TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 575
Tháng 5 - 2025
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Chào mừng ngày Quốc tế Lao động 1-5

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM THAM GIA HỘI SÁCH CHÀO MỪNG NGÀY SÁCH VÀ VĂN HÓA ĐỌC VIỆT NAM LẦN THỨ TƯ NĂM 2025

Ngày 19/4/2025, tại Thư viện Quốc gia Việt Nam, số 31 Tràng Thi, Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã tham gia Hội sách chào mừng Ngày Sách và Văn hóa đọc Việt Nam lần thứ Tư năm 2025.

Hội sách được tổ chức là hoạt động thiết thực chào mừng Ngày Sách và Văn hóa đọc Việt Nam (21/4) và Ngày sách và bản quyền thế giới (23/4). Với mục tiêu khuyến khích và phát triển phong trào đọc sách; nâng cao nhận thức của cộng đồng về ý nghĩa và tầm quan trọng của việc đọc sách; xây dựng thói quen đọc sách trong gia đình, nhà trường, xã hội...; đồng thời phát hiện, tôn vinh các tổ chức, cá nhân có những đóng góp cho sự phát triển của sách và văn hóa đọc.



Gian hàng sách của NXBGDVN

Ngày Sách và Văn hóa đọc năm nay mang một chủ đề đặc biệt ý nghĩa: ***"Mỗi trang sách - Một niềm tự hào"*** nhằm khẳng định vai trò to lớn của sách trong việc bồi đắp tri thức, nuôi dưỡng tâm hồn, khơi gợi niềm tự hào về lịch sử dân tộc nhân Kỉ niệm 50 năm Ngày Giải phóng miền Nam, thống nhất đất nước.

Hội sách được tổ chức với nhiều hoạt động, nội dung phong phú nhằm giới thiệu quảng bá sách của các nhà xuất bản, các nhà sách, trong đó có NXBGDVN.

Với gần 500 đầu sách, gian hàng của NXBGDVN giới thiệu đến bạn đọc các sản phẩm đặc trưng của NXBGDVN như: sách giáo khoa, sách tham khảo, truyện thiếu nhi,...

Trong khuôn khổ Ngày hội Sách, ngoài các gian hàng sách còn có nhiều hoạt động khác: giới thiệu, quảng bá xuất bản phẩm; tổ chức hội thảo, sự kiện, giao lưu, tọa đàm; giới thiệu phong trào đọc sách, viết sách, quảng bá sách, lưu giữ sách; thi kể chuyện, vẽ tranh theo sách; đọc sách chuyên đề,...

Tham dự Ngày Hội Sách, đại diện Lãnh đạo NXBGDVN - bà Phùng Ngọc Hồng, Phó Tổng Giám đốc khẳng định, đây là hoạt động văn hóa ý nghĩa nhằm tôn vinh giá trị của sách, của tri thức, khơi dậy tình yêu với sách và văn hóa đọc trong cộng đồng bởi sách là tri thức, sách bồi dưỡng tâm hồn chúng ta.

Để Ngày Sách và Văn hóa đọc đi vào đời sống xã hội, tôn vinh giá trị của sách và nhân rộng việc đọc sách, phát triển văn hóa đọc, Ban tổ chức đã kêu gọi các nhà xuất bản tài trợ về sách, tài liệu cho các thư viện. NXBGDVN đã tài trợ 624 bản sách tham khảo tương đương giá trị 43 triệu đồng cho Thư viện Quốc gia Việt Nam để ủng hộ triển khai hoạt động ý nghĩa này.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)



SỬ DỤNG TỔNG CÁC LŨY THỪA ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TÌM SỐ DƯ KHI CHIA MỘT LŨY THỪA CHO MỘT SỐ NGUYÊN TỐ

NGUYỄN ANH TUẤN *(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)*
NGUYỄN THỊ THÚY BÌNH *(GV THCS Nghi Ân, TP. Vinh, Nghệ An)*

Khi gặp bài toán tìm số dư trong phép chia một luỹ thừa cho một số nguyên tố, chúng ta thường sử dụng đồng dư thức. Với mục đích giúp đối tượng học sinh lớp 6, 7 dễ dàng hơn trong việc tiếp cận dạng toán này chúng tôi xin trao đổi với bạn đọc phương pháp sử dụng tổng các luỹ thừa viết theo quy luật để giải các bài toán liên quan đến tìm số dư khi chia một luỹ thừa cho một số nguyên tố. Sau đây là một số thí dụ minh hoạ.

Bài toán 1. *Tìm số dư khi chia:*

a) 2^{2012} *cho* 7;

b) 3^{2015} *cho* 7.

Lời giải. a) *Phân tích*: Ta có $2^3-1=7\vdots 7$ và 2012 chia cho 3 dư 2, từ đó ta có lời giải sau:

Gọi $A=2^2+2^5+2^8+...+2^{2006}+2^{2009}$. Ta có:

$$8A-A=\left(2^5+2^8+2^{11}+...+2^{2009}+2^{2012}\right)-\left(2^2+2^5+2^8+...+2^{2006}+2^{2009}\right)$$

$$\Leftrightarrow 7A=2^{2012}-2^2\Rightarrow 2^{2012}=7A+4.$$

Vì tổng A là số tự nhiên nên $7A\vdots 7$ suy ra 2^{2012} chia cho 7 dư 4.

b) *Phân tích*: Ta có $3^6-1=728=7.104\vdots 7$ và 2015 chia cho 6 dư 5, từ đó ta có lời giải sau:

Gọi $B=3^5+3^{11}+3^{17}+...+3^{2003}+3^{2009}$. Ta có:

$$729B-B=\left(3^{11}+3^{17}+3^{23}+...+3^{2009}+3^{2015}\right)-\left(3^5+3^{11}+3^{17}+...+3^{2003}+3^{2009}\right)$$

$$\Leftrightarrow 728B=3^{2015}-3^5$$

$$\Rightarrow 3^{2015}=728B+3^5=7.104B+34.7+5=7\left(104B+34\right)+5.$$

Vì tổng B là số tự nhiên nên $7\left(104B+34\right)\vdots 7$. Do đó 3^{2015} chia cho 7 dư 5.

Nhận xét. 1) Câu b) chúng ta đã sử dụng kết quả $3^6-1=729-1=728\vdots 7$. Tuy nhiên việc tính toán $3^6=729$ cũng khá khó khăn. Ta nhận thấy rằng $3^3+1=28\vdots 7$. Từ đó ta có lời giải khác cho câu b) như sau:

Gọi $C=3^2-3^5+3^8-3^{11}+...+3^{2006}-3^{2009}+3^{2012}$

$$\Rightarrow 27C+C=\left(3^5-3^8+3^{11}-3^{14}+...+3^{2009}-3^{2012}+3^{2015}\right)+\left(3^2-3^5+3^8-3^{11}+...+3^{2006}-3^{2009}+3^{2012}\right)$$

$$\Leftrightarrow 28C=3^{2015}+3^2\Rightarrow 3^{2015}=28C-3^2=7.4C-14+5=7\left(4C-2\right)+5.$$

Vì tổng C là số nguyên nên $7\left(4C-2\right)\vdots 7$. Vậy 3^{2015} chia cho 7 dư 5.

2) Từ cách giải của bài toán 1 ta có thể nêu các bước giải dạng toán tìm số dư khi chia a^n cho một số nguyên tố p như sau:

Bước 1: Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất khác 0 sao cho $\left(a^k-1\right)\vdots p$.

Bước 2: Tìm số dư khi chia n cho k (giả sử n chia cho k dư r, trong đó $0\le r<k$).

Bước 3: Gọi $A=a^r+a^{r+k}+a^{r+2k}+...+a^{n-2k}+a^{n-k}$, từ đó tính được $\left(a^k-1\right)A=a^kA-A=a^n-a^r$

$\Rightarrow a^n=\left(a^k-1\right)A+a^r$. Vì $\left(a^k-1\right)\vdots p$ nên suy ra số dư khi chia a^n cho số nguyên tố p bằng số dư khi chia a^r cho p.

Lưu ý. Trường hợp tính toán để tìm tự nhiên k nhỏ nhất khác 0 sao cho $\left(a^k-1\right)\vdots p$ mà khặp khó khăn trong tính toán thì ta có thể tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho $\left(a^k+1\right)\vdots p$. Khi đó ta chọn biểu thức

$$A=a^r-a^{r+k}+a^{r+2k}-a^{r+3k}+...+a^{n-2k}-a^{n-k}.$$

Từ đó tính được $\left(a^k+1\right)A=a^kA+A=a^r-a^n$

$\Rightarrow a^n=-\left(a^k+1\right)A+a^r$. Vì $\left(a^k+1\right)\vdots p$ nên suy ra số

dư khi chia a^n cho số nguyên tố p bằng số dư khi chia a^r cho p.

3) Thực tế khi cho học sinh áp dụng cách giải như thí dụ 1, chúng tôi thấy rằng nó phù hợp hơn cho đối tượng học sinh lớp 6, 7. Ngoài ra chúng ta có thể giải được các bài toán dạng này bằng cách sử dụng kết quả tổng quát sau đây.

Bài toán 2. *Chứng tỏ rằng:*

a) $(a^n-1)\vdots(a-1)$ *với* $a, n\in\mathbb{N}^*$ *và* $a\neq 1$.

b) $(a^{2n+1}+1)\vdots(a+1)$ *với* $a, n\in\mathbb{N}^*$.

c) $(a^{2n}-1)\vdots(a+1)$ *với* $a, n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải. a) Gọi $A=1+a+a^2+a^3+...+a^{n-2}+a^{n-1}$.

Ta có: $aA-A=\left(a+a^2+a^3+a^4+...+a^{n-1}+a^n\right)$

$$-\left(1+a+a^2+a^3+...+a^{n-2}+a^{n-1}\right)$$

$\Leftrightarrow(a-1)A=a^n-1$.

Vì tổng A là số tự nhiên nên $(a^n-1)\vdots(a-1)$.

b) Gọi $B=1-a+a^2-a^3+...+a^{2n-2}-a^{2n-1}+a^{2n}$. Ta có: $aB+B=\left(a-a^2+a^3-a^4+...+a^{2n-1}-a^{2n}+a^{2n+1}\right)$

$$+\left(1-a+a^2-a^3+...+a^{2n-2}-a^{2n-1}+a^{2n}\right)$$

$\Leftrightarrow(a+1)B=a^{2n+1}+1$.

Vì tổng B là số nguyên nên $(a^{2n+1}+1)\vdots(a+1)$.

c) Gọi $C=1-a+a^2-a^3+...+a^{2n-2}-a^{2n-1}$. Ta có:

$aC+C=\left(a-a^2+a^3-a^4+...+a^{2n-1}-a^{2n}\right)$

$$+\left(1-a+a^2-a^3+...+a^{2n-2}-a^{2n-1}\right)$$

$\Leftrightarrow(a+1)C=1-a^{2n}$.

Vì tổng C là số nguyên nên $(a^{2n}-1)\vdots(a+1)$.

Nhận xét. Bằng cách áp dụng bài toán 2 ta có cách giải khác cho bài toán 1 như sau:

a) Ta có: $2^{2012}=4\left(2^{2010}-1\right)+4=4\left[\left(2^3\right)^{670}-1\right]+4$.

Mà $\left[\left(2^3\right)^{670}-1\right]\vdots\left(2^3-1\right)=7$, từ đó suy ra 2^{2012} chia cho 7 dư 4.

b) Ta có:

$$3^{2015}=3^2\left(3^{2013}+1\right)-9=9\left[\left(3^3\right)^{671}+1\right]-14+5.$$

Theo bài toán 2b ta có $\left[\left(3^3\right)^{671}+1\right]\vdots\left(3^3+1\right)=28$ và $28\vdots 7$. Do đó $\left[\left(3^3\right)^{671}+1\right]\vdots 7$. Từ đó suy ra 3^{2015} chia cho 7 dư 5.

Bài toán 3. *Tìm số dư khi chia:*

a) 4^{2011} *cho* 7; b) 5^{2017} *cho* 7; c) 9^{2012} *cho* 7;

d) 2^{201} *cho* 13; e) 3^{205} *cho* 13; f) 8^{2001} *cho* 13.

Lời giải.

a) ***Cách 1.*** Gọi $A=4+4^4+4^7+...+4^{2005}+4^{2008}$. Ta có: $64A-A=\left(4^4+4^7+4^{10}+...+4^{2008}+4^{2011}\right)$

$$-\left(4+4^4+4^7+...+4^{2005}+4^{2008}\right)$$

$\Leftrightarrow 63A=4^{2011}-4\Rightarrow 4^{2011}=63A+4$. Vì tổng A là số tự nhiên nên 4^{2011} chia cho 7 dư 4.

Cách 2. Ta có:

$$4^{2011}=4\left(2^{2010}-1\right)+4=4\left[\left(4^3\right)^{670}-1\right]+4.$$

Theo bài toán 2a ta có $\left[\left(4^3\right)^{670}-1\right]\vdots\left(4^3-1\right)=63$ và $63\vdots 7$. Từ đó suy ra 4^{2011} chia cho 7 dư 4.

b) ***Cách 1.*** Gọi $B=5-5^4+5^7-5^{10}+...+5^{2011}-5^{2014}$.

Ta có: $125B+B=\left(5^4-5^7+5^{10}-5^{14}+...+5^{2014}-5^{2017}\right)$

$$+\left(5-5^4+5^7-5^{10}+...+5^{2011}-5^{2014}\right)$$

$\Leftrightarrow 126B=5-5^{2017}\Rightarrow 5^{2017}=5-126B$.

Vì tổng B là số nguyên nên $126B\vdots 7$. Vậy 5^{2017} chia cho 7 dư 5.

Cách 2. Ta có:

$$5^{2017}=5^4\left(5^{2013}+1\right)-5^4=5^4\left[\left(5^3\right)^{671}+1\right]-7.90+5.$$

Theo bài toán 2b ta có $\left(5^3\right)^{671}+1\vdots\left(5^3+1\right)=126$ và $126=7.18\vdots 7$. Do đó $\left(5^3\right)^{671}+1\vdots 7$. Từ đó suy ra 5^{2017} chia cho 7 dư 5.

Cách 3. Ta có:

$$5^{2017}=5\left(5^{2016}-1\right)+5=5\left[\left(5^3\right)^{672}-1\right]+5.$$

Theo bài toán 2c ta có $\left[\left(5^3\right)^{672}-1\right]\vdots\left(5^3+1\right)=126$ và $126=7.18\vdots 7$. Do đó $\left[\left(5^3\right)^{672}-1\right]\vdots 7$. Từ đó suy ra 5^{2017} chia cho 7 dư 5.

c) ***Cách 1.*** Gọi $C=9^2+9^5+9^8+...+9^{2006}+9^{2009}$. Ta có: $729C-C=\left(9^5+9^8+9^{11}+...+9^{2009}+9^{2012}\right)$

$$-\left(9^2+9^5+9^8+...+9^{2006}+9^{2009}\right)$$

$\Leftrightarrow 728C=9^{2012}-9^2\Rightarrow 9^{1012}=728C+9^2=7(104C+11)+4.$

Vì tổng C là số tự nhiên nên $7(104C+11)\vdots 7$. Do đó 9^{2012} chia cho 7 dư 4.

Cách 2. Ta có:

$$9^{2012}=9^2\left(9^{2010}-1\right)+9^2=81\left[\left(9^3\right)^{670}-1\right]+7.11+4.$$

Theo bài toán 2a ta có $\left(9^3\right)^{670}-1\vdots\left(9^3-1\right)=728$ và $728=7.104\vdots 7$. Từ đó suy ra 9^{2012} chia cho 7 dư 4.

d) ***Cách 1.***

Gọi $D=2^3-2^9+2^{15}-2^{21}+...+2^{183}-2^{189}+2^{195}$.

$\Rightarrow 64D+D=\left(2^9-2^{15}+2^{21}-2^{27}+...+2^{189}-2^{195}+2^{201}\right)$

$$+\left(2^3-2^9+2^{15}-2^{21}+...+2^{183}-2^{189}+2^{195}\right)$$

$\Leftrightarrow 65D=2^{201}+2^3\Rightarrow 2^{201}=65D-2^3=13(5D-1)+5.$

Vì tổng D là số nguyên nên suy ra 2^{201} chia cho 13 dư 5.

Cách 2. Ta có:

$$2^{201}=2^3\left(2^{198}+1\right)-2^3=8\left[\left(2^6\right)^{33}+1\right]-13+5$$

Theo bài toán 2b ta có $\left[\left(2^6\right)^{33}+1\right]\vdots\left(2^6+1\right)=65$ và $65\vdots 13$. Từ đó suy ra 2^{201} chia cho 13 dư 5.

e) ***Cách 1.*** Gọi $E=3+3^4+3^7+...+3^{199}+3^{202}$. Ta có: $27E-E=\left(3^4+3^7+3^{10}+...+3^{202}+3^{205}\right)$

$$-\left(3+3^4+3^7+...+3^{199}+3^{202}\right)$$

$\Leftrightarrow 26E=3^{205}-3\Rightarrow 3^{205}=26E+3$. Vì tổng E là số tự nhiên nên 3^{205} chia cho 13 dư 3.

Cách 2. Ta có $3^{205}=3\left(3^{204}-1\right)+3=3\left[\left(3^3\right)^{68}-1\right]+3.$

Theo bài toán 2a ta có $\left[\left(3^3\right)^{68}-1\right]\vdots\left(3^3-1\right)=26$ và $26\vdots 13$. Do đó $\left[\left(3^3\right)^{68}-1\right]\vdots 13$. Từ đó suy ra 3^{205} chia cho 13 dư 3.

f) ***Cách 1.*** Gọi $F=8-8^3+8^5-8^7+...+8^{1997}-8^{1999}$.

Ta có: $64F+F=\left(8^3-8^5+8^7-8^9+...+8^{1999}-8^{2001}\right)$

$$+\left(8-8^3+8^5-8^7+...+8^{1997}-8^{1999}\right)$$

$\Leftrightarrow 65F=8-8^{2001}\Rightarrow 8^{2001}=8-65F$. Vì tổng F là số nguyên nên 8^{2001} chia cho 13 dư 8.

Cách 2. Ta có:

$$8^{2001}=8\left(8^{2000}-1\right)+8=8\left[\left(8^2\right)^{1000}-1\right]+8.$$

Theo bài toán 2c ta có $\left[\left(8^2\right)^{1000}-1\right]\vdots\left(8^2+1\right)=65$ và $65\vdots 13$. Từ đó suy ra 8^{2001} chia cho 13 dư 8.

Nhận xét. Ở bài toán 1 và bài toán 3 chúng ta thấy việc tìm số tự nhiên k nhỏ nhất khác 0 sao cho $\left(a^k-1\right)\vdots p$ hoặc $\left(a^k+1\right)\vdots p$ cũng khá dễ dàng. Tuy nhiên trường hợp cơ số lớn thì công việc đó sẽ rất khó khăn. Chúng ta có thể giải quyết được vấn đề đó bằng cách sử dụng kết quả tổng quát sau đây:

Bài toán 4. *Chứng tỏ rằng:*

a) $\left(a^n-b^n\right)\vdots(a-b)$ *với* $a, b\, n\in\mathbb{N}$ *và* $a>b$.

b) $\left(a^{2n}-b^{2n}\right)\vdots(a+b)$ *với* $a, b, n\in\mathbb{N}$.

c) $\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right)\vdots(a+b)$ *với* $a, b, n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh. a) Gọi

$A=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}$.

Ta có:

$aA=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+...+a^3b^{n-3}+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}$;

$bA=a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3+...+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n$.

Suy ra: $(a-b)A=aA-bA=a^n-b^n$. Vì tổng A là số tự nhiên nên $\left(a^n-b^n\right)\vdots(a-b)$.

b) Gọi

$B=a^{2n-1}-a^{2n-2}b+a^{2n-3}b^2-a^{2n-4}b^3$

$$+...+a^3b^{2n-4}-a^2b^{2n-3}+ab^{2n-2}-b^{2n-1}.$$

Ta có: $aB=a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-a^{2n-3}b^3$

$$+...+a^4b^{2n-4}-a^3b^{2n-3}+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1};$$

$bB=a^{2n-1}b-a^{2n-2}b^2+a^{2n-3}b^3-a^{2n-4}b^4$

$$+...+a^3b^{2n-3}-a^2b^{2n-2}+ab^{2n-1}-b^{2n}.$$

Từ đó suy ra $(a+b)B=a^{2n}-b^{2n}$. Vì tổng B là số nguyên nên $\left(a^{2n}-b^{2n}\right)\vdots(a+b)$.

c) Gọi

$C=a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-a^{2n-3}b^3$

$+\ldots+a^4b^{2n-4}-a^3b^{2n-3}+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}$.

Ta có: $aC=a^{2n+1}-a^{2n}b+a^{2n-1}b^2-a^{2n-2}b^3$

$+\ldots+a^5b^{2n-4}-a^4b^{2n-3}+a^3b^{2n-2}-a^2b^{2n-1}+ab^{2n}$;

$bC=a^{2n}b-a^{2n-1}b^2+a^{2n-2}b^3-a^{2n-3}b^4$

$+\ldots+a^4b^{2n-3}-a^3b^{2n-2}+a^2b^{2n-1}-ab^{2n}+b^{2n+1}$.

Từ đó suy ra $(a+b)C=a^{2n+1}+b^{2n+1}$. Vì tổng C là số nguyên nên $\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right)\vdots(a+b)$.

Nhận xét. 1) Từ bài toán 4a ta suy ra được:

$a^n-b^n=(a-b)k\Rightarrow a^n=(a-b)k+b^n\ (k\in\mathbb{N}^*)$.

2) Từ bài toán 4b ta suy ra được:

$a^{2n}-b^{2n}=(a+b)k\Rightarrow a^{2n}=(a+b)k+b^{2n}\ (k\in\mathbb{Z})$.

3) Từ bài toán 4c ta suy ra được:

$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)k\Rightarrow a^{2n+1}=(a+b)k-b^{2n+1}$

$(k\in\mathbb{Z})$.

Bài toán 5. *Tìm số dư khi chia:*

a) 116^{234} *cho* 7; b) 3337^{2345} *cho* 7.

Lời giải.

a) ***Cách 1.*** Vì 116 chia cho 7 dư 4 nên $(116-4)\vdots7$, đến đây ta áp dụng kết quả $a^n=(a-b)k+b^n$ ta có được lời giải như sau: Ta có $4^{234}=\left[\left(4^3\right)^{78}-1\right]+1$.

Mà $\left[\left(4^3\right)^{78}-1\right]\vdots\left(4^3-1\right)=63$ nên 4^{234} chia cho 7 dư 1 (1).

Mặt khác: $116^{234}=(116-4)k+4^{234}=7.16k+4^{234}$ $\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra 116^{234} chia cho 7 dư 1.

Cách 2. Vì 116 chia cho 7 dư 4 nên $116+3=119\vdots7$, đến đây ta áp dụng kết quả $a^{2n}=(a+b)k+b^{2n}$ ta có được lời giải như sau: Ta có $3^{234}=\left[\left(3^3\right)^{78}-1\right]+1$. Mà $\left[\left(3^3\right)^{78}-1\right]\vdots\left(3^3+1\right)=28$ nên 3^{234} chia cho 7 dư 1 (1).

Mặt khác: $116^{234}=(116+3)k+3^{234}=7.17k+3^{234}$ $\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra 116^{234} chia cho 7 dư 1.

b) ***Cách 1.*** Vì 3337 chia cho 7 dư 5 nên $(3337-5)\vdots7$, đến đây ta áp dụng kết quả $a^n=(a-b)k+b^n$ ta có được lời giải như sau: Ta có: $5^{2345}=5^2\left(5^{2343}+1\right)-5^2=5^2\left[\left(5^3\right)^{781}+1\right]-28+3$.

Mà $\left[\left(5^3\right)^{781}+1\right]\vdots\left(5^3+1\right)=126=7.18$, nên 5^{2345} chia cho 7 dư 3 (1). Mặt khác:

$3337^{2345}=(3337-5)k+5^{2345}=7.476k+5^{2345}$

$\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra 3337^{2345} chia cho 7 dư 3.

Cách 2. Vì 3337 chia cho 7 dư 5 nên $(3337+2)\vdots7$, đến đây ta áp dụng kết quả $a^{2n+1}=(a+b)k-b^{2n+1}$ ta có được lời giải như sau:

Ta có: $2^{2345}=2^2\left(2^{2343}-1\right)+4=2^2\left[\left(2^3\right)^{781}-1\right]+4$.

