^2=a^2bc$ nên a^2 là ước số của y^2, do đó a là ước số của y. Từ đó và do a là ước số của $8y-1$ suy ra $a=1$, dẫn đến $3x+y+1=b$ và $2x-2y+1=c$, còn $y^2=bc>0$ với $(b, c)=1$.

Nếu phân tích b và c thành tích các số nguyên tố thì do $(b, c)=1$ nên b, c không có ước số nguyên tố chung, từ $y^2=bc$ thì mỗi ước số nguyên tố trong sự phân tích ra thừa số nguyên tố của b và c đều có số mũ chẵn, tức là $b=m^2$ và $c=n^2$, hoặc $b=-m^2$ và $c=-n^2$. Trong cả hai trường hợp thì $y^2=bc=m^2n^2$ nên $y=mn$ hoặc $y=-mn$.

Ta thấy $5x+y+2=3x+y+1+2x-2y+1+2y$

$=b+c+2y$.

• Với $3x+y+1=b=m^2$ và $2x-2y+1=c=n^2$ thì $5x+y+2=b+c+2y=m^2+n^2+2mn$

$=(m+n)^2$ khi $y=mn$,

hoặc $5x+y+2=b+c+2y=m^2+n^2-2mn$

$=(m-n)^2$ khi $y=-mn$,

lúc đó $5x+y+2$ là số chính phương, thỏa mãn đề bài.

• Với $3x+y+1=-m^2$ và $2x-2y+1=-n^2$ thì trừ theo từng vế của hai đẳng thức này được:

$x=n^2-m^2-3y$.

Nếu $y=mn$ thì có $x=n^2-m^2-3mn$, từ đó và $2y=2mn$ có: $-n^2=2x-2y+1$

$=2n^2-2m^2-8mn+1$,

hay là $3n^2+1=8mn+2m^2$ (2).

Vế phải của (2) có dạng $8k+2$ nếu $m=2r+1$ và có dạng $8k$ nếu $m=2r$. Xét vế trái của (2) thì n phải là số lẻ, đặt $n=2t+1$ thì

$3n^2+1=3(2t+1)^2+1=12t(t+1)+4$

có dạng $8k+4$ (do $t(t+1)$ là số chẵn), như thế đẳng thức (2) không có nghiệm nguyên. Khi $y=-mn$ thì ta có $3n^2+1=-8mn+2m^2$, lập luận tương tự như trên, đẳng thức này không có nghiệm nguyên.

Nhận xét. Ta có thể chỉ ra rằng tồn tại các cặp số nguyên x, y sao cho $5x+y+2$ là số chính phương bằng cách biến đổi như sau. Khi trừ theo từng vế của hai đẳng thức $3x+y+1=m^2$ và $2x-2y+1=n^2$ được $x=m^2-n^2-3y$.

Nếu $y=-mn$ thì có $x=m^2-n^2+3mn$, từ đó và $2y=-2mn$ có: $n^2=2x-2y+1=2m^2-2n^2+8mn+1$,

hay $3n^2-1=2m^2+8mn$,

hay $2(m^2+4mn+4n^2)=11n^2-1$,

tức là $2(m+2n)^2=11n^2-1$ (3).

Từ đó n phải là số lẻ, đặt $n=2t+1$ thì

$11n^2-1=11(2t+1)^2-1=11[4t(t+1)+1]-1$

$=44t(t+1)+10$, thay vào đẳng thức (3) được:

$(m+2n)^2=22t(t+1)+5$ (4).

Ta chọn t sao cho vế phải của (4) là số chính phương. Chẳng hạn với $t=1$ thì $n=3$ và (4) trở thành $(m+6)^2=49=7^2$, từ đó có $m=1$ hoặc $m=-13$. Với $n=3$, $m=1$ thì $y=-mn=-3$, và $x=m^2-n^2-3y=1$, lúc đó $5x+y+2=4=2^2$.

Với $n=3$, $m=-13$ thì $y=-mn=39$, và $x=m^2-n^2-3y=43$, lúc đó $5x+y+2=256=16^2$.

Bài toán này khó nên không có bạn nào gửi bài giải về Tòa soạn.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/572. *Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ thỏa mãn $a^2+b^2 \vdots p^4$ và $a(a^2+16ab+b^2) \vdots p^4$. Chứng minh rằng*

$$a(a^9+b^9) \vdots p^{20}.$$

Lời giải. Ta có:

$$16b\left(a^2+b^2\right)-a\left(a^2+16ab+b^2\right)$$

$$=16b^3-a\left(a^2+b^2\right).$$

Mà $a^2+b^2 \vdots p^4$ và $a\left(a^2+16ab+b^2\right) \vdots p^4$ (giả thiết), do đó $16b^3 \vdots p^4$, mà p là số nguyên tố lẻ nên $b^3 \vdots p^4$, suy ra $b \vdots p$. Đặt $b=pt$ $(t \in \mathbb{R})$. Nếu $t \not\vdots p$ ta có: $b^3=(tp)^3=t^3p^3 \vdots p^4$, suy ra $t^3 \vdots p$ (vô lí). Vậy $t \vdots p$, suy ra $b \vdots p^2$, suy ra $b^2 \vdots p^4$ và $b^9 \vdots p^{18}$.

Ta có: $a^2+b^2 \vdots p^4$ và $b^2 \vdots p^4$, suy ra $a^2 \vdots p^4$ hay $a \vdots p^2$ nên suy ra $a^9 \vdots p^{18}$.

Vì $a^9 \vdots p^{18}$, $b^9 \vdots p^{18}$ suy ra $a^9+b^9 \vdots p^{18}$.

Mà $a \vdots p^2$ nên $a\left(a^9+b^9\right) \vdots p^{20}$.

Nhận xét. Bài này có nhiều cách chứng minh khác nhau. Một số bạn cũng đưa ra các cách giải khác cách của tác giả đề toán và chính xác. Khen các bạn sau có cách giải đúng và ngắn ngọn:

Nghệ An: *Trương Đình Quốc* và *Bùi Hữu Anh Quân*, 6E; *Phạm Hồng Quân*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Yên Sơn, Đô Lương; *Nguyễn Phương Hoa*, 6A2, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/572. *Chứng minh rằng*

$$P=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}}$$

luôn là số vô tỷ với mọi n là số tự nhiên lớn hơn 1.

Lời giải. Trước hết ta cần một bổ đề

Bổ đề: *Nếu n là số tự nhiên sao cho $\sqrt{n}$ là số hữu tỷ thì n là số chính phương.*

Thật vậy, giả sử $\sqrt{n}=\dfrac{a}{b}$ với $a,b \in \mathbb{N}, b>0$ $(a,b)=1$. Vì $(a,b)=1$ và $n=\dfrac{a^2}{b^2} \in \mathbb{N}$ nên

$$a^2 \vdots b^2 \Rightarrow a \vdots b \Rightarrow b=1.$$

Do đó $n=a^2$ là số chính phương. Bổ đề được chứng minh. Trở lại bài toán, ta sử dụng phương pháp phản chứng.

Giả sử tồn tại số tự nhiên n lớn hơn 1 sao cho $P=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}} \in \mathbb{Q}$ (ký hiệu $\mathbb{Q}$ là tập hợp tất cả các số hữu tỷ). Thế thì:

$$P^2=1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow 2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}=\left(P^2-1\right)^2 \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}} \in \mathbb{Q}.$$

Cứ tiếp tục suy luận như trên, ta sẽ được:

$$\sqrt{n-1+\sqrt{n}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n-1+\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Q}.$$

Theo bổ đề, ta có n là số chính phương.

Đặt $n=a^2$ với a là số tự nhiên lớn hơn 1.

Ta có: $n-1+\sqrt{n}=a^2+a-1 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a^2+a-1} \in \mathbb{Q}$, lại theo bổ đề, phải có a^2+a-1 là số chính phương.

Mặt khác, dễ thấy với a là số tự nhiên lớn hơn 1 thì $a^2<a^2+a-1<(a+1)^2$ nên a^2+a-1 không thể là số chính phương.

Giả thiết $P=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}} \in \mathbb{Q}$ dẫn tới mâu thuẫn.

Vậy $P=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}}$ luôn là số vô tỷ với mọi n là số tự nhiên lớn hơn 1.

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. 1) Bài này không có nhiều cách giải. Điều then chốt của kết quả là chứng minh: *Nếu n là số tự nhiên sao cho $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ thì n là số chính phương; và nếu a là số tự nhiên lớn hơn 1 thì a^2+a-1 không thể là số chính phương.*

2) Nói chung, muốn chứng minh một số P nào đó không phải là số hữu tỷ, ta thường sử dụng phương pháp phản chứng.

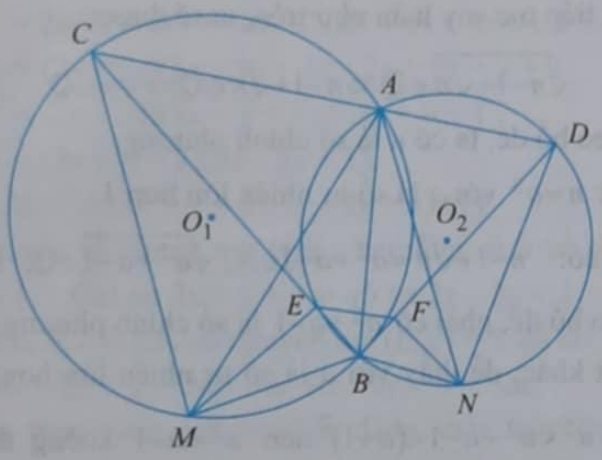
Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 Gibs, TP. Graz.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/572. *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua A cắt (O_1), (O_2) lần lượt tại C và D. Trên các cung $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{BD}$ (không chứa A) của (O_1) và (O_2), ta lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{BAM}+\widehat{DAN}=90^0$. Kẻ $ME\perp BC$ $(E\in BC)$, $NF\perp BD$ $(F\in BD)$. Chứng minh $EF\,//\,CD$.*

Lời giải.



Theo giả thiết, $\overset{\frown}{MAB}+\overset{\frown}{NAD}=90^\circ$ nên $\overset{\frown}{MAC}+\overset{\frown}{NAB}=90^0$. Lại có: $\overset{\frown}{MAC}=\overset{\frown}{MBC}$, suy ra:

$$\overset{\frown}{BME}=\overset{\frown}{NAB}=\overset{\frown}{NDB}.$$

Từ đó suy ra: $\Delta BME\backsim\Delta NDF$ (g.g), ta có:

$$\frac{BE}{NF}=\frac{ME}{DF} \text{ hay } BE.DF=ME.NF \quad (1).$$

Tương tự: $\overset{\frown}{BNF}=\overset{\frown}{MAB}=\overset{\frown}{MCB}$. Suy ra:

$$\Delta BNF\backsim\Delta MCE.$$

Ta có: $\frac{BF}{ME}=\frac{NF}{CE}$ hay $BF.CE=ME.NF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $BE.DF=BF.CE$, do đó:

$$\frac{FB}{FD}=\frac{EB}{EC}.$$

Theo định lí Thales đảo ta có $EF\,//\,CD$.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Mai Thiện Ấn*, 8B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, **Thanh Hóa** cho lời giải đúng.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/572. *Giải phương trình*

$$x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}\ (*).$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $0\le x\le 2$.

Cách 1. Nhận thấy

$$(\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{5-x})^2=10-3x$$
$$+2(\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}).$$

Kết hợp với (*) suy ra:

$$(\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{5-x})^2=10-x$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{10-x}\ (\text{do } 0\le x\le 2)$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{10-x}-\sqrt{5-x}\ (1).$$

Bình phương hai vế của (1) ta nhận được:

$$5+2\sqrt{(2-x)(3-x)}=15-2\sqrt{(10-x)(5-x)}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(2-x)(3-x)}=5-\sqrt{(10-x)(5-x)}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}5-\sqrt{(10-x)(5-x)}\ge 0\\(2-x)(3-x)=25+(10-x)(5-x)-10\sqrt{(10-x)(5-x)}\end{cases}\ (2)$$

Biến đổi phương trình (2) thành:

$$10\sqrt{50-15x+x^2}=69-10x\ (\text{do } 0\le x\le 2)$$
$$\Leftrightarrow 100\left(50-15x+x^2\right)=4761+100x^2-1380x\Leftrightarrow x=\frac{239}{120}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy thoả mãn. Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=\frac{239}{120}$.

Cách 2. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{2-x}\ (a\ge 0)\\b=\sqrt{3-x}\ (b\ge 0)\\c=\sqrt{5-x}\ (c\ge 0)\end{cases}$, suy ra: $\begin{cases}a^2+x=2\\b^2+x=3\\c^2+x=5\end{cases}$

và phương trình (*) trở thành $x=ab+bc+ca$.

Từ đó, ta có: $\begin{cases}(a+b)(a+c)=2\ (1)\\(a+b)(b+c)=3\ (2).\\(a+c)(b+c)=5\ (3)\end{cases}$

Nhân theo vế của (1), (2), (3) ta được:

$$\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2=30.$$

Vì a, b, c là các số không âm nên

$$(a+b)(b+c)(c+a)=\sqrt{30}.$$

Lần lượt kết hợp với (1), (2), (3) ta nhận được:

$$b+c=\frac{\sqrt{30}}{2};\ a+c=\frac{\sqrt{30}}{3};\ a+b=\frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Suy ra: $a+b+c=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{30}}{2}+\frac{\sqrt{30}}{3}+\frac{\sqrt{30}}{5}\right)=\frac{31\sqrt{30}}{60}.$

Khi đó: $a=(a+b+c)-(b+c)=\frac{31\sqrt{30}}{60}-\frac{\sqrt{30}}{2}=\frac{\sqrt{30}}{60};$

$$x=2-a^2=2-\left(\frac{\sqrt{30}}{60}\right)^2=\frac{239}{120}\text{ (thoả mãn ĐK).}$$

Vậy PT(*) có nghiệm duy nhất $x=\frac{239}{120}$.

Nhận xét. Bài này có nhiều bạn tham gia gửi bài và đều làm theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt. lập luận chặt chẽ và ngắn gọn: **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An**: *Đậu Nhật Hiếu*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8H, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **Lâm Đồng:** *Trương Mỹ Hạnh*, 9A4, THCS Quang Trung, Bảo lộc; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/572. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c}<6$ và $\frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a}<6$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c<abc.$$

Lời giải (của *Vương Khánh Toàn*)

Từ (1) ta có: $72>\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c}\right)^2+\left(\frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a}\right)^2$

$$=\frac{40}{a^2}+\frac{13}{b^2}+\frac{45}{c^2}+\frac{48}{bc}+\frac{60}{ac}+\frac{36}{ab}$$

$$=\left(\frac{36}{a^2}+\frac{9}{b^2}\right)+\left(\frac{4}{a^2}+\frac{9}{c^2}\right)+\left(\frac{36}{c^2}+\frac{4}{b^2}\right)+\frac{48}{bc}+\frac{60}{ac}+\frac{36}{ab}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{36}{a^2}\cdot\frac{9}{b^2}}+2\sqrt{\frac{4}{a^2}\cdot\frac{9}{c^2}}+2\sqrt{\frac{36}{c^2}\cdot\frac{4}{b^2}}+\frac{48}{bc}+\frac{60}{ac}+\frac{36}{ab}$$

$$=72\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right).$$

Suy ra: $1>\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$ hay $a+b+c<abc$.

Nhận xét. Đây là bài dễ nên khá nhiều bạn giải theo nhiều cách khác nhau (đổi biến, biến đổi tương đương, phản chứng, sử dụng bất đẳng thức Cauchy). Tất cả bài gửi có lời giải tốt:

Gia Lai: *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương. **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Kiên Giang:** *Nguyễn Gia Bảo*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá. **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Nẵng. **Long An:** *Võ Tiến Phát*, 10A1, THPT Nguyễn Thông; *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10T2, *Trần Lê Trọng Phúc*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu. **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai. **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh. **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Quảng Bình:** *Nguyễn Đăng Khiêm, Trần Đức Phát, Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/572. *Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$F=\frac{1}{a+16}+\frac{1}{b+16}+\frac{1}{c+16}.$$

Lời giải. Đặt $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}\ (x,y,z>0)$. Khi đó $x+y+z=6$ và $F=\frac{1}{x^2+16}+\frac{1}{y^2+16}+\frac{1}{z^2+16}$.

Ta sẽ chứng minh: $\frac{1}{x^2+16}\leq\frac{7-x}{100}$ (1).

Thật vậy: $(1)\Leftrightarrow 100\leq(x^2+16)(7-x)$

$$\Leftrightarrow x^3-7x^2+16x-12\leq 0\Leftrightarrow(x-3)(x-2)^2\leq 0$$

(BĐT cuối cùng này đúng vì

$$x=\sqrt{a}<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b+c}}{2}<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}=3\ ).$$

Tương tự: $\frac{1}{y^2+16}\leq\frac{7-y}{100}$ (2); $\frac{1}{z^2+16}\leq\frac{7-z}{100}$ (3).