Mà $\left[\left(2^3\right)^{781}-1\right]\vdots\left(2^3-1\right)=7$, từ đó suy ra 2^{2345} chia cho 7 dư 4 (1). Mặt khác:

$3337^{2345}=(3337+2)k-2^{2345}=7.477k-2^{2345}$

$\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra 3337^{2345} chia cho 7 dư 3.

Bài toán 6. *Tìm số dư khi chia:*

a) 3333^{2345} *cho* 13; b) 3284^{2024} *cho* 31.

Lời giải. a) Ta có:

$5^{2345}=5\left(5^{2344}-1\right)+5=5\left[\left(5^2\right)^{1172}-1\right]+5$.

Mà $\left[\left(5^2\right)^{1172}-1\right]\vdots\left(5^2+1\right)=26$, từ đó suy ra 5^{2345} chia cho 13 dư 5 (1). Mặt khác, áp dụng kết quả $a^n=(a-b)k+b^n$ ta có:

$3333^{2345}=(3333-5)k+5^{2345}=13.256k+5^{2345}$

$\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra 3333^{2345} chia cho 13 dư 5.

b) Ta có: $2^{2024}=2^4.\left[\left(2^5\right)^{404}-1\right]+2^4$. Mà $\left[\left(2^5\right)^{404}-1\right]\vdots\left(2^5-1\right)=31$, từ đó suy ra 2^{2024} chia cho 31 dư 16 (1). Mặt khác, áp dụng kết quả $a^{2n}=(a+b)t+b^{2n}$ ta có:

$3284^{2024}=(3284+2)k+2^{2024}=31.106k+2^{2024}\ (k\in\mathbb{N}^*)$(2).

Từ (1) và (2) suy ra 3284^{2024} chia cho 31 dư 16.

Bài toán 7. *Chứng tỏ rằng*

$$\left(2222^{5555}+5555^{2222}\right)\vdots 7.$$

Lời giải. Ta có:

$$3^{5555}=3^2\left(3^{5553}+1\right)-3^2=9\left[\left(3^3\right)^{1851}+1\right]-14+5.$$

Mà $\left[\left(3^3\right)^{1851}+1\right]\vdots\left(3^3+1\right)=28$, từ đó suy ra 3^{5555} chia cho 7 dư 5 (1). Lại có:

$$4^{2222}=4^2\left(4^{2220}-1\right)+4^2=4^2\left[\left(4^3\right)^{740}-1\right]+16,$$

mà $\left[\left(4^3\right)^{740}-1\right]\vdots\left(4^3-1\right)=63$, từ đó suy ra 4^{2222} chia cho 7 dư 2 (2). Mặt khác, áp dụng kết quả $a^n=(a-b)k+b^n$ ta có:

$$2222^{5555}=(2222-3)k+3^{5555}=7.317k+3^{5555}$$

và $5555^{2222}=(5555-4)m+4^{2222}=7.793m+4^{2222}$ $(k,m\in\mathbb{N}^*)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\left(2222^{5555}+5555^{2222}\right)\vdots 7$.

Chúng ta tiếp tục sử dụng bài toán 2 và bài toán 4 để giải một số bài toán chia hết sau đây:

Bài toán 8. *Chứng minh rằng:*

a) $A=2018^{2024}+2032^{2024}-1964^{2024}-1984^{2024}$ *chia hết cho* 51.

b) $B=7.5^{2n}+12.6^n$ *chia hết cho* 19 *với* $n\in\mathbb{N}$.

c) $C=12^{2n+1}+11^{n+2}$ chia hết cho 133 với $n\in\mathbb{N}$.

Lời giải. a) Ta có:

$$A=\left(2018^{2024}-1984^{2024}\right)+\left(2032^{2024}-1964^{2024}\right).$$

Mà $\left(2018^{2024}-1984^{2024}\right)\vdots(2018-1984)=34$ và

$34\vdots 17\Rightarrow\left(2018^{2024}-1984^{2024}\right)\vdots 17;$

$\left(2032^{2024}-1964^{2024}\right)\vdots(2032-1964)=68$

và $68=17.4\vdots 17\Rightarrow\left(2032^{2024}-1964^{2024}\right)\vdots 17.$

Từ đó suy ra $A\vdots 17$ (1). Mặt khác,

$$A=\left(2018^{2024}-2^{2024}\right)+\left(2032^{2024}-1\right)-\left(1964^{2024}-2^{2024}\right)-\left(1984^{2024}-1\right).$$

Ta có: $\left(2018^{2024}-2^{2024}\right)\vdots(2018-2)=2016\vdots 3;$

$\left(1964^{2024}-2^{2024}\right)\vdots(1964-2)=1962\vdots 3;$

$\left(2032^{2024}-1\right)\vdots(2032-1)=2031\vdots 3;$

$\left(1984^{2024}-1\right)\vdots(1984-1)=1983\vdots 3.$

Từ đó suy ra $A\vdots 3$ (2).

Từ (1), (2) và kết hợp với $(3;17)=1$ suy ra $A\vdots 51$.

b) Ta có: $B=7.5^{2n}+12.6^n=7\left(5^{2n}-6^n\right)+19.6^n.$

Mà $5^{2n}-6^n=\left(5^2\right)^n-6^n=\left(25^n-6^n\right)\vdots(25-6)=19$ và $19.6^n\vdots 19$, vậy $\left(7.5^{2n}+12.6^n\right)\vdots 19$ hay $B\vdots 19$ với $n\in\mathbb{N}$.

c) Ta có: $C=12^{2n+1}+11^{n+2}=12.12^{2n}+121.11^n$

$=12\left(12^{2n}-11^n\right)+133.11^n.$

Mà $12^{2n}-11^n=\left(144^n-11^n\right)\vdots(144-11)=133$ và $133.11^n\vdots 133$, từ đó suy ra $\left(12^{2n+1}+11^{n+2}\right)\vdots 133$ hay $C\vdots 133$ với $n\in\mathbb{N}$.

Bài toán 9. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có:*

a) $2^{2^{2n+1}}+3$ *chia hết cho* 7.

b) $3^{2^{4n+1}}+2$ *chia hết cho* 11.

Lời giải. a) *Phân tích*: Ta thấy $\left(2^3-1\right)\vdots 7$ nên ta nghĩ đến tìm số dư khi chia 2^{2n+1} cho 3, từ đó ta có lời giải như sau:

Ta có: $2^{2n+1}=2.2^{2n}=2\left(2^{2n}-1\right)+2=2\left(4^n-1\right)+2$, mà $\left(4^n-1\right)\vdots(4-1)=3$, do đó 2^{2n+1} chia cho 3 dư 2 nên $2^{2n+1}=3k+2\left(k\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow 2^{2^{2n+1}}+3=2^{3k+2}+3$

$=2^2.2^{3k}+3=2^2\left(2^{3k}-1\right)+7.$

Vì $\left(2^{3k}-1\right)\vdots\left(2^3-1\right)=7$ nên $\left[2^2\left(2^{3k}-1\right)+7\right]\vdots 7$ hay $\left(2^{2^{2n+1}}+3\right)\vdots 7$ với mọi số tự nhiên n.

b) *Phân tích*: Ta thấy $3^5-1=242=11.22\vdots 11$ nên ta nghĩ đến tìm số dư khi chia 2^{4n+1} cho 5, từ đó ta có lời giải như sau:

Ta có $2^{4n+1}=2.2^{4n}=2\left(2^{4n}-1\right)+2$, mà $\left(2^{4n}-1\right)\vdots\left(2^4-1\right)=15$ và $15\vdots 5$ nên $\left(2^{4n}-1\right)\vdots 5$.

Do đó 2^{4n+1} chia cho 5 dư 2 nên $2^{4n+1}=5k+2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$

$\Rightarrow 3^{2^{4n+1}}+2=3^{5k+2}+2=3^2\left(3^{5k}-1\right)+11.$

(Xem tiếp trang 12)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH THANH HÓA

Năm học 2024-2025

Bài 1. *Rút gọn biểu thức:*

$$A=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right).\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

(với $a>b>0$).

Lời giải. Với $a>b>0$, ta có:

$$A=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right).\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}+\frac{a-b}{\sqrt{(a-b)(a+b)}-(a-b)}\right).\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{(a+b)}-\sqrt{a-b}}\right).\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}{(a+b)-(a-b)}+\frac{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)}{(a+b)-(a-b)}\right)\times$$

$$\times\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{2b}.\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a^2+b^2}{b}.$$

Bài 2. *Cho a,b là các số thực dương phân biệt thỏa mãn:*

$$\frac{8b^8}{a^8-b^8}+\frac{4b^4}{a^4+b^4}+\frac{2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b}{a+b}=4$$

và $a^2=2025+b^2$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=(a-b-10)^2+2000.$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{8b^8}{a^8-b^8}+\frac{4b^4}{a^4+b^4}+\frac{2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b}{a+b}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{8b^8}{a^8-b^8}+\frac{4b^4\left(a^4-b^4\right)}{a^8-b^8}+\frac{2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b}{a+b}=4$$

$$\frac{8b^8+4a^4b^4-4b^8}{a^8-b^8}+\frac{2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b}{a+b}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{4a^4b^4+4b^8}{a^8-b^8}+\frac{2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b}{a+b}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{4b^4\left(a^4+b^4\right)}{\left(a^4+b^4\right)\left(a^4-b^4\right)}+\frac{2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b}{a+b}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{4b^4}{a^4-b^4}+\frac{2b^2\left(a^2-b^2\right)}{a^4-b^4}+\frac{b}{a+b}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a^2b^2+2b^4}{a^4-b^4}+\frac{b}{a+b}=4\Leftrightarrow\frac{2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)}+\frac{b}{a+b}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{2b^2}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b}=4\Leftrightarrow\frac{2b^2}{a^2-b^2}+\frac{b(a-b)}{a^2-b^2}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab+b^2}{a^2-b^2}=4\Leftrightarrow\frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)}=4\Leftrightarrow\frac{b}{a-b}=4$$

$$\Leftrightarrow4a=5b\Leftrightarrow\frac{a}{5}=\frac{b}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2}{5^2}=\frac{b^2}{4^2}.$$

Từ: $a^2=2025+b^2\Leftrightarrow a^2-b^2=2025$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^2}{5^2}=\frac{b^2}{4^2}=\frac{a^2-b^2}{25-16}=\frac{2025}{9}=225\Rightarrow\frac{a}{5}=\frac{b}{4}=15$$

(vì $a>0,b>0$). Suy ra: $a=75,b=60$.

Thay $a=75,b=60$ vào biểu thức P, ta có:

$$P=(75-60-10)^2+2000=5^2+2000=2025.$$

Vậy $P=2025$.

Bài 3. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}13\sqrt{x-1}+9\sqrt{y+2}=16x & (1)\\ \left(x^2+x\right)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}x\ge1\\ y\ge-2\\ x-y+3\ge0\end{cases}$. Từ PT(2), ta có:

$$\left(x^2+x\right)\sqrt{x-y+3}=2\left(x^2+x\right)-x+y+1$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x-y+3}-2\right)+x-y-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x\right)\frac{x-y-1}{\sqrt{x-y+3}+2}+x-y-1=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y-1)\left(\frac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2}+1\right)=0.$$

Vì $x\geq 1$ nên: $\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2}+1>0\Rightarrow x-y-1=0$

$\Rightarrow y=x-1$, thế vào PT(1), ta được:

$$13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=16x$$

$$\Leftrightarrow 13\left(x-1-\sqrt{x-1}+\frac{1}{4}\right)+3\left(x+1-3\sqrt{x+1}+\frac{9}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2=0.$$

Vì $\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0;\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$ với mọi $x\geq 1$

nên $13\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0.$

Dấu"=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{x+1}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{5}{4},y=\frac{1}{4}$$ (thỏa mãn).

Vậy HPT đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Bài 4. *Cho các chữ số: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau viết được từ các chữ số nói trên. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp X. Tính xác xuất của biến cố A "Số lấy ra là số lớn hơn 59000".*

Lời giải. Gọi số có 5 chữ số khác nhau là $\overline{abcde}\ (a\neq 0)$, vì $a\neq 0$ nên a có 9 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 8 cách chọn, d có 7 cách chọn, e có 6 cách chọn. Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 là: 9.9.8.7.6 = 27216 (số).

Suy ra: có 27216 kết quả có thể. Các kết quả là đồng khả năng xảy ra.

Để $\overline{abcde}$ lớn hơn 59000 nên ta xét các trường hợp sau:

TH1: a = 5, b = 9 thì c có 8 cách chọn, d có 7 cách chọn, e có 6 cách chọn. Suy ra có 8.7.6 = 336 (số).

TH2: a > 5 thì a có 4 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 8 cách chọn, d có 7 cách chọn, e có 6 cách chọn. Suy ra có: 4.9.8.7.6 = 12096 (số).

Vậy có 336 + 12096 = 12432 kết quả thuận lợi cho biến cố A.

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{12432}{27216}=\dfrac{37}{81}$.

Bài 5. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $(2x-y-2)^2=7(x-2y-y^2-1)$.*

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với:

$$2(2x-y-2)^2=7(2x-4y-2y^2-2)$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-y-2)^2=7(2x-y-2)-7(2y^2+3y)$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-y-2)^2-7(2x-y-2)+7(2y^2+3y)=0.$$

Đặt $t=2x-y-2\ (t\in\mathbb{Z})$, ta được:

$$2t^2-7t+7(2y^2+3y)=0$$

$$\Leftrightarrow 16t^2-56t+49+7(16y^2+24y+9)=112$$

$$\Leftrightarrow (4t-7)^2+7(4y+3)^2=112$$. Vì:

$$(4t-7)^2>0,\forall t\in\mathbb{Z}\Rightarrow 7(4y+3)^2<112\Rightarrow(4y+3)^2<16$$

$$\Rightarrow -4<4y+3<4\Leftrightarrow -7<4y<1\Leftrightarrow\frac{-7}{4}<y<\frac{1}{4}.$$

Mà: $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{-1;0\}$

Với $y=-1$ thì $(4t-7)^2=105$ (loại).

Với $y=0$ thì $(4t-7)^2=49\Rightarrow t\in\left\{\frac{7}{2};0\right\}$.

Mà: $t\in\mathbb{Z}\Rightarrow t=0\Rightarrow x=1$ (thỏa mãn).

Vậy PT có nghiệm nguyên $(x;y)=(1;0)$.

Bài 6. *Cho số tự nhiên $n\geq 2$ và số nguyên tố p. Chứng minh rằng nếu $p-1$ chia hết cho n và n^6-1 chia hết cho p thì ít nhất một trong hai số $p-n$ và $p+n$ là số chính phương.*

Lời giải. Ta có: $n^6-1=(n^3)^2-1=(n^3-1)(n^3+1)$

$$=(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1).$$

Vì $n^6-1\vdots p$ và p là số nguyên tố, nên ta xét các trường hợp sau:

TH1: $n-1\vdots p\Rightarrow n-1=lp\ (l\in\mathbb{N}^*)\Leftrightarrow n=lp+1$.

Mà $p-1\vdots n$ nên ta có: $(p-1)\vdots(lp+1)$

$\Rightarrow p-1\geq lp+1$ (vì $p-1>0$). Suy ra:

$(l-1)p\leq -2\Rightarrow l-1<0\Rightarrow l<1$ (loại vì $l\in\mathbb{N}^*$).

TH2: $n+1 \vdots p \Rightarrow n+1=ap\ (a\in\mathbb{N}^*) \Leftrightarrow n=ap-1$.

Mà $p-1 \vdots n$, nên ta có:

$(p-1) \vdots (ap-1) \Rightarrow p-1 \geq ap-1$ (vì $p-1>0$).

Suy ra: $(a-1)p \leq 0 \Rightarrow a-1 \leq 0 \Rightarrow a \leq 1$.

Mà $a\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a=1; n=p-1$. Khi đó $p-n=1$ là số chính phương.

TH3: $n^2+n+1 \vdots p$. Vì $p-1 \vdots n$ nên

$p-1=kn\ (k\in\mathbb{N}^*) \Leftrightarrow p=kn+1$. Ta có:

$n^2+n+1=n^2-kn+n+kn+1=n(n-k+1)+kn+1$ là bội của $kn+1 \Rightarrow n(n-k+1) \vdots kn+1$.

Do $(n, kn+1)=1 \Rightarrow (n-k+1) \vdots (kn+1)$.

Với $k, n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$-(kn+1) \leq -k-1 < n-k+1 \leq n \leq kn < kn+1$$

$$\Rightarrow n-k+1=0 \Rightarrow k=n+1.$$

Khi đó: $p=n^2+n+1 \Rightarrow p+n=n^2+2n+1=(n+1)^2$ là số chính phương.

TH4: $n^2-n+1 \vdots p$. Vì $p-1 \vdots n$ nên

$p-1=kn\ (k\in\mathbb{N}^*) \Leftrightarrow p=kn+1$.

Ta có: $n^2-n+1=n^2-kn-n+kn+1=n(n-k-1)+kn+1$ là bội của $kn+1 \Rightarrow n(n-k-1) \vdots kn+1$.

Do $(n, kn+1)=1 \Rightarrow (n-k-1) \vdots (kn+1)$.

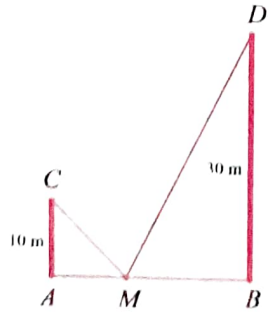
Với $k, n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$-(kn+1) \leq -k-1 < n-k-1 < n \leq kn < kn+1$$

$$\Rightarrow n-k-1=0 \Rightarrow k=n-1.$$

Khi đó: $p=n^2-n+1 \Rightarrow p-n=n^2-2n+1=(n-1)^2$ là số chính phương.

Bài 7. *Có hai chiếc cọc cao 10m và 30m đặt vuông góc với mặt đất tại hai vị trí A và B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24m. Người ta đặt một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất, nằm giữa hai chân cọc để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của hai cọc (như hình vẽ). Hỏi người ta phải đặt chốt ở vị trí cách A một khoảng bằng bao nhiêu trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?*



Lời giải. Đặt $AM=x$ (m), $(0<x<24)$. Khi đó: $MB=24-x$ (m). Áp dụng định lý Pythagore cho các tam giác vuông CAM và DBM, ta có:

$$CM=\sqrt{CA^2+AM^2}=\sqrt{10^2+x^2};$$

$$DM=\sqrt{BD^2+BM^2}=\sqrt{30^2+(24-x)^2};$$

$$CM+DM=\sqrt{10^2+x^2}+\sqrt{30^2+(24-x)^2}.$$

Ta chứng minh BĐT: *Với mọi số thực a,b,c,d thì:*

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\ (1).$$

Thật vậy với mọi số thực a,b,c,d thì (1) tương đương với:

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq (a+c)^2+(b+d)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd\ (2).$$

Nếu $ac+bd<0$ thì (2) đúng.

Xét $ac+bd\geq 0$. Bình phương hai vế của (2) ta có:

$(ad-bc)^2 \geq 0$ luôn đúng. Vậy (1) luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $ad=bc$.

Áp dụng BĐT(1), ta có:

$$CM+DM=\sqrt{10^2+x^2}+\sqrt{30^2+(24-x)^2} \geq \sqrt{(10+30)^2+(x+24-x)^2}=\sqrt{2176}.$$

$CM+DM=\sqrt{2176}$ khi và chỉ khi

$10(24-x)=30x \Rightarrow x=6$ (thỏa mãn).

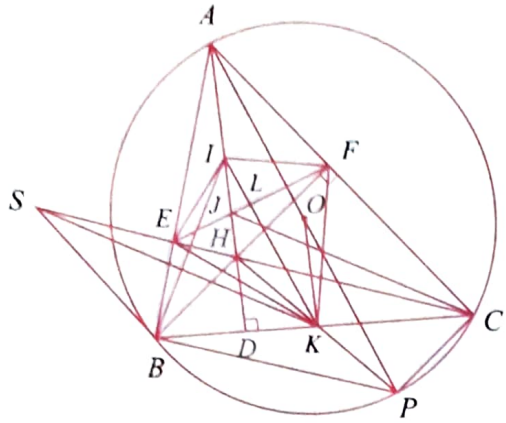
Vậy người ta phải đặt chốt ở vị trí M cách A một đoạn 6m thì tổng độ dài hai dây là ngắn nhất.

Bài 8. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BF, CE cắt nhau tại H, vẽ $OK \perp BC\ (K\in BC)$. Gọi I là trung điểm của AH, gọi J giao điểm của AH và EF, kẻ đường kính AP của đường tròn (O).*

a) *Chứng minh: $OK=\frac{1}{2}AH$ và IK đi qua trung điểm của EF.*

b) *Đường thẳng qua B song song với AC cắt đường thẳng CE tại S. Chứng minh $IF^2=IJ.IP$ và $KS \parallel CJ$.*

Lời giải.



a) Vì C thuộc đường tròn đường kính $AP \Rightarrow \Delta ACP$ vuông tại C, suy ra: $PC \perp AC$.

Mà $BH \perp AC \Rightarrow PC // BH$. Tương tự: $PB // CH$.

Suy ra tứ giác $BHCP$ là hình bình hành nên BC và HP cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà ΔOBC cân tại O nên $OK \perp BC \Rightarrow K$ là trung điểm của BC do đó K cũng là trung điểm của PH.

ΔAHP có O và K lần lượt là trung điểm của AP và HP nên OK là đường trung bình của $\Delta APH \Rightarrow OK = \frac{1}{2}AH$. ΔAHE và ΔAHF vuông lần lượt vuông tại E và F có EI, FI là đường trung tuyến nên $IE = IF \left(= \frac{1}{2}AH\right)$. Do đó I nằm trên đường trung trực của EF.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $KE = KF$ do đó K thuộc đường trung trực của đoạn thẳng EF. Vậy IK là đường trung trực của đoạn thẳng EF hay IK đi qua trung điểm của của EF.

b) Gọi L là giao điểm của KI và EF. Vì $IF = IA = \frac{1}{2}AH$ nên ΔAIF cân tại $I \Rightarrow \widehat{FAI} = \widehat{IFA}$.

Tương tự: $\widehat{KFC} = \widehat{KCF}$. Mà $\widehat{KCF} + \widehat{FAI} = 90^0$ $\Rightarrow \widehat{AFI} + \widehat{CFK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IFK} = 90^0$. ΔIFK vuông tại F có FL là đường cao nên: $IF^2 = IL.IK$ (1);

$\Delta ILJ \sim \Delta IDK (g.g) \Rightarrow \frac{IL}{ID} = \frac{IJ}{IK} \Rightarrow IL.IK = IJ.ID$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $IF^2 = IJ.ID$. Ta lại có:

$$\Delta DBH \sim \Delta DAC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{DH}{DC}$$

$$\Rightarrow DB.DC = DH.DA \text{ (3)}.$$

Và $IF^2 = IJ.ID \Rightarrow IA^2 = ID(ID - JD)$

$$\Rightarrow ID.JD = ID^2 - IA^2 = (ID + IA)(ID - IA)$$

$$= DA(ID - IH) = DA.HD \text{ (4)}.$$

Từ (3) và (4) suy ra: $DB.DC = ID.JD \Rightarrow \frac{DB}{JD} = \frac{ID}{DC}$.

ΔDBI và ΔDJC có: $\widehat{BDI} = \widehat{JDC} = 90^0$ và $\frac{DB}{JD} = \frac{ID}{DC} \Rightarrow \Delta DBI \sim \Delta DJC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DCJ}$ (5).

Do $BS // AC$, $BF \perp AC \Rightarrow \widehat{BSC} = \widehat{HBA}$ (cùng phụ với $\widehat{SBE}$). Lại có: $\widehat{BCS} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$), suy ra:

$$\Delta SBC \sim \Delta BHA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{SB}{BH} = \frac{BC}{HA} = \frac{2.BK}{2.IH} = \frac{BK}{IH}.$$

ΔSBK và ΔBHI có: $\widehat{SBK} = \widehat{BHI}$ và $\frac{SB}{BH} = \frac{BK}{HI}$

$\Rightarrow \Delta SBK \sim \Delta BHI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BKS} = \widehat{HIB} \Rightarrow \widehat{BKS} = \widehat{DIB}$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra: $\widehat{BKS} = \widehat{DCJ}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $KS // CJ$.

Bài 9. *Cho tam giác ABC có ba cạnh tiếp xúc với đường tròn (I). Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AC và AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC. Chứng minh ba đường thẳng BI, MN, EF đồng quy.*

Lời giải. Gọi K là giao điểm của BI và EF. Ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^0 - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{KIC} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2}.$$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

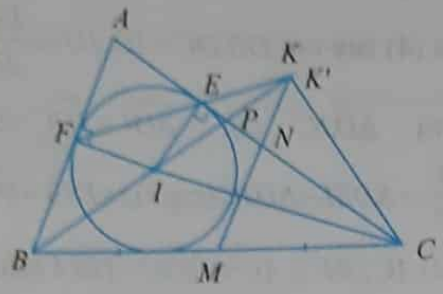
$$AE = AF \Rightarrow \Delta AEF \text{ cân tại } A$$

$$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AFE} = \frac{180^0 - \hat{A}}{2} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2}.$$

Suy ra: $\widehat{KIC} = \widehat{AEF}$ mà $\widehat{KEC} = \widehat{AEF}$ (đối đỉnh), suy ra: $\widehat{KIC} = \widehat{KEC}$. Gọi P là giao điểm của BK và $AC \Rightarrow \Delta IPC \sim \Delta EPK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PI}{PE} = \frac{PC}{PK}$.

Mà $\widehat{EPI} = \widehat{KPC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta IEP \sim \Delta CKP$ (g.c.g) $\Rightarrow \widehat{IEP} = \widehat{CKP} = 90^0$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{BKC} = 90^0$ (1). Gọi K' là giao điểm của BI và MN. Vì MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN // AB$. Suy ra: $\widehat{BK'M} = \widehat{ABK'}$

(so le trong). Mà $\widehat{K'BM}=\widehat{ABK'}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{BK'M}=\widehat{K'BM}\Rightarrow \Delta BK'M$ cân tại $M\Rightarrow MB=MK'$.



Mà $MB=MC\Rightarrow MB=MC=MK'\Rightarrow \Delta BK'C$ vuông tại K' hay $\widehat{BK'C}=90^0$ (2). Từ (1) và (2) suy ra K trùng với K'. Vậy ba đường thẳng BI, MN, EF đồng quy.

Bài 10. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $xyz(x+y+z)=3$. Chứng minh rằng:*

$$x^2+y^2+z^2\le\frac{1}{243}\left(x^5-2x+4\right)^2\times\left(y^5-2y+4\right)^2\left(z^5-2z+4\right)^2.$$

Lời giải. Ta có: $x^5-2x+4-\left(x^3+2\right)$

$=x^5-x^3-2x+2=(x-1)^2\left(x^3+2x^2+2x+2\right)\ge 0$

với mọi $x>0\Rightarrow x^5-2x+4\ge x^3+2$ với mọi $x>0$.

Tương tự: $y^5-2y+4\ge y^3+2$ với mọi $y>0$;

$z^5-2z+4\ge z^3+2$ với mọi $z>0$.

Suy ra: $\left(x^5-2x+4\right)\left(y^5-2y+4\right)\left(z^5-2z+4\right)\ge\left(x^3+2\right)\left(y^3+2\right)\left(z^3+2\right)$ (1).

Cần chứng minh BĐT phụ sau: *Với a,b,c,x,y,z,m,n,p là các số thực dương, ta có:*

$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\ge(axm+byn+czp)^3$.

Thật vậy, áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{m^3}{m^3+n^3+p^3}\ge\frac{3axm}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}};$$

Tương tự: $\frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{y^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{n^3}{m^3+n^3+p^3}\ge\frac{3byn}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}};$

$$\frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{z^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{p^3}{m^3+n^3+p^3}\ge\frac{3czp}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}}.$$

Cộng ba BĐT trên, ta được:

$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\ge(axm+byn+czp)^3$

(với a,b,c,x,y,z,m,n,p là các số thực dương).

Áp dụng BĐT trên, ta có:

$\left(x^3+2\right)\left(y^3+2\right)\left(z^3+2\right)=\left(x^3+1^3+1^3\right)\left(1^3+y^3+1^3\right)\left(1^3+1^3+z^3\right)$

$\ge(x.1.1+1.y.1+1.1.z)^3=(x+y+z)^3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$\left(x^5-2x+4\right)\left(y^5-2y+4\right)\left(z^5-2z+4\right)\ge(x+y+z)^3$

$\Leftrightarrow(x+y+z)^6\le(x^5-2x+4)^2(y^5-2y+4)^2(z^5-2z+4)^2$ (3).

Từ BĐT $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$, ta có:

$\Leftrightarrow(x+y+z)^6=\left[(x+y+z)^2\right]^3=\left[x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\right]^3$

$\ge\left[3\sqrt[3]{\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx)^2}\right]^3$

$=27\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx)^2$

$\ge 27\left(x^2+y^2+z^2\right).3xyz.(x+y+z)$

$=27\left(x^2+y^2+z^2\right).3.3$

$=243\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le\frac{1}{243}(x+y+z)^6$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra:

$x^2+y^2+z^2\le\frac{1}{243}(x^5-2x+4)^2(y^5-2y+4)^2(z^5-2z+4)^2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$\begin{cases}x-1=y-1=z-1=0\\x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx\\xyz(x+y+z)=3\end{cases}\Rightarrow x=y=z=1$. Vậy:

$x^2+y^2+z^2\le\frac{1}{243}(x^5-2x+4)^2(y^5-2y+4)^2(z^5-2z+4)^2$.

thỏa mãn: $xyz(x+y+z)=3$.

HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

Giới thiệu

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN - LỚP 9 TỈNH NAM ĐỊNH

Năm học 2024 – 2025 - Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn:

$$a+b+c\neq 0 \text{ và } a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3.$$

Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^5+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^5=1.$$

2) Cho $x>0$, $y>0$ và $xy+\sqrt{(x^2+3)(y^2+3)}=3\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=x\sqrt{y^2+3}+y\sqrt{x^2+3}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1) Có ba xe ô tô xuất phát cùng thời điểm từ vị trí A, chạy cùng một tuyến đường đi qua vị trí B. Trong mỗi giờ, xe thứ nhất chạy nhanh hơn xe thứ hai 15 km và chạy nhanh hơn xe thứ ba 5 km. Một người quan sát đứng tại B thấy rằng: Xe thứ hai tới B chậm hơn so với xe thứ nhất 28 phút và chậm hơn so với xe thứ ba 20 phút. Tìm tốc độ của mỗi xe ô tô theo đơn vị km/h (xem như cả ba xe đều duy trì tốc độ trên suốt hành trình từ A đến B).

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{1}{xy}=3\\ 2x(x+y^2-1)=2y^2+y-1\end{cases}.$$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

1) Chứng minh rằng với n là số nguyên thì

$$(n^4-1^3)(n^4-2^3)(n^4-3^3)\ldots(n^4-2027^3)$$

chia hết cho 2027.

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn

$$x^2-xy^2-2y+2=0.$$

Câu 4. *(7,0 điểm)*

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, $AB=AC$ và $\widehat{BAC}>90^0$. Gọi H là trung điểm của cạnh BC và E là điểm chính giữa của cung lớn BC trên đường tròn (O). Xét điểm M thay đổi trên cạnh BC sao cho $BM>MC$, D là giao điểm khác A của đường thẳng AM và đường tròn (O), N là giao điểm của đường thẳng ED và đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng $MA.MD=MB.MC$ và $BN.CM=BM.CN$.

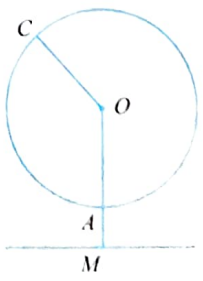
b) Gọi J là giao điểm giữa đường thẳng BE và đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD $(J\neq B)$. Chứng minh rằng đường thẳng MJ vuông góc với đường thẳng BC.

c) Cho biết $AB=\dfrac{R}{2}$. Khi biểu thức $f=2AM+AD$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính tỉ số $\dfrac{OM}{f}$.

2) Bạn *Joe* và gia đình đang nghỉ dưỡng ở một khu sinh thái rộng lớn. Tại đây có một vòng quay mà trên đó có các cabin để du khách có thể ngắm nhìn phong cảnh toàn khu vực từ trong cabin của vòng quay (*tham khảo hình vẽ bên dưới*). Vòng quay ngoài cùng có dạng đường tròn với chu vi bằng 350 mét, tâm của vòng quay nằm ở độ cao 60 mét so với mặt đất. Mỗi cabin đều có đỉnh được gắn cố định vào vòng quay ngoài cùng và có một cơ cấu hạn chế rung lắc. *Joe* lựa chọn trải nghiệm vòng quay này, khi *Joe* vào một cabin ở vị trí thấp nhất A của vòng quay thì nó bắt đầu hành trình quay đều và duy trì ở tốc độ an toàn.

Bộ phận điều khiển cho biết với tốc độ đang quay, vòng quay sẽ đi hết một vòng trong thời gian 45 phút. Tính bán kính của vòng quay ngoài cùng và tính độ cao của đỉnh cabin C mà *Joe* ngồi so với mặt đất tại thời điểm 20 phút kể từ lúc *Joe* lên cabin theo đơn vị mét (kết quả tính làm tròn đến hàng phần chục).





☞

Câu 5. (*2,0 điểm*)

1) Xét 100 số thực tùy ý có tổng bằng 0 và có tổng các bình phương của chúng bằng 1. Gọi T là tích của số lớn nhất và số bé nhất trong 100 số đó. Tìm giá trị lớn nhất của T.

2) Cho bảng vuông kích thước 2025×2025 gồm 2025 dòng, 2025 cột, bảng được phân đều thành 2025^2 ô vuông con. Xét việc điền tất cả các số nguyên dương 1, 2, 3,..., 2025^2 lên bảng theo ba điều kiện:

- Mỗi ô vuông con điền đúng một số, hai ô vuông con khác nhau điền hai số khác nhau.
- Hai số bất kì có hiệu bằng 1 thì được điền vào hai ô vuông con có chung cạnh.
- Hai số bất kì có hiệu chia hết cho 2025 thì được điền ở hai ô vuông con không cùng hàng và cũng không cùng cột.

Chứng minh rằng không thể điền được số lên bảng thỏa mãn tất cả các điều kiện trên.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(*5/7/136 Phan Đình Phùng, TP Nam Định*)

Giới thiệu

****

SỬ DỤNG TỔNG . . .

(*Tiếp theo trang 6*)

Vì $(3^{5k}-1)\vdots(3^5-1)=242$ và $242=11.22\vdots 11$ nên $(3^{5k}-1)\vdots 11$. Từ đó suy ra $3^{2^{4n+1}}+2$ chia hết cho 11 với mọi số tự nhiên n.

Bài toán 10. *Tìm số tự nhiên n sao cho*:

a) $2^{2n}+2^n+1$ *chia hết cho* 7;

b) 2.3^n+3 *chia hết cho* 11.

Lời giải. a) Với mọi $k\in\mathbb{N}$ thì ta có:

$\left[(2^3)^{2k}-1\right]\vdots(2^3-1)=7$ và $\left[(2^3)^k-1\right]\vdots(2^3-1)=7$.

Do đó $(2^{6k}-1)\vdots 7$ và $(2^{3k}-1)\vdots 7$. Ta xét các trường hợp sau:

TH1: $n=3k\ (k\in\mathbb{N})$, ta có:

$$2^{2n}+2^n+1=2^{6k}+2^{3k}+1=(2^{6k}-1)+(2^{3k}-1)+3$$

chia cho 7 dư 3.

TH2: $n=3k+1\ (k\in\mathbb{N})$, ta có:

$$2^{2n}+2^n+1=2^{6k+2}+2^{3k+1}+1=2^2(2^{6k}-1)+2(2^{3k}-1)+7$$

chia hết cho 7.

TH3: $n=3k+2\ (k\in\mathbb{N})$, ta có:

$$2^{2n}+2^n+1=2^{6k+4}+2^{3k+2}+1=2^4(2^{6k}-1)+2^2(2^{3k}-1)+21$$

chia hết cho 7. Vậy $2^{2n}+2^n+1$ chia hết cho 7 khi n không chia hết cho 3.

b) Với mọi $k\in\mathbb{N}$ thì ta có:

$\left[(3^5)^k-1\right]\vdots(3^5-1)=242$, mà $242=11.22\vdots 11$ nên $\left[(3^5)^k-1\right]\vdots 11$. Ta xét các trường hợp sau:

TH1: $n=5k\ (k\in\mathbb{N})$, ta có $2.3^n+3=2\left[(3^5)^k-1\right]+5$ chia cho 11 dư 5.

TH2: $n=5k+1\ (k\in\mathbb{N})$, ta có $2.3^n+3=2.3^{5k+1}+3=6.3^{5k}+3=6\left[(3^5)^k-1\right]+9$ chia cho 11 dư 9.

TH3: $n=5k+2\ (k\in\mathbb{N})$, ta có:

$$2.3^n+3=2.3^{5k+2}+3=18.3^{5k}+3=18\left[(3^5)^k-1\right]+21$$

chia cho 11 dư 10.

TH4: $n=5k+3\ (k\in\mathbb{N})$, ta có:

$$2.3^n+3=2.3^{5k+3}+3=54.3^{5k}+3=54\left[(3^5)^k-1\right]+57$$

chia cho 11 dư 2.

TH5: $n=5k+4\ (k\in\mathbb{N})$, ta có:

$$2.3^n+3=2.3^{5k+4}+3=162.3^{5k}+3=162\left[(3^5)^k-1\right]+165$$

chia hết cho 11 (vì $165=11.15\vdots 11$).

Vậy 2.3^n+3 chia hết cho 11 khi $n=5k+4\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$.

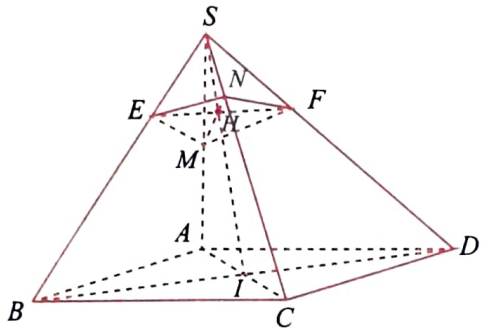
HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2025

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

1. C	2. C	3. A	4. C	5. B	6. A
7. D	8. A	9. A	10. B	11. C	12.A

Câu 5.



Ta có: $\dfrac{SB}{SE}=\dfrac{SB^2}{SA.SM}=\dfrac{2\left(SA^2+AB^2\right)}{SA^2}$

$=\dfrac{2\left(4a^2+2a^2\right)}{4a^2}=3\Rightarrow\overrightarrow{SB}=3\overrightarrow{SE};$

$\dfrac{SD}{SF}=\dfrac{SD^2}{SA.SM}=\dfrac{2\left(SA^2+AD^2\right)}{SA^2}$

$=\dfrac{2\left(4a^2+3a^2\right)}{4a^2}=\dfrac{7}{2}\Rightarrow\overrightarrow{SD}=\dfrac{7}{2}\overrightarrow{SF};$

$\dfrac{SA}{SM}+\dfrac{SC}{SN}=\dfrac{SB}{SE}+\dfrac{SD}{SF}\Rightarrow 2+\dfrac{SC}{SN}=3+\dfrac{7}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{SC}{SN}=\dfrac{9}{2}\Rightarrow\overrightarrow{SC}=\dfrac{9}{2}\overrightarrow{SN}.$

Ta lại có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SI}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{SM}+3\overrightarrow{SE}+\dfrac{9}{2}\overrightarrow{SN}+\dfrac{7}{2}\overrightarrow{SF}=4\overrightarrow{SI}$

$\Rightarrow\overrightarrow{SI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{SM}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{SE}+\dfrac{9}{8}\overrightarrow{SN}+\dfrac{7}{8}\overrightarrow{SF}.$

Vậy $\dfrac{1}{2}+y+z+t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{8}+\dfrac{7}{8}=\dfrac{13}{4}$. Chọn B.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. a) Sai, b) Đúng, c) Đúng, d) Sai.

Xét hai biến cố:

A: "Sản phẩm được kiểm tra bị lỗi";

B: "Sản phẩm được kiểm tra do phân xưởng X sản xuất".

Ta có: $P(B)=47\%;\ P(\overline{B})=53\%;$

$P(A\mid B)=0{,}8\%;\ P(A\mid\overline{B})=0{,}5\%.$

Xác suất để sản phẩm được kiểm tra bị lỗi là:

$P(A)=P(B)\cdot P(A\mid B)+P(\overline{B})\cdot P(A\mid\overline{B})=0{,}641\%.$

Nếu sản phẩm kiểm tra bị lỗi thì xác suất để sản phẩm lỗi đó do phân xưởng X sản xuất là:

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)\cdot P(A\mid B)}{P(A)}=\frac{0{,}47\cdot 0{,}008}{0{,}00641}$$

$$=\frac{376}{641}\approx 58{,}66\%.$$

Nếu sản phẩm kiểm tra bị lỗi thì xác suất để sản phẩm lỗi đó do phân xưởng Y sản xuất là:

$$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)=1-\frac{376}{641}=\frac{265}{641}\approx 41{,}34\%.$$

Lúc này $\dfrac{P(B\mid A)}{P(\overline{B}\mid A)}\approx\dfrac{58{,}66\%}{41{,}34\%}\approx 1{,}4.$

Vậy nếu sản phẩm được kiểm tra bị lỗi thì xác suất sản phẩm lỗi đó do phân xưởng X sản xuất cao hơn xác suất sản phẩm lỗi đó do phân xưởng Y sản xuất khoảng 1,4 lần.

Câu 2. a) Đúng, b) Đúng, c) Sai, d) Sai.

Gọi $M(-2+t;2-t;-3+2t)\in\Delta$, ta có:

$$MA=\sqrt{\left(\sqrt{6}t-\frac{7}{\sqrt{6}}\right)^2+\frac{101}{6}};$$

$$MB=\sqrt{\left(\sqrt{6}t-\frac{7}{\sqrt{6}}\right)^2+\frac{77}{6}};$$

$$MC=\sqrt{\left(\sqrt{6}t-\frac{7}{\sqrt{6}}\right)^2+\frac{155}{6}}.$$

Biểu thức $MA+2MB+3MC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $m=\sqrt{\dfrac{101}{6}}+2\sqrt{\dfrac{77}{6}}+3\sqrt{\dfrac{155}{6}}$ khi $\left(\sqrt{6}t-\dfrac{7}{\sqrt{6}}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{7}{6}$ hay $M\equiv M_0\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6};-\dfrac{2}{3}\right).$

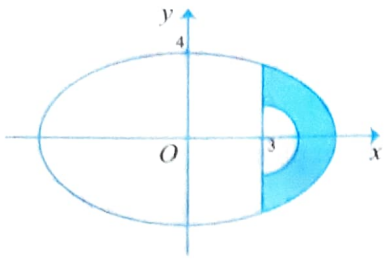
Suy ra: $a=-\dfrac{5}{6},b=\dfrac{5}{6},c=-\dfrac{2}{3}$, nên $a+b+c=-\dfrac{2}{3}.$

Câu 3. a) Đúng, b) Đúng, c) Sai, d) Sai.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Ta có độ dài trục lớn bằng 10 m nên

$2a=10\Rightarrow a=5.$



Độ dài trục nhỏ bằng 8 m nên $2b = 8 \Rightarrow b = 4$.

Tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 6 \Rightarrow c = 3$.

Phương trình chính tắc của elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2} \\ y = -\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2} \end{array}\right.$$

Diện tích phần lát gạch: $S = 2\int_3^5 \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}\,dx - \frac{\pi.1^2}{2}$

$$= \frac{8}{5}\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx - \frac{\pi}{2} \approx 7{,}375 \text{ m}^2.$$

Chi phí lát gạch khoảng 2950000 đồng.

Câu 4. a) Đúng, b) Đúng, c) Sai, d) Sai.

Chu kì của dao động là $T = 3$s.

Khi $t = 5$s thì $h = \left|3\cos\frac{(2.5 - 1)\pi}{3}\right| = 3 > 0$ nên người chơi không ở vị trí cân bằng.

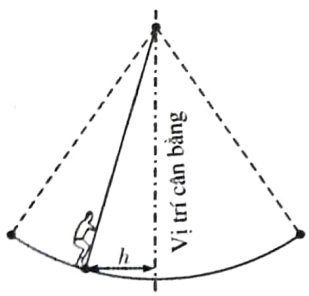
Với mọi $t \geq 0$ ta có

$$-1 \leq \cos\frac{(2t - 1)\pi}{3} \leq 1$$

nên

$$0 \leq \left|3\cos\frac{(2t - 1)\pi}{3}\right| \leq 3,$$

hay $0 \leq h \leq 3$. Đẳng thức $h = 3$ xảy ra khi và chỉ khi $\left|\cos\frac{(2t - 1)\pi}{3}\right| = 1$



$$\Leftrightarrow \sin\frac{(2t - 1)\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2t - 1)\pi}{3} = k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2t - 1 = 3k \Leftrightarrow t = \frac{3k + 1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}, 3k + 1 \geq 0).$$

Do đó $\max h = 3$. Ta thấy:

$$0 \leq \frac{3k + 1}{2} \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq 3k + 1 \leq 20$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 3k \leq 19 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{19}{3}.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$. Các giá trị tương ứng của t là $t \in \left\{\frac{1}{2};2;\frac{7}{2};5;\frac{13}{2};8;\frac{19}{2}\right\}$.

Chứng tỏ trong khoảng thời gian 10 giây đầu tiên, có 7 lần người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. *Đáp số*: 108 triệu đồng.

Gọi chiều rộng của cái bể là x, chiều dài là $2x$, chiều cao là y, đơn vị là mét $(x, y > 0)$.

Thể tích của bể bằng 288m^3 suy ra:

$$2x^2 y = 288 \Rightarrow xy = \frac{144}{x}.$$

Diện tích của phần cần xây là:

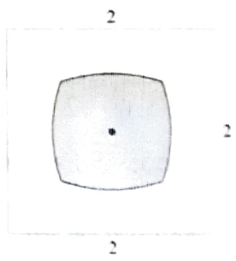
$$S = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + \frac{864}{x}.$$

Ta có $S'(x) = 4x - \frac{864}{x^2}$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Dễ thấy $\min S = S(6) = 216$. Vậy chi phí thấp nhất để xây dựng bể là $0{,}5 \cdot 216 = 108$ triệu đồng.

Câu 2. *Đáp số*: 0,88 (dm^2).

Chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc O tại tâm của hình vuông, sao cho bốn đỉnh của hình vuông là các điểm có toạ độ $(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)$.



Các phần biên của miền (Γ) là các cung parabol với tiêu điểm là O và đường chuẩn chứa cạnh hình vuông, trong đó phần biên trên cùng là một cung của parabol $y = \frac{1 - x^2}{2}$. Các đỉnh ở bốn góc của miền (Γ) là: $(-1 + \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}),(-1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}),(1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

Diện tích miền (Γ) là:

$$S = \left(2(-1 + \sqrt{2})\right)^2 + 4\int_{1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} \left|\frac{1 - x^2}{2} - (-1 + \sqrt{2})\right| dx$$

$$= \frac{4\left(4\sqrt{2} - 5\right)}{3} \approx 0{,}88 \left(\text{dm}^2\right).$$

Câu 3. *Đáp số*: 3,2.

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$$N(-11;0;0), P\left(0;\frac{11}{2};0\right), Q\left(0;0;-\frac{11}{2}\right), I(1;1;1).$$

Khi đó mặt phẳng (NPQ) có phương trình:

$$x-2y+2z+11=0.$$

Xét mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $r=\sqrt{12}$. Rõ ràng ba điểm A, B, C đều thuộc (S). Gọi $M(2u-2v-11;u;v)\in \text{mp}(NPQ)$. Ta thấy:

$$MA^2=MB^2=MC^2=MI^2-r^2=MI^2-12.$$

Do đó A, B, C thuộc mặt cầu (S'):

$$(x-2u+2v+11)^2+(y-u)^2+(z-v)^2=MI^2-12.$$

Mặt phẳng (ABC) chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S), (S'). Do đó mp(ABC) có phương trình:

$$(x-2u+2v+11)^2+(y-u)^2+(z-v)^2-(x-1)^2$$
$$-(y-1)^2-(z-1)^2=MI^2-24$$
$$\Leftrightarrow (2u-2v-12)x+(u-1)y+(v-1)z$$
$$-3u+v+2=0 \quad (ABC).$$

Ta biến đổi phương trình mp(ABC) về dạng:

$$(2x+y-3)u+(-2x+z+1)v+(-12x-y-z+2)=0.$$

Điểm cố định thuộc mp(ABC) có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y-3=0\\-2x+z+1=0\\-12x-y-z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=3\\z=-1\end{cases}\Rightarrow H(0;3;-1).$$

Vậy $OH=\sqrt{10}\approx 3,2$.