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta thu được:

$$F \le \frac{21-(x+y+z)}{100} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=4$.

Vậy giá trị lớn nhất của F là $\frac{3}{20}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán không khó nên có nhiều bạn gửi lời giải về tòa soạn. Đa số các bạn đều sử dụng phương pháp tiếp tuyến để giải. Nội dung của phương pháp này là tìm đánh giá hàm một biến $f(x)$ về hàm bậc nhất của x. Cụ thể ở đây hàm bậc nhất của x được cho bởi phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 với x_0 là điểm mà ta đã dự đoán dấu bằng sẽ xảy ra. Đánh giá có dạng: $f(x) \le f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Ví dụ ở trong bài toán trên $x_0=2, f(x)=\frac{1}{x^2+16}, f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+16)^2}, f'(2)=\frac{-1}{100}$, $f(2)=\frac{1}{20}$, ta có đánh giá sau:

$$\frac{1}{x^2+16} \le \frac{-1}{100}(x-2)+\frac{1}{20} = \frac{7-x}{100}.$$

Nhiều bạn đưa ra luôn đánh giá $\frac{1}{a+16} \le \frac{7-\sqrt{a}}{100}$ (4).

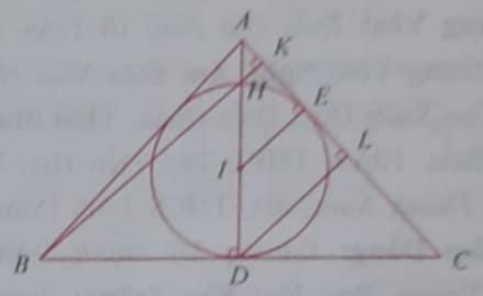
Có một điều hơi lạ là có đến hơn một nửa số bạn gửi lời giải về tòa soạn lại đưa về xét biểu thức $\frac{a}{a+16}+\frac{b}{b+16}+\frac{c}{c+16}$ và sử dụng đánh giá $\frac{a}{a+16} \ge \frac{4\sqrt{a}-3}{25}$ (đánh giá này cũng có được bằng cách sử dụng phương pháp tiếp tuyến và nó tương đương với đánh giá (4) ở trên). Có vài bạn cho lời giải sai. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Nội: *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; *Nguyễn Thành Nam, Đỗ Hải Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **Gia Lai:** *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; **Kiên Giang:** *Trần Hoàng Bách*, 10T2, *Cái Hoàng Quốc Khánh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện, Trần Quang Minh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Nguyễn Đăng Khiêm, Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Long An:** *Nguyễn Gia Bảo*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu;

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T8/572. *Cho tam giác ABC cân tại A. Giả sử trực tâm H của tam giác nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác. Tính tỷ số $\frac{AB}{BC}$.*

Lời giải. (Của một số bạn)



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA. BH giao AC tại K. Gọi L là hình chiếu vuông góc của D trên AC.

Tam giác ABC cân tại A nên $DB=DC$. Mà $DL//BK$ nên L là trung điểm của CK.

Mặt khác, H nằm trên (I) nên I là trung điểm của HD. Lại có HK, IE, DL đôi một song song nên E là trung điểm của KL.

Từ đó, $CD=CE=\frac{3}{4}CK$.

Lại có: $\Delta ADC \sim \Delta BKC$ nên $\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{CK}=\frac{3}{4}$.

Nhận xét. Các bài giải gửi về Tòa soạn đều cho đáp số đúng. Một số bạn biến đổi lượng giác hoặc đặt trục tọa độ nên lời giải dài. Các bạn sau có lời giải tốt: **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Quỳnh Như*, 10A1, THPT Cẩm Xuyên, Cẩm Xuyên; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*,

9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Long An:** *Nguyễn Gia Bảo, Kiều Gia Bảo, Liêu Phúc Thịnh, Thi Tiến Thành*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, thị xã Hoàng Mai; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 10 toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/572. *Cho các số thực a, b thỏa mãn $a.b>0$. Chứng minh rằng phương trình $x^4+ax^3+bx+m=0$ (1) có nhiều nhất là 3 nghiệm thực với mọi số thực m.*

Lời giải. Giả sử phương trình (1) có 4 nghiệm thực x_1, x_2, x_3, x_4. Theo định lý Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-a & (2)\\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0 & (3)\\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-b & (4)\\ x_1x_2x_3x_4=m & (5) \end{cases}.$$

Vì $a.b>0$ nên ta có thể giả thiết $a>0$, $b>0$ (nếu không ta thay x bởi $-x$). Xét các trường hợp sau:

• TH1: $m>0$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow x^4+m=-x(ax^2+b)$.

Vì $x^4+m>0$ và $ax^2+b>0$ nên: $-x>0\Rightarrow x<0$ $\Rightarrow$ mọi nghiệm của PT(1) đều âm $\Rightarrow$ $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4>0$, mâu thuẫn với (3).

• TH2: $m=0$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow x(x^3+ax^2+b)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 & (6)\\ x^3+ax^2+b=0 & (7) \end{cases}.$$

Vì (1) có 4 nghiệm nên (7) có 3 nghiệm. Ta có: $(7)\Leftrightarrow x^3=-(ax^2+b)$ $\Rightarrow$ PT(7) có 3 nghiệm đều âm. Giả sử x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của PT(7), theo định lý Viète ta có: $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$, mâu thuẫn với 3 nghiệm của PT(7) đều âm.

• TH2: $m<0$. Từ (5) suy ra PT(1) có 3 nghiệm dương, 1 nghiệm âm hoặc 1 nghiệm dương, 3 nghiệm âm.

+ Nếu (1) có 3 nghiệm dương, 1 nghiệm âm, chẳng hạn x_2, x_3, x_4 dương, x_1 âm thì từ (2) suy ra:

$$x_1+x_2+x_3+x_4<0\Rightarrow x_2+x_3+x_4<-x_1$$

$$\Rightarrow(x_2+x_3+x_4)^2<-x_1(x_2+x_3+x_4)$$

$$\Rightarrow x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4<-x_1(x_2+x_3+x_4)$$

$$\Rightarrow x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4<0,$$

mâu thuẫn với (3).

+ Nếu (1) có 1 nghiệm dương, 3 nghiệm âm, chẳng hạn x_1 dương, x_2, x_3, x_4 âm thì từ (4) ta có:

$$x_1x_2x_3x_4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)<0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}>0\Rightarrow\frac{1}{x_1}>-\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right) \quad (8).$$

Từ (3) ta có: $-x_1(x_2+x_3+x_4)=x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$

$$\Rightarrow-(x_2+x_3+x_4)=\frac{1}{x_1}(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4).$$

Kết hợp với (8) suy ra:

$$\Rightarrow-(x_2+x_3+x_4)>-\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)$$

$$\Rightarrow-(x_2+x_3+x_4)>-\left(2(x_2+x_3+x_4)+\frac{x_3x_4}{x_2}+\frac{x_2x_4}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}\right)$$

$$\Rightarrow 0>-\left(x_2+x_3+x_4+\frac{x_3x_4}{x_2}+\frac{x_2x_4}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}\right),$$ vô lý vì x_2, x_3, x_4 đều âm. Vậy với mọi số thực m thì PT đã cho có nhiều nhất 3 nghiệm thực.

Nhận xét. 1) Lời giải trên là của tác giả đề toán. Một số bạn đã sử dụng hệ quả của định lý Rolle giả sử phản chứng phương trình có 4 nghiệm để dẫn tới điều vô lý, tuy nhiên các bạn không xét trường hợp phương trình có nghiệm bội nên lời giải chưa chặt chẽ. Tuyên dương bạn *Nguyễn Đăng Khiêm*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** sử dụng định lý Viète cho phương trình bậc 4 đã cho lời giải chặt chẽ.

2) Với giả thiết của bài toán thì có thể chứng minh PT(1) có nhiều nhất 2 nghiệm thực. Có một cách giải ngắn gọn cho bài này, đó là cách sử dụng định lý dấu Descarte. Các bạn hãy tự giải bài toán theo cách này nhé!

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/572. *Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc 2022 và hệ số cao nhất bằng 1. Biết rằng $P(x)$ có đúng 2022 nghiệm thực phân biệt không phải là số nguyên. Giả sử mỗi đa thức $P(x^2-2x-1)$ và*

$P(-x^2+2x+1)$ đều có 2696 nghiệm thực phân biệt. Hỏi có bao nhiêu nghiệm của $P(x)$ thuộc khoảng $(-2;2)$?

Lời giải. (Theo ý của đa số các bạn).

Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_{2022}$ là các nghiệm thực không nguyên của $P(x)$ thì

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{2022}).$$

Khi đó: $P(x^2-2x-1)=0$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1=x_k,\ k=1,2,\ldots,2022.$$

Nhận xét rằng các phương trình này có $\Delta'=2+x_k\neq 0$ nên chúng không có nghiệm kép, hoặc vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm phân biệt.

Để ý rằng phương trình $P(x^2-2x-1)=0$ có 2696 nghiệm phân biệt nên có tất cả $\dfrac{2696}{2}=1348$ phương trình có 2 nghiệm, tức là có đúng 1348 nghiệm $x_k>-2$ và 674 nghiệm $x_k<-2$.

Tương tự: $P(-x^2+2x+1)=0$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x+1=x_k,\ k=1,2,\ldots,2022$$

có $\Delta'=2-x_k$, với $k=1,2,\ldots,2022$.

Suy ra có 1348 nghiệm $x_k<2$ và 674 nghiệm $x_k>2$. Vậy có tất cả 1348 + 1348 – 2022 = 674 nghiệm $x_k\in(-2,2)$.

Kết luận: Có 674 nghiệm của $P(x)$ trong khoảng $(-2,2)$.

Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình đa thức liên quan đến tam thức bậc hai và phân tích đa thức ra thừa số. Các bạn gửi lời giải đều cho đáp số đúng.

Bình Định: *Nguyễn Trần Ngọc Thiện*, 11A1, THPT Tuy Phước 1; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/572. *Tìm tất cả các bộ hai số nguyên dương a, b sao cho $q^2-r=2007$ với q là thương và r là số dư khi chia a^2+b^2 cho $a+b$.*

Lời giải. (Dựa trên lời giải của 2 bạn *Nguyễn Đăng Khiêm* và *Vương Khánh Toàn*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**)

Ta có: $\dfrac{(a+b)^2}{2}\le a^2+b^2=q(a+b)+r$ (1).

$$q^2-2007=r<a+b\Rightarrow q^2<a+b+2007$$

$$\Rightarrow a^2+b^2<\sqrt{a+b+2007}(a+b)+a+b \quad (2).$$

Vì $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ nên từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{(a+b)^2}{2}\le\sqrt{a+b+2007}(a+b)+a+b$$

$$\Rightarrow(a+b)-2\le 2\sqrt{a+b+2007}$$

$$\Rightarrow(a+b)^2-4(a+b)+4\le 4(a+b+2007).$$

Đặt $x=a+b\Rightarrow x(x-8)<8024$

$$\Rightarrow x\le 93\Rightarrow a+b\le 93\Rightarrow r<93.$$

Từ đó:

$$2007=q^2-r<q^2=2007+r<2007+93=2100$$

$$\Rightarrow 44<q<46\Rightarrow q=45$$

$$\Rightarrow r=q^2-2007=45^2-2007=18.$$

Vì $a^2+b^2=45(a+b)+18$ chia hết cho 3 nên a, b đều chia hết cho 3. Đặt $a=3u$; $b=3v$ ta được:

$$u^2+v^2=15(u+v)+2\Rightarrow u(u-15)+v(v-15)=2.$$

Giả sử $u\ge v$. Nếu $v>15$ thì $u>15$

$$\Rightarrow u(u-15)+v(v-15)>2.\text{ Vậy } v\le 15.$$

Xét phương trình: $u^2-15u+v^2-15v-2=0$ (3) với ẩn u, tham số v. Thử các giá trị của $v\in\{1,2,3,\ldots,15\}$ ta được: $v=1, u=16$; $v=14, u=16$.

Từ đó: $b=3, a=48$; $b=42, a=48$.

Vậy có 4 bộ số (a, b) thỏa mãn là:

$$(48;3);(48;42);(3;48);(42;48).$$

Nhận xét. Ngoài bạn *Khiêm* và bạn *Toàn*, các bạn sau có lời giải đúng: **Gia Lai:** *Nguyễn Hữu Chiến Thắng*, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Long An:** *Nguyễn Gia Bảo*, *Trần Lê Trọng Phúc*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/572. *Cho tam giác ABC không cân tại A, (I) là đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng qua A song song với BC theo thứ tự cắt DE, DF tại M, N. Các đường thẳng qua M, N vuông góc với MN theo thứ tự cắt IF, IE tại P, Q. Chứng minh rằng*

a) *Ba điểm D, P, Q thẳng hàng.*

b) *Ba đường thẳng DI, PE, QF đồng quy.*

Lời giải. Bỏ qua trường hợp tầm thường $AB=AC$.

Gọi K là giao điểm của MF và NE. Vì các tam giác BDF, CDE theo thứ tự cân tại B, C và $BC//MN$ nên các tam giác ANF, AME cùng cân tại A. Do đó: $AN=AF=AE=AM$;

$$\widehat{NAM}=\widehat{NAB}+\widehat{BAC}+\widehat{CAM}$$
$$=\widehat{ABC}+\widehat{BAC}+\widehat{ACB}=180^0.$$

Điều đó có nghĩa là các điểm E, F, M, N cùng thuộc đường tròn tâm A, đường kính MN, kí hiệu là (A). Do đó:

+ P là giao điểm của các tiếp tuyến với (A) tại F và M; Q là giao điểm của các tiếp tuyến với (A) tại E và N (1).

+ K là trực tâm của tam giác DMN (2).

a) Gọi R là giao điểm của EF và MN.

Từ (1), áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} EMF \\ NFM \end{pmatrix}$, suy ra R, D, P thẳng hàng.

Tương tự: R, D, Q thẳng hàng.

Vậy D, P, Q thẳng hàng.

b) Gọi T là trực tâm của tam giác IBC.

Vì $ID\perp BC$ nên D, I, T thẳng hàng (3).

Từ (2), chú ý rằng D, I, K thẳng hàng và tứ giác $IDCE$ nội tiếp, suy ra:

$\widehat{AEN}=\widehat{ANE}=\widehat{MNE}=\widehat{KDM}=\widehat{IDM}=\widehat{IDE}$.

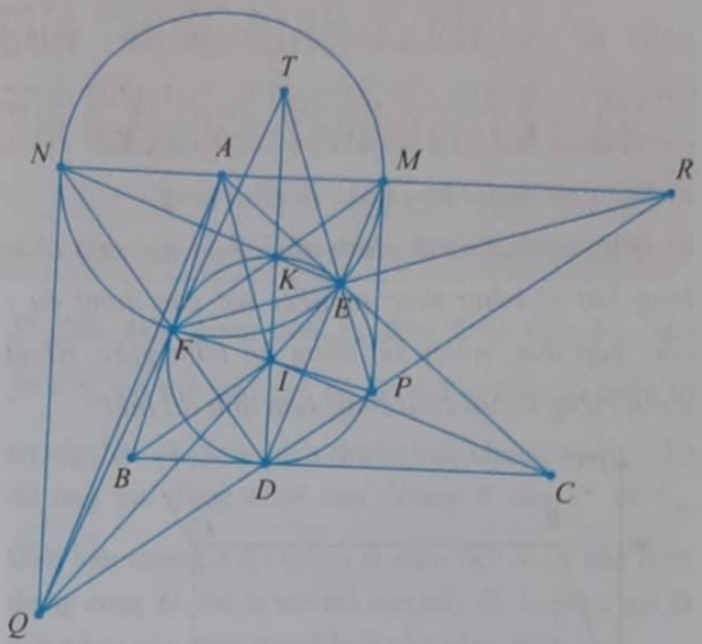
Do đó $IC//NE$. Kết hợp với $AQ\perp NE$, suy ra $AQ\perp IC$. Kết hợp với $IQ\perp AC$, suy ra Q là trực tâm của tam giác IAC.

Tương tự: P là trực tâm của tam giác IAB.

Vậy theo phần 1, F, Q, T thẳng hàng (4).

Tương tự, E, P, T thẳng hàng (5).

Từ (3), (4), (5) suy ra DI, PE, QF đồng quy.



Nhận xét.

1) Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên nhiều bạn giải quá dài, có bạn phải dùng lượng giác, có bạn phải dùng số phức.

2) Trong lời giải phần a), nếu dùng cực và đối cực thì không cần dùng điểm R.

3) Bạn *Vũ Hoàng Sơn*, 9A, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ** có lời giải chỉ dùng kiến thức hình học lớp 9 (rất đáng khen).