Câu 4. *Đáp số*: 0,78.

Ta kí hiệu A, B, C, O lần lượt là các biến cố "Người cần tiếp máu có nhóm máu là A, B, AB, O tương ứng". Như vậy $P(A)=0,375$; $P(B)=0,209$; $P(C)=0,079$; $P(O)=0,337$.

Gọi E là biến cố "Sự truyền máu không thể thực hiện được". Ta có:

$$P(E\mid O)=(1-P(O))^2=0,439569;$$

$$P(E\mid A)=(1-P(A)-P(O))^2=0,082944;$$

$$P(E\mid B)=(1-P(B)-P(O))^2=0,206116;\ P(E\mid C)=0.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta tính được $P(E)=0,222316997$.

Vậy xác suất để sự truyền máu có thể thực hiện được là $P(\overline{E})=1-P(E)=0,777683003\approx 0,78$.

Câu 5. *Đáp số*: 4581 bước.

Gọi S_n là tổng của tất cả các số ghi trên đường tròn sau n bước, $n\in\mathbb{N}^*$. Sau bước 1, trên đường tròn có 2^1 số là 1; 1 nên $S_1=1+1=2=2.3^0$. Sau bước 2, trên đường tròn có 2^2 số là 1; 2; 1; 2 nên $S_2=1+2+1+2=6=2.3^1$.

Sau bước 3, trên đường tròn có 2^3 số là 1; 3; 2; 3; 1; 3; 2; 3 nên $S_3=18=2.3^2$.

Dự đoán sau n bước tổng là $S_n=2.3^{n-1}$. Ta sẽ chứng minh $S_n=2.3^{n-1}$ (*), $\forall n\in\mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp toán học.

Thật vậy, với $n=1$ thì (*) luôn đúng.

Giả sử (*) đúng với $n=k, k\in\mathbb{N}^*$, nghĩa là sau k bước trên đường tròn đã cho có các số với tổng là $S_k=2.3^{k-1}$. Sang bước thứ $k+1$, ta coi 2^k điểm đã ghi số là 2^k điểm chia, nên đường tròn được chia thành 2^k cung bằng nhau. Do điểm chính giữa của mỗi cung này lại ghi tổng của hai số đã ghi ở hai đầu mỗi cung tương ứng. Do đó:

$$S_{k+1}=S_k+2S_k=3.S_k=2.3^k$$

Vậy $S_n=2.3^{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Lúc này:

$$S_n>12^{2025}\Leftrightarrow 2.3^{n-1}>12^{2025}$$
$$\Leftrightarrow n>1+\log_3\frac{12^{2025}}{2}\approx 4580,6.$$

Chứng tỏ sau ít nhất 4581 bước thì tổng các số được ghi trên đường tròn là lớn hơn 12^{2025}.

Câu 6. *Đáp số*: 12 (A).

Ta có $P'(I)=E-2R\cdot I$ nên $P'(I)=0\Leftrightarrow I=\frac{E}{2R}$.

Do đó, P đạt giá trị lớn nhất $P(I=12)=72$ (W) tại $I=12$ (A).

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2025

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài: 90 phút)

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN *(Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12, mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án)*

Câu 1. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x-1}{x-2}$ là :

A. $y=2$ **B.** $x=2$

C. $x=-2$ **D.** $y=-2$.

Câu 2. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$.

A. $F(x)=-\dfrac{1}{x^2}+x+C$ **B.** $F(x)=\ln|x|+x+C$.

C. $F(x)=\ln x+x+C$ **D.** $F(x)=\ln|x|+C$.

Câu 3. Biết $\int\limits_1^3 f(x)dx=-5$ và $\int\limits_1^3 g(x)dx=3$, khi đó $\int\limits_1^3\left[g(x)-2f(x)\right]dx$ bằng

A. 8 **B.** 13

C. -11 **D.** -7.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;1;-2)$, $\vec{b}=(1;0;3)$ là

A. $(2;3;-1)$ **B.** $(3;5;-2)$

C. $(2;-3;-1)$ **D.** $(3;-5;-1)$.

Câu 5. Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19;19,5)	[19,5;20)	[20;20,5)	[20,5;21)	[21;21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần với kết quả nào?

A. 0,277 **B.** 0,727

C. 0,772 **D.** 0,327.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB=a\sqrt{2}$

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 7. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10)$ để hàm số

$$y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-2025$$

đồng biến trên trên $\mathbb{R}$ là:

A. 27 **B.** 35

C. 44 **D.** 54.

Câu 8. Cho cấp số cộng $-2;x;6;y$. Khi đó $(x;y)$ bằng

A. $(2;-10)$ **B.** $(-2;10)$

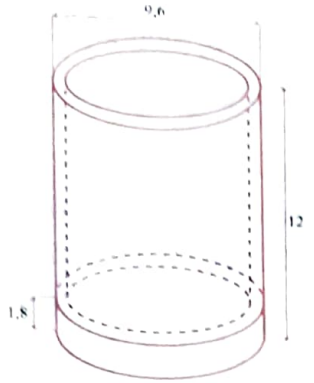
C. $(2;10)$. **D.** $(10;2)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d\left(B;(P)\right)=2d\left(A;(P)\right)$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

A. 4 **B.** 3

C. 2 **D.** 5.

Câu 10. Cần bao nhiêu cm^3 thuỷ tinh để làm một chiếc cốc hình trụ có chiều cao bằng 12 cm, đường kính đáy bằng 9,6 cm (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày 1,8 cm, thành xung quanh cốc dày 0,24 cm? (kết quả lấy gần đúng đến hai chữ số thập phân)



A. $64{,}39\ \text{cm}^3$ **B.** $202{,}27\ \text{cm}^3$

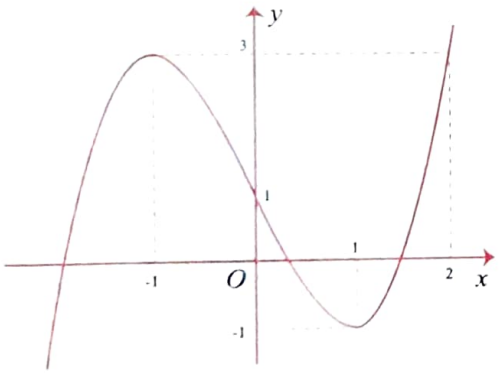
C. $212{,}31\ \text{cm}^3$ **D.** $666{,}97\ \text{cm}^3$.

Câu 11. Một bình đựng 9 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Lần lượt lấy ngẫu nhiên ra 2 bi, mỗi lần lấy 1 bi không hoàn lại. Tính xác suất để bi thứ 2 màu xanh nếu biết bi thứ nhất màu đỏ?

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $\frac{9}{16}$

C. $\frac{9}{17}$ **D.** $\frac{21}{80}$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x+1\right)+2025$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 **B.** 3

C. 1 **D.** 2.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý* a), b), c), d) *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 1. Cho hai biến cố A và B, với $P(\overline{A})=0{,}4$, $P(B)=0{,}8$, $P(A\cap B)=0{,}4$.

a) $P(A)=0{,}6$ và $P(\overline{B})=0{,}2$.

b) $P(A|B)=\frac{1}{2}$.

c) $P(\overline{B}|A)=\frac{2}{3}$.

d) $P(\overline{A}\cap B)=\frac{3}{5}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-1+t\\y=-2+2t\\z=-3+2t\end{cases}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=25$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S).

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;0;-2)$ và bán kính $R=5$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2;-4;-6)$.

c) Hình chiếu vuông góc của tâm I lên đường thẳng Δ là điểm $H(1;2;-1)$.

d) Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B và diện tích ΔIAB bằng 12.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$.

a) Hàm số $y=f(x)=x^3+x^2+1$.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là $y=16x-20$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

d) Hàm số $y=f(x)$ trên $(0;+\infty)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{20}{27}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC cân tại A, $BC=b$, đường cao $AI=h$, cạnh bên SA bằng a vuông góc với đáy. M là điểm thuộc đoạn

AI sao cho $AM = x$. Mặt phẳng qua M vuông góc AI cắt AB, AC, SC, SB theo thứ tự ở D, E, F, G.

a) Thiết diện $DEFG$ là hình chữ nhật.

b) Diện tích thiết diện là $\dfrac{2abx(h-x)}{h^2}$.

c) Diện tích thiết diện lớn nhất bằng $\dfrac{ab}{4}$.

d) Thiết diện chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau khi $x=\dfrac{h(\sqrt{3}-1)}{2}$.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

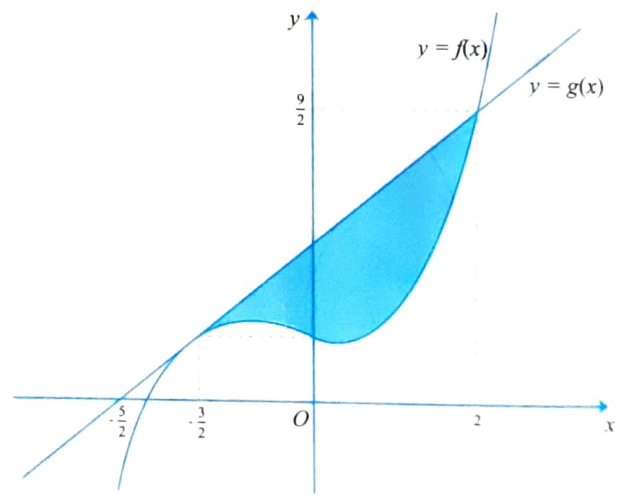
Câu 1. Một khối rubik có dạng khối tứ diện đều. Xét nhị diện có cạnh chứa một cạnh của khối rubik, hai mặt nhị diện lần lượt chứa hai mặt của rubik có chung cạnh đó. Giả sử số đo nhị diện là n^0. Giá trị của n bằng bao nhiêu? (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)

Câu 2. Các khí thải gây ra hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế (*OECD*) khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 2^0C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 5^0C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng nhiệt độ trái đất tăng thêm t^0C, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)$% thì $f(t)=k.a^t$, trong đó k, a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%? (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).

Câu 3. Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C ngồi vào hàng ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C không ngồi cạnh học sinh lớp B bằng bao nhiêu?

Câu 4. Để lắp đặt hệ thống điện năng lượng mặt trời, gia đình bạn A vay ngân hàng số tiền là 600 triệu đồng với lãi suất 0,6% /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày lắp đặt, gia đình bạn A bắt đầu đưa vào vận hành hòa lưới điện và mỗi tháng công ty điện lực trả gia đình bạn A 16 triệu đồng. Do đó sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, gia đình bạn A bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi tháng hoàn nợ số tiền là 16 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng, gia đình bạn A sẽ trả hết nợ?

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ và đường thẳng $y=g(x)=mx+n$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=-\dfrac{3}{2}$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó diện tích phần được tô đậm trong hình vẽ bằng bao nhiêu? (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*)



Câu 6. Cho các số thực $a,b>1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx)=2025$ có hai nghiệm phân biệt m,n. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(4a^2+b^2)(100m^2n^2+1)$ bằng bao nhiêu?

NGUYỄN THANH GIANG

(Trường THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)



XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

TRẦN QUANG THUẬN
(GV Vinschool Ocean Park, Hà Nội)
HÀ VĂN THẮNG
(GV THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang)

(Kỳ 1)

Xác suất – Thống kê là một nội dung quan trọng, chiếm tỷ trọng lớn trong chương trình môn Toán THPT. Đặc biệt, xác suất có điều kiện là một kiến thức mới được đưa vào giảng dạy, đóng vai trò quan trọng trong việc giúp học sinh hiểu sâu hơn về xác suất và các ứng dụng thực tế.

Nhằm hỗ trợ thầy cô và học sinh dễ dàng tiếp cận, nhìn nhận và phân loại các dạng bài tập cơ bản về nội dung này. Chúng tôi sẽ cố gắng trình bày những kiến thức cơ bản, phương pháp giải bài tập, ứng dụng thực tiễn của xác suất có điều kiện một cách đơn giản, dễ hiểu nhất. Chúng tôi hy vọng rằng chuyên đề này sẽ góp phần nâng cao hiệu quả dạy và học, giúp học sinh nắm vững kiến thức và đạt kết quả cao trong kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2025 sắp tới.

Bài viết có tham khảo sách giáo khoa môn Toán theo Chương trình GDPT 2018 (Bộ sách SGK: *Kết nối tri thức với cuộc sống* và *Chân trời sáng tạo*).

I. MỘT SỐ CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Trong các công thức dưới đây, nếu không nói gì thêm chúng ta xét các biến cố cùng liên quan đến phép thử ngẫu nhiên T và số các kết quả của T là hữu hạn và các kết quả là đồng khả năng.

1) *Xác suất của biến cố*

Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử ngẫu nhiên.

Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) là một tập con của không gian mẫu. Tập rỗng $\varnothing$ là biến cố không thể, Ω là biến cố chắc chắn, $\overline{A}=\Omega\setminus A$ là biến cố đối của biến cố A. Xác suất của biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Từ đó ta có:

1) $P(\varnothing)=0$; $P(\Omega)=1$;

2) $0\le P(A)\le 1$ với mỗi biến cố A;

3) Công thức biến cố đối: $P(\overline{A})=1-P(A)$ với mỗi biến cố A.

2) Biến cố hợp, biến cố giao. Hai biến cố xung khắc

Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến phép thử T.

- Đặt $C=A\cup B$. Khi đó C là một biến cố và được gọi là biến cố hợp của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A\cup B$. Biến cố C là biến cố "A hoặc B xảy ra" hay nói cách khác là biến cố "ít nhất một trong hai biến cố A,B xảy ra".

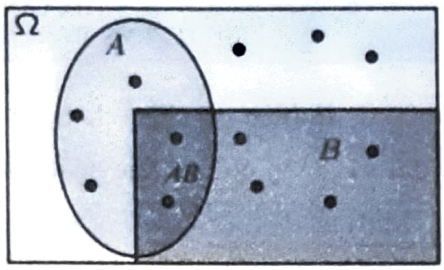
- Đặt $D=A\cap B$. Khi đó D là một biến cố và được gọi là biến cố giao của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A\cap B$ hay AB. Biến cố D là biến cố "A và B đồng thời xảy ra". Nếu A và B đồng thời không xảy ra thì $A\cap B=\varnothing$. Ta gọi A và B là hai biến cố xung khắc.

- Công thức cộng xác suất:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. Đặc biệt, nếu hai biến cố A và B xung khắc thì $P(A\cap B)=0$. Khi đó $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

3) *Xác suất có điều kiện*

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B, kí hiệu là $P(A|B)$.



Nếu $P(B)>0$ thì $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Nhận xét. - Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì $P(AB)=P(A).P(B|A)=P(B).P(A|B)$ (Công thức nhân xác suất).

- Cho hai biến cố A và B với $P(B)>0$. Khi đó, ta có: $P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$.

- Công thức biến cố đối trong "không gian mẫu thu hẹp": $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$.

4) Hai biến cố độc lập

- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

- Cho hai biến cố A, B với $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$. Khi đó: Hai biến cố A và B độc lập $\Leftrightarrow P(AB)=P(A).P(B) \Leftrightarrow P(A)=P(A|B)=P(A|\overline{B})$ và $P(B)=P(B|A)=P(B|\overline{A})$.

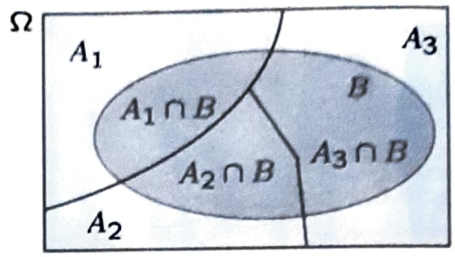
5) Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes

a) *Công thức xác suất toàn phần*

- Hệ 2 biến cố cơ sở là B và $\overline{B}$: Cho hai biến cố A, B với $0<P(B)<1$, ta có:

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$$
$$=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B}).$$

- Hệ 3 biến cố cơ sở là A_1, A_2, A_3 đôi một xung khắc và $A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$, ta có:



$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$$
$$=P(B|A_1).P(A_1)+P(B|A_2).P(A_2)+P(B|A_3).P(A_3).$$

b) Công thức Bayes

Cho hai biến cố A, B với $P(A)>0$, $P(B)>0$, ta có: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$.

Nhận xét. Với $P(A)>0$, $0<P(B)<1$ thì công thức Bayes còn có dạng:

$$P(B|A)=\frac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})}.$$

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng các công thức tính xác suất

Thí dụ 1. *Cho hai biến cố A,B có*

$$P(A)=0,4;\ P(B)=0,6;\ P(AB)=0,2..$$

Tính $P(A|B)$; $P(B|A)$.

Lời giải. Ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0,2}{0,6}=\dfrac{1}{3}$;

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{0,2}{0,4}=0,5.$$

Thí dụ 2. *Cho hai biến cố độc lập A,B với $P(A)=0,8$; $P(B)=0,25$. Tính $P(A|B)$.*

Lời giải. Vì A,B là hai biến cố độc lập nên

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0,8\cdot 0,25=0,2.$$

Khi đó: $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0,2}{0,25}=0,8.$

Thí dụ 3. *Cho hai biến cố A,B có $P(A)=0,6; P(B)=0,8; P(AB)=0,4$. Tính $P(\overline{B}|A)$.*

Lời giải. Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB).$$

Suy ra: $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0,6-0,4=0,2.$

Từ đó ta có:

$$P(\overline{B}|A)=\frac{P(\overline{B}A)}{P(A)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{0,2}{0,6}=\frac{1}{3}.$$

Thí dụ 4. *Cho A và B là hai biến cố độc lập và $P(A)=0,5; P(B)=0,6$. Tính $P(B|(A\cup\overline{B}))$.*

Lời giải. Ta có: $P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(B\cap(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}$,

trong đó $B\cap(A\cup\overline{B})=BA$. Suy ra:

$$P(B\cap(A\cup\overline{B}))=P(BA)=P(B).P(A)$$
$$=0,6.0,5=0,3.$$

Lại có: $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

$$=P(A)+P(\overline{B})-P(A).P(\overline{B})$$
$$=0,5+0,4-0,5.0,4=0,7.$$

Từ đó ta có: $P(B|A\cup\overline{B})=\frac{0,3}{0,7}=\frac{3}{7}$.

Dạng 2. Sử dụng định nghĩa xác suất có điều kiện

Phần này, chúng ta nên sử dụng sơ đồ Venn để biểu diễn các biến cố để trực quan và dễ hiểu hơn.

Thí dụ 1. *Trong kì kiểm tra môn Toán của một trường Trung học phổ thông có 500 học sinh tham gia, trong đó có 220 học sinh nam và 280 học sinh nữ. Khi công bố kết quả của kì kiểm tra đó, có 150 học sinh đạt điểm giỏi, trong đó có 65 học sinh nam và 85 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong số 500 học sinh đó. Tính xác suất để:*

1) học sinh được chọn đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ.

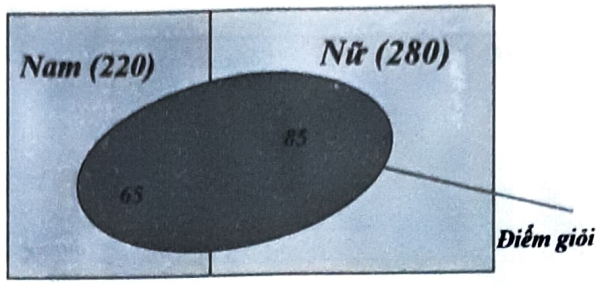
2) học sinh được chọn không đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ.

3) học sinh được chọn là nam, biết rằng học sinh đó đạt điểm giỏi.

4) học sinh được chọn là nữ, biết rằng học sinh đó không đạt điểm giỏi.

Lời giải.

Ta biểu diễn bài toán bằng sơ đồ Venn dưới đây:



1) Xác suất để học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ là $P_1=\frac{85}{280}=\frac{17}{56}$.

2) Xác suất để học sinh được chọn không đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ là:

$$P_2=\frac{280-85}{280}=\frac{39}{56}.$$

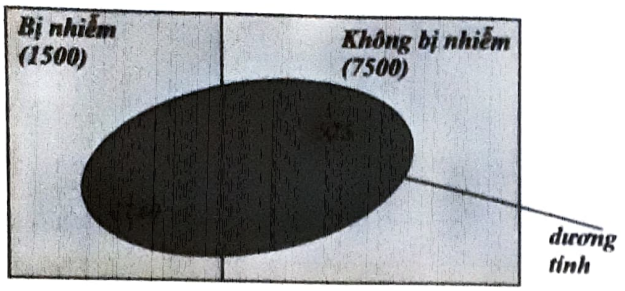
3) Xác suất để học sinh được chọn là nam, biết rằng học sinh đó đạt điểm giỏi là $P_3=\frac{65}{150}=\frac{13}{30}$.

4) Xác suất để học sinh được chọn là nữ, biết rằng học sinh đó không đạt điểm giỏi là:

$$P_4=\frac{280-85}{500-150}=\frac{195}{350}=\frac{37}{70}.$$

Thí dụ 2. *Một công ty dược phẩm giới thiệu một dụng cụ kiểm tra bệnh sốt xuất huyết. Về kiểm định chất lượng của sản phẩm, họ cho biết như sau: Số người được thử nghiệm là 9000, trong số đó có 1500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết và có 7500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết. Khi thử bằng dụng cụ của công ty, trong 1500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 1140 người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Mặt khác, trong 7500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 525 người cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính khi kiểm tra. Chọn ngẫu nhiên một người trong số những người thử nghiệm. Tính xác suất để người được chọn ra bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, biết rằng người đó có kết quả thử nghiệm dương tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). Nhà sản xuất khẳng định dụng cụ cho kết quả đúng với hơn 90% số trường hợp có kết quả dương tính. Khẳng định đó có đúng không?*

Lời giải.



Số người xét nghiệm dương tính là:

$$1140+525=1665 \text{ (người)}.$$

Xác suất để chọn được người bị sốt xuất huyết biết rằng người đó dương tính với thử nghiệm là:

$$P=\frac{1140}{1665}\approx 0,7.$$

Do $0,7=70\%<90\%$ nên khẳng định của nhà sản xuất là không đúng.

Thí dụ 3. *Một túi có 10 hộp sữa chua dâu và 20 hộp sữa chua nha đam; các hộp sữa chua có kích thước và khối lượng như nhau. Có 18 hộp sữa chua trong túi là loại không đường, trong đó có 7 hộp sữa chua dâu và 11 hộp sữa chua nha đam. Lấy ngẫu nhiên một hộp sữa chua trong túi. Tính xác suất để:*

1) hộp sữa chua được lấy ra là dâu, biết rằng hộp sữa chua đó không đường.

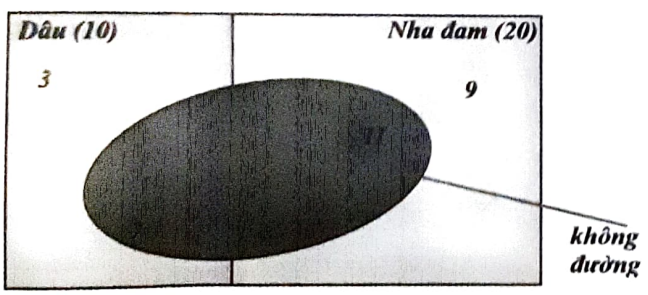
2) hộp sữa chua được lấy ra là nha đam, biết rằng hộp sữa chua đó không đường.

3) hộp sữa chua được lấy ra là dâu, biết rằng hộp sữa chua đó có đường.

4) hộp sữa chua được lấy ra có đường, biết rằng hộp sữa chua nha đam.

Lời giải.

Ta sử dụng sơ đồ Venn để minh họa các dữ kiện của bài toán:



1) Xác suất để lấy được hộp sữa chua dâu, biết rằng đó là hộp không đường là: $P_1=\frac{7}{18}$.

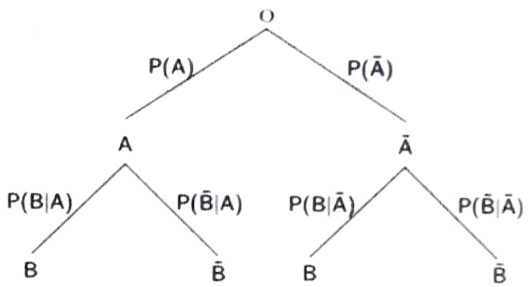
2) Xác suất để lấy được hộp sữa chua nha đam, biết rằng đó không đường là $P_2=\frac{11}{18}$.

3) Số hộp sữa chua có đường là $30-18=12$. Suy ra xác suất để lấy được hộp sữa chua dâu, biết rằng đó là hộp có đường là $P_3=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.

4) Số hộp sữa chua nha đam có đường là $20-11=9$. Suy ra xác suất để lấy được hộp sữa chua có đường biết rằng đó hộp sữa chua nha đam là $P_4=\frac{9}{20}$.

Dạng 3. Sử dụng sơ đồ cây tính xác suất

Khi phép thử chia ra làm các công đoạn liên tiếp nhau, sự kiện liên quan đế biến cố A xảy ra trước và sau đó đến sự kiện diễn ra biến cố B xảy ra sau thì chúng ta sẽ lập một sơ đồ cây có dạng như sau:



- Dựa vào lộ trình $(O\text{-}A\text{-}B)$ để tính $P(AB)$ bằng cách lấy tích các xác suất, cụ thể:

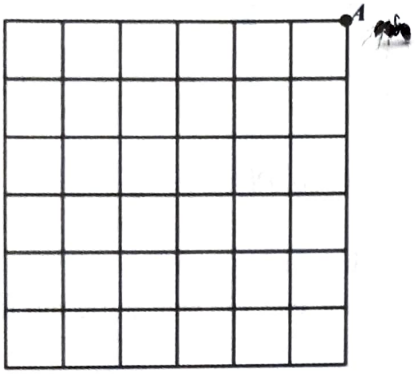
$$P(AB)=P(A).P(B|A).$$

- Dựa vào lộ trình dẫn đến B là $(O\text{-}A\text{-}B)$ và $(O\text{-}\overline{A}\text{-}B)$ để tính $P(B)$ bằng tổng xác suất của 2 lộ trình, cụ thể: $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})$.

- Dựa vào lộ trình dẫn đến $\overline{B}$ là $(O\text{-}A\text{-}\overline{B})$ và $(O\text{-}\overline{A}\text{-}\overline{B})$ để tính $P(\overline{B})$ bằng tổng xác suất của 2 lộ trình, cụ thể: $P(\overline{B})=P(A).P(\overline{B}|A)+P(\overline{A}).P(\overline{B}|\overline{A})$.

- Công thức Bayes để tính $P(A|B)$: là phân số mà tử thức dựa vào lộ trình $(O\text{-}A\text{-}B)$, mẫu thức dựa vào lộ trình dẫn tới B, gồm $(O\text{-}A\text{-}B)$ và $(O\text{-}\overline{A}\text{-}B)$.

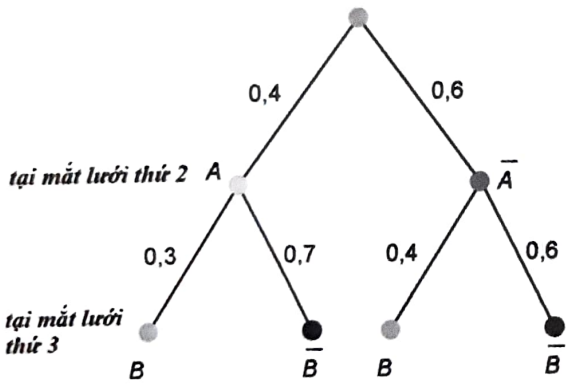
Thí dụ 1. *Có một con kiến bò dọc theo các cạnh của lưới ô vuông từ điểm A. Biết rằng từ mắt lưới này kiến bò theo phương ngang thì đến mắt lưới tiếp theo xác suất kiến bò theo phương thẳng đứng là 0,4. Còn nếu từ mắt lưới này kiến bò theo phương thẳng đứng thì đến mắt lưới tiếp theo xác suất nó bò theo phương ngang là 0,7. Giả sử từ A kiến bò theo phương ngang. Tính xác suất để đến mắt lưới thứ 3 kiến bò theo phương thẳng đứng.*



Lời giải. Kí hiệu A là biến cố: "*Tại mắt lưới thứ 2, kiến bò theo phương thẳng đứng*";

B là biến cố: "*Tại mắt lưới thứ 3, kiến bò theo phương thẳng đứng*".

Ta vẽ sơ đồ hình cây như sau:



Có hai nhánh cây đi tới B là O-A-B và O-$\overline{A}$-B suy ra: $P(B)=0,4.0,3+0,6.0,4=0,36$.

Thí dụ 2. *Một xưởng sản xuất nhập nguyên liệu từ 3 cơ sở A, B, C theo tỉ lệ lần lượt là 25%, 35% và 40%. Biết rằng tỉ lệ nguyên liệu bị hỏng của 3 cơ sở A, B, C lần lượt là 5%, 4% và 2%. Chọn ngẫu nhiên một nguyên liệu nhập về, tính xác suất của các biến cố:*

M: "nguyên liệu của cơ sở C, biết rằng nguyên liệu không bị hỏng";

N: "nguyên liệu bị hỏng biết rằng nguyên liệu thuộc cơ sở A hoặc C".

Lời giải. Gọi

A là biến cố: "nguyên liệu thuộc cở sở A";

B là biến cố: "nguyên liệu thuộc cơ sở B";

C là biến cố: "nguyên liệu thuộc cơ sở C";

H là biến cố: "nguyên liệu bị hỏng".

Ta có: $P(A)=0,25, P(H|A)=0,05,$

$P(\overline{H}|A)=1-P(H|A)=0,95;$

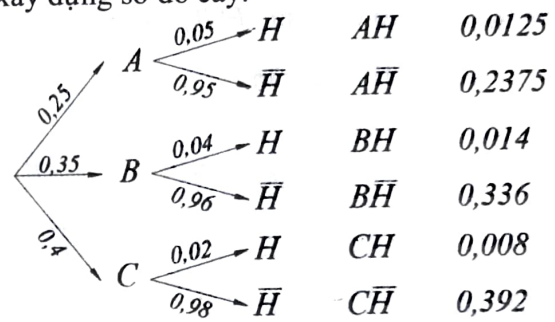
$P(B)=0,35, P(H|B)=0,04,$

$P(\overline{H}|B)=1-P(H|B)=0,96;$

$P(C)=0,4, P(H|C)=0,02,$

$P(\overline{H}|C)=1-P(H|C)=0,98.$

Ta xây dựng sơ đồ cây:



Từ sơ đồ cây ta có: Xác suất để chọn được nguyên liệu không bị hỏng là:

$$P(\overline{H})=P(\overline{H}A)+P(\overline{H}B)+P(\overline{H}C)=0,9655.$$

Do $M=C|\overline{H}$ nên

$$P(M)=\frac{P(C\overline{H})}{P(\overline{H})}=\frac{0,392}{0,9655}=\frac{392}{9655}.$$

Ta có: $N=H|(A\cup C)=H|\overline{B}$

$$\Rightarrow P(H|\overline{B})=\frac{P(H\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{B}|H).P(H)}{P(\overline{B})}.$$

Lại có: $P(\overline{B}|H)=1-P(B|H)=1-\frac{P(BH)}{P(H)}$

$$=1-\frac{0,014}{1-0,9655}=\frac{41}{69}.$$

Từ đó ta có: $P(N)=\dfrac{\dfrac{41}{69}(1-0{,}9655)}{0{,}65}=\dfrac{41}{1300}$.

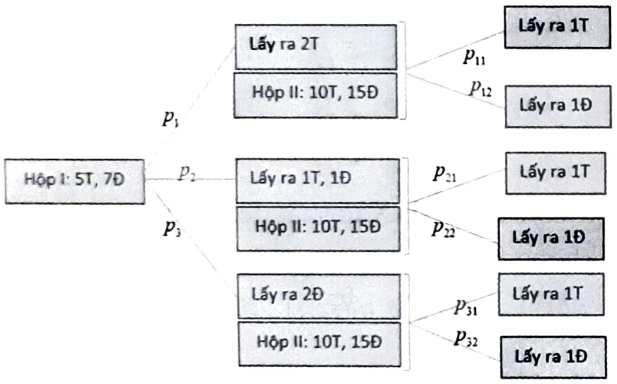
Thí dụ 3. *Có hai chiếc hộp, hộp I có 5 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ, hộp II có 10 viên bi màu trắng và 15 viên bi màu đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ hộp I rồi bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II. Tính xác suất để viên bi lấy ra từ hộp II là viên bi được chuyển từ hộp I sang biết rằng viên bi đó có màu trắng.*

Lời giải. Gọi A là biến cố viên bi lấy ra từ hộp II là viên bị được chuyển từ hộp I sang;

B là biến cố viên bi lấy ra từ hộp II có màu trắng.

Ta cần đi tính $P(A|B)$.

Ta sử dụng sơ đồ cây tính $P(B)$: Xác suất để viên bi lấy ra từ hộp II màu trắng.



Ta có: $p_1=\dfrac{C_5^2}{C_{12}^2}=\dfrac{5}{33}$, $p_2=\dfrac{5.7}{C_{12}^2}=\dfrac{35}{66}$,

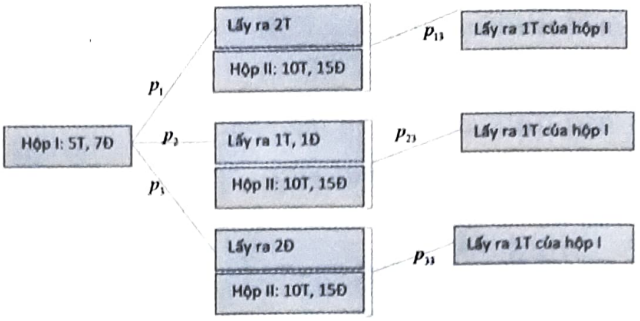
$p_3=\dfrac{C_7^2}{C_{12}^2}=\dfrac{7}{22}$, $p_{11}=\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$,

$p_{21}=\dfrac{11}{27}$, $p_{31}=\dfrac{10}{27}$.

Từ đó ta có:

$$P(B)=p_1.p_{11}+p_2.p_{21}+p_3.p_{31}$$
$$=\frac{65}{162}\ (1).$$

Ta tiếp tục sử dụng sơ đồ cây tính $P(AB)$: Xác suất để viên bi lấy ra từ hộp II là viên bị được chuyển từ hộp I sang đồng thời nó có màu trắng.



Ta có $p_{13}=\dfrac{2}{27}, p_{23}=\dfrac{1}{27}, p_{33}=0$. Từ đó suy ra:

$$P(AB)=p_1.p_{13}+p_2.p_{23}=\frac{5}{162}\ (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1}{13}$.

Dạng 4. Sử dụng bảng mô tả

Trong phần này, các xác suất được mô tả bởi bảng sau:

	Biến cố A	*Biến cố B*	**Tổng**
Biến cố M	x	y	$x+y$
Biến cố N	m	n	$m+n$
Tổng	$x+m$	$y+n$	

Trong bảng trên, các cặp biến cố $\{A,B\}$ xung khắc và $\{M,N\}$ cũng xung khắc. Khi đó ta có:

$$P(A|M)=\frac{x}{x+y};P(A|N)=\frac{m}{m+n};$$

$$P(M|A)=\frac{x}{x+m};P(N|B)=\frac{n}{y+n}.$$

Thí dụ 1. *Tại một sở thú X, để nhập về một trong hai con vật là sư tử hoặc voi họ tiến hành lấy ý kiến của 1000 em bé (500 bé trai và 500 bé gái). Câu hỏi đặt ra cho các bé là: "Vườn thú sắp tới sẽ nhận nuôi thêm một con vật nữa, con thích sư tử hay voi hơn?". Kết quả khảo sát của các bé như sau:*

	Sư tử	*Voi*	**Tổng**
Bé trai	390	110	**500**
Bé gái	175	325	**500**
Tổng	**565**	**435**	**1000**

Chọn ngẫu nhiên một bé tham gia khảo sát, tính xác suất để:

a) bé thích sư tử, biết bé được chọn là bé trai.

b) bé là gái, biết bé được chọn thích voi.

Lời giải.

a) Xác suất để chọn được bé thích sư tử, biết rằng bé được chọn là bé trai: $p_1=\frac{390}{500}=\frac{39}{50}$.

b) Xác suất để chọn được bé gái, biết rằng bé thích voi: $p_2=\frac{325}{435}=\frac{65}{87}$.

Thí dụ 2. *Trên giá sách có 10 quyển sách Khoa học và 15 quyển sách Nghệ thuật. Có 9 quyển sách viết bằng tiếng Anh, trong đó 3 quyển sách Khoa học và 6 quyển sách Nghệ thuật, các quyển sách còn lại viết bằng tiếng Việt. Lấy ngẫu nhiên một quyển sách. Tính xác suất để quyển sách được lấy ra:*

a) là sách viết bằng tiếng Việt, biết rằng quyển sách đó là sách Khoa học.

b) là sách nghệ thuật, biết rằng quyển sách đó viết bằng tiếng Anh.

Lời giải. Vì có 9 quyển sách viết bằng tiếng Anh, trong đó 3 quyển sách Khoa học và 6 quyển sách Nghệ thuật, các quyển sách còn lại viết bằng tiếng Việt nên ta có: $10+15-9=16$ quyển sách viết bằng tiếng Việt, trong đó có $10-3=7$ quyển sách Khoa học và $15-6=9$ quyển sách Nghệ thuật. Ta tóm tắt bài toán bởi bảng sau:

	Khoa học	*Nghệ thuật*	**Tổng**
Tiếng Anh	3	6	**9**
Tiếng Việt	7	9	**16**
Tổng	**10**	**15**	

Từ đó ta có:

a) Xác suất để quyển sách được lấy ra là sách viết bằng tiếng Việt, biết rằng quyển sách đó là sách Khoa học: $p_1=\frac{7}{10}$.

b) Xác suất để chọn được quyển sách Nghệ thuật, biết rằng sách viết bằng tiếng Anh là: $p_2=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Thí dụ 3. *Một viện nghiên cứu về An toàn giao thông muốn tìm hiểu về mối quan hệ giữa việc thắt dây an toàn khi tham gia giao thông và nguy cơ tử vong của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Viện tiến hành xem xét 577006 tai nạn thì có kết quả như bảng sau:*

	Tử vong	*Sống sót*
Không thắt dây an toàn	1601	162527
Có thắt dây an toàn	510	412368

a) Tính xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp không thắt dây an toàn.

b) Tính xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp có thắt dây an toàn. So sánh hai trường hợp trên.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có bảng sau

	Tử vong	*Sống sót*	**Tổng**
Không thắt dây an toàn	1601	162527	**164128**
Có thắt dây an toàn	510	412368	**412878**
Tổng	**2111**	**574895**	**577006**

a) Xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp không thắt dây an toàn là:

$$p_1=\frac{1601}{164128}\approx 0{,}00975.$$

b) Xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp có thắt dây an toàn là:

$$p_2=\frac{510}{412878}\approx 0{,}00124.$$

So sánh hai trường hợp trên ta có: $\frac{p_1}{p_2}\approx 7{,}86$. Do đó, không thắt dây an toàn có tỷ lệ tử vong cao gấp 7,86 lần so với việc thắt dây an toàn.

(Kỳ sau đăng tiếp)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/575 (Lớp 6). Biết x, y, z, t là các số nguyên dương thay đổi thỏa mãn:

$$2025xy = 2026zt.$$

Hỏi tổng $S = 2025(x^2 + y^2) + 2026(z^2 + t^2)$ là số nguyên tố hay hợp số?

HUỲNH THANH TÂM
(*Bưu điện thị xã An Nhơn, Bình Định*)

Bài T2/575 (Lớp 7). Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 + 1$ chia hết cho q và $2^q + 1$ chia hết cho p.

NGUYỄN TRỌNG HIỆP
(*GV THCS Tây Hồ, Hà Nội*)

Bài T3/575. Với n là số nguyên dương lớn hơn 1 và p là số nguyên tố sao cho n là ước số của $p - 1$ và p là ước số của $n^3 - 1$, chứng minh rằng $4p - 3$ là số chính phương.

PHẠM VĂN HOÀNG
(*SV K49, lớp CNNL-01, ĐHBK Hà Nội*)

Bài T4/575. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q, K lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, CE, DA và EB. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 lần lượt là trung điểm của các đoạn NP, PQ, QK, KM và MN. Tính tỷ số diện tích $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}}$.

PHAN THẾ HẢI
(*GV CĐSP Bà Rịa – Vũng Tàu*)

Bài T5/575. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{999}} > 147.$$

Hãy nêu bài toán tổng quát.

NGUYỄN VĂN TIẾN
(*GV THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao, Phú Thọ*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/575. Cho hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện:
i) $f(xy) = f(x).f(y)$ với mọi x, y thỏa mãn $(x; y) = 1$;
ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi số nguyên tố x, y.
Hãy tính $f(2021)$.

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG
(*85 Biên Cương, P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

Bài T7/575. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn có một góc khác 60^0. Chứng minh rằng $T = \dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ không phải là số nguyên.

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Bài T8/575. Cho hình bình hành $OEMF$ với $\widehat{O} = 60^0$, $OE = 18$, $OF = 2$. Đường thẳng d đi qua M cắt tia OE, OF lần lượt tại A, B. Xác định độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB.

LA ĐẠI CƯƠNG
(*GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị*)

Bài T9/575. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$2\sqrt{a^2b+b^2c+c^2a} + 2\sqrt{ab^2+bc^2+ca^2} \geq 3\sqrt{ab+bc+ca} + \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

HOÀNG NGỌC MINH
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/575. Cho hai số nguyên dương m và n. Giả sử các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_m$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ thỏa mãn điều kiện: $[a_1+q]+[a_2+q]+\ldots+[a_m+q]$
$=[b_1+q]+[b_2+q]+\ldots+[b_n+q]$, $\forall q\in[0;1)$
trong đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt qua x. Chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

LÊ VIỆT ÂN (*TT. Ocean Education, 40 đường số 9, khu city Land, P. 10, TP. Hồ Chí Minh*)
NGUYỄN TUẤN ANH
(*GV THPT Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp*)

Bài T11/575. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$x_1 = 3;\ x_{n+1} = x_n^2 - 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta xác định dãy (y_n) bởi

$$y_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \ldots + \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Hãy tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(*Pleiku*)

Bài T12/575. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau. Tiếp tuyến chung ngoài d. Đường tròn (O_3) tiếp xúc ngoài (O_1), (O_2) và d. Lần lượt gọi tiếp điểm của (O_1) và (O_2) là B_3, của (O_2) và (O_3) là B_1, của (O_3) và (O_1) là B_2. Gọi tiếp điểm của (O_1), (O_2), (O_3) với d lần lượt là A_1, A_2, A_3. Chứng minh rằng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.

TRẦN QUANG HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Bài L1/575. Một thùng kín có chiều cao $h = 3$ m chứa đầy nước. Ở đáy thùng có hai bọt không khí thể tích bằng nhau. Áp suất ở đáy thùng là $p_0 = 150$ kPa.

a) Nếu cả hai bọt khí lên sát nắp thì áp suất p_2 ở đáy thùng là bao nhiêu?

b) Nếu có một bọt khí đi lên sát nắp, còn bọt khí kia vẫn ở sát đáy, thì áp suất p_1 ở đáy bình là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/575. Một mẫu phóng xạ phát ra 220000 hạt anpha trong ngày đầu tiên và 400000 hạt anpha nữa trong hai ngày kế tiếp. Biết rằng hạt nhân con bền, chu kì bán rã của hạt nhân phóng xạ trong mẫu là bao nhiêu?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/575 (Grade 6). Given that x, y, z, t are positive integers satisfying $2025xy = 2026zt$. Is $S = 2025(x^2 + y^2) + 2026(z^2 + t^2)$ a prime of composite number?

Problem T2/575 (Grade 7). Find all prime numbers p and q such that $p^2 + 1$ is divisible by q and $2^q + 1$ is divisible by p.

Problem T3/575. Suppose that n is a positive integer greater than 1 and p is a prime number such that n is a divisor of $p - 1$ and p is a divisor of $n^3 - 1$. Prove that $4p - 3$ is a perfect square number.

Problem T4/575. Given a pentagon $ABCDE$. Let M, N, P, Q, K be the midpoints of the line segments AC, BD, CE, DA and EB respectively. Let A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 be the midpoints of the line segments NP, PQ, QK, KM and MN respectively. Calculate $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}}$.

Problem T5/575. Prove the following inequality:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{999}} > 147.$$

State a more general problem if possible.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/575. Given a function $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ that satisfies the following conditions:

i) $f(xy) = f(x).f(y)$ for all x, y satisfying $(x; y) = 1$;

ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ for all prime numbers x, y.

Calculate $f(2021)$.

Problem T7/575. Let a, b, c be the lengths of three sides of an acute triangle with at least one angle with the measurement different from 60^0. Prove that $T = \dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ is not an integer.

Problem T8/575. Given parallelogram $OEMF$ with $\widehat{O} = 60^0$, $OE = 18$, $OF = 2$. A line d passes through M and intersects the rays OE and OF at A and B respectively. Determine the smallest length of line segment AB.

Problem T9/575. Let a, b, c be positive real numbers satisfying $a + b + c = 3$. Prove that

$$2\sqrt{a^2b + b^2c + c^2a} + 2\sqrt{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 3\sqrt{ab + bc + ca} + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

(*Xem tiếp trang 43*)



Bài T1/571. *Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn x^2+y^2-x chia hết cho xy. Chứng minh x là số chính phương.*

Lời giải. Cho x, y là các số nguyên dương, đặt $a = (x, y)$ là ước số chung lớn nhất của x và y thì $x = am$ và $y = an$ với a, m, n đều là số nguyên dương và $(m, n) = 1$. Theo giả thiết số

$$x^2+y^2-x = a^2m^2+a^2n^2-am = a(am^2+an^2-m)$$

chia hết cho $xy = a^2mn$, do đó số $am^2 + an^2 - m$ chia hết cho amn, hay $am^2 + an^2 - m = amnk$ (*) với k là số nguyên dương. Từ (*) suy ra:

$$m = a(m^2+n^2-mnk),$$

do đó số a phải là ước số của m, đặt $m = at$ với t là số nguyên dương. Từ (*) suy ra:

$$an^2 = amnk - am^2 + m$$

hay

$$an^2 = m(ank - am + 1),$$

nên số m phải là ước số của an^2, mà $(m, n) = 1$ nên số $m = at$ phải là ước số của a, suy ra $t = 1$, tức là $m = a$. Lúc đó $x = am = a^2$ và x là số chính phương.

Nhận xét. Có bạn cho rằng nếu một số chia hết cho x và chia hết cho y thì số đó chia hết cho xy. Điều này không phải lúc nào cũng đúng, chẳng hạn số 12 chia hết cho 4 và chia hết cho 6 nhưng 12 không chia hết cho $24 = 4.6$. Các bạn sau có lời giải đúng. **Vĩnh Phúc**: *Vũ Nhật Thành*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Nguyễn Phương Hoa*, 6A2, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **Nghệ An:** *Đinh Trí Dũng*, *Bùi Hữu Anh Quân*, 6E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/571. *Ngày thứ 300 trong năm N là thứ Ba. Ngày thứ 200 của năm $N + 1$ cũng là thứ Ba. Hỏi ngày thứ 100 của năm $N - 1$ là thứ mấy?*

Lời giải. Để giải bài này chúng ta cần lưu ý:

+ Năm nhuận có 366 ngày và năm không nhuận 365 ngày.

+ Ngày lặp lại của tuần là 7 (modulo của 7).

Từ lưu ý thứ nhất, một năm không nhuận có 365 ngày và năm nhuận có 366 ngày. Vì vậy, còn 65 ngày hoặc 66 ngày nữa kể từ ngày thứ 300 cho đến hết năm của năm N. Suy ra, giữa ngày thứ 300 của năm N và ngày thứ 200 của năm $N+1$ có 265 ngày hoặc 266 ngày. Vì cả hai ngày này đều là thứ Ba nên số ngày cách nhau phải chia hết cho 7. Ta dễ dàng kiểm tra được 266 chia hết cho 7, nên năm N là năm nhuận, cứ ba năm không nhuận thì đến năm thứ tư là năm nhuận. Từ đó suy ra năm $N-1$ không là năm nhuận, do đó còn 265 ngày kể từ ngày thứ 100 của năm $N-1$ cho đến hết năm $N-1$. Điều này cũng có nghĩa là có $265 + 300 = 565$ ngày giữa ngày thứ 100 của năm $N-1$ và ngày thứ 300 của năm N.