4) Lời giải phần b) là của bạn *Trần Tấn Triết*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, rất tiếc rằng bạn *Triết* lại giải sai phần a) (cẩu thả quá).

5) Tòa soạn lưu ý một số bạn viết tay, sau đó chụp lại bằng điện thoại thông minh nhưng rất mờ, không đọc được.

6) Sau đây là các bạn có lời giải đúng:

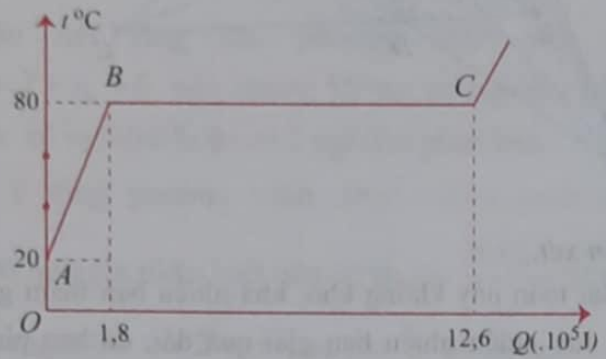
Phú Thọ: *Trần Việt Tùng*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*; 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11T, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Phú Yên:** *Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Gia Lai:** *Lương Xuân Nghĩa*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Bình Phước:** *Trần Minh Hùng*, 11T, THPT chuyên Bình Long; **Vĩnh Long:** *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Kiên Giang:** *Nguyễn Sơn Khánh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/572. *Cho đồ thị biểu diễn sự thay đổi nhiệt độ của khối chất lỏng theo nhiệt lượng cung cấp có dạng như hình dưới. Biết nhiệt dung riêng của chất lỏng đó là $c = 2500$ J/kg.K.*

a) *Xác định nhiệt hoá hơi của chất lỏng.*

b) *Hãy nêu cách xác định nhiệt hoá hơi của chất lỏng bất kì bằng thực nghiệm với các dụng cụ : cốc, bếp đun, nhiệt kế, đồng hồ bấm giây. Nhiệt dung riêng c của chất lỏng xem như đã biết.*



Lời giải. a) Nhìn trên đồ thị ta thấy :

- Đoạn AB: chất lỏng nhận một nhiệt lượng $Q_1 = 1{,}8.10^5$ J để tăng từ 20^0C đến 80^0C. Gọi m là khối lượng chất lỏng ta có:

$$Q_1 = m.c(80 - 20).$$

$$\Rightarrow m = \frac{Q_1}{c(80-20)} = \frac{1{,}8.10^5}{2500.60} = 1{,}2 \text{ (kg)}.$$

- Đoạn BC: Chất lỏng hoá hơi. Trong giai đoạn này nó nhận một nhiệt lượng:

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = (12{,}6 - 1{,}8).10^5 = 10{,}8.10^5 \text{ (J)}.$$

Và nhiệt lượng này dùng để chất lỏng hoá hơi hoàn toàn nên:

$$\Delta Q = L.m \Rightarrow L = \frac{\Delta Q}{m} = \frac{10{,}8.10^5}{1{,}2} = 9.10^5 \text{ (J)}.$$

b) Dựa vào cách giải trên ta thấy để xác định được L ta phải xác định được ΔQ và m. Ta có thể thực hiện thí nghiệm như sau:

- Lấy một cốc chất lỏng, dùng nhiệt kế để đo nhiệt độ ban đầu t_1^0.

- Đun cốc chất lỏng trên bếp cho đến khi sôi. Dùng nhiệt kế ta xác định được nhiệt độ sôi t_2^0. Nhờ đồng hồ bấm giây ta xác định được thời gian kể từ lúc đun cho đến khi sôi là T_1.

- Tiếp tục đun, ta xác định được thời gian T_2 kể từ lúc chất lỏng sôi cho đến khi hoá hơi hoàn toàn.

Bỏ qua sự thu nhiệt của cốc và xem bếp toả nhiệt một cách đều đặn ta có:

$$Q_1 = kT_1 = m.c = (t_2^0 - t_1^0) \quad (1);$$

$$Q_2 = kT_2 = L.m \quad (2).$$

(k là hệ số tỉ lệ nào đó).

Từ (1) và (2) ta rút ra : $L = \dfrac{c(t_2^0 - t_1^0).T_2}{T_1}$.

Nhận xét. Rất tiếc là đã không có bạn nào giải đúng cho đề ra kỳ này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/572. *Điện năng từ một máy phát điện được truyền đi dưới hiệu điện thế 2000 V. Hiệu suất của quá trình truyền tải điện là 80%. Muốn hiệu suất truyền tải điện tăng thêm 15% thì cần phải tăng hiệu điện thế nơi truyền đi thêm bao nhiêu? Biết hệ số công suất bằng $k = 1$ và công suất được xác định bằng công thức $\mathcal{P} = kUI$.*

Lời giải. Ta có:

$$H = \frac{\mathcal{P}_{ci}}{\mathcal{P}_{tp}} = \frac{\mathcal{P}_{tp} - \Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{tp}} = 1 - \frac{\Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{tp}} = 1 - \frac{\dfrac{\mathcal{P}_{tp}^2}{U^2}R}{\mathcal{P}_{tp}}$$

$$= 1 - \frac{\mathcal{P}_{tp}}{U^2}R \Rightarrow U^2 = \frac{\mathcal{P}_{tp}R}{(1-H)}$$

Ứng với hai trường hợp ta có:

$$U_1^2 = \frac{\mathcal{P}_{tp}R}{(1-H_1)}; U_2^2 = \frac{\mathcal{P}_{tp}R}{(1-H_2)} \Rightarrow \frac{U_2^2}{U_1^2} = \frac{1-H_1}{1-H_2}$$

$$\Rightarrow U_2 = U_1\sqrt{\frac{1-H_1}{1-H_2}} = 2000\sqrt{\frac{1-0{,}8}{1-0{,}95}} = 4000 \text{ (V)}$$

$$\Rightarrow U_2 - U_1 = 2000 \text{ (V)}.$$

Vậy cần phải tăng hiệu điện thế nơi truyền đi thêm 2000 V.

Nhận xét. Rất tiếc là đã không có bạn nào giải đúng cho đề ra kỳ này.

NGUYỄN XUÂN QUANG



QUÁ TRÌNH HÌNH THÀNH CƠ SỞ CỦA GIẢI TÍCH TOÁN HỌC CỔ ĐIỂN

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Giải tích toán học (GTTH) cổ điển là toàn bộ những phần toán học tương ứng với phần mà tổng hòa của nó có tên gọi lịch sử "*Giải tích các vô cùng bé*" liên kết các phép tính vi phân (PTVP) và phép tính tích phân (PTTP).

Giáo trình giải tích toán học thường được trình bày theo thứ tự: đầu tiên là PTVP và kế đó là PTTP. Nhưng sự phát triển lịch sử lại diễn ra theo trình tự ngược lại ...

Thuật ngữ GTTH theo nghĩa cổ điển được sử dụng chủ yếu trong chương trình và tài liệu giáo dục, đặc biệt ở những năm cuối của bậc Phổ thông và những năm đầu ở các trường kỹ thuật.

I. CON ĐƯỜNG ĐẾN PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Người ta cho rằng con đường đến với PTTP bắt nguồn từ bài toán tính diện tích của các hình.

1°. Định nghĩa hình học: ***Tích phân xem như diện tích.***

Tiền sử của PTTP bắt nguồn từ thời cổ điển xa xôi do nhu cầu tính toán các đại lượng hình học, cơ học, vật lý học, ... Nó được các nhà bác học cổ đại tiên đoán từ rất lâu trước khi nảy ra ý niệm về PTTP.

Người xưa hình thành ý niệm về tích phân thông qua *định nghĩa hình học, trong đó tích phân được xem như diện tích*. Xét cụ thể: Giả sử ta cần tính diện tích hình thang cong:

$$D = \{(x; y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\},$$

trong đó $y = f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$. Người ta áp dụng phương pháp Archimedes xấp xỉ hình thang cong D bởi các *hình bậc thang nội tiếp và ngoại tiếp* cấu thành từ các yếu tố sơ cấp mà kích thước xem như đã biết. Lấy tổng diện tích các yếu tố này người ta thu được diện tích tương ứng của hình bậc thang trong S_* và ngoài S^* thỏa mãn hệ thức $S_* < S(D) < S^*$. Tuy không nói rõ nhưng trong các trường hợp đã xét Archimedes đã xác lập được rằng S^* đơn điệu giảm còn S_* đơn điệu tăng và hiệu $S^* - S_*$ có thể làm cho bé tùy ý khi tăng số phần tử sơ cấp lên và giảm kích thước của chúng xuống. Từ đó ông thu được *Giới hạn chung* S của S^* và S_*. Giới hạn chung S đó chính là diện tích $S(D)$ của hình thang cong D. Đó là cái mà sau này *G. Leibniz* gọi là *tích phân xác định* từ a đến b của hàm $f(x)$.

Trong tác phẩm "*Phòng nón và phòng cầu*" *Archimedes* thu được những kết quả tương đương với các hệ thức sau đây: $\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$; $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$;

$$\int_0^a (x^2 + bx)\,dx = \int_0^a x^2\,dx + b\int_0^a x\,dx = \frac{a^3}{3} + \frac{ba^2}{2}.$$ [1)]

Sau đây là ví dụ minh họa phương pháp Archimedes:

Tính tích phân $\int_{-1}^{4} (1 + x)\,dx$.

Vai trò hình thang cong ở đây là tam giác vuông cân cạnh bằng 5. Do đó diện tích của nó bằng $\frac{25}{2}$. Làm theo *Archimedes*, ta thực hiện phép phân hoạch (bạn đọc hãy vẽ hình !) đoạn $[-1; 4]$ thành n đoạn con có chiều dài bằng nhau và bằng $\frac{5}{n}$:

$$\Delta x_j = [x_{j-1}; x_j] = \left[-1 + \frac{5(j-1)}{n}; -1 + \frac{5j}{n}\right], j = \overline{1, n}.$$

Do hàm $f(x) = 1 + x$ đơn điệu tăng nên giá trị bé nhất m_j đạt được ở đầu mút bên trái $f(x_{j-1}) = \frac{5(j-1)}{n}$, còn giá trị lớn nhất M_j đạt được ở đầu mút bên phải $f(x_j) = \frac{5j}{n}$ của đoạn Δx_j. Do đó:

$$S_*(n) = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\frac{5}{n} = \frac{25}{n^2}\sum_{j=1}^{n} (j-1);$$

---

1) G.I.Gleizer, *LSTH trong nhà trường*, M-1983, tr.105 (tiếng Nga)

$$S^*(n)=\sum_{j=1}^{n}M_j\Delta x_j=\sum_{j=1}^{n}f(x_j)\frac{5}{n}=\frac{25}{n^2}\sum_{j=1}^{n}j.$$

Từ đó giới hạn chung của $S_*(n)$ và $S^*(n)$ là $\frac{25}{2}$ và

$$S^*(n)-S_*(n)=\frac{25}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{n}(j-1)\right)=\frac{25}{n^2}.n=\frac{25}{n}$$

có thể làm cho bé tùy ý. Như vậy $\int_{-1}^{4}(1+x)dx=\frac{25}{2}$.

Tiếp theo, vào thế kỷ XI áp dụng phương pháp vét cạn nhà bác học đa tài Ả Rập tên châu Âu là *Alhazen* (965 - 1039) đã thu được kết quả mà theo ngôn ngữ ngày nay là tính được tích phân $\int_0^a x^4dx$ trong công trình của mình "*Về việc đo đạc vật thể dạng paraboI*". Sớm hơn một chút nhà toán học ở Bagdad là *Ibn – Korra* (?) thu được kết quả về cầu phương chỏm parabol tương đương với tích phân $\int_0^a\sqrt{x}dx$.

Đến thế kỷ XVII *P. Fermat* đã khái quát kết quả này với việc tính được tích phân $\int_0^a x^{\frac{m}{n}}dx$.. Cũng ở thế kỷ XVII, trong một công trình của mình nhà toán học Italia *B. Cavalieri* (1598 - 1647) đã chứng minh được rằng $\int_0^a x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ với n = 1, 2, ... , 9 (vào năm 1635 và 1647) bằng phương pháp hình học. Sau đó, *P. Fermat* đã chứng tỏ kết quả đó đúng với mọi số nguyên dương, ...

2°. Định nghĩa giải tích: ***Tích phân xem như giới hạn.***

Để phát biểu định nghĩa giải tích đối với tích phân xác định, người ta thực hiện phép phân hoạch đoạn $[a; b]$ thành các đoạn con bởi các điểm x_j, j = 1, 2, ..., n sao cho $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ và trong mỗi đoạn con $[x_j, x_{j+1}]$ chọn một điểm α_j tùy ý $x_j\le\alpha_j\le x_{j+1}$ rồi lập tổng dạng

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}f(\alpha_j)\Delta x_j,\ \Delta x_j=x_j-x_{j-1}\quad(1).$$

Tổng dạng (1) được gọi là *tổng tích phân của hàm* $f(x)$.

Giả sử số $n\to\infty$ và số $\lambda=\max|x_{j+1}-x_j|$ dần đến 0. *Nếu khi đó tổng tích phân* S_n *có giới hạn* S (*tức là* $\lim_{n\to\infty}S_n=S$) *không phụ thuộc vào phép phân hoạch đoạn* $[a; b]$ *thành các đoạn con và không phụ thuộc vào cách chọn các điểm trung gian* α_j *thì số* S *được gọi là tích phân xác định của hàm* $f(x)$ *từ a đến b.*

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\lambda\to0\\n\to\infty}}f(\alpha_j)\Delta x_j\quad(2).$$

Hàm $f(x)$ mà trên đoạn $[a; b]$ tồn tại tích phân xác định (2) được gọi là *hàm khả tích* trên đoạn đó. Người ta đã chứng minh rằng: *Mọi hàm liên tục trên đoạn* $[a; b]$ *đều khả tích trên đoạn đó.*

Đến đây ta thấy rõ vì sao ở thế kỷ XVII PTTP không phát triển nhanh được vì suy đến cùng *cơ sở thật sự của định nghĩa tích phân* là khái niệm giới hạn chứ không phải là cái gì khác ... mà lúc bấy giờ lý thuyết đó còn chưa ra đời ... Nó chỉ ra đời vào đầu thế kỷ XIX với các công trình của *A. Cauchy* và các nhà toán học khác, còn định nghĩa (2) được *B. Riemann* phát biểu lần đầu tiên vào giữa thế kỷ XIX.

3°. Một số công trình đã công bố về PTTP của *G. Leibniz*

Chỉ hai năm sau khi ấn phẩm thứ nhất về PTVP ra đời (năm 1684) thì *Leibniz* cho ra đời *ấn phẩm thứ hai với nhan đề "Về hình học sâu sắc ..."* (1686) trên tạp chí Acta Eruditorum (A.E). Trong công trình này ông trình bày các quy tắc của PTTP và đưa vào cả *ký hiệu* $\int f(x)dx$ trong đó ông không quên căn dặn là không được bỏ qua thừa số dx dưới dấu tích phân. Ở đây dấu"∫" được tạo ra từ chữ "S biến thể" là chữ cái đầu của từ Latinh Summa là tổng. Ký hiệu *tích phân có cận* "$\int_a^b$" được *J. Fourier* (1768 - 1830) đề xuất khoảng 1819 – 1822.



G. Leibniz
(1646-1716)

Công trình này là ấn phẩm đầu tiên về PTTP của *Leibniz*. Trong công trình này Ông viết rằng: "*Vì* $d\frac{y^2}{2}=ydy$ *nên* $\int ydy=\frac{y^2}{2}$ *vì rằng ở đây ta như có tổng và hiệu hay là "∫" và "d" cùng ngược nhau như lũy thừa và căn thức trong phép tính thông thường*". Do đó, trong ấn phẩm 1686 này *Leibniz* đã xác lập được mối quan hệ ngược nhau giữa PTVP và

PTTP. Điều này cũng được nhà toán học Vương quốc Anh là *I. Barrow* phát hiện năm 1670 bằng phương pháp hình học trong tập "*Các bài giảng về hình học, Bài giảng X*" (1670). Nhưng trong bài báo của *Leibniz* việc nói về tính ngược nhau đó có ý nghĩa rất lớn đối với LSTH vì sự trình bày của ông ở đây được duy trì hàng thế kỷ ...



Isaac Barrow (1630-1677)

Trong một công trình công bố năm 1693 sau đó, *Leibniz* lý giải quá trình lấy tích phân như sau: *"Bài toán tổng quát của phép cầu phương chung quy lại là tìm đường cong có quy luật xác định về độ dốc"*[1] và ông lý giải điều đó là: *để tìm tích phân của hàm $f(x)$ cho trước cần tìm hàm $F(x)$ sao cho độ dốc $F'(x)$ chính là $f(x)$.*[1] Tiếp theo, trong công trình công bố năm 1694 ông còn đưa vào *hằng số cộng* "$+b$" và lý giải rằng đó là hằng số tùy ý và "*Ở đây tôi muốn nhắc nhở điều đó vì nó thể hiện tính tổng quát của lời giải*" [1]. Đây chính là hằng số tích phân mà ta vẫn dùng ngày nay.

II. CON ĐƯỜNG ĐẾN PHÉP TÍNH VI PHÂN

1⁰. Đạo hàm xem như độ dốc

Vấn đề tìm phương pháp chung để dựng tiếp tuyến tại điểm bất kỳ của đường cong đã đặt ra mối quan tâm rất lớn của các nhà toán học thế kỷ XV – XVII. Một số trường hợp riêng của bài toán này đã được giải quyết từ thời cổ đại. Chẳng hạn *Euclid* đã để lại phương pháp dựng tiếp tuyến với đường tròn, *Archimedes* đã để lại phương pháp dựng tiếp tuyến với đường xoắn ốc mang tên ông; *Apolonius* để lại phương pháp dựng tiếp tuyến với elip, hyperbol và parabol. Tuy nhiên các nhà bác học cổ đại đã chưa giải toán đến tận cùng, tức là chưa tìm được phương pháp tổng quát phù hợp cho việc dựng tiếp tuyến với đường cong phẳng bất kỳ tại điểm tùy ý của nó. Cần lưu ý rằng thời đó người ta xem tiếp tuyến là đường thẳng gặp đường cong nhưng không cắt nó. (Rõ ràng đây không phải là định nghĩa hiện đại về tiếp tuyến).

Để xác định tiếp tuyến với đường cong cho trước $y = f(x)$ tại điểm $M_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ của nó người ta lấy thêm điểm $M = (x, y)$ của đường cong đó gần điểm M_0 rồi kẻ đường thẳng qua M_0 và M. Giả sử đường thẳng này lập với hướng dương của trục Ox góc φ. Đó là một cát tuyến với độ dốc (≡ hệ số góc) bằng $\tan\varphi = \dfrac{|y - y_0|}{|x - x_0|}$ (1), trong đó $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Giả sử $\Delta x \to 0$. Khi đó điểm M_0 đứng yên còn điểm M chuyển động liên tục theo đường cong dần đến trùng với M_0. Đồng thời với đó, cát tuyến M_0M quay xung quanh điểm M_0 *và vị trí giới hạn (nếu có!) của các cát tuyến M_0M được gọi là tiếp tuyến với đường cong tại điểm M_0.*

Nếu α là góc lập bởi tiếp tuyến với hướng dương trục Ox thì *khi M dần đến M_0 ta có: góc φ dần đến góc α.* Nếu tiếp tuyến không vuông góc với trục Ox thì do tính liên tục của hàm $\tan\varphi$ khi điểm M dần đến điểm M_0 ta có $\tan\varphi$ dần đến $\tan\alpha$, tức là độ dốc của cát tuyến dần đến giới hạn là độ dốc của tiếp tuyến.

Nhưng $\tan\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nên từ đó ta thu được $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *dần đến* $\tan\alpha$ *là độ dốc của tiếp tuyến.*

Và vấn đề cơ bản đặt ra giờ đây là: *Tìm phương pháp tính độ dốc của tiếp tuyến?*

Tiếp theo, nhà toán học hàng đầu của nước Anh là *I. Barrow* cũng đến với khái niệm đạo hàm thông qua con đường hình học, xem đạo hàm như độ dốc trong "*các bài giảng về hình học, Bài giảng X*" (1670). Đáng tiếc là vào năm 1669 *Barrow* quyết định rời bỏ toán học, dành toàn bộ thời gian cho Thần học. Đồng thời với quyết định đó, ông rút khỏi Bộ môn toán. "*Ông đã trao lại cho Newton – học trò của ông – lãnh đạo Bộ môn toán và trao lại cho Newton toàn bộ các kết quả mà ông đã thu được trước đó*"[2].

2⁰. Đạo hàm xem như giới hạn

Năm 1638 *P. Fermat* đã phát minh ra phương pháp tìm cực đại và cực tiểu mà bằng ngôn ngữ ngày càng có thể tóm tắt như sau:

Giả sử ta cần tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$. Để làm việc đó ông khai triển và biến đổi biểu thức $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ thành dạng đa thức theo lũy thừa của h và cắt bỏ mọi số hạng có chứa h (tức là cho $h = 0$ mà ở đây ta ngầm hiểu điều đó tương đương với phép qua giới hạn khi $h \to 0$. Kết quả thu được sau đó cho triệt tiêu (= 0) và thu được một phương trình.

---

1) L.S.Freimann, *Những nhà phát minh toán cao cấp*, M-1968, tr.110-111.

2) L.S.Freimann, Sách đã dẫn, tr.10, 72.

Các nghiệm của phương trình này sẽ cho ta thông tin về cực trị [1].

Ngày nay ta thấy rằng các tính toán của Fermat tương đương với tính giới hạn $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (1) và quy tắc tìm cực trị của ông đã để lại cho hậu thế. Định lý về điều kiện cần để hàm khả vi có cực trị gọi là *Định lý Fermat*.

Nếu giới hạn (1) tồn tại thì nói chung nó nhận những giá trị khác nhau tại những điểm khác nhau. Do đó nó là một hàm số và người ta ký hiệu là $f'(x)$ *và gọi là đạo hàm của hàm* $f(x)$.

Thuật ngữ "*đạo hàm*" trong tiếng Pháp là *derivée* được dùng đầu tiên bởi nhà toán học Pháp là *L. Arbogact* (1759-1803) trong cuốn sách của ông "*Tính đạo hàm*" (1800). Thuật ngữ này sau đó được *Lagrange* dùng với ký hiệu y' và $f'(x)$, còn *Cauchy* thì sử dụng chữ cái đầu để chỉ đạo hàm $Df(x)$.

3⁰. *G. Leibniz* với PTVP.

Khái niệm cơ sở của nhà bác học thiên tài *G. Leibniz* không phải là đạo hàm mà là *vi phân*.

Đầu tiên, số gia của hoành độ - tức là hiệu VCB $x - x_0$ được ông chỉ là dx, trong đó d là chữ cái đầu của từ Latinh *differentia* có nghĩa là hiệu, số gia tương ứng $y - y_0$ được chỉ là dy. Do đó ký hiệu được dùng *ngày nay là* $\dfrac{dy}{dx}$ *bắt* nguồn từ *Leibniz*. Đến giữa thế kỷ XVIII *L. Euler* viết $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ và ký hiệu đạo hàm lại có dạng $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Tháng 5 năm 1684 *Leibniz* cho công bố các kết quả mà ông thu được trong tác phẩm "*Phương pháp mới về cực đại và cực tiểu...*" trong tạp chí Acta Eruditorum (A.E) với bản thảo đã xuất hiện ở tòa soạn ngay từ năm 1682. Ấn phẩm chỉ vẻn vẹn sáu trang tạp chí này đã trình bày cô đọng - tinh tế về bản chất và nội dung của PTVP. Trong bài báo này *Leibniz* đã gọi "*Phương pháp mới ...*" của mình là PTVP và đưa ra ký hiệu đặc biệt d để biểu diễn các vi phân. Ông đã trình bày một cách rõ ràng mạch lạc (không chứng minh) các quy tắc và thuật toán tính đạo hàm của hàm số. Đồng thời ông cũng đưa ra chỉ dẫn áp dụng các vi phân để khảo sát cực trị hàm số. Về nghệ thuật ký hiệu, đến nay người ta vẫn cho rằng hệ thống ký hiệu của ông hoàn thiện đến mức gần như không thay đổi gì cho đến nay.

Điều đặc biệt là chính ông và học trò *J. Bernoulli* đã thống nhất đặt ra hai thuật ngữ PTTP và PTVP. Nhiều nhà LSTH xem năm 1684 là năm sinh của Phép tính vi phân.

Phép tính tìm đạo hàm $f'(x)$ của hàm $f(x)$ cho trước được gọi là *phép tính đạo hàm* của hàm số đó. *Sự nghiên cứu các quy tắc tính đạo hàm và các tính chất của đạo hàm được gọi là PTVP.*

Khái niệm vi phân hàm số bắt nguồn từ *Leibniz* đó là tích của đạo hàm nhân với số gia của đối số:

$$dy = y'\Delta x \Rightarrow dy = y'dx = f'(x)dx \quad (\text{do } dx = \Delta x).$$

Từ đó $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ và do vậy mà *Leibniz* đã gọi "*đạo hàm là tỷ số của các vi phân*".

Từ định nghĩa đạo hàm và hệ thức $dy = f'(x)dx$ người ta lập được Bảng các đạo hàm và vi phân các *hàm sơ cấp cơ bản* và sau đó là thuật toán tìm đạo hàm.

Ở đây hàm sơ cấp cơ bản được hiểu là: hàm hằng $y = c$, $c = \text{const}$; hàm lũy thừa $y = x^a$; hàm mũ $y = a^x$ $(a > 0)$; hàm lôgarit $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$; các hàm lượng giác $y = \sin x$, ... , $y = \cot\text{an}x$ và các hàm lượng giác ngược $y = \arcsin x$, ..., $y = \text{arccotan}x$. Mọi hàm thu được từ các hàm sơ cấp cơ bản nhờ *áp dụng một số hữu hạn lần các* phép tính số học và phép hợp hàm được gọi một cách đơn giản là *hàm sơ cấp.*

4⁰. Ví dụ: Ta xét hàm $y = |x|$ (hãy vẽ đồ thị của hàm đã cho).

(i) Hàm $y = |x|$ liên tục với $\forall x$ vì rằng

$$\Delta y = |x + \Delta x| - |x| \le |x + \Delta x - x| = |\Delta x| \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

(ii) Đối với hàm đã cho ta có:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

Nếu $x > 0$ thì $x + \Delta x > 0$ với Δx đủ bé và do đó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad (x > 0).$$

Nếu $x < 0$ thì $x + \Delta x < 0$ với Δx đủ bé và

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1 \quad (x < 0).$$

Như vậy $y = |x|' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 0 \\ -1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

---

1) *Bách khoa toàn thư toán học*, Mos.-1988, tr.200 (tiếng Nga)

Bây giờ ta xét điểm $x = 0$. Tại đây ta có: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Nếu $\Delta x > 0$ thì $|\Delta x| = \Delta x$. Do đó $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ và ta thu được giới hạn bên phải $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

Nếu $\Delta x < 0$ thì $|\Delta x| = -\Delta x$ và $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$

và ta thu được giới hạn bên trái $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$.

Như vậy tại điểm $x = 0$ hàm $y = |x|$ có đạo hàm bên phải bằng 1 và có đạo hàm bên trái bằng -1. Điều đó chứng tỏ rằng tại điểm $x = 0$ hàm $y = |x|$ không có đạo hàm.

Ví dụ này chứng tỏ rằng tồn tại hàm liên tục khắp nơi nhưng không có đạo hàm tại một điểm nào đó. Năm 1875 nhà toán học Đức *K. Weierstrass* đã xây dựng ví dụ hàm liên tục khắp nơi nhưng không có đạo hàm tại bất cứ điểm nào. Ví dụ này đã đặt ra cho các nhà toán học vấn đề có tính nguyên tắc về mức độ tin cậy vào biểu tượng cảm tính của chúng ta, về vấn đề trực giác trong toán học, về tính chính xác của các chứng minh... Chính sự kiện này đã làm cho nhà toán học vĩ đại Pháp *H. Poincare* phải thốt lên: "*Không hiểu trực giác có thể đánh lừa chúng ta đến độ nào*!".

III. TÍNH TÍCH PHÂN THEO NGUYÊN HÀM. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA GIẢI TÍCH.

1⁰. Khái quát về nguyên hàm

Trong công trình "*Về hình học sâu sắc ...*" (1686) của mình, xuất phát từ khái niệm tích phân xác định *Leibniz* đã đi đến khái niệm hàm $F(x)$ là *nguyên hàm đối với hàm* $f(x)$[1].

Theo định nghĩa, *hàm $F(x)$ được gọi là nguyên hàm đối với hàm $f(x)$ trong một khoảng (hay đoạn) cho trước nếu khắp nơi trong khoảng hay đoạn ấy $f(x)$ là đạo hàm của $F(x)$, tức là $F'(x) = f(x)$ hay là $dF(x) = f(x)dx$.*

Theo định nghĩa nguyên hàm, lời giải của bài toán tìm nguyên hàm là không duy nhất. Chẳng hạn, nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x$ là $F(x) = x^2$ vì $(x^2)' = 2x$. Nhưng $x^2 + 2$, $x^2 - 3$, ... cũng là nguyên hàm của nó vì $(x^2 + 2)' = 2x$, ... Và, nói chung $x^2 + C$ cũng là nguyên hàm của nó, trong đó C là hằng số tùy ý.

Đối với lịch sử, một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thường được gọi là *tích phân của $f(x)$ và phép tìm nguyên hàm của một hàm cho trước được gọi là phép tích phân*. Ký hiệu chuẩn của tích phân là $\int f(x)dx$ *và được đọc là "tích phân của hàm $f(x)dx$"*. Ký hiệu này được *Leibniz* đưa vào năm 1686.

Theo định nghĩa, đẳng thức $\int f(x)dx = F(x)$ là tương đương với đẳng thức $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$. Do đó kết quả của phép tính tích phân $\int$ là nguyên hàm. Từ đó suy ra kết luận rằng PTVP và PTTP là hai phép toán ngược nhau tương tự như phép cộng và phép trừ, phép nhân và phép chia, phép nâng lên lũy thừa và phép khai căn.

Các tính chất cơ bản của nguyên hàm:

i) $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$ hay $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

ii) $\int F'(x)dx = F(x) + C$ hay $\int dF(x)dx = F(x) + C$.

Như vậy trong ii) các dấu vi phân "d" và dấu tích phân "$\int$" triệt tiêu lẫn nhau cả trong trường hợp khi dấu tích phân "$\int$" đứng trước dấu vi phân "d" nhưng phải thêm vào hàm dưới dấu vi phân một hằng số cộng tùy ý.

Thông thường người ta viết $\int f(x)dx = F(x) + C$, trong đó C là hằng số tích phân (≡ hằng số tùy ý) còn $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân, $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân.

Áp dụng tính ngược nhau của hai phép toán vi phân và tích phân cũng như hệ thức $dF(x) = f(x)dx$ ta có thể lập *Bảng tích phân các hàm sơ cấp cơ bản*. Qua đó, mọi công thức cho ta vi phân (hoặc đạo hàm) của một hàm số nào đó thì cũng đồng thời cho ta ngay một công thức tích phân nếu ta *đọc nó từ phải sang trái*. Chẳng hạn:

$$d(x^3) = 3x^2dx \Rightarrow \int 3x^2dx = x^3 + C;$$

$$d(\tan x) = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$$

$$d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x dx \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$$

.....

1) Nguyên hàm có tên Latinh là primitivus ≡ nguyên thủy ≡ nguyên sơ. Thuật ngữ "nguyên hàm" được *Lagrange* đưa vào năm 1797.

Nếu muốn thử lại các công thức này chỉ cần chứng tỏ rằng đạo hàm của vế phải thì bằng hàm dưới dấu tích phân ở vế trái.

Để kết thúc phần đại cương về nguyên hàm, ta lưu ý rằng: sự nghiên cứu về phép tích phân các hàm và về tính chất của các nguyên hàm của chúng được gọi là *Phép tính tích phân*. Cùng với PTVP nó tạo nên cơ sở quan trọng nhất của Giải tích toán học cổ điển.

2^{O}. Định lý cơ bản của Giải tích

Đến đây ta có thể đưa ra hai điều kết luận sau đây:

i) Tích phân xác định từ a đến b của hàm $f(x)dx$ là một số.

ii) Tích phân $\int f(x)dx$ là nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân, tức là nó xác định một họ hàm $F(x) + C$.

Bây giờ giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và giả sử ta xét tích phân $\int f(x)dx$. Vì tích phân này tồn tại trên đoạn $[a, b]$ nên nó cũng tồn tại trên đoạn con $[a; x] \subset [a; b]$, $a \le x \le b$. Từ đó người ta có thể xét tích phân từ a đến x của hàm $f(x)dt$ và gọi đó là *tích phân với cận trên biến thiên*.

Nếu ta xem *cận dưới a cố định* còn cận trên x biến thiên từ a đến b thì tích phân đó sẽ xác định một hàm của đối số x. Ta ký hiệu hàm đó là $\int_a^x f(t)dt$ (1).