Từ lưu ý thứ hai, chúng ta có thể giảm con số này xuống theo modulo 7, vì các tuần lặp lại cứ sau 7 ngày và chúng ta chỉ quan tâm đến ngày thứ 100 xảy ra là ngày nào trong tuần. Không khó để kiểm tra rằng $565 \equiv 5 \pmod 7$, vì vậy ngày thứ 100 của năm $N-1$ xảy ra 5 ngày trong tuần trước ngày thứ 300 của năm N, tức là ngày thứ Ba. Vậy ngày thứ 100 của năm $N-1$ là ngày thứ Năm.

Nhận xét. Có nhiều bạn tham gia giải bài này và đa số đều cho kết quả đúng. Một số bạn có cách tính đúng đến 565 ngày kể từ ngày thứ 100 của năm $N-1$ đến ngày thứ 300 của năm N, nhưng đến phần kết luận lại tính nhầm thành Chủ Nhật. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Nghệ An: *Đặng Bá Hoàng Minh* và *Nguyễn Thái Dũng*, 7B; *Đinh Trí Dũng* và *Bùi Hữu Anh Quân*,

6E; *Hoàng Văn Duy*, 8D; *Ngô Trần Bảo Ngọc*, 7D; *Nguyễn Tất Hoàng Anh* và *Nguyễn Công Lĩnh*, 9C THCS Lý Nhật Quang, Yên Sơn, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Nhật Thành*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Long An:** *Lê Minh Hiếu*, 9/2, TH và THCS Thanh Phú, Bến Lức; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/571. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho* $\left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]$ (1) *trong đó kí hiệu* $[x]$ *là số nguyên lớn nhất không vượt quá* x.

Lời giải (của *Nguyên Nhật Huy* và một số bạn).

Với $n=1$:

$$\mathrm{VT}(1)=\left[\sqrt{2}\right]=1\neq 2=\mathrm{VP}(1)=\left[\sqrt{1}+\sqrt{2}\right]=[2,41].$$

Với $n=2$: $\mathrm{VT}(1)=\left[\sqrt{3}+\sqrt{5}\right]=[3,96]=3$

$$=\mathrm{VP}(1)=\left[\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]=[3,14].$$

Như vậy, $n=2$ là số cần tìm. Với $n\geq 3$, ta có:

$$\sqrt{n^2-1}=\sqrt{(n-1)(n+1)}\geq\sqrt{(3-1)(n+1)}$$
$$=\sqrt{2(n+1)}>\sqrt{n+1}$$

và $\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n^2}=n$. Suy ra: $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$

$$>n-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-1\right)\geq\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\approx 1,26>1.$$

Vậy $\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n}+1$. Do đó:

$$\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+1$$

và $\left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right]>\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]$.

Vậy không có $n\geq 3$ nào thỏa mãn (1).

Đáp số: Có duy nhất $n=2$ thỏa mãn (1).

Nhận xét. 1) Tất cả các bạn gửi bài có lời giải tốt:

Cộng hòa Áo: *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, *Nguyễn Văn Hải Anh*, *Nguyễn Công Lĩnh*, 9C, *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** *Trương Khánh Chi*, *Phạm Duy Hải*, *Nguyễn Nhật Huy*, *Nguyễn Hương Thủy*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên.

2) Bạn *Nguyễn Văn Hải Anh* cần ghi rõ tên trường, huyện.

3) Các bạn có thể tham khảo Chuyên đề Phần nguyên trong [1], và làm các bài tập liên có quan sau:

Bài 1 (Cuộc thi mang tên *Niels Henrik Abel*, 1995-1996, vòng chung kết, [1]; Bài 3.2.2a, trang 143). *Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng*

$$\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right].$$

Bài 2 (Thi Olympic Áo, 1974, Thi chọn đội tuyển Hồng Kông dự thi toán Quốc tế, 1988; [1], Bài 3.2.2b, trang 143). *Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng* $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$.

Bài 3 (Thi Olympic Canada, 1987; [1], Bài 3.2.2c, trang 144). *Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng*

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right].$$

Bài 4 (Kvant M532; [1], Bài 3.2.2d, trang 145). *Cho n là số tự nhiên,* $a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ *và* $b_n=\sqrt{4n+2}$. *Chứng minh rằng*

$$1)\ [a_n]=[b_n];\quad 2)\ 0<b_n-a_n<\frac{1}{16n\sqrt{n}}.$$

Bài 5 (Thi Olympic Iran lần thứ 13, 1996, Crux, No 1, Vol. 22, 2002; [1], Bài 3.2.4, trang 149). *Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng*

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right]=[9n+8].$$

Bài 6 (Crux 3446. No 4, Vol. 36, 2010; [1], Bài 3.2.4, trang 149). *Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng*

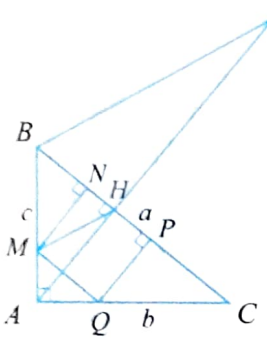
$$\left[\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}\right]+\left[\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}\right]$$
$$=\left[4n^2+3\right]+\left[4n^2+8n+3\right].$$

[1] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Thị Bình Minh, Tạ Duy Phượng, Nguyễn Thị Bích Thủy, *Phần nguyên và ứng dụng trong giải toán*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020 (303 trang).

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T4/571. *Cho tam giác ABC vuông tại A. M là điểm trên cạnh AB. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC tại Q. Gọi N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, Q trên BC. Tìm vị trí của M để $MNPQ$ là hình vuông.*

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, **Hà Nội**)



Giả sử $MNPQ$ là hình vuông, khi đó ta có:

$$MN = MQ.$$

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Áp dụng hệ quả của định lí Thales ta có:

$$\frac{MN}{AH} = \frac{BM}{BA}; \frac{MQ}{BC} = \frac{AM}{AB}.$$

Do $MN = MQ$ nên $\dfrac{AH.BM}{BA} = \dfrac{BC.AM}{AB}$

hay $\dfrac{AH}{BC} = \dfrac{MA}{MB}$ (1).

Trên tia đối của tia HA, lấy điểm D sao cho $HD = BC$. Khi đó: $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{HA}{HD}$, dẫn đến MH // BD (định lí Thales đảo). Như vậy, ta có thể dựng điểm M như sau để $MNPQ$ là hình vuông.

Cách 1. Ta có $AH = \dfrac{bc}{a}$ nên $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{bc}{a^2}$.

Vậy M là điểm chia đoạn AB theo tỉ số $k = \dfrac{bc}{a^2}$.

Cách 2. Dựng điểm D trên tia đối của tia HA sao cho $HD = BC$. Qua H kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại điểm M.

Nhận xét. Ngoài bạn *Nam*, bạn *Phạm Nguyễn Nguyệt Minh*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** cũng cho lời giải đúng.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/571. *Giải phương trình*

$$x\sqrt{x+7} + \sqrt{9-x} = 4\sqrt{x^2+1}.$$

Lời giải. ĐK: $-7 \le x \le 9$.

Vì VP $= 4\sqrt{x^2+1} > 0$ nên VT $= x\sqrt{x+7} + \sqrt{9-x} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky:

$$|ax+by| \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2} \ (a,b,x,y \in \mathbb{R}),$$

(dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$), ta có:

$$0 < x\sqrt{x+7} + 1.\sqrt{9-x} \le \sqrt{x^2+1}.\sqrt{x+7+9-x}$$

hay VT $= x\sqrt{x+7} + \sqrt{9-x} \le 4\sqrt{x^2+1} =$ VP.

Do đó phương trình trong đầu bài thỏa mãn khi và chỉ khi $x\sqrt{9-x} = \sqrt{x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2(9-x) = x+7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^3 - 9x^2 + x + 7 = 0 \end{cases}.$$

Ta có: $x^3 - 9x^2 + x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) - 8x(x-1) - 7(x-1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 8x - 7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 - \sqrt{23} < 0 \text{ (loại)} \\ x = 4 + \sqrt{23} \end{array}\right.$$

Ta thấy $x = 1$ và $x = 4 + \sqrt{23}$ thỏa mãn PT đã cho.

Vậy tập hợp nghiệm của bài toán là $\{1;\ 4+\sqrt{23}\}$.

Nhận xét. 1) Ta có: $|ax+by| \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy \le a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$

$\Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy \ge 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \ge 0.$

BĐT cuối đúng, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ay = bx$.

2) Với các điều kiện của phương trình, ta có thể giải bài toán bằng cách: $x\sqrt{x+7} + \sqrt{9-x} = 4\sqrt{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x+7} + \sqrt{9-x}\right)^2 = (x+7+9-x)(x^2+1).$$

sau khi biến đổi và rút gọn, ta được:

$$\left(x\sqrt{9-x}-\sqrt{x+7}\right)^2=0\Leftrightarrow x\sqrt{9-x}=\sqrt{x+7}.$$

3) Một số bạn không kiểm tra lại các điều kiện nên đã lấy thừa nghiệm $x=4-\sqrt{23}<0$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, *Nguyễn Thanh Tùng*, 8A8, THCS Hoàng Liệt Hoàng Mai, *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nghệ An:** *Nguyễn Công Lĩnh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền; **Phú Thọ:** *Vũ Hoàng Sơn*, 9A, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 Gibs, TP. Graz.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/571. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}(x-7)\sqrt{x^2+y^2}=5x+y & (1)\\ (y-4)\sqrt{x^2+y^2}=-x+5y & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. Ta có với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ thì $x^2+y^2\geq 0$.

• Với $x^2+y^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$. Thử $x=0$, $y=0$ vào hệ phương trình thấy thoả mãn.

• Xét $x^2+y^2>0$.

+ Nếu $x=7$ thay vào (1) tìm được $y=-35$.

Nhưng $x=7$, $y=-35$ không thoả mãn (2).

+ Nếu $y=4$ thay vào (2) tìm được $x=20$.

Nhưng $x=20$, $y=4$ không thoả mãn (1).

Vậy $x\neq 7$ và $y\neq 4$, khi đó $x-7\neq 0, y-4\neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $x-7$ và chia hai vế của (2) cho $y-4$, dẫn đến: $\dfrac{5x+y}{x-7}=\dfrac{-x+5y}{y-4}$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=27x-31y \quad (3).$$

Mặt khác, bình phương hai vế của (1) và (2) rồi cộng theo vế ta nhận được:

$$\left(x^2+y^2\right)\left[(x-7)^2+(y-4)^2\right]=(5x+y)^2+(-x+5y)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-14x-8y+65\right)=26\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-14x-8y=-39 \quad (4).$$

Thay (3) vào (4), ta có:

$27x-31y-14x-8y=-39$, nên $x=3y-3$ (5).

Thay (5) vào (3), ta có:

$$(3y-3)^2+y^2=27(3y-3)-31y\Leftrightarrow 5y^2-34y+45=0$$

có hai nghiệm $y=5$ và $y=\dfrac{9}{5}$.

Với $y=5$ thay vào (5) tìm được $x=12$. Thử $x=12$, $y=5$ vào hệ phương trình thấy thoả mãn.

Với $y=\dfrac{9}{5}$ thay vào (5) tìm được $x=\dfrac{12}{5}$. Thử $x=\dfrac{12}{5}$, $y=\dfrac{9}{5}$ vào HPT thấy không thoả mãn.

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$ và $(12;5)$.

Nhận xét. Có nhiều bạn gửi bài giải về Toà soạn và đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên, trong lập luận một số bạn còn thực hiện phép chia theo vế của hai PT(1) và (2) để dẫn đến PT(3) nhưng không xét điều kiện cho đa thức chia phải khác 0 là thiếu chính xác. Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; **Nghệ An:** *Nguyễn Công Lĩnh*, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Long An:** *Trần Lê Trọng Đức*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phạm Minh Phú*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Đức Phán*, 11T1, *Trần Hồng Vi*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Kiên Giang:** *Nguyễn Hoài Thanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Châu Trinh, TP Đà Lạt; *Trương Gia Bảo*, 10, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/571. *Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $3x^2+4y^2+4xy-9x-10y+8=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{7x+11y+13}{2x+3y+5}$.*

Lời giải. Ta có: $3x^2+4y^2+4xy-9x-10y+8=0$

$\Leftrightarrow x^2+4xy+4y^2-5(x+2y)+6=-2(x^2-2x+1)$

$\Leftrightarrow (x+2y)^2-5(x+2y)+6=-2(x-1)^2\le 0$

$\Rightarrow (x+2y)^2-5(x+2y)+6\le 0$

$\Leftrightarrow 2\le x+2y\le 3\Rightarrow x+2y-2\ge 0$. Suy ra:

$$P=\frac{7x+11y+13}{2x+3y+5}=\frac{3(2x+3y+5)+x+2y-2}{2x+3y+5}$$

$$=3+\frac{x+2y-2}{2x+3y+5}\ge 3 \text{ (do } x,y>0 \text{ và } x+2y-2\ge 0).$$

$$P=3\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\x+2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$ Vậy $\min P=3$.

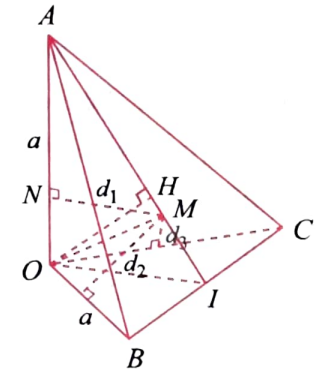
Nhận xét. 1) Cách giải trên là của tác giả đề toán và cũng là của một số bạn. Một số bạn sử dụng phương pháp miền giá trị (của P theo từng biến x, y) và dùng bất đẳng thức Bunyakovsky để đánh giá cũng cho kết quả đúng nhưng lời giải dài hơn. Một số bạn cũng cho lời giải ngắn gọn khi dùng phương pháp phản chứng chứng tỏ $P<3$ dẫn tới vô lý, từ đó tìm được $\min P$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Kiên Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Nguyễn Phạm Minh Phú*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân phú; **Nghệ An:** *Nguyễn Tuấn Khải*, 10A2, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai. Có một bạn giải đúng nhưng quên ghi tên và địa chỉ trong bài làm.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/571. *Cho hình chóp $O.ABC$ có tam giác OBC đều cạnh a, $OA\perp(OBC)$, $OA=a$, I là trung điểm BC, M là điểm thay đổi trên đoạn thẳng AI. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các đường thẳng OA, OB, OC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=3d_1^2+2d_2^2+2d_3^2$ theo a.*

Lời giải.



Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi đường thẳng OM và các đường thẳng OA, OB, OC và N là hình chiếu vuông góc của M trên OA. Ta có:

$$\overrightarrow{OM}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OI}$$

$$=(1-k)\overrightarrow{OA}+\frac{k}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \quad (0\le k\le 1);$$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0;\ \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=\frac{a^2}{2};$$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}}{OA.OM}=\frac{(1-k)a^2}{a\sqrt{(1-k)^2a^2+\dfrac{k^2a^2}{4}+\dfrac{k^2a^2}{4}+\dfrac{k^2a^2}{4}}}$$

$$=\frac{1-k}{\sqrt{(1-k)^2+\dfrac{3k^2}{4}}} \quad (1);$$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM}}{OB.OM}=\frac{\dfrac{ka^2}{2}+\dfrac{ka^2}{4}}{a\sqrt{(1-k)^2a^2+\dfrac{3k^2a^2}{4}}}$$

$$=\frac{\dfrac{3k}{4}}{\sqrt{(1-k)^2+\dfrac{3k^2}{4}}} \quad (2);$$

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM}}{OC.OM}=\frac{\dfrac{3k}{4}}{\sqrt{(1-k)^2+\dfrac{3k^2}{4}}} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) có: $3\cos^2\alpha+2\cos^2\beta+2\cos^2\gamma=3$;

$$d_1^2=MN^2=\sin^2\alpha.OM^2.$$

Tương tự: $d_2^2=\sin^2\beta.OM^2$; $d_3^2=2\sin^2\gamma.OM^2$.

Do đó:

$$T=3d_1^2+2d_2^2+2d_3^2=\left(3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta+2\sin^2\gamma\right)OM^2$$

$$=\left[7-\left(3\cos^2\alpha+2\cos^2\beta+2\cos^2\gamma\right)\right]OM^2$$

$$=4OM^2\ge 4OH^2$$

với H là hình chiếu vuông góc của O trên AI.

Xét tam giác vuông OAI vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow OH^2=\frac{3a^2}{7}.$$

Do đó: $T=3d_1^2+2d_2^2+2d_3^2\ge 4OH^2=\frac{12a^2}{7}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{12a^2}{7}$ khi M là hình chiếu vuông góc của O trên cạnh AI.

Nhận xét. Đây là bài toán về hình học không gian khá hay. Lời giải bài toán chủ yếu sử dụng kiến thức hình học lớp 10 như độ dài của vectơ, tích vô hướng của hai vectơ, ... Tuy nhiên, không có bạn nào làm theo hướng này. Một số bạn dùng phương pháp tọa độ để giải nhưng kết quả không đúng.

NHƯ HOÀNG

Bài T9/571. *Giải phương trình*

$$\sqrt{8x^2-3x+2025}-\sqrt{27x^2-2x+2025}+\sqrt{26x^2-3x+2025}=\sqrt{7x^2-4x+2025}.$$

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{8x^2-3x+2025}$,

$b=\sqrt{27x^2-2x+2025}$, $c=\sqrt{26x^2-3x+2025}$..

Ta thấy:

$$a^2-b^2+c^2=(8x^2-3x+2025)-(27x^2-2x+2025)+(26x^2-3x+2025)$$

$$=7x^2-4x+2025.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$a-b+c=\sqrt{a^2-b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=a^2-b^2+c^2$$

$$\Rightarrow 2(b^2-ba-bc+ca)=0\Rightarrow 2(b-a)(b-c)=0.$$

Xảy ra hai trường hợp sau:

TH1: $b=a$. Khi đó:

$27x^2-2x+2025=8x^2-3x+2025$ hay $19x^2+x=0$.

Ta tìm được $x=0$ hoặc $x=\frac{-1}{19}$ (thỏa mãn).

TH2: $b=c$. Khi đó:

$27x^2-2x+2025=26x^2-3x+2025$ hay $x^2+x=0$.

Do đó $x=0$ hoặc $x=-1$ (thỏa mãn). Vậy tập nghiệm của PT đã cho là $S=\left\{0;-1;\frac{-1}{19}\right\}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán dễ nên có nhiều bạn gửi lời giải về tòa soạn. Tuy nhiên vẫn có vài bạn giải sai. Nhiều bạn giải bằng cách bình phương hai vế hoặc nhân liên hợp cũng cho lời giải đúng. Có hai bạn giải đúng nhưng quên không ghi tên và địa chỉ. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Quảng Bình: *Vương Khánh Toàn*, 11 chuyên Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nam Định:** *Trần Thanh Hằng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Công Lĩnh*, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, *Nguyễn Tất Han*, *Nguyễn Văn Hải Anh*, 9C, *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, THPT Yên Thành 2; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh; *Trương Đức Gia Bảo*, C10, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thanh Mai*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Đức Phát*, 11T1, *Đào Chí Hiếu*, 11A1, *Trần Hồng Vi*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; *Lê Thùy Trang*, 10E5, *Nguyễn Quốc Bình*, 10A1, *Nguyễn Phúc Thiên An*, *Nguyễn Phạm Minh Phú*, *Trần Nhất Nguyên*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong*, *Đỗ Quang Anh*, *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Kiên Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, *Nguyễn*

Đức Mạnh, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên; **Long An:** *Nguyễn Thanh Mai, Lê Nguyễn Anh Thư, Lê Anh Khoa, Trần Lê Trọng Phúc, Nguyễn Lê Thảo Nguyên, Lê Hoàng Phong, Huỳnh Võ Huy Khánh*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T10/571. *Cho $f(x)=3x^4-7x^3+ax^2+bx+c$ là đa thức với hệ số thực có bốn nghiệm thực trong khoảng $(0;2)$. Chứng minh rằng*

$$(2a+b-14)^2+(b+c+2)^2\geq 9.\left(\frac{13}{12}\right)^8 \quad (1).$$

Lời giải (dựa trên đáp án của tác giả bài toán)

Với i là đơn vị ảo,chú ý rằng $i^2=-1$ ta có:

$$f(1+i)=3(1+i)^4-7(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c$$
$$=b+c+2+(2a+b-14)i$$
$$\Rightarrow |f(1+i)|^2=(2a+b-14)^2+(b+c+2)^2.$$

Gọi x_1,x_2,x_3,x_4 là bốn nghiệm thực nghiệm của $f(x)$. Ta có:

$$f(x)=3\prod_{k=1}^{4}(x-x_k)\Rightarrow f(1+i)=3\prod_{k=1}^{4}(1+i-x_k)$$

$$\Rightarrow |f(1+i)|^2=9\prod_{k=1}^{4}|1+i-x_k|^2=9\prod_{k=1}^{4}\left[(1-x_k)^2+1\right].$$

Do đó: $(1)\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{4}\left[(1-x_k)^2+1\right]\geq\left(\frac{13}{12}\right)^8$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{4}\ln\left[(1-x_k)^2+1\right]\geq 8\ln\frac{13}{12} \quad (2).$$

Đặt $X_k=1-x_k$. Ta có: $x_k\in(0;2)\Rightarrow X_k\in(-1;1)$.

$$(2)\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{4}\ln\left[1+X_k^2\right]\geq 8\ln\frac{13}{12} \quad (3).$$

Xét hàm số $g(X)=\ln\left(1+X^2\right)$. Ta có:

$$g''(X)=\frac{2(1-X^2)}{(1+X^2)^2}>0,\forall X\in(-1;1).$$

Do đó $g(X)$ là hàm số lõm trên $(-1;1)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có:

$$\sum_{k=1}^{4}g(X_k)\geq 4g\left(\frac{\sum_{k=1}^{4}X_k}{4}\right) \quad (4).$$

Mặt khác theo định lý Viète ta có:

$$\sum_{k=1}^{4}x_k=\frac{7}{3}\Rightarrow\sum_{k=1}^{4}X_k=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{\sum_{k=1}^{4}X_k}{4}=\frac{5}{12}.$$

Thay vào (4) ta được: $\sum_{k=1}^{4}g(X_k)\geq 4g\left(\frac{5}{12}\right)$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{4}\ln\left[1+X_k^2\right]\geq 4\ln\left(1+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right)=4\ln\frac{169}{144}=8\ln\frac{13}{12}.$$

Vậy (2), do đó (1) được chứng minh.

Nhận xét. Đây là bài toán khó, không có bạn nào tham gia giải bài toán này

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/571. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x)=f\left(\frac{x^2+6x-2}{4}\right)-x^2-2x+2 \quad (1)$$

với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải. (theo đa số các bạn)

$$(1)\Leftrightarrow f(x)-4x=f\left(\frac{x^2+6x-2}{4}\right)-4.\frac{x^2+6x-2}{4},\forall x\in\mathbb{R}$$

hay $g(x)=g\left(\frac{x^2+6x-2}{4}\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (2)

trong đó $g(x)=f(x)-4x$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Thay x bởi $x-3$ trong (2), ta thu được:

$g(x-3)=g\left(\frac{x^2-11}{4}\right)$ hay $h(x)=h\left(\frac{x^2+1}{4}\right),\forall x\in\mathbb{R}$ (3),

trong đó $h(x)=g(x-3)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $x=\frac{x^2+1}{4}$ có 2 nghiệm $a_{1,2}=2\mp\sqrt{3}$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng hàm $h(x)$ là hàm hằng. Nhận xét rằng $h(x)$ là hàm chẵn nên ta chỉ cần xét $h(x)$ trên $\mathbb{R}^+$.

Xét dãy số (x_n) xác định theo công thức

$$x_1=a\geq 0, x_{n+1}=\frac{x_n^2+1}{4}, n=1,2,\ldots (4).$$

Trường hợp $a\in[0;a_1)$. Xét dãy (4). Khi đó: $0\leq x_1<a_1$. Giả sử $x_k<a_1$. Khi đó:

$$x_{k+1}=\frac{x_k^2+1}{4}<\frac{a_1^2+1}{4}=a_1.$$

Vậy nên dãy (x_n) bị chặn trên.