Hàm $F(x)$ biểu diễn diện tích của hình thang cong nằm dưới đường cong $y = f(t)$ với đáy từ điểm $t = a$ đến điểm $t = x$, $a < x \le b$ và diện tích đó biến thiên khi x biến thiên. Do đó khi $x = a$ thì $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

Hàm (1) có đặc trưng đặc biệt sau đây được xem là *Định lý cơ bản của Giải tích*:

Đạo hàm của tích phân (1) *theo cận trên biến thiên x của nó là bằng hàm dưới dấu tích phân tại điểm* $t = x$, *tức là* $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$ (2).

Như vậy, phép toán tích phân từ hàm $f(x)$ đến hàm $F(x)$ bị triệt tiêu bởi phép toán vi phân ngược với nó tác dụng lên $F(x)$. Theo định nghĩa nguyên hàm, từ (2) người ta đi đến kết luận rằng tích phân $\int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$. Từ đó người ta đi đến điều khẳng định về sự tồn tại nguyên hàm: *Mọi hàm liên tục đều có nguyên hàm và tích phân* $\int_a^x f(t)dt$ *là một trong các nguyên hàm của nó.*

3^{O}. Công thức cơ bản của PTTP

Như vậy nếu biết tìm tích phân của hàm $f(x)$ đã cho trong đoạn $[a; x]$ bất kỳ thì người ta cũng biết tìm một trong những nguyên hàm của $f(x)$ và do đó biết được mọi nguyên hàm của hàm đó.

Kết quả này cho phép người ta giải bài toán ngược: biết một trong những nguyên hàm của hàm liên tục $f(x)$ trong đoạn $[a; b]$, hãy tìm tích phân từ a đến b của $f(x)dx$.

Thật vậy, giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm bất kỳ của $f(x)$. Theo định lý cơ bản thì $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$. Từ đó $F(x) = G(x) + C$ trong đó C là hằng số cộng tùy ý. Ta xác định hằng số C từ điều kiện $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

Do đó $F(a) = 0 = G(a) + C = 0 \Rightarrow C = -G(a)$. Vì vậy tích phân xác định từ a đến x thỏa mãn hệ thức $F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$ và sau khi thay $x = b$ ta thu được $F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ (3).

Đó là công thức Newton - Leibniz, công thức cơ bản của PTTP. Nó hoàn toàn không phụ thuộc vào nguyên hàm. Thật vậy, vì mọi nguyên hàm $H(x)$ chỉ khác $G(x)$ một hằng số cộng nên $H(x) = G(x) + C$ và $H(b) - H(a) = (G(b) + C) - (G(a)+C) = G(b) - G(a)$.

Để thể hiện sự liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm về mặt hình thức người ta viết công thức (3) dưới dạng $\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b$, trong đó $\int f(x)dx$ là một trong các nguyên hàm của hàm $f(x)$.

Ví dụ. 1) $\int_2^4 x^2dx = \left(\int x^2dx\right)\Big|_2^4 = \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = 18\frac{2}{3}$.

2) $\int_1^2 2^x dx = \left(\int 2^x dx\right)\Big|_1^2 = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_1^2 = \frac{2}{\ln 2}$.

Newton và *Leibniz* đã tạo ra bước ngoặc vĩ đại trong toán học. Bước ngoặc đó đã tạo điều kiện cho sự phát triển của toán học như một trong những biểu tượng của giai đoạn văn minh sau *Archimedes*. *Thời điểm lịch sử khi người ta biết tính tích phân theo nguyên hàm bỏ qua phép tính lấy tổng và chuyển qua giới hạn là một bước ngoặc* trong sự phát triển của tính tích phân. Chỉ sau thời kỳ đó PTTP mới phát triển được một cách rực rỡ ... và giải tích toán học cổ điển mới thật sự ra đời ....



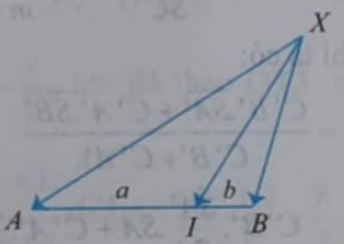
QUY TẮC X

LA ĐẠI CƯƠNG
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Trong quá trình học hình thì không ít lần chúng ta bắt gặp bài toán tính tỉ số đoạn thẳng hay xác định tọa độ điểm. Nếu giải quyết các bài toán này bằng cách dựng thêm các đường kẻ phụ thì nhiều trường hợp hình vẽ sẽ rối rắm và đòi hỏi nhiều thời gian để giải quyết. Nhằm giúp học sinh nhanh chóng chinh phục các khó khăn đó thì chúng tôi đã biên soạn và tập hợp lại các quy tắc (**QT**) hình học liên quan đến các dạng toán như thế. Tạm gọi các quy tắc trong bài viết dưới đây là quy tắc X vì khi thực hiện ta phải nhân chéo các số liệu. Hi vọng rằng quy tắc X cũng như nhân tố bí ẩn X sẽ giúp chúng ta giải quyết được các bài hình học một cách bất ngờ.

Bài toán 1. *Cho điểm I chia đoạn thẳng AB theo tỉ lệ $\frac{IA}{IB}=\frac{a}{b}$. Khi đó với mọi điểm X trong không gian thì ta có:* $\overrightarrow{XI}=\frac{a.\overrightarrow{XB}+b.\overrightarrow{XA}}{a+b}$ **(QT1).**

Chứng minh.



Vì điểm I thuộc đoạn AB và $\frac{IA}{IB}=\frac{a}{b}$ nên ta có:

$$b.\overrightarrow{IA}+a.\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow b.\left(\overrightarrow{IX}+\overrightarrow{XA}\right)+a.\left(\overrightarrow{IX}+\overrightarrow{XB}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{XI}=b.\overrightarrow{XA}+a.\overrightarrow{XB}\Leftrightarrow \overrightarrow{XI}=\frac{b.\overrightarrow{XA}+a.\overrightarrow{XB}}{a+b}.$$

• Xét trên hệ trục Oxy và cho X trùng O thì dựa vào **QT1** ta có $\overrightarrow{OI}=\frac{a.\overrightarrow{OB}+b.\overrightarrow{OA}}{a+b}$.

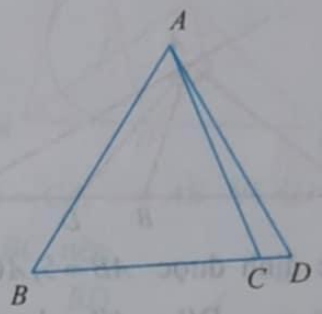
Suy ra:

$$x_I=\frac{a.x_B+b.x_A}{a+b} \text{ và } y_I=\frac{a.y_B+b.y_A}{a+b}.$$

Chú ý. Để việc trình bày gọn gàng, trong công thức tính hoành độ và tung độ điểm I trên ta kí hiệu: $I=\frac{a.B+b.A}{a+b}$ **(QT2),** với các chữ cái in hoa I, A, B trong công thức chỉ tọa độ tương ứng các điểm I, A, B. Điều này cũng được áp dụng cho các công thức tương tự trong bài viết này.

Thí dụ 1. *Cho tam giác ABC với $\hat{A}=60^0$, $AB=7, AC=8$. Điểm D thuộc cạnh BC sao cho $DB=9.DC$. Hãy xác định độ dài đoạn AD.*

Lời giải.



Ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AC.AB.\cos\hat{A}=7.8.\frac{1}{2}=28$. Vì $\frac{DB}{DC}=\frac{9}{1}$ nên theo **QT1** thì $\overrightarrow{AD}=\frac{1.\overrightarrow{AC}+9.\overrightarrow{AB}}{1+9}$.

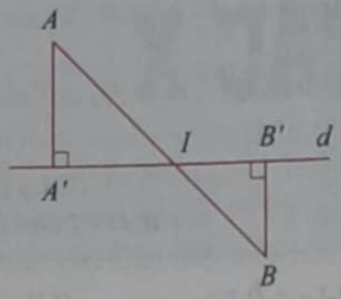
Suy ra: $AD^2=\frac{AC^2+81AB^2+18\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{100}$

$$=\frac{8^2+81.7^2+18.28}{100}=\frac{4537}{100}.$$

Do đó ta có: $AD=\frac{\sqrt{4537}}{10}$.

Thí dụ 2. *Cho đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$ và các điểm $A(1;2), B(2;1)$. Xác định tọa độ giao điểm của AB với đường thẳng d.*

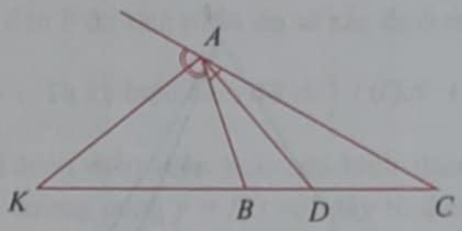
Lời giải.



Vì $3.1-4.2+1=-4<0$ và $3.2-4.1+1=3>0$ nên A, B khác phía so với đường thẳng d. Gọi I là giao điểm của AB với d thì ta có I thuộc đoạn AB và $\frac{IA}{IB}=\frac{d(A,d)}{d(B,d)}=\frac{4}{3}$. Theo **QT2** thì ta suy ra được: $I=\frac{3A+4B}{3+4}=\left(\frac{11}{7};\frac{10}{7}\right)$.

Thí dụ 3. *Trong hệ trục Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;2), B(4;6), C(-5;10)$. Biết D,K lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài góc A của tam giác ABC. Tính độ dài đoạn DK.*

Lời giải.



Dễ dàng xác định được $AB=5, AC=10$. Vì D thuộc đoạn BC và $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$ nên theo **QT2** thì ta có: $D=\frac{2B+C}{2+1}=\left(1;\frac{22}{3}\right)$.

Vì $\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}$ cùng chiều và $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$ nên $\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{KB}$. Do đó: $C-K=2(B-K)$ hay là $K=2B-C=(13;2)$. Từ những kết quả trên thì

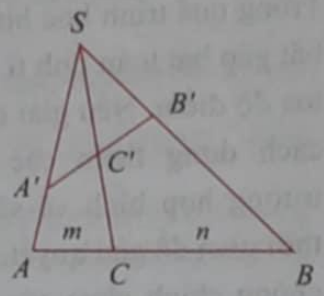
$$DK=\sqrt{(13-1)^2+\left(2-\frac{22}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{97}}{3}.$$

Bài toán 2. *Cho tam giác SAB với điểm C thuộc đoạn AB sao cho $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$. Trên tia SA, SB lấy các điểm A', B' và A'B' cắt SC tại C'. Chứng minh rằng:* $\frac{SC}{SC'}=\frac{m.\frac{SB}{SB'}+n.\frac{SA}{SA'}}{m+n}$ **(QT3)**

và $C'A':C'B'=m\frac{SB}{SB'}:n\frac{SA}{SA'}$ **(QT4).**

Chứng minh. Rõ ràng ta có:

$$\frac{S_{SA'B'}}{S_{SAB}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.$$



Vì $\frac{S_{SAC}}{S_{SBC}}=\frac{m}{n}$ nên

$$S_{SAC}=\frac{m}{m+n}S_{SAB}$$

và $S_{SBC}=\frac{n}{m+n}S_{SAB}$. Mặt khác ta có:

$$\frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\Rightarrow\frac{S_{SA'C'}}{S_{SAB}}=\frac{m}{m+n}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}$$ và

$$\frac{S_{SB'C'}}{S_{SBC}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}\Rightarrow\frac{S_{SB'C'}}{S_{SAB}}=\frac{n}{m+n}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.$$

Vì 3 điểm A', B', C' thẳng hàng nên:

$$S_{SA'B'}=S_{SA'C'}+S_{SB'C'}.$$

Do đó: $\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}=\frac{m}{m+n}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}+\frac{n}{m+n}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.

Từ đây ta suy ra được: $\frac{SC}{SC'}=\frac{m.\frac{SB}{SB'}+n.\frac{SA}{SA'}}{m+n}$.

Theo **QT1** thì ta có:

$$\overrightarrow{SC'}=\frac{C'B'.\overrightarrow{SA'}+C'A'.\overrightarrow{SB'}}{C'B'+C'A'}$$

$$=\frac{C'B'.\frac{SA'}{SA}.\overrightarrow{SA}+C'A'.\frac{SB'}{SB}.\overrightarrow{SB}}{C'B'+C'A'}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{SC'}$ cùng phương với $\overrightarrow{SC}=\frac{n.\overrightarrow{SA}+m.\overrightarrow{SB}}{n+m}$ nên ta suy ra:

$$\frac{C'B'.\frac{SA'}{SA}}{n}=\frac{C'A'.\frac{SB'}{SB}}{m}.$$

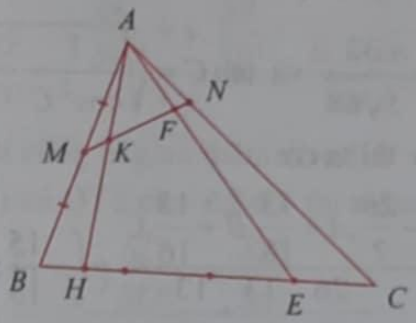
Do đó $C'A':C'B'=m\frac{SB}{SB'}:n\frac{SA}{SA'}$ (đpcm).

Thí dụ 4. *Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{4}$, E là điểm thuộc cạnh BC sao cho $\frac{EB}{EC}=\frac{3}{1}$, F là giao điểm của AE và MN. Biết H là điểm thuộc cạnh BC và K là giao điểm của MN và AH.*

a) *Xác định các tỉ số $\frac{AF}{AE}$ và $\frac{FM}{FN}$.*

b) *Xác định vị trí điểm H sao cho $AH=\frac{8}{3}AK$.*

Lời giải.



a) Vì $\frac{EB}{EC}=\frac{3}{1}$ nên theo **QT3** thì ta có:

$$\frac{AE}{AF}=\frac{3.\frac{AC}{AN}+1.\frac{AB}{AM}}{3+1}=\frac{3.4+1.2}{4}=\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{AF}{AE}=\frac{2}{7}.$$

Theo **QT4** thì ta có:

$$FM:FN=\left(3.\frac{AC}{AN}\right):\left(1.\frac{AB}{AM}\right)=(3.4):(1.2)=6:1.$$

b) Đặt $\frac{HB}{HC}=\frac{x}{1}$, khi đó theo **QT3** thì ta suy ra:

$$\frac{AH}{AK}=\frac{x.\frac{AC}{AN}+1.\frac{AB}{AM}}{x+1}=\frac{x.4+1.2}{x+1}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

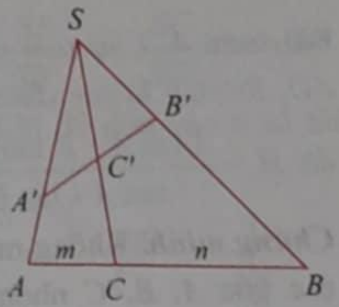
Thí dụ 5. *Cho tam giác SAB với A', B', C lần lượt là các điểm trên đoạn thẳng SA, SB, AB.*

Biết $\frac{SA'}{SA}=m,\frac{SB'}{SB}=n,\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$ với $0<m,n<1$, $m+n=1$ và $A'B'$ cắt SC tại C'.

Xác định giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{SC'}{SC}$.

Lời giải. Theo **QT3** và bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{SC}{SC'}=\frac{m.\frac{SB}{SB'}+n.\frac{SA}{SA'}}{m+n}=\frac{m.\frac{1}{n}+n.\frac{1}{m}}{1}=\frac{m^2+n^2}{mn}\geq\frac{2mn}{mn}=2.$$

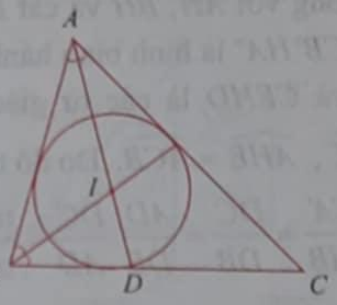


Từ đây ta suy ra $\frac{SC'}{SC}\leq\frac{1}{2}$ và dấu đẳng thức xảy ra khi $m=n=\frac{1}{2}$. Vậy $\max\frac{SC'}{SC}=2$.

Bài toán 3. *Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC thì*

$$I=\frac{BC.A+CA.B+AB.C}{BC+CA+AB}\ \textbf{(QT5)}.$$

Chứng minh.



Đặt $a=BC,b=CA,\ c=AB$. Vì AD là phân giác trong của ΔABC nên

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow\frac{BD}{BD+DC}=\frac{c}{c+b}\Rightarrow BD=\frac{c.a}{c+b}.$$

Theo **QT2** thì ta suy ra: $D=\frac{b.B+c.C}{b+c}$ (a).

Vì BI là phân giác trong của tam giác ΔABD nên

$$\frac{IA}{ID}=\frac{BA}{BD}.$$

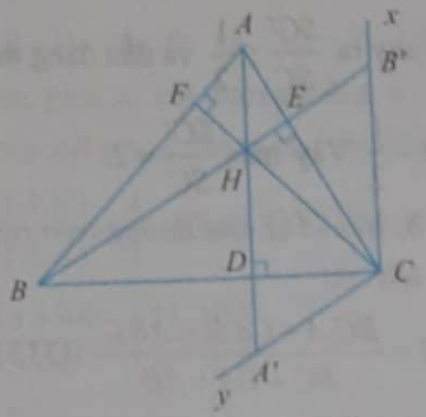
Theo **QT2** thì $I=\frac{BD.A+BA.D}{BD+BA}$

$$=\frac{\frac{ca}{c+b}.A+c.D}{\frac{ca}{c+b}+c}=\frac{a.A+(b+c).D}{a+b+c}\ \text{(b)}.$$

Từ (a), (b) ta suy ra $I=\frac{a.A+b.B+c.C}{a+b+c}$ (đpcm).

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC không vuông có AD, BE, CF là các đường cao, H là trực tâm. Khi đó* $H = \dfrac{A.\tan A + B.\tan B + C.\tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}$ **(QT6).**

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử các góc A, B, C nhọn (các trường khác chứng minh tương tự).



Từ điểm C, ta dựng các đường thẳng Cx, Cy lần lượt song song với AH, BH và cắt BH, AH tại B', A'. Khi đó $CB'HA'$ là hình bình hành.

Vì $AFHE$ và $CEHD$ là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CHE} = \widehat{BAC}$, $\widehat{AHE} = \widehat{ACB}$. Do đó ta có:

+) $\dfrac{HB'}{HB} = \dfrac{CA'}{HB} = \dfrac{DC}{DB} = \dfrac{AD}{DB}.\dfrac{DC}{AD} = \dfrac{\tan B}{\tan C}$

$\Rightarrow \tan B.\overrightarrow{HB} = -\tan C.\overrightarrow{HB'}$.

+) $\dfrac{HA'}{HA} = \dfrac{CB'}{HA} = \dfrac{EC}{EA} = \dfrac{EC}{HE}.\dfrac{HE}{EA} = \dfrac{\tan A}{\tan C}$

$\Rightarrow \tan A.\overrightarrow{HA} = -\tan C.\overrightarrow{HA'}$.

Từ những kết quả trên thì ta suy ra được:

$$\tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} = -\tan C.\left(\overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HA'}\right) = -\tan C.\overrightarrow{HC}.$$

Do đó ta có $\tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

Từ đây ta có dễ dàng suy ra được:

$$H = \frac{A.\tan A + B.\tan B + C.\tan C}{\tan A + \tan B + \tan C} \text{ (đpcm).}$$

Thí dụ 6. *Trong hệ trục Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;1), B(4;5), C(-2;5)$. Xác định tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

Lời giải. Dễ dàng xác định được $AB = 5, BC = 6, CA = 5$. Theo **QT5** thì ta có:

$$I = \frac{6.A + 5.B + 5.C}{6 + 5 + 5} = \left(1; \frac{7}{2}\right).$$

Thí dụ 7. *Trong hệ trục Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;2), B(3;7), C(5;-1)$. Xác định tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.*

Lời giải. Vì $\overrightarrow{AB}(2;5), \overrightarrow{AC}(4;-3)$ nên

$$\cos A = \frac{-7}{5\sqrt{29}} \text{ và } \tan A = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A} - 1} = -\frac{26}{7}.$$

Vì $\overrightarrow{BA}(-2;-5), \overrightarrow{BC}(2;-8)$ nên $\cos B = \dfrac{36}{\sqrt{29}.\sqrt{68}}$

và $\tan B = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 B} - 1} = \dfrac{13}{18}$.

Vì $\overrightarrow{CA}(-4;3), \overrightarrow{CB}(-2;8)$ nên

$$\cos C = \frac{32}{5\sqrt{68}} \text{ và } \tan C = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 C} - 1} = \frac{13}{16}.$$

Theo **QT6** thì ta có:

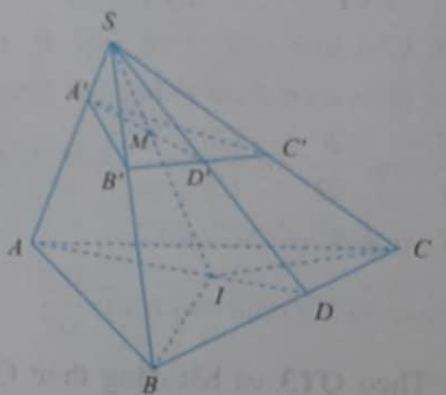
$$H = \frac{-\frac{26}{7}.A + \frac{13}{18}.B + \frac{13}{16}.C}{-\frac{26}{7} + \frac{13}{18} + \frac{13}{16}} = \left(-\frac{15}{13}; \frac{19}{13}\right).$$

Bài toán 5. *Cho hình chóp $S.ABC$ với I là điểm nằm trong ΔABC và thỏa mãn $x.\overrightarrow{IA} + y.\overrightarrow{IB} + z.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ với x, y, z dương. Các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\dfrac{SA}{SA'} = a$, $\dfrac{SB}{SB'} = b$, $\dfrac{SC}{SC'} = c$. Biết mp$(A'B'C')$ cắt SI tại điểm M. Chứng minh rằng:*

$$\frac{SI}{SM} = \frac{ax + by + cz}{x + y + z} \quad \textbf{(QT7)}$$

và $ax.\overrightarrow{MA'} + by.\overrightarrow{MB'} + cz.\overrightarrow{MC'} = \vec{0}$ **(QT8).**

Chứng minh.



Gọi D là giao điểm của AI, BC.

Vì $x.\overrightarrow{IA} + y.\overrightarrow{IB} + z.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ nên ta có:

$$x.\overrightarrow{IA}+y.\left(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DB}\right)+z.\left(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x.\overrightarrow{IA}+(y+z).\overrightarrow{ID}=-y.\overrightarrow{DB}-z.\overrightarrow{DC}.$$

Rõ ràng $x.\overrightarrow{IA}+(y+z).\overrightarrow{ID}$ có phương IA và $-y.\overrightarrow{DB}-z.\overrightarrow{DC}$ có phương BC.

Vì IA cắt BC nên $x.\overrightarrow{IA}+(y+z).\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ và $-y.\overrightarrow{DB}-z.\overrightarrow{DC}=\vec{0}$. Suy ra:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{z}{y} \text{ và } \frac{IA}{ID}=\frac{y+z}{x} \quad \text{(a)}.$$

Gọi D' là giao điểm của SD và $B'C'$. Áp dụng **QT3** cho ΔSBC ta có:

$$\frac{SD}{SD'}=\frac{z.\dfrac{SC}{SC'}+y.\dfrac{SB}{SB'}}{z+y}=\frac{zc+yb}{z+y} \quad \text{(b)}.$$

Rõ ràng M cũng là giao điểm của $A'D'$ và SI.

Từ (a), (b) và **QT3** cho ΔSAD thì ta suy ra:

$$\frac{SI}{SM}=\frac{(y+z)\dfrac{SD}{SD'}+x.\dfrac{SA}{SA'}}{(y+z)+x}$$

$$=\frac{(y+z).\dfrac{zc+yb}{z+y}+x.a}{(y+z)+x}=\frac{ax+by+cz}{x+y+z}.$$

Áp dụng **QT4** cho ΔSBC thì:

$$D'B':D'C'=z\frac{SC}{SC'}:y\frac{SB}{SB'}=cz:by$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD'}=\frac{cz.\overrightarrow{MC'}+by.\overrightarrow{MB'}}{cz+by} \quad \text{(c)}.$$

Áp dụng **QT4** cho ΔSAD thì:

$$MA':MD'=(y+z)\frac{SD}{SD'}:x\frac{SA}{SA'}=(zc+yb):xa$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD'}=-\frac{ax}{cz+by}\overrightarrow{MA'} \quad \text{(d)}.$$

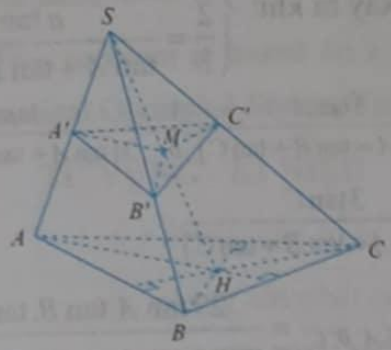
Từ (c) và (d) ta suy ra được:

$$ax.\overrightarrow{MA'}+by.\overrightarrow{MB'}+cz.\overrightarrow{MC'}=\vec{0} \text{ (đpcm)}.$$

Thí dụ 8. *Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích V với ABC là tam giác nhọn có trực tâm H. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua trung điểm M của SH và cắt các cạnh SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Xác định giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $S.A'B'C'$ theo V.*

Lời giải. Giả sử $\frac{SA}{SA'}=a$, $\frac{SB}{SB'}=b$, $\frac{SC}{SC'}=c$ với a,b,c là các số dương. Khi đó dựa vào tỉ số thể tích thì ta có:

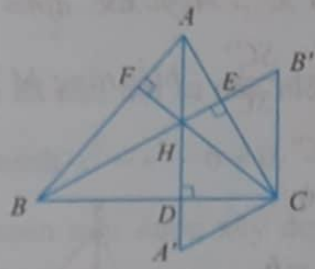
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}\Rightarrow\frac{V_{S.A'B'C'}}{V}=\frac{1}{abc}.$$



Ta cần nhận xét sau

Nhận xét 1. *Nếu H là trực tâm tam giác nhọn ABC thì ta luôn có:*

$$\tan A.\overrightarrow{HA}+\tan B.\overrightarrow{HB}+\tan C.\overrightarrow{HC}=\vec{0} \quad (*).$$



Thật vậy, gọi D,E,F là chân các đường cao vẽ từ A,B,C tương ứng. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD cắt BE tại B'; kẻ đường thẳng song song với BE cắt AD tại A'. Khi đó $CA'HB'$ là hình bình hành. Suy ra: $\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}$. Ta có:

$$\frac{HB'}{HB}=\frac{DC}{DB}=\frac{AD\cot C}{AD\cot B}=\frac{\tan B}{\tan C}\Rightarrow\overrightarrow{HB'}=-\frac{\tan B}{\tan C}\overrightarrow{HB};$$

$$\frac{HA'}{HA}=\frac{EC}{EA}=\frac{BE\cot C}{BE\cot A}=\frac{\tan A}{\tan C}\Rightarrow\overrightarrow{HA'}=-\frac{\tan A}{\tan C}\overrightarrow{HA}.$$

Do đó: $\overrightarrow{HC}=-\frac{\tan A}{\tan C}\overrightarrow{HA}-\frac{\tan B}{\tan C}\overrightarrow{HB}$

$$\Leftrightarrow \tan A.\overrightarrow{HA}+\tan B.\overrightarrow{HB}+\tan C.\overrightarrow{HC}=\vec{0}.$$

Vậy (*) được chứng minh.

Vì tam giác ABC nhọn nên $\tan A,\tan B,\tan C$ là các số thực dương. Theo **QT7** thì ta có:

$$2=\frac{SH}{SM}=\frac{a\tan A+b\tan B+c\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}$$

$$\geq\frac{3\sqrt[3]{abc\tan A\tan B\tan C}}{\tan A+\tan B+\tan C}.$$

Suy ra: $\frac{1}{abc} \geq \frac{27\tan A.\tan B.\tan C}{8(\tan A+\tan B+\tan C)^3}$.

Do đó $V_{S.A'B'C'} \geq \frac{27\tan A.\tan B.\tan C}{8(\tan A+\tan B+\tan C)^3}.V$ và

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a\tan A = b\tan B = c\tan C \\ \frac{2}{3} = \frac{a\tan A}{\tan A+\tan B+\tan C} \end{cases}$

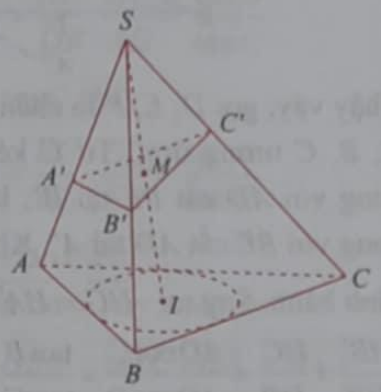
$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{3\tan A}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}; \frac{1}{b} = \frac{3\tan B}{2(\tan A+\tan B+\tan C)};$

$\frac{1}{c} = \frac{3\tan C}{2(\tan A+\tan B+\tan C)}.$

Vậy $\min V_{S.A'B'C'} = \frac{27\tan A.\tan B.\tan C}{8(\tan A+\tan B+\tan C)^3}.V.$

Thí dụ 9. *Cho hình chóp S.ABC với đáy ABC có tâm đường tròn nội tiếp I. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của SI và cắt các tia SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Hãy xác định giá trị của* $f = \frac{SA'}{SA} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC}$, *biết rằng M là trọng tâm tam giác A'B'C'.*

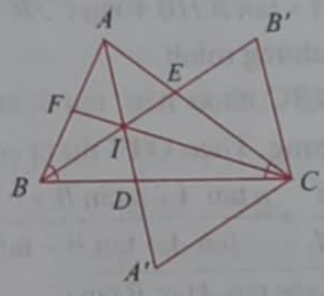
Lời giải. Giả sử $\frac{SA}{SA'} = a$, $\frac{SB}{SB'} = b$, $\frac{SC}{SC'} = c$ với a,b,c là các số thực dương.



Ta cần nhận xét sau

Nhận xét 2. *Cho tam giác ABC với các cạnh BC = a, CA = b, AB = c và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Khi đó ta có:*

$$a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad (**).$$



Thật vậy, gọi $D = AI \cap BC, E = BI \cap AC.$

Từ C kẻ $Cx // AI$ cắt BI tại B', kẻ $Cy // BI$ cắt AI tại A'. Khi đó $CA'IB'$ là hình bình hành, do đó:

$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}.$$

Ta có: $\frac{IB'}{IB} = \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB};$

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} \Rightarrow \overrightarrow{IA'} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}.$$

Do đó:

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Vậy (**) được chứng minh.

Theo **QT8** thì:

$$a.BC.\overrightarrow{MA'} + b.CA.\overrightarrow{MB'} + c.AB.\overrightarrow{MC'} = \vec{0} \text{ (a).}$$

Vì M là trọng tâm $\Delta A'B'C'$ nên

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \vec{0} \text{ (b).}$$

Từ (a),(b) thì ta suy ra được: $a.BC = b.CA = c.AB$

Mặt khác theo **QT7** thì:

$$2 = \frac{SI}{SM} = \frac{a.BC + b.CA + c.AB}{AB + BC + CA}.$$

Từ những kết quả trên thì ta suy ra:

$$a = \frac{2(AB+BC+CA)}{3BC}; b = \frac{2(AB+BC+CA)}{3CA};$$

$$c = \frac{2(AB+BC+CA)}{3AB}.$$

Do đó ta có: $f = \frac{SA'}{SA} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$$= \frac{3(BC+CA+AB)}{2(AB+BC+CA)} = \frac{3}{2}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong hệ trục Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(7;-1)$. Xác định tọa độ điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho

$$S_{MAB} : S_{MBC} : S_{MCA} = 1:2:3.$$

Bài 2. Cho tam giác ABC đều với M, N thuộc cạnh AB sao cho $AN = NM = MB$. Điểm K thuộc cạnh BC và AK cắt CN, CM lần lượt tại N', M'. Biết $AN'=2N'M'$, hãy xác định tỉ số $\frac{M'A}{M'K}$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 117

PROBLEM. *Given positive integers m,n so that $mn \mid m^2+n^2$. Prove that $m=n$.*

Solution. Suppose that $(m,n)=d$. Thus, we can write $m=m_1d$ and $n=n_1d$ with $(m_1,n_1)=1$.

Since $mn \mid m^2+n^2$, $m_1n_1d^2 \mid (m_1^2+n_1^2)d^2$. Hence, $m_1n_1 \mid (m_1^2+n_1^2)$.

Then it is clear that $m_1 \mid (m_1^2+n_1^2)$. This implies that $m_1 \mid n_1^2$ (*).

But $(m_1,n_1)=1$. Then from (*) we can see that $m_1=1$. And similarly, we also have $n_1=1$.

And then we have $m=n$.

***Remark*:** This problem is based on a problem in the Mathematical Olympiad Series, Vol 2.

TỪ VỰNG - KÍ HIỆU

$p \mid q$: *số p là ước của số q*

(p, q) : *ước chung lớn nhất của p và q*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 115

BÀI TOÁN. *Chứng minh rằng nếu một dãy số cho bởi công thức lặp*

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n+\frac{6}{x_n}},\ x_1=2,5$$

hội tụ thì nó hội tụ đến một nghiệm thực của phương trình $x^3-x^2-6=0$.