Mặt khác, $x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2-4x_n+1}{4}>0$ (do $x_n<a_1$).

Từ đó, suy ra dãy (x_n) tăng và đo đó hội tụ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x\leq a_1.$$

Từ (4), chuyển qua giới hạn $n\to\infty$, ta thu được $x=\frac{x^2+1}{4}$ nên $x=a_1$. Suy ra:

$$h(a)=h(x_1)=h\left(\frac{x_1^2+1}{4}\right)=h(x_2)=\ldots=h(x_n),\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n\to\infty$ và sử dụng tính liên tục của $h(x)$, ta thu được $h(a)=h(a_1)$.

- Trường hợp $a\in(a_1,a_2)$. Xét dãy (4). Khi đó $a_1<x_1<a_2$. Giả sử $x_k>a_1$. Khi đó:

$$x_{k+1}=\frac{x_k^2+1}{4}>\frac{a_1^2+1}{4}=a_1.$$

Vậy nên dãy (x_n) bị chặn dưới.

Mặt khác, $x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2-4x_n+1}{4}<0$ (do $x_n>a_1$).

Từ đó, suy ra dãy (x_n) giảm và do đó hội tụ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x\geq a_1.$$

Chuyển qua giới hạn $n\to\infty$, ta thu được $x=\frac{x^2+1}{4}$ nên $x=a_1$. Suy ra:

$$h(a)=h(x_1)=h\left(\frac{x_1^2+1}{4}\right)=h(x_2)=\ldots=h(x_n),\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n\to\infty$ và sử dụng tính liên tục của $h(x)$, ta thu được $h(a)=h(a_1)$

- Trường hợp $a>a_2$. Xét dãy:

$$y_1=a, y_{n+1}=\sqrt{4y_n-1}, n\in\mathbb{N}^* \ (5).$$

Ta có $y_1>a_2$. Giả sử $y_n>a_2$. Khi đó, theo (5) thì $y_{n+1}>\sqrt{4a_2-1}=a_2$ nên dãy (y_n) bị chặn dưới.

Mặt khác $y_{n+1}-y_n=\sqrt{4y_n-1}-y_n=\frac{4y_n-1-y_n^2}{\sqrt{4y_n-1}+y_n}<0$ (do $y_n>a_2$). Vậy dãy (y_n) giảm và đo đó hội tụ: $\lim_{n\to\infty} y_n=y\geq a_2$. Từ (5), chuyển qua giới hạn khi $n\to\infty$, ta thu được $h(a)=h(a_2)$.

Tiếp theo, để chứng minh $h(a)$ là hàm hằng, ta cần chứng minh $h(a_1)=h(a_2)$.

Xét dãy số (z_n) xác định như sau: $z_n=a_2-\frac{1}{n^2}$ thì $0<z_n<a_2$ và $\lim_{n\to\infty} z_n=a_2$. Do $0<z_n<a_2$ nên theo kết quả của các trường hợp 1 và 2, ta được $h(z_n)=h(a_1)$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Chuyển qua giới hạn, ta thu được:

$$h(a_1)=\lim_{n\to\infty} h(z_n)=h(\lim_{n\to\infty} z_n)=h(a_2).$$

Kết luận: $h(x)=c$ với mọi $x\in[0;+\infty)$ và do $h(x)$ là hàm chẵn nên $h(x)=c,\forall x\in\mathbb{R}$. Từ đó suy ra:

$$f(x)=g(x)+4x=h(x+3)+4x=4x+c,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các điều kiện bài ra ứng với mọi $c\in\mathbb{R}$.

Nhận xét. Đây là dạng toán phương trình hàm một biến liên qua đến định lý Weiestrass. Cách giải có thể rút gọn nếu ta sử dụng biến đổi đối số chuyển 2 nghiệm của phương trình bậc hai a_1,a_2 về phương trình có nghiệm 0 và 1 dạng $x=x^2$.

Có một số bạn gửi lời giải nhưng chỉ hạn chế xét trong lớp hàm đa thức là chưa đúng yêu cầu bài ra.

Bạn *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng** có lời giải đúng tương tự theo phương pháp đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/571. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn ω và có trực tâm H. MN và PQ là hai dây cung của ω vuông góc với nhau tại S. Gọi giao điểm của đường thẳng Simson ứng với M, N của tam giác ABC là K. Gọi giao điểm của đường thẳng Simson ứng với P, Q của tam giác ABC là L. Chứng minh rằng $HKSL$ là hình bình hành.*

Lời giải. Trong lời giải này, nếu X thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì kí hiệu s_X chỉ đường thẳng Simson của X đối với tam giác ABC.

Ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và hai điểm M, N thuộc (O). Khi đó:*

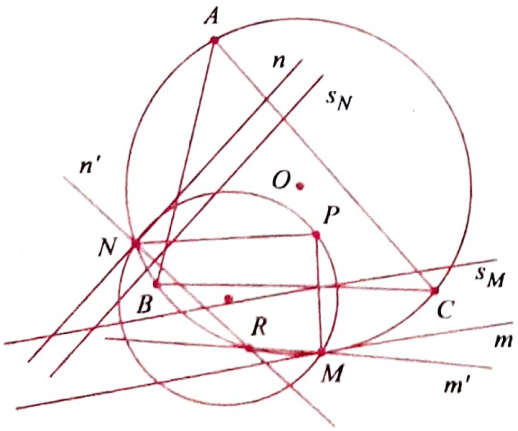
$$(s_M, s_N) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm. Điểm P thuộc (O). Khi đó s_P đi qua trung điểm của HP.*

Các bổ đề 1 và 2 rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây.

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và hai điểm M, N thuộc (O). P là điểm bất kì trên đường tròn đường kính MN. Các đường thẳng m, n theo thứ tự đi qua M, N và song song với s_M, s_N. m', n' theo thứ tự là ảnh đối xứng của m, n qua PM, PN. Khi đó m', n' cắt nhau tại một điểm thuộc (O).*

Chứng minh.



Gọi R là giao điểm của m' và n'. Chú ý rằng

$$(PM, PN) \equiv \frac{\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} \equiv (PN, PM) (\mathrm{mod}\,\pi),$$

theo bổ đề 1, ta có:

$$(RM, RN) \equiv (m', n') \equiv (m', PM) + (PM, PN) + (PN, n') (\mathrm{mod}\,\pi)$$
$$\equiv (PM, m) + (PN, PM) + (n, PN) \equiv (n, m)$$
$$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Do đó R thuộc (O) (đpcm).

Bổ đề 4. *Tích của hai phép đối xứng trục có hai trục đối xứng vuông góc là một phép đối xứng tâm có tâm đối xứng là giao của hai trục đối xứng.*

Phép chứng minh bổ đề 4 rất đơn giản, không trình bày ở đây. *Trở lại giải bài toán T12.*

Gọi (O) là đường tròn ω; T là trung điểm của SH; K', L' theo thứ tự là ảnh đối xứng của H qua qua K, L; R_1, R_2 theo thứ tự là ảnh đối xứng của K', L' qua MN, PQ.

Theo bổ đề 2, $K'M, K'N$ theo thứ tự song song với s_M, s_N. Dễ thấy R_1M, R_1N theo thứ tự là ảnh đối xứng của $K'M$, $K'N$ qua SM, SN. Vậy theo bổ đề 1: $(R_1M, R_1N) \equiv -(K'M, K'N) \equiv -(s_M, s_N)$

$$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Do đó R_1 thuộc (O) (1).

Tương tự, ta có R_2 thuộc (O) (2).

Dễ thấy S thuộc đường tròn đường kính NP (3).

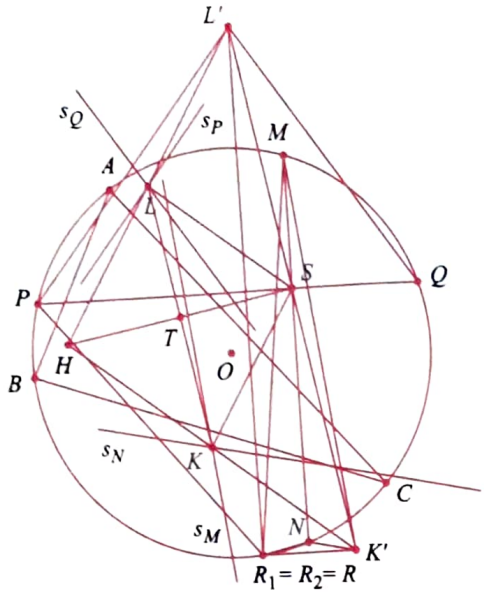
Từ (1), (2) và (3), theo bổ đề 3, suy ra $R_1 \equiv R_2 \equiv R$.

Do đó, chú ý rằng $MN \perp PQ$, theo bổ đề 4, ta có

$$L' = \mathbb{R}_{PQ}(R) = \mathbb{R}_{PQ}(\mathbb{R}_{MN}(K'))$$
$$= \mathbb{R}_{PQ} \circ \mathbb{R}_{MN}(K') = \mathbb{S}_S(K').$$

Kết hợp với L, K, T theo thứ tự là trung điểm của HL', HK', HS, suy ra T là trung điểm của LK.

Điều đó có nghĩa là $HKSL$ là hình bình hành.

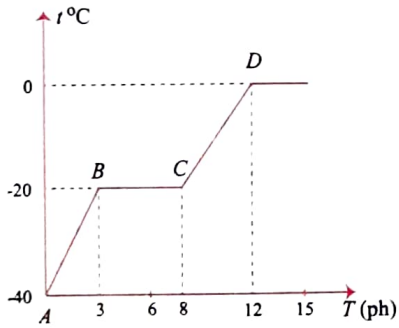


Nhận xét. Bài toán này khó, không có bạn nào tham gia giải.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L12/571. *Một bình cách nhiệt có dây đốt nóng bên trong, chứa 2 kg nước đá và 2 kg một chất X dễ nóng chảy và không hoà tan trong nước. Nhiệt độ ban đầu của cả bình là -40°C, dây đốt nóng bắt đầu hoạt động (công suất toả nhiệt của dây không đổi). Nhiệt độ trong bình biến thiên theo thời gian như ở đồ thị hình dưới. Nhiệt dung riêng của nước đá là $c_đ$ = 2000 J/kg.K, của chất rắn X là c = 10000 J/kg.K. Hãy xác định nhiệt nóng chảy của chất rắn X và nhiệt dung riêng c_x của chất X ở trạng thái lỏng.*

Lời giải.



Gọi khối lượng nước đá và chất X là m = 2 kg. Các khoảng thời gian ứng với các đoạn AB, BC, CD lần lượt là T_1 = 3 phút ; T_2 = 5 phút; T_3 = 4 phút.

Biến thiên nhiệt độ ứng với các đoạn AB, CD là:

$$\Delta t_1 = 20^\circ\text{C} \ ; \ \Delta t_2 = 20^\circ\text{C}.$$

Gọi công suất của dây đốt là N.

- ứng với đoạn AB: nước đá và vật rắn X cùng hấp thụ nhiệt: $(c_đ + c)m\Delta t_1 = NT_1$ (1).
- ứng với đoạn BC: chỉ có vật X hấp thụ nhiệt để nóng chảy: $\lambda m = NT_2$ (2).
- ứng với đoạn CD: nước đá và vật X ở thể lỏng cùng hấp thụ nhiệt: $(c_đ + c_x)m.\Delta t_2 = NT_3$ (3).

Từ (1) và (2): $\lambda = \dfrac{(c+c_đ).\Delta t_1.T_2}{T_1} = 4.10^5$ J/kg.

Từ (1) và (3): $c_x = \dfrac{(c_đ+c)\Delta t_1.T_3}{\Delta t_2.T_1} - c_đ = 14.10^3$ J/kg.K.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Lê Khánh Duy*, 10E5, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh** đã giải đúng bài này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L12/571. *Từ một máy phát điện người ta muốn truyền tới nơi tiêu thụ bằng đường dây tải điện có điện trở tổng cộng R = 40 Ω và có hệ số công suất bằng k = 1 và không đổi và công suất được xác định bằng công thức $\mathcal{P} = kUI$. Biết hiệu suất truyền tải là 98% và mức tiêu thụ nhận được công suất điện 196 kW. Tính điện áp hiệu dụng U được đưa lên đường dây.*

Lời giải. Ta có:

$$\begin{cases} H = \dfrac{\mathcal{P}_{tt}}{\mathcal{P}} = 0{,}98 \Rightarrow \mathcal{P} = \dfrac{\mathcal{P}_{tt}}{0{,}98} = \dfrac{196}{0{,}98} = 200\,\text{kW} \\ \Delta\mathcal{P} = (1-H)\mathcal{P} = (1-0{,}98)200 = 4\,\text{kW} \end{cases}$$

$$\Delta\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}^2}{U^2}R \Rightarrow U^2 = \frac{\mathcal{P}^2 R}{\Delta\mathcal{P}} = \frac{(200.10^3)^2.40}{4.10^3}$$

$\Rightarrow U = 20000$ V = 20 kV.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn sau đã có lời giải đúng: **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, *Nguyễn Tuấn Khải*, 10A2, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Khánh Duy*, 10E5, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; **Đồng Tháp:** *Trần Thảo Quyên*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN XUÂN QUANG



TÌM TÒI PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHO BÀI TOÁN - BẤT ĐẲNG THỨC 4 BIẾN

NGUYỄN MINH THỌ
(214 Điện Biên Phủ, Q.3, TP. Hồ Chí Minh)

Để chứng minh bài toán đẳng thức hoặc bất đẳng thức nhiều biến hoặc bậc cao thì chúng ta đã có nhiều phương pháp giải như áp dụng các hằng đẳng thức, các hệ thức đã có hoặc các bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, Schwarz, Jensen, Bernoulli, ...),... Việc tham khảo tài liệu để tìm tòi, tổng hợp thêm một số phương pháp chứng minh khác để giúp cho các bạn học sinh THCS, THPT và giáo viên dạy chuyên toán là rất cần thiết. Bài báo này, tác giả sẽ trình bày việc vận dụng một số phương pháp đã có để giải quyết một loạt bài toán nêu trên:

i) Phương pháp truy hồi dựa trên tính chất có nghiệm của phương trình bậc 4 để xác định các công thức truy hồi cho bốn biến, bậc cao; thí dụ về kết hợp bất đẳng thức cổ điển và phép biến đổi tương đương cho bài toán bất đẳng thức 4 biến;

ii) Vận dụng kết quả của bất đẳng thức Schur của bài toán 3 biến;

iii) Đặc biệt, tác giả mở rộng bổ đề "chặn tích" của bài toán 3 biến số thực không âm phát triển lên bài toán 4 biến số thực không âm.

I. Xác định công thức truy hồi tổng quát cho bài toán 4 biến

Xét phương trình bậc bốn với 4 nghiệm a, b, c, $d \in \mathbb{R}$: $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$ (1).

Phương trình (1) được biến đổi tương đương:

$$x^4 - px^3 + qx^2 - sx + r = 0 \quad (2).$$

Với các hệ số p, q, s, r được xác định theo a, b, c, d như sau: $p = a+b+c+d$;

$$q = ab+ac+ad+bc+bd+cd;$$

$$s = abc+abd+acd+bcd;\ r = abcd.$$

Bằng biến đổi đại số, ta dễ dàng tính được các tổng sau:

$$S_1 = a+b+c+d = p;$$

$$S_2 = a^2+b^2+c^2+d^2 = p^2-2q;$$

$$S_3 = a^3+b^3+c^3+d^3 = p^3-3pq+3s.$$

Đặt $S_n = a^n+b^n+c^n+d^n$, với n là số nguyên dương, $n \geq 4$. Nhân 2 vế của (2) cho x^{n-4}, ta được phương trình:

$$x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - sx^{n-3} + rx^{n-4} = 0 \quad (3).$$

Vì a, b, c, d là các nghiệm của (2) nên cũng là nghiệm của (3), ta có:

$$\begin{cases} a^n - pa^{n-1} + qa^{n-2} - sa^{n-3} + ra^{n-4} = 0 & \text{(i)} \\ b^n - pb^{n-1} + qb^{n-2} - sb^{n-3} + rb^{n-4} = 0 & \text{(ii)} \\ c^n - pc^{n-1} + qc^{n-2} - sc^{n-3} + rc^{n-4} = 0 & \text{(iii)} \\ d^n - pd^{n-1} + qd^{n-2} - sd^{n-3} + rd^{n-4} = 0 & \text{(iv)} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các phương trình từ (i) đến (iv), ta thu được hệ thức truy hồi sau:

$$S_n = pS_{n-1} - qS_{n-2} + sS_{n-3} - rS_{n-4} \quad (4).$$

Từ đây, bằng biến đổi, ta tính được: S_4, S_5, S_6,... bằng công thức truy hồi như sau:

$$S_4 = p^4 - 4p^2q + 4ps + 2q^2 - 4r;$$

$$S_5 = p^5 - 5p^3q + 5p^2s + 5pq^2 - 5pr - 5qs;$$

$$S_6 = p^6 - 6p^4q + 6p^3s + 9p^2q^2 - 6p^2r - 12pqs - 2q^3 + 6qr + 3s^2;$$

$$S_7 = p^7 - 7p^5q + 7p^4s + 14p^3q^2 - 7p^3r - 21p^2qs - 7pq^3 + 14pqr + 7ps^2 + 7q^2s - 7rs;$$

.....

Sau đây là một số thí dụ áp dụng công thức truy hồi để giải quyết các bài toán đẳng thức hoặc bất đẳng thức bốn biến.

Thí dụ 1. *Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a+b+c+d=0$; $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng:*

a) $3(a^5+b^5+c^5+d^5)=10(a^3+b^3+c^3+d^3)$;

b) $a^6+b^6+c^6+d^6 \geq 3(a^4+b^4+c^4+d^4)-8$.

Lời giải.

Vì $a+b+c+d=0$; $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ nên

$$S_1=p=0;\ S_2=p^2-2q=4 \Rightarrow q=-2$$

và $S_3=p^3-3pq+3s=3s$. Tiếp theo, ta tính S_4, S_5, S_6, ... theo công thức truy hồi, ta được:

$$S_4=p^4-4p^2q+4ps+2q^2-4r=2q^2-4r=8-4r;$$

$$S_5=p^5-5p^3q+5p^2s+5pq^2-5pr-5qs=10s;$$

$$S_6=p^6-6p^4q+6p^3s+9p^2q^2-6p^2r-12pqs-2q^3+6qr+3s^2=3s^2-12r+16;$$

$$S_7=-7s(r-4).$$

a) Ta có: $S_3=3s$; $S_5=10s \Rightarrow 3S_5=10S_3$

$\Leftrightarrow 3(a^5+b^5+c^5+d^5)=10(a^3+b^3+c^3+d^3)$.

b) Ta có:

$$S_6=3s^2-12r+16=\frac{S_3^2}{3}-12\left(2-\frac{S_4}{4}\right)+16$$

$$=\frac{S_3^2}{3}+3S_4-8 \geq 3S_4-8.$$

Do đó:

$$a^6+b^6+c^6+d^6 \geq 3(a^4+b^4+c^4+d^4)-8.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S_3=0 \Leftrightarrow s=0$.

Thí dụ 2. *Cho a,b,c,d là các số thực. Chứng minh rằng:*

$$12(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq 3(a+b+c+d)^2 \geq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Lời giải. Ta có: $S_2=a^2+b^2+c^2+d^2=p^2-2q$.

Ta có :

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq 2q$

$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq (a^2+b^2+c^2+d^2)+2q = p^2$.

$\Leftrightarrow 4(p^2-2q) \geq p^2 \Leftrightarrow 3p^2 \geq 8q$ (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$.

Thí dụ 3. *Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$.*

Đặt $p=a+b+c+d$;

$q=ab+ac+ad+bc+bd+cd$;

$s=abc+abd+acd+bcd$; $r=abcd$.

Chứng minh rằng: $qs \geq 6pr$.

Lời giải. Ta có:

$$qs=(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\times(abc+abd+acd+bcd)$$

$$=a^2b^2c+a^2b^2d+a^2bcd+b^2acd+a^2c^2b+a^2bcd$$
$$+a^2c^2d+c^2abd+a^2bcd+a^2d^2b+a^2d^2c+d^2abc$$
$$+b^2c^2a+b^2acd+c^2abd+b^2c^2d+b^2acd+b^2d^2a$$
$$+d^2abc+b^2d^2c+c^2abd+d^2abc+c^2d^2a+c^2d^2b$$
$$=a^2b^2c+a^2c^2d+a^2d^2b+a^2b^2d+b^2c^2a+b^2d^2c$$
$$+c^2d^2a+a^2c^2b+b^2c^2d+a^2d^2c+b^2d^2a+c^2d^2b$$
$$+3(a^2bcd+b^2acd+c^2abd+d^2abc).$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$a^2b^2c+a^2c^2d+a^2d^2b \geq 3a^2bcd;$$
$$a^2b^2d+b^2c^2a+b^2d^2c \geq 3b^2acd;$$
$$c^2d^2a+a^2c^2b+b^2c^2d \geq 3c^2abd;$$
$$a^2d^2c+b^2d^2a+c^2d^2b \geq 3d^2abc.$$

Do đó: $qs \geq 6(a^2bcd+b^2acd+c^2abd+d^2abc)$

$=6abcd(a+b+c+d)=6pr$ (đpcm).

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d$.

II. Xây dựng một bài toán bất đẳng thức 4 biến từ bất đẳng thức đã biết

a) Áp dụng bất đẳng thức Schur bậc 3 cho bộ 3 số không âm, ta lần lượt có :

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc;$$
$$(a+b-d)(b+d-a)(d+a-b) \leq abd;$$
$$(a+c-d)(d+c-a)(d+a-c) \leq acd;$$
$$(b+c-d)(d+c-b)(b+d-c) \leq bcd.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta thu được:

$$-3\sum_{cyc}a^3+2\sum_{cyc}a^2(b+c+d)-2\sum_{cyc}abc\le\sum_{cyc}abc$$

$$\Leftrightarrow -3\sum_{cyc}a^3+2\sum_{cyc}a^2(b+c+d)\le 3\sum_{cyc}abc$$

$$\Leftrightarrow -3(p^3-3pq+3s)+2\sum_{cyc}a^2(p-a)\le 3s$$

$\Leftrightarrow 18s\ge -3p^3+11pq$ là bất đẳng thức khá mạnh!

b) Tương tự như trên, ta xét bất đẳng thức sau với các biến $a,b,c,d\ge 0$:

$$T=(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)\times$$
$$\times(b+c+d-a)\le(a+b)^2(c+d)^2 \text{ (b.i).}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\ge d\ge 0$. Dễ thấy, để chứng minh (b.i) ta chỉ lưu ý trường hợp số hạng cuối ở vế trái là $b+c+d-a$ (vì 3 số hạng đầu luôn không âm; $a+b+c-d\ge a+b+d-c\ge a+c+d-b\ge 0$).

Áp dụng BĐT $mn\le\left(\frac{m+n}{2}\right)^2, \forall m,n$ ta có:

$$(a+b+c-d)(a+b+d-c)\le(a+b)^2;$$
$$(a+c+d-b)(b+c+d-a)\le(c+d)^2.$$

Suy ra đpcm (b.i). Tương tự, ta có 2 bất đẳng thức sau:

$$(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)\times$$
$$\times(b+c+d-a)\le(a+c)^2(b+d)^2 \text{ (b.ii)}$$
$$(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)\times$$
$$\times(b+c+d-a)\le(a+d)^2(b+c)^2 \text{ (b.iii).}$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức (b.i), (b.ii), (b.iii) và biến đổi theo p,q,s,r ta thu được:

$$3T\le(a+b)^2(c+d)^2+(a+c)^2(b+d)^2$$
$$+(a+d)^2(b+c)^2$$
$$\Leftrightarrow 3p^4+22ps+2q^2\ge 12p^2q+40r.$$

Như vậy ta có BĐT sau:

$$3p^4+22ps+2q^2\ge 12p^2q+40r.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

Chẳng hạn, bạn đọc hãy kiểm tra với a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+d=2, ab+ac+ad+bc+bd+cd=1$ thì $20abcd\le 22(abc+abd+acd+bcd)+1$.

III. Xây dựng bổ đề "chặn tích" cho bài toán bất đẳng thức 4 biến

Trong bài toán bất đẳng thức 4 biến a, b, c, d có xuất hiện tích r = abcd thường sẽ gây khó khăn cho người giải, và người giải phải đi tìm ràng buộc r từ các yếu tố giả thiết cho trước của bài toán. Việc xây dựng bổ đề "chặn tích" cho bài toán bất đẳng thức 4 biến nhằm giải quyết một số bài toán như trên.

Bổ đề. *Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $p=a+b+c+d=4$. Tồn tại số thực $t\in[0,1]$ thỏa mãn $q=6-6t^2; a^2+b^2+c^2+d^2=4+12t^2$. Chứng minh rằng:*

a) $s=abc+abd+acd+bcd\ge-\frac{44}{3}t^2+4\ge 4-20t^2;$

$(1-t^2)s\ge 4r.$

b) $(1-3t)\left(-9t^3+12t^2+3t-2+\frac{3s}{4}\right)\le r$

$$\le(1+3t)\left(9t^3+12t^2-3t-2+\frac{3s}{4}\right).$$

Chứng minh. Ta có: $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2+d^2)\ge 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

$\Leftrightarrow 3(p^2-2q)\ge 2q$

$\Leftrightarrow 8q\le 3p^2=3.4^2=48$

$\Leftrightarrow q\le 6.$

Do đó tồn tại số thực $t\in[0,1]$ thỏa mãn:

$$q=6-6t^2;\ a^2+b^2+c^2+d^2=4+12t^2.$$

Ta có:

$$4+12t^2=a^2+b^2+c^2+d^2\ge a^2+\frac{(b+c+d)^2}{3}$$
$$=a^2+\frac{(4-a)^2}{3} \quad (5)$$

Giải (5), ta thu được: $1-3t\le a\le 1+3t$. Tương tự cho các biến b, c, d ta có:

$$1-3t\le b\le 1+3t;$$
$$1-3t\le c\le 1+3t;$$
$$1-3t\le d\le 1+3t.$$

Kết hợp với a, b, c, d không âm nên ta có các đánh giá sau:

$$\begin{cases}\sum\limits_{cyc} a(b-1+3t)(c-1+3t)(d-1+3t)\ge 0\\ \sum\limits_{cyc} a(b-1-3t)(c-1-3t)(d-1-3t)\le 0\end{cases} \quad (6).$$

Khai triển tổng dạng: $\sum\limits_{cyc} a(b-w)(c-w)(d-w)$

$$=\sum_{cyc}\Big[-aw^3+(ab+ac+ad)w^2$$

$$-(abc+abd+acd)w+abcd\Big]$$

$$=-pw^3+2qw^2-3ws+4r$$

$$=-4w^3+12(1-t^2)w^2-3ws+4r \quad (*).$$

Thay w bởi $1-3t$ hoặc $1+3t$, ta biến đổi (6) trở thành:

$$\begin{cases}4r+3s(3t-1)-108t^4+180t^3-12t^2-36t+8\ge 0 \text{ (i)}\\ 4r-3s(3t+1)-108t^4-180t^3-12t^2+36t+8\le 0 \text{ (ii)}\end{cases} (7).$$

Trừ (7.i) và (7.ii) theo vế, ta thu được:

$$18t(20t^2+s-4)\ge 0\Rightarrow s\ge 4-20t^2 \text{ (vì } t\ge 0).$$

Như vậy, kết quả phần a) của bổ đề được chứng minh.

Ngoài ra, theo thí dụ 3, ta có:

$$qs\ge 6pr\Leftrightarrow 6(1-t^2)s\ge 24r\Leftrightarrow (1-t^2)s\ge 4r.$$

Theo phần II, ta có:

$$18s\ge -3p^3+11pq$$

$$\Leftrightarrow 264t^2+18s-72\ge 0$$

$$\Rightarrow s\ge -\frac{44}{3}t^2+4.$$

Từ 7.i và 7.ii, ta tìm được ràng buộc r, là kết quả phần b) của bổ đề:

$$(1-3t)\left(-9t^3+12t^2+3t-2+\frac{3s}{4}\right)\le r$$

$$\le (1+3t)\left(9t^3+12t^2-3t-2+\frac{3s}{4}\right).$$

Lưu ý. Nếu $0\le t\le \frac{1}{3}$, kết hợp $s\ge 4-20t^2>0$, ta có: $r\ge (1-3t)\left(-9t^3+12t^2+3t-2+\frac{3s}{4}\right)$

$$\ge (1-3t)(-9t^3-3t^2+3t+1)$$

$$=27t^4-12t^2+1\ge 0.$$

Làm r mạnh hơn nữa, nếu dùng $s\ge -\frac{44}{3}t^2+4$ thì

$$r\ge 27t^4-12t^3-8t^2+1$$

$$\ge 27t^4-12t^2+1.$$

Sau đây là một số thí dụ.

Thí dụ 4 (*Leo Giugiuc – 2024*). *Cho các số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn:*

$$S=4(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a+b+c+d)^2.$$

Với các ký hiệu như thí dụ 3, chứng minh rằng:

$$(a+b+c+d)^2\left(\frac{S}{3}+\sqrt{abcd}\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.$$

Lời giải. Vì bất đẳng thức là thuần nhất, đồng bậc (bậc 4) nên ta có thể chuẩn hóa tổng $p=4$. Ta dễ dàng chứng minh $p^2\ge\frac{8q}{3}\Rightarrow 0\le q\le 6$ nên tồn tại $t\in[0,1]$ thỏa mãn $q=6-6t^2$.

Ta có: $S=4(p^2-2q)-p^2=48-8q$. Thay q theo t vào bất đẳng thức cần chứng minh ta có:

$$16\left(\frac{48-8q}{3}+\sqrt{r}\right)\ge(16-2q)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{r}\ge\frac{(3q-16)q}{12}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{r}\ge 9t^4-10t^2+1=(t-1)(3t-1)(3t+1)(t+1)(8).$$

Vì $0\le t\le 1$ và $0\le r\le 1$ nên ta chỉ cần chứng minh (8) với trường hợp $0\le t\le\frac{1}{3}$. Áp dụng bổ đề trên, ta có: $1-3t\ge 0$; $s\ge 4-20t^2>0$ nên

$$r\ge 27t^4-12t^2+1\ge 0.$$

Để chứng minh (8), ta cần chỉ ra:

$$27t^4-12t^2+1\ge(9t^4-10t^2+1)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2(1-3t)(3t+1)(9t^4-19t^2+8)\ge 0 \quad (9).$$

Vì $9t^4-19t^2+8=9\left(t^2-\frac{1}{9}\right)^2-17t^2+\frac{71}{9}\ge 6$

nên (9) đúng với $0\le t\le\frac{1}{3}$.

Vậy bài toán được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi $t=0$ hoặc $t=\frac{1}{3}$.

+ Khi $t=0$ thì dễ thấy $a=b=c=d=1$.

+ Khi $t=\frac{1}{3}$ thì $p=4,\ q=\frac{16}{3},\ s=\frac{16}{9},\ r=0$ nên a, b, c, d là các nghiệm của phương trình:

$$X^4-4X^3+\frac{16X^2}{3}-\frac{16}{9}X=0$$

$$\Leftrightarrow X(9X^3-36X^2+48X-16)=0$$

$$\Leftrightarrow X_1=0,\ X_2=\frac{4-2\sqrt[3]{2}}{3}$$

và 2 nghiệm phức bị loại.

Thí dụ 5. *Cho các số thực không âm a, b, c, d. Với các ký hiệu như thí dụ 3, chứng minh rằng*

$$4r+p^2q\ge q^2+4ps.$$

Lời giải. Vì bất đẳng thức là thuần nhất, đồng bậc (bậc 4) nên ta có thể chuẩn hóa tổng $p=4$. Ta dễ dàng chứng minh $p^2\ge\frac{8q}{3}\Rightarrow 0\le q\le 6$ nên tồn tại $t\in[0,1]$ thỏa mãn $q=6-6t^2$. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$4r+96(1-t^2)\ge 36(1-t^2)^2+16s$$

$$\Leftrightarrow 9t^4+6t^2+4s-15\le r\quad(10).$$

Lại có: $s\le 4(1-t^2)$ nên

$$9t^4+6t^2+4s-15\le 9t^4+6t^2+16(1-t^2)-15$$
$$=(t^2-1)(3t-1)(3t+1).$$

Nên để chứng minh (10), ta cần chỉ ra:

$$(t^2-1)(3t-1)(3t+1)\le r\quad(11).$$

Nhận xét. Với $\frac{1}{3}\le t\le 1$ thì (11) thỏa mãn, nên ta chỉ cần chứng minh (11) với $0\le t\le\frac{1}{3}$.

Thật vậy, theo bổ đề trên, với $0\le t\le\frac{1}{3}$ và $s\ge-\frac{44}{3}t^2+4$, ta có: $r\ge 27t^4+12t^3-8t^2+1$.

Nên ta cần chỉ ra:

$$(t^2-1)(3t-1)(3t+1)\le 27t^4+12t^3-8t^2+1$$

$\Leftrightarrow -2t^2(3t+1)^2\le 0$ (đúng).

Vậy bài toán được chứng minh.

Tương tự như thí dụ 4, dấu bằng xảy ra khi $t=0$ $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Qua bài viết báo này tác giả muốn giới thiệu với bạn yêu toán một hướng tìm tòi, vận dụng thêm những phương pháp khác để giải quyết những bài toán đẳng thức – bất đẳng thức nhiều biến …. Sau đây là một số bài toán vận dụng.

Bài 1. Cho $a, b, c, d\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a+b+c+d=2;\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$.

Chứng minh rằng:

a) $5(a^4+b^4+c^4+d^4)=2(a^5+b^5+c^5+d^5)+16$;

b) $6(a^4+b^4+c^4+d^4)\le a^6+b^6+c^6+d^6+32$.

Bài 2. Cho $a, b, c, d\in\mathbb{R}^+$. Chứng minh rằng:

a) $16(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge(a+b+c+d)^3$
$\ge 16(abc+abd+acd+bcd)$.

b) $(a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$
$\ge 6(abc+abd+acd+bcd)$.

c) $(ab+ac+ad+bc+bd+cd)(abc+abd+acd+bcd)$
$\ge 6abcd(a+b+c+d)$.

d) $5(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^3$
$\ge 12abcd\left[6(a+b+c+d)^2-(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\right]$.

Bài 3. Cho $a, b, c, d\in\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $p=a+b+c+d=4$. Tồn tại $t\in[0;1]$ thỏa mãn:

$q=ab+ac+ad+bc+bd+cd=6-6t^2$;

$s=abc+abd+acd+bcd$;

$r=abcd$.

Chứng minh rằng:

$$4(1-2t)(1+t)^2\le s\le 4(1+2t)(1-t)^2.$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 116

PROBLEM. *Set up a recurrence formula to compute the n-digit numbers with no pairs of adjacent 1's which consist the digits 1, 2, and 3.*

Solution. Denote that number x_n.

It is clear that $x_1 = 3$ and $x_2 = 3^2 - 1 = 8$ (why?).

For $n \geq 3$, we divide the set of n-digit numbers with no pairs of adjacent 1's which consist the digits 1, 2, and 3 into two disjoint subsets: the subset A consisting of numbers with the first digit is 1 and the second one is either 2 or 3 and the subset B consisting of numbers with the first digit is either 2 or 3.

We can easily to show that $|A| = 2x_{n-2}$ and $|B| = 2x_{n-1}$. Therefore, we get a recurrence formula $x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}, n \geq 3$ and $x_2 = 8$, $x_1 = 3$.

***Remark*:** This problem is based on a problem in the Mathematical Olympiad Series, Vol 4.

TỪ VỰNG

recurrence : *truy hồi, đệ quy*
adjacent : *kề*
digit : *chữ số*
subset : *tập hợp con*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 114

BÀI TOÁN. *Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của một hình thập giác đều. Tính xác suất để 3 đỉnh này tạo thành một tam giác vuông.*



Lời giải. Số tam giác vuông bằng 5 × 8 vì có 5 cách chọn cạnh huyền phải là đường kính của đường tròn và với mỗi đường kính đã chọn, ta có 8 cách chọn góc đỉnh góc vuông. Do đó, xác suất cần tính là $\frac{5 \times 8}{C_{10}^3} = \frac{1}{3}$.

***Lưu ý*:** Bài toán này dựa trên một bài toán trong cuộc thi Toán của tỉnh Bắc Giang (2017 - 2018).

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được bài dịch nào của bài này gửi về Tòa soạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

PROBLEMS . . .

(*Tiếp theo trang 27*)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/575. Given two positive integers m and n. Suppose the real numbers $a_1, a_2, ..., a_m$ and $b_1, b_2, ..., b_n$ satisfy the condition

$$[a_1 + q] + [a_2 + q] + ... + [a_m + q] = [b_1 + q] + [b_2 + q] + ... + [b_n + q], \forall q \in [0;1)$$

where $[x]$ is the largest integer not exceeding x. Prove that $a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n$.

Problem T11/575. Given a sequence of numbers (x_n) satisfying $x_1 = 3$; $x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Determine the sequence (y_n) by

$$y_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + ... + \frac{1}{x_1 x_2 ... x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Find the limit $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

Problem T12/575. Given two circles (O_1) and (O_2) which are tangent to each other externally. Let the common external tangent be d. Circle (O_3) touches (O_1), (O_2) and d externally. Let the touch point between (O_1) and (O_2) be B_3, between (O_2) and (O_3) be B_1, between (O_3) and (O_1) be B_2. Let the touch points of (O_1), (O_2), (O_3) with d be A_1, A_2, A_3 respectively. Prove that A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 are concurrent.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hà Nội*)



BÀI TOÁN 95. *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$S=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{7}{4xy}+4xy.$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm 2024-2025, Quảng Ngãi)

Lời giải. *Cách 1.* *Áp dụng bất đẳng thức* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ *với* $a>0, b>0$.

Biến đổi: $S=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{4xy}+4xy+\frac{1}{xy}$, ta có:

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}\ge 4$$

(vì $x+y\le 1$). Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}x^2+y^2=2xy\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

Theo BĐT Cauchy có:

$$\frac{1}{4xy}+4xy\ge 2\sqrt{\frac{1}{4xy}.4xy}=2 \quad (1);$$

$$\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}\ge\frac{4}{1}\ge 4 \qquad (2).$$

Dấu "=" của (1) xảy ra khi

$$\begin{cases}\frac{1}{4xy}=4xy\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{4}\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

Dấu "=" của (2) xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Do đó: $S\ge 4+2+4=10$. Vậy $\min S=10\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Cách 2. *Đưa về* $\frac{1}{(x+y)^2}$.

Biến đổi: $S=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{4xy}+4xy+\frac{1}{xy}$.

Ta có: $\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}$

và $\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$. Do đó:

$$S\ge\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{1}{4xy}+4xy=\frac{8}{(x+y)^2}+\frac{1}{4xy}+4xy.$$

Mà $\frac{8}{(x+y)^2}\ge\frac{8}{1}=8$ vì $x+y\le 1$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x^2+y^2=2xy\\ x=y\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Áp dụng BĐT Cauchy: $\frac{1}{4xy}+4xy\ge 2\sqrt{\frac{1}{4xy}.4xy}=2$.

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}\frac{1}{4xy}=4xy\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\frac{1}{4}\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

Khi đó: $S\ge 8+2=10$. Vậy $\min S=10\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Cách 3. *Dùng điểm rơi đối với* x^2+y^2.

Biến đổi $S=\frac{1}{x^2+y^2}+4(x^2+y^2)+3\left(\frac{1}{4xy}+4xy\right)-4(x^2+y^2+2xy)+\frac{4}{4xy}$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}+4(x^2+y^2)+3\left(\frac{1}{4xy}+4xy\right)-4(x+y)^2+\frac{1}{xy}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{x^2+y^2}+4(x^2+y^2)\ge 2\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}.4(x^2+y^2)}=4 \ (3);$$

$$\frac{1}{4xy}+4xy\ge 2\sqrt{\frac{1}{4xy}.4xy}=2\Rightarrow 3\left(\frac{1}{4xy}+4xy\right)\ge 6 \ (4).$$

Dấu "=" của (3) xảy ra khi

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2}=4(x^2+y^2)\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

Dấu "=" của (4) xảy ra khi

$\begin{cases}\dfrac{1}{4xy}=4xy\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{1}{4}\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$. Ta có:

$-4(x+y)^2\ge -4$ (vì $x+y\le 1$); $\dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{4}{(x+y)^2}\ge\dfrac{4}{1}=4$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$. Do đó:

$S\ge 4+6-4+4=10$. Vậy $\min S=10\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

Cách 4. Dùng điểm rơi đối với $1-2xy$.

Ta có: $1\ge(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\Rightarrow x^2+y^2\le 1-2xy$

$\Rightarrow\dfrac{1}{x^2+y^2}\ge\dfrac{1}{1-2xy}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $S\ge\dfrac{1}{1-2xy}+\dfrac{7}{4xy}+4xy$. Biến đổi:

$$S\ge\frac{1}{1-2xy}+4(1-2xy)+3\left(\frac{1}{4xy}+4xy\right)+\frac{1}{xy}-4.$$

Áp dụng BĐT Cauchy:

$\dfrac{1}{1-2xy}+4(1-2xy)\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{1-2xy}.4(1-2xy)}=4$ (5);

$\dfrac{1}{4xy}+4xy\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{4xy}.4xy}=2\Rightarrow 3\left(\dfrac{1}{4xy}+4xy\right)\ge 6$ (6).

Dấu "=" của (5) xảy ra khi

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1-2xy}=4(1-2xy)\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

Dấu "=" của (6) xảy ra khi

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4xy}=4xy\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{1}{4}\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

$\dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{4}{(x+y)^2}\ge\dfrac{4}{1}=4$. Dấu "=" xảy ra $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $S\ge 4+6+4-4=10$. Vậy $\min S=10$.

Cách 5. Dùng đạo hàm.

$1\ge(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\Rightarrow x^2+y^2\le 1-2xy$

$\Rightarrow\dfrac{1}{x^2+y^2}\ge\dfrac{1}{1-2xy}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Do đó: $S\ge\dfrac{1}{1-2xy}+\dfrac{7}{4xy}+4xy$.

Biến đổi $S\ge\dfrac{1}{1-2xy}+\dfrac{6}{4xy}+\left(\dfrac{1}{4xy}+4xy\right)$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{4xy}+4xy\ge 2\sqrt{\frac{1}{4xy}.4xy}=2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{4xy}=4xy\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

Xét $F=\dfrac{1}{1-2xy}+\dfrac{6}{4xy}$. Đặt $t=2xy$.

Ta có: $1\ge(x+y)^2\ge 4xy\Rightarrow 2xy\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow 0<t\le\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $F=\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{3}{t}=\dfrac{3-2t}{t-t^2}$, $0<t\le\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $F'=\dfrac{-2t^2+6t-3}{(t-t^2)^2}<0,\ \forall t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. Do đó $F(t)\le F\left(\dfrac{1}{2}\right)=8$.

Vậy $S\ge 2+8=10\Rightarrow\min S=10\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

TRẦN VĂN HẠNH

(*GV Trường Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*)

Nhận xét. Kỳ này các bạn: *Nguyễn Phạm Minh Phú*, *Nguyễn Thái Huy*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, *Dương Phú Tài*, 8A8, THCS Lam Sơn, Q.6, **TP. Hồ Chí Minh**; *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải, **Thái Bình**; *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang** cũng đóng góp một số cách giải tương tự các cách mà bạn *Trần Văn Hạnh* đã đề xuất trong bài viết trên. Xin hoan nghênh các bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 97 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/6/2025.

BÀI TOÁN 97. *Cho a, b dương thỏa mãn $a^2+b^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2ab}{a+b+1}.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)



BÀI TOÁN 103 (Korean mathematics competition 2000). *Cho* $\frac{3}{4} < a < 1$. *Chứng minh rằng phương trình* $x^3(x+1) = (x+a)(2x+a)$ *có 4 nghiệm thực phân biệt và tìm các nghiệm này ở dạng chi tiết.*

Lời giải. Viết phương trình đã cho như là phương trình bậc hai theo a:

$$a^2 + 3xa + 2x^2 - x^3 - x^4 = 0.$$

Biệt thức của phương trình là:

$$\Delta_a = 9x^2 - 8x^2 + 4x^3 + x^4 = (x + 2x^2)^2.$$

Phương trình có nghiệm:

$$a = \frac{-3x \pm (x + 2x^2)}{2}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -x + x^2 \\ a = -x^2 - 2x \end{array}\right.$$

Xét $a = -x + x^2$ hay $x^2 - x - a = 0$. Do $a > \frac{3}{4} > 0$ ta được các nghiệm của phương trình này là:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Xét $a = -x^2 - 2x$ hay $x^2 + 2x + a = 0$. Do $a < 1$ nên ta được các nghiệm của phương trình này là:

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - a}.$$

Rõ ràng: $-1 - \sqrt{1-a} < -1 + \sqrt{1-a}$

và $\frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$.

Ta sẽ chứng tỏ:

$$-1 + \sqrt{1-a} < \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} \quad (*).$$

Thạt vậy, ta có:

$$-1 + \sqrt{1-a} < \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-a} < 3 - \sqrt{1+4a} \quad (**).$$

Với $\frac{3}{4} < a < 1$ thì $3 < 4a < 4 \Leftrightarrow 4 < 1 + 4a < 5$

$$\Leftrightarrow 2 < \sqrt{1+4a} < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 3 - \sqrt{1+4a} > 0.$$

Do đó: $(**) \Leftrightarrow 4(1-a) < 9 + 1 + 4a - 6\sqrt{1+4a}$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{1+4a} < 6 + 8a$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{1+4a} < 3 + 4a$$

$$\Leftrightarrow 9(1+4a) < 9 + 16a^2 + 24a$$

$$\Leftrightarrow 12a < 16a^2 \Leftrightarrow 3a < 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} < a.$$

BĐT cuối là hiển nhiên. Vậy (*) được chứng minh. Điều này chứng tỏ 4 nghiệm tìm được là phân biệt. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn ***Nguyễn Phạm Minh Phú***, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh** đã có lời giải đúng với bài toán đã cho..

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/6/2025.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 105. Xét hai đường tròn đồng tâm bán kính R và R_1 ($R_1 > R$) và một tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nhỏ. Các tia AB, BC, CD, DA thứ tự cắt đường tròn lớn tại C_1, D_1, A_1, B_1. Chứng minh rằng

a) $\frac{C_{A_1B_1C_1D_1}}{C_{ABCD}} \geq \frac{R_1}{R}$;

b) $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geq \left(\frac{R_1}{R}\right)^2$

trong đó C_{MNPQ}, S_{MNPQ} lần lượt kí hiệu là chu vi và diện tích của tứ giác $MNPQ$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU NHỈ ?

(*Đề đăng trên TH&TT số 571, tháng 1 năm 2025*)

Phân tích sai lầm. Lời giải của bạn *Hùng* bị sai khi cho rằng: $\sin^{2025} x = \left(\sin^2 x\right)^{\frac{2025}{2}}$.

Bởi vì $\sin^{2025} x = \left(\sin^2 x\right)^{\frac{2025}{2}}$ chỉ đúng khi

$$\sin x \geq 0.$$

Sau đây là lời giải đúng.

Bởi vì $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^{2025} x \leq \sin^2 x \\ \cos^{2024} x \leq \cos^2 x \end{cases}$.

Do đó: $\cos^{2024} x + \sin^{2025} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} \sin^{2025} x = \sin^2 x \\ \cos^{2024} x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

$$S = \left\{k\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường* đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng..

KIHIVI

ĐÁP SỐ NÀO !



Đề bài: *Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 13 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = 3x - y + 9.$$

Lời giải của bạn Hữu Thắng: Ta có:

$$\begin{aligned} P &= 3x - y + 9 \\ &= 3x - y + 9 + \left(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 13\right) \\ &= x^2 + y^2 + 7x - 9y + 22 \\ &= x^2 + 7x + \frac{49}{4} + y^2 - 9y + \frac{81}{4} - \frac{21}{2} \\ &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{21}{2} \geq -\frac{21}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức $P = -\dfrac{21}{2}$ xảy ra khi

$$\begin{cases} \left(x + \dfrac{7}{2}\right)^2 = 0 \\ \left(y - \dfrac{9}{2}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{9}{2} \end{cases}.$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} P &= 3x - y + 9 \\ &= 3x - y + 9 - \left(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 13\right) \\ &= -x^2 - y^2 - x + 7y - 4 \\ &= -x^2 - x - \frac{1}{4} - y^2 + 7y - \frac{49}