Lời giải. Giả sử rằng $x_n \to l$. Cho $n \to \infty$ trong cả hai vế của đẳng thức $x_{n+1}=\sqrt{x_n+\frac{6}{x_n}}$ ta được:

$$l=\sqrt{l+\frac{6}{l}}.$$

Vì thế: $l^2=l+\frac{6}{l}$. Và do đó $l^3-l^2-6=0$.

Vậy dãy số đã cho hội tụ đến một nghiệm thực của phương trình $x^3-x^2-6=0$.

Lưu ý: Bài toán trên được xây dựng từ một bài toán trong đề thi Toán trình độ A.

Nhận xét. Kỳ này, bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

☞ **Bài 3.** Cho tam giác ABC với M thuộc cạnh BC sao cho $MC = 3MB$. Điểm K thuộc đoạn AM sao cho $KA = 3KM$ và điểm I thuộc đoạn KC sao cho $IC = 3IK$. Chứng minh AI không đi qua trung điểm của BC.

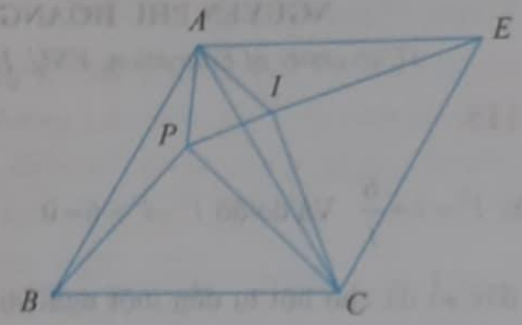
Bài 4. Cho tứ diện gần đều $S.ABC$ với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của SO và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Hãy xác định mặt phẳng (P) biết rằng tam giác $A'B'C'$ đều.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$ với các điểm A', B', C' lần lượt thuộc đường thẳng SA, SB, SC sao cho $SA'= BC, SB' = CA, SC' = AB$. Biết G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ và SG' cắt mặt phẳng (ABC) tại điểm G. Hãy xác định tỉ số diện tích $\frac{S_{BGC}}{S_{ABC}}$.



BÀI TOÁN 96 (AMC 12A, 2020). *Cho tam giác đều ABC cạnh a. P là một điểm nằm trong tam giác. Biết rằng $PA = 1; PB = \sqrt{3}; PC = 2$, tìm a.*

Lời giải. *Cách 1. Sử dụng phép quay: Góc quay tâm A, góc quay 60^0 ngược chiều kim đồng hồ.*



Dựng tam giác đều ACE và điểm I như hình vẽ sao cho ΔAPI là tam giác đều.

Dễ thấy $\Delta AIC = \Delta APB \Rightarrow IC = BP = \sqrt{3}$.

Xét ΔPIC có $PI = 1; PC = 2; IC = PB = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \Delta PIC$ vuông tại I và $\widehat{IPC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{APC} = 120^0$.

Áp dụng định lý côsin cho ΔAPC ta được:

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cos 120^0$$

$$= 1 + 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7 \Rightarrow AB = BC = AC = \sqrt{7}.$$

Nhận xét. +) Trong bài toán trên, điều đặc biệt là $AP = 1; PC = 2; PB = \sqrt{3}$ nên khi thực hiện phép quay : Góc quay tâm A, góc quay 60^0 ngược chiều kim đồng hồ ta được ΔPIC là tam giác vuông, $\widehat{IPC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{APC} = 120^0$.

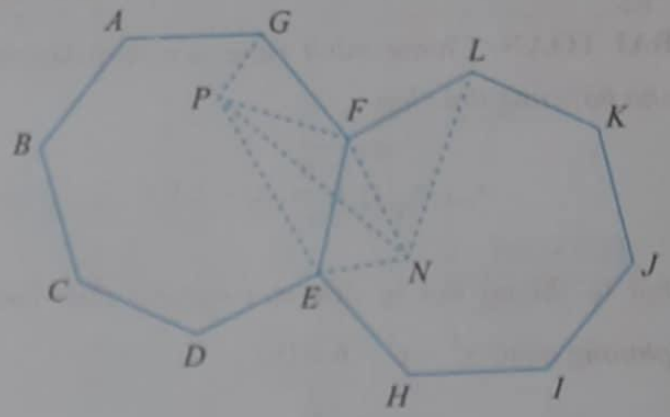
• Mở rộng: +) Trong trường hợp tổng quát $AP = m; BP = n; CP = t$ thì ta vẫn có thể sử dụng cách giải trên để giải, trong trường hợp này ta tính được diện tích các tam giác $\Delta API, \Delta CPI$, khi đó $\sin\widehat{API}, \sin\widehat{CPI}, \cos\widehat{CPI}, \cos\widehat{API}$ đều được xác định nghĩa là:

$$\cos\widehat{APC} = \cos\left(\widehat{API} + \widehat{CPI}\right)$$

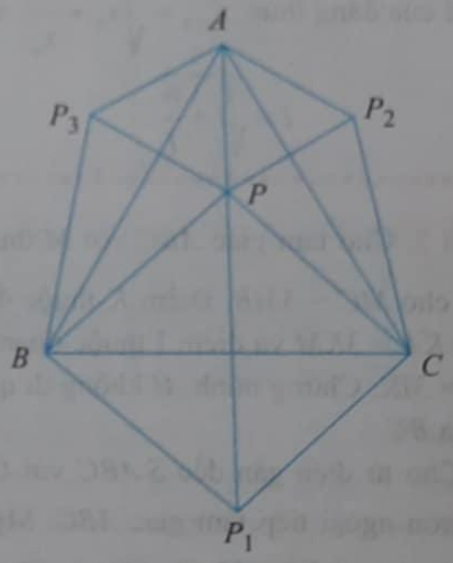
$$= \cos\widehat{API}\cos\widehat{CPI} + \sin\widehat{API}\sin\widehat{CPI}$$

đều được xác định từ đó tính được AC hoặc có thể sử dụng công thức Herong để tính AC, ...

+) Trong trường hợp thay giả thiết tam giác ABC đều bởi đa giác đều (hình dưới) và cho biết khoảng cách từ P đến ba đỉnh liên tiếp của đa giác thì ta cũng có thể sử dụng cách giải trên để giải (góc quay bằng góc của đa giác đều) bằng cách tính PN, diện tích tứ giác $PENF$ từ đó tính được EF.



Cách 2. Phương pháp diện tích.



Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là các điểm đối xứng của P qua BC, AC, AB khi đó dễ thấy các góc:

$\widehat{P_1BP_3}=120^0=\widehat{P_2AP_3}=\widehat{P_1CP_2}$

$\Rightarrow P_2P_3^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos120^0=3$

$\Rightarrow P_2P_3=\sqrt{3}$

(áp dụng định lí côsin cho ΔAP_2P_3).

Tương tự ta tính được:

$$P_1P_2=2\sqrt{3};\ P_1P_3=3,$$

suy ra $\Delta P_1P_3P_2$ vuông tại P_3.

Dễ thấy:

$S_{BP_1CP_2AP_3}=2S_{ABC}$;

$S_{BP_1CP_2AP_3}=S_{P_1BP_3}+S_{P_2AP_3}+S_{P_1CP_2}+S_{P_1P_3P_2}$

$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin120^0+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin120^0+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin120^0$

$+\frac{1}{2}P_2P_3\cdot P_1P_3$

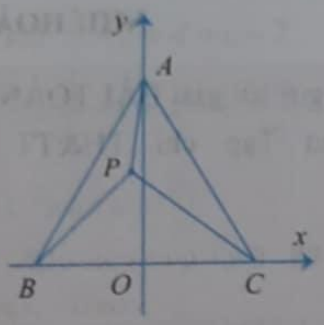
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot3=\frac{7\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{7\sqrt{3}}{4}\Rightarrow AB=AC=BC=\sqrt{7}=s.$

• ***Nhận xét.*** +) Trong trường hợp AP, BP, CP là các số bất kì thì cách giải trên vẫn áp dụng được (các góc $\widehat{P_1BP_3};\widehat{P_2AP_3};\widehat{P_1CP_2}$ luôn bằng 120^0, các đoạn thẳng $P_2P_3;P_1P_2;P_1P_3$ luôn được xác định, từ đó tính được $S_{P_1P_3P_2}$, $S_{BP_1CP_2AP_3}$ mà $S_{BP_1CP_2AP_3}=2S_{ABC}$ từ đó tính được s).

Cách 3. Phương pháp tọa độ.

(Ta giải bài toán trong trường hợp PA, PB, PC là các số bất kì)



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ: $(s=2a)$;

$$A(0;a\sqrt{3});\ B(-a;0);\ C(a;0);\ P(x_0;y_0).$$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases}PA^2=x_0^2+(y_0-a\sqrt{3})^2\\PB^2=y_0^2+(x_0+a)^2\\PC^2=y_0^2+(x_0-a)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2+3a^2-2y_0a\sqrt{3}=PA^2 & (1)\\y_0^2+a^2+x_0^2+2ax_0=PB^2 & (2)\\y_0^2+x_0^2-2ax_0+a^2=PC^2 & (3)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$2a^2-\left(2ay_0\sqrt{3}+2ax_0\right)=PA^2-PB^2=t_1$$

$$\Leftrightarrow2a^2-2a\left(y_0\sqrt{3}+x_0\right)=t_1$$

$$\Rightarrow y_0\sqrt{3}=\frac{2a^2-t_1}{2a}-x_0\quad(I).$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$x_0=\frac{PB^2-PC^2}{4a}=\frac{t_2}{4a}\quad(II).$$

Từ (I) và (II) suy ra:

$$y_0\sqrt{3}=\frac{2a^2-t_1}{2a}-\frac{t_2}{4a}=\frac{4a^2-2t_1-t_2}{4a}\Rightarrow y_0=\frac{4a^2-2t_1-t_2}{4a\sqrt{3}}.$$

Cũng từ (2) và (3) suy ra:

$$2(x_0^2+y_0^2)+2a^2=PB^2+PC^2$$

$$\Rightarrow x_0^2+y_0^2=\frac{PB^2+PC^2}{2}-a^2.$$

Đặt $t_3=\frac{PB^2+PC^2}{2}$;

$$t=2t_1+t_2=2PA^2-PB^2-PC^2$$

ta được: $\frac{3t_2^2}{3.16a^2}+\frac{(4a^2-t)^2}{3.16a^2}=t_3-a^2$

$$\Leftrightarrow16a^4-2a^2\left(t+t_3\right)+\frac{3t_2^2+t^2}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow16a^4-2a^2\left(t+t_3\right)+\frac{3t_2^2+t^2}{4}=0$$

$\Leftrightarrow16a^4-4k_1a^2+(k_2-k_3)=0$ (*), trong đó:

$k_1=PA^2+PB^2+PC^2;k_2=PA^4+PB^4+PC^4;$

$k_3=PA^2.PB^2+PB^2.PC^2+PC^2.PB^2$ và cạnh của tam giác là $2a=s$.

Đặt $v=a^2$ khi đó:

$$16a^4-4k_1a^2+\left(k_2-k_3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow16v^2-4k_1v+(k_2-k_3)=0.$$

$\Delta'_{(v)} = 4k_1^2 - 16(k_2 - k_3) =$

$= 24\left(PA^2.PB^2 + PB^2.PC^2 + PC^2.PB^2\right)$

$-12(PA^4 + PB^4 + PC^4 \geq 0.$

(dễ thấy PA, PB, PC thỏa mãn là độ dài ba cạnh của một tam giác và $4k_1^2 \geq \Delta'_{(v)}$)

$$\Rightarrow v_{1,2} = \frac{2k_1 \pm \sqrt{\Delta'_{(v)}}}{16} > 0$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \sqrt{v} = \frac{\sqrt{2k_1 \pm \sqrt{\Delta'_{(v)}}}}{4}.$$

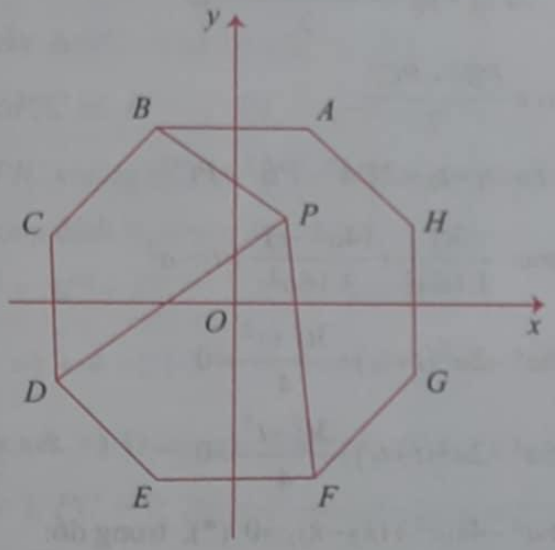
Thay số vào ta được:

$$a_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}; a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \sqrt{7}.$$

• ***Một vài lưu ý:***

+) Vì phương trình (*) luôn có 2 nghiệm dương nên có hai vị trí của P (nằm trong tam giác và nằm ngoài tam giác) do vậy cần dựa vào giả thiết để tìm ra nghiệm thỏa mãn (PA, PB, PC luôn nhỏ hơn cạnh của tam giác).

*) Mở rộng bài toán ban đầu:



1) Nếu thay tam giác đều ABC bằng một đa giác đều thì chỉ cần cho biết khoảng cách từ P tới 3 đỉnh bất kỳ của đa giác là có thể tìm được cạnh của đa giác đều đó.

2) Trong trường hợp P là điểm bất kì nằm trong đa giác đều và cho biết khoảng cách từ nó đến 3 đỉnh không liên tiếp của đa giác thì việc áp dụng hai cách giải 1;2 trở nên khó khăn và khi đó việc sử dụng phương pháp tọa độ trở nên tối ưu hơn!

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài toán 1. M là một điểm nằm trong hình vuông $ABCD$, biết $MA = 3$; $MB = 4$; $MC = 5$. Tính độ dài đoạn thẳng MD, độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$, nêu cách dựng hình?

Bài toán 2. M là một điểm nằm trong đa giác đều $A_1A_2A_3\cdots A_n$, biết $MA_1 = x$; $MA_5 = y$; $MA_{11} = z$. Tính khoảng cách từ M đến các đỉnh còn lại và độ dài cạnh của đa giác đều ban đầu; nêu cách dựng hình.

Bài toán 3. Có hay không một đa giác đều n cạnh ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$) sao cho tồn tại một điểm M thuộc miền trong của đa giác đó và khoảng cách từ M đến các đỉnh của nó đều là các số nguyên dương?

NGUYỄN VĂN BẢN

*(GV THCS Thanh Yên, **Điện Biên**)*

Nhận xét. Kỳ này bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đóng góp một cách giải tương tự như cách 3 mà bạn *Nguyễn Văn Bản* đã đề xuất. Bạn *Hoàng Minh Dũng*, nhà số 14, ngõ 181, đường Lý Thái Tổ, Đồng Sơn, Đồng Hới, **Quảng Bình** đóng góp thêm một cách giải bằng cách sử dụng định lí côsin và vẽ thêm hình phụ. Xin hoan nghênh hai bạn.

NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 98 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31/7/2025.

BÀI TOÁN 98. *Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ thỏa mãn* $\frac{\cos B}{c} = \frac{\cos C}{b} = \frac{\sin A}{a}$.

Tính số đo của góc A.

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)



BÀI TOÁN 104 (USAMO 1978). *Cho các số thực a, b, c, d, e thỏa mãn các điều kiện: $a + b + c + d + e = 8$ và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của a.*

Lời giải.

Cách 1. Từ $a + b + c + d + e = 8$ suy ra:

$$b + c + d + e = 8 - a.$$

Đặt $x = \dfrac{8-a}{4}$

(x là trung bình cộng của 4 số b, c, d, e),

$b = x + b_1,\ c = x + c_1,$

$d = x + d_1,\ e = x + e_1.$

Khi đó: $b_1 + c_1 + d_1 + e_1 = 0$

và $16 = a^2 + 4x^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + e_1^2 \geq a^2 + 4x^2$

$$= a^2 + \frac{(8-a)^2}{4} \quad (1)$$

hay $5a^2 - 16a \leq 0 \Leftrightarrow a(5a-16) \leq 0.$

Vì vậy: $0 \leq a \leq \dfrac{16}{5}$. Ta có:

+) $a = 0$ khi $b = c = d = e = 2.$

+) $a = \dfrac{16}{5}$ khi $b = c = d = e = \dfrac{6}{5}.$

Vậy $\min a = 0,\ \max a = \dfrac{16}{5}.$

Cách 2. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có :

$$(8-a)^2 = (b+c+d+e)^2$$

$$\leq 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$$

$$= 4.(16 - a^2)$$

$\Leftrightarrow 5a^2 - 16a \leq 0 \Leftrightarrow a(5a-16) \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq a \leq \dfrac{16}{5}.$

+) $a = 0$ khi $b = c = d = e = 2.$

+) $a = \dfrac{16}{5}$ khi $b = c = d = e = \dfrac{6}{5}.$

Vậy $\min a = 0,\ \max a = \dfrac{16}{5}.$

Nhận xét. Các bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**, *Hoàng Minh Dũng*, nhà số 14, ngõ 181, đường Lý Thái Tổ, Đồng Sơn, Đồng Hới, **Quảng Bình**, *Nguyễn Minh Thư*, THPT chuyên Bảo Lộc, **Lâm Đồng** cũng đóng góp một cách giải tương tự như cách 2 trong lời giải trên. Xin hoan nghênh các bạn.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31/7/2025.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

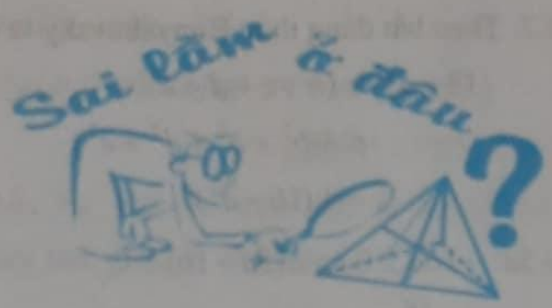
BÀI TOÁN 106. *Các số 1000, 1001, ..., 2999 được viết trên một cái bảng. Mỗi lần được phép xóa hai số, chẳng hạn a và b và thay chúng bởi số $\dfrac{1}{2}\min(a;b)$. Sau 1999 lần thực hiện như vậy trên bảng còn đúng một số c. Chứng minh rằng $c < 1$.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

THÔNG BÁO

Theo đề nghị của bộ phận Kinh doanh và Kế toán, do giá giấy và nhân công tăng nên Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường điều chỉnh giá của kỳ *Toán học và Tuổi trẻ* tăng từ 18000 đồng/1 tờ lên 22000 đồng/1 tờ. Thời gian điều chỉnh bắt đầu từ tháng 9 năm 2025. Vậy Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường thông báo để bạn đọc được biết. Rất mong bạn đọc thông cảm và ủng hộ Tạp chí.

Tạp chí trân trọng cám ơn.



GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ LÀ 18 HAY 20?

(*Đề đăng trên TH&TT số 572, tháng 2 năm 2025*)

Phân tích sai lầm.

Lời giải của *Hà* đã mắc sai lầm khi xét các số cần lập dạng $\overline{2ab}$, ngoài cách chọn a là 1 hoặc 5 thì a có thể là 7 mà số $\overline{27b}$ vẫn nhỏ hơn 278, chẳng hạn số 275, 271.

Lời giải đúng như sau.

Ngoài cách bổ sung hai số 275, 271 nói trên bài toán còn có thể giải như sau tránh được mắc sai lầm:

Số cần lập có dạng $\overline{1ab}$ hoặc $\overline{2ab}$

Xét số có dạng $\overline{1ab}$: Lấy 2 chữ số trong 4 chữ số của tập $A\setminus\{1\}$ có $A_4^2=12$ số

Suy ra trường hợp này các số lập được là 12.

Xét số có dạng $\overline{2ab}$: Trước hết ta tìm số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau từ các chữ số của tập A, có $A_4^2=12$ số. Các số dạng $\overline{2ab}$ lớn hơn hoặc bằng 278 gồm các số 278, 281, 285, 287 (có 4 số). Suy ra số các số dạng $\overline{2ab}$ cần tìm là:

$$12-4=8 \text{ (số).}$$

Do đó số các số cần tìm là $12+8=20$

Vậy có 20 số có ba chữ số đôi một khác nhau nhỏ hơn 278 lập từ các chữ số đã cho.

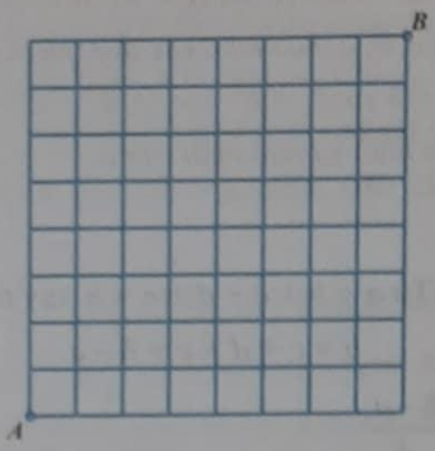
Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Trương Quốc Minh, 10C2-29, THPT Tây Thạnh, Q. Tân Phú, TP. Hồ Chí Minh* đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

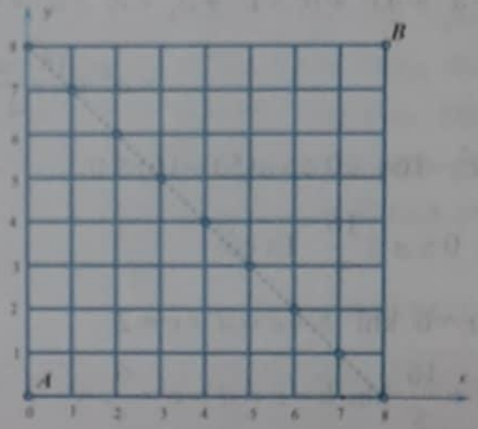
XÁC SUẤT ĐỂ 2 RÔBỐT GẶP NHAU?



ĐỀ BÀI. *Có một bảng ô vuông kích thước 8×8 như hình vẽ. Một con rôbốt xuất phát từ vị trí A đi đến vị trí B, chỉ đi lên trên hoặc sang phải theo các cạnh của hình vuông đơn vị. Cùng lúc đó, một con rôbốt xuất phát từ vị trí B đi đến vị trí A, chỉ đi xuống dưới hoặc sang trái theo các cạnh của hình vuông đơn vị. Vận tốc của hai con rôbốt bằng nhau. Tính xác suất để hai con rôbốt đó gặp nhau.*



Lời giải của bạn Minh. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A(0;0), B(8;8)$. Mỗi đỉnh của hình vuông đơn vị đều có tọa độ dạng $(x;y)$ với $x,y\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.



Hai con rôbốt gặp nhau tại điểm $M(i;j)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} i,j\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\} \\ i+j=(8-i)+(8-j) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i,j\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\} \\ i+j=8 \end{cases}.$$

Chứng tỏ hai con rôbốt chỉ có thể gặp nhau tại một trong các điểm:

$M(i;8-i), i\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$. (1).

Xét con rôbốt thứ nhất đi từ A đến một trong các điểm kể tên ở (1). Con rôbốt này có số cách di chuyển là: $1+C_8^1+C_8^2+...+C_8^7+1=2^8$ (cách).

Tương tự, số cách con rôbốt thứ hai đi từ B đến một trong các điểm kể tên ở (1) là:

$$1+C_8^1+C_8^2+...+C_8^7+1=2^8 \text{ (cách).}$$

Do đó: $n(\Omega)=2^8\cdot 2^8=2^{16}$.

Xét biến cố X: "Hai con rôbốt gặp nhau".

Con rôbốt thứ nhất có C_8^i cách đi từ A đến điểm $M(i;8-i), i\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Con rôbốt thứ hai có C_8^i cách đi từ B đến điểm $M(i;8-i), i\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Suy ra: $n(X)=\sum_{i=0}^{8}\left(C_8^i\right)^2=12870$.

Xác suất cần tính là:

$$P(X)=\frac{n(X)}{n(\Omega)}=\frac{12870}{2^{16}}=\frac{6435}{32768}.$$

Các bạn có tìm ra đáp số giống đáp số của bạn Minh không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

PROBLEMS . . . (Tiếp theo trang 19)

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/576. Solve the following system of equations $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$.

Problem T7/576. Given the sequence of numbers (u_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ defined as follows:

$$u_1=2,\ u_{n+1}=\frac{u_n}{1-2u_n-u_n^2}.$$

Calculate $\lim\left(u_1+u_2+...+u_n+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$.

Problem T8/576. Given a pyramid $S.ABCD$ with the base $ABCD$ being a parallelogram. Let M, N, P, Q be points on the edges SA, SB, SC, SD respectively and let $\frac{SM}{SA}=a, \frac{SN}{SB}=b, \frac{SP}{SC}=c, \frac{SQ}{SD}=d$ with a, b, c, d are positive numbers. Suppose furthermore that the points M, N, P, Q are coplanar. Prove that $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{cd}}$.

Problem T9/576. Given real numbers x, y, z satisfying $x^2+y^2+z^2=1$. Prove that

$$Q=xy+yz+2zx\leq\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/576. Consider the sequence (a_n) with: $a_0=a_1=1$ and $a_{n+1}=7a_n-a_{n-1}-2$ for every natural number $n\geq 1$. Are all the terms a_n perfect square numbers?

Problem T11/576. Find all functions $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ that satisfy

$$f\left(f(xy)+2xy\right)=3xf(y)+3yf(x),$$

with all $x, y\in(0;+\infty)$.

Problem T12/576. Given a circle (O) and two points A, $B\in(O)$ so that $\widehat{AOB}=90^0$, and C is the midpoint of the minor arc AB of the circle (O). Let D, E be the orthogonal projections of C on OB, OA respectively and F is a point on the minor arc AB of the circle (O) so that CE is the bisector of the angle $\widehat{BEF}$. The line through F and perpendicular to OB intersects BE at point I.

a) Prove that circle (I) (center I, radius IF) is tangent to OB.

b) From B, draw the tangent BK to circle (I) (point K is different from point N). Prove that $K\in(O)$.

NGUYEN PHU HOANG LAN

(University of Education, VNU, Hanoi)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 576 (6.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS.TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS.TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM
Phó tổng biên tập : CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG
Thư kí Tòa soạn: CN. VÕ THỊ HỒNG THU

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở** *For Lower Secondary School*

Nguyễn Đức Tấn, Trần Quốc Luật – Một cách học toán.

5 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán, lớp 9, tỉnh Nam Định, năm học 2024 - 2025.

11 Đề thi chọn học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Nam Định, năm học 2024 - 2025.

10 **Thử sức trước kỳ thi THPTQG** – Hướng dẫn giải đề số 5.

14 **Diễn đàn dạy học toán**

Trần Quang Thuận, Hà Văn Thắng – Xác suất có điều kiện (*kỳ 2*).

18 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*

T1/576, ..., T12/576, L1/576, L2/576.

20 **Giải bài kì trước** *Solutions to Previous Problems*

T1/572, ..., T12/572, L1/572, L2/572.

29 **Lịch sử toán học**

Nguyễn Thúy Thanh - Quá trình hình thành cơ sở của Giải tích toán học cổ điển.

35 **Phương pháp giải toán**

La Đại Cương - Quy tắc X.

41 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 117 – Bài dịch số 115.

42 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 96 – Đề bài toán 98.

45 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 104. Đề bài toán 106.

46 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: KIM THANH, NHƯ HOÀNG
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: TRẦN THỊ MINH HIỀN
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI

BẠN CỐ ĐANG...

- X Học tiếng Anh mãi không tiến bộ?
- X Lúng túng trong ghi nhớ từ vựng?
- X Nghe tiếng Anh mà không hiểu gì?
- X E ngại vì phát âm chưa chuẩn?
- X Khó tiếp thu kiến thức ngữ pháp?

LỖI KHÔNG PHẢI Ở BẠN!

Chỉ là bạn chưa có một trợ thủ đắc lực đồng hành!

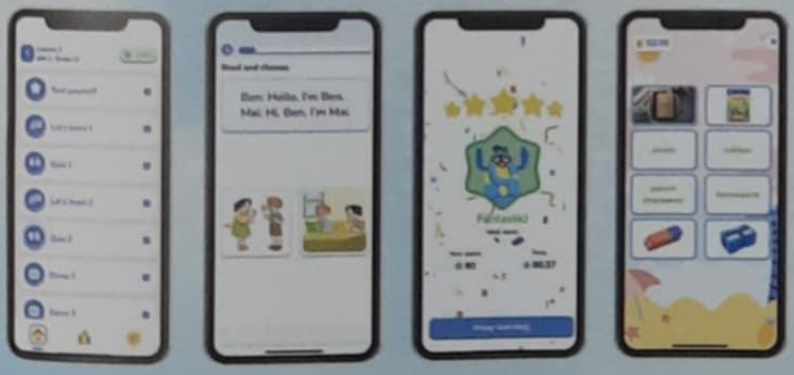
SẮP RA MẮT

ỨNG DỤNG HỌC TIẾNG ANH

GLOBALSPEAK

Speak right – Shine bright

1. Bám sát SGK Tiếng Anh Global Success - Học chuẩn, tiến bộ nhanh!
2. AI nhận diện giọng nói - Nói tự nhiên, phát âm chuẩn!
3. AI chấm điểm, đánh giá - Cá nhân hoá học tập.
4. Hệ thống video, trò chơi, điểm thưởng, huy hiệu - Học vui, nhớ lâu.
5. Đồng hành mọi lúc, mọi nơi - Lưu trữ trên "mây", học trên mọi thiết bị.
6. Nhắc nhở thông minh - Duy trì thói quen học tập.



Chỉ cần 10' mỗi ngày bạn sẽ tiến bộ rõ rệt!

Đăng kí trải nghiệm

Google Play
App Store
Windows

QUÉT MÃ

ĐỂ ĐƯỢC HỖ TRỢ NHANH NHẤT

HỖ TRỢ - GIẢI ĐÁP - TƯ VẤN

gs.hoclieu.vn
Tiếng Anh Global Success
1900 636 011
hotro@hoclieu.vn

THÔNG BÁO VỀ VIỆC SỬ DỤNG SÁCH GIÁO KHOA ĐIỆN TỬ MIỄN PHÍ CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Hà Nội, ngày 22 tháng 5 năm 2025 - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) xin trân trọng gửi tới các cơ quan thông tấn báo chí, các thầy cô giáo, các em học sinh, các bậc phụ huynh và bạn đọc trên cả nước thông tin chính thức liên quan đến việc truy cập và sử dụng hệ thống sách giáo khoa (SGK) điện tử miễn phí do NXBGDVN cung cấp.

Đến thời điểm hiện tại, toàn bộ hệ thống SGK điện tử của NXBGDVN, bao gồm cả các bộ SGK mới nhất dành cho các lớp 5, 9 và 12 (áp dụng từ năm học 2024 - 2025 theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018), đã được cập nhật đầy đủ, chính xác và phục vụ hoàn toàn miễn phí cho học sinh, giáo viên và đông đảo bạn đọc trên trang **taphuan.nxbgd.vn**. Nền tảng này được NXBGDVN trực tiếp quản lý, đảm bảo tính ổn định, tốc độ truy cập nhanh và nội dung được cập nhật chính xác theo SGK giấy đã được xuất bản.

NXBGDVN khẳng định việc xây dựng và cung cấp SGK điện tử miễn phí là một nỗ lực tự nguyện, xuất phát từ trách nhiệm xã hội và mong muốn đóng góp thiết thực vào sự nghiệp giáo dục của đất nước. Đây không phải là nhiệm vụ bắt buộc theo quy định pháp luật, mà là cam kết của NXBGDVN nhằm mang đến những điều kiện thuận lợi nhất cho việc dạy và học trong kỷ nguyên số.

Trong thời gian tới, với tầm nhìn chiến lược và cam kết phục vụ lâu dài, NXBGDVN sẽ tiếp tục đầu tư nghiên cứu và phát triển thêm những nền tảng học liệu số mới, hiện đại và hữu ích. Dự kiến, các nền tảng mới (hoàn toàn miễn phí) như **dulieuso.nxbgd.vn** và **hoclieuso.nxbgd.vn** sẽ sớm được ra mắt, hứa hẹn mang đến một hệ sinh thái tài nguyên giáo dục số phong phú, chất lượng cao phục vụ cho học sinh, giáo viên trên cả nước.

Qua thông báo này, NXBGDVN kính mong các cơ quan báo chí, các thầy cô giáo, các em học sinh, các bậc phụ huynh và bạn đọc nói chung nắm rõ thông tin và ưu tiên truy cập, sử dụng trang **taphuan.nxbgd.vn** để khai thác nguồn SGK điện tử chính thống, đầy đủ và cập nhật nhất từ NXBGDVN. Việc tập trung vào một đầu mối duy nhất do NXBGDVN tự vận hành sẽ giúp đảm bảo chất lượng dịch vụ, tính chính xác của thông tin và mang lại trải nghiệm tốt nhất cho người dùng.

NXBGDVN xin chân thành cảm ơn sự đồng hành, tin tưởng và ủng hộ của quý vị trong suốt thời gian qua. Chúng tôi cam kết sẽ không ngừng nỗ lực để mang đến những sản phẩm và dịch vụ giáo dục ngày càng chất lượng, đáp ứng tốt hơn nữa nhu cầu của xã hội.

Trân trọng.

BAN TRUYỀN THÔNG - NXBGDVN

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT6M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2025
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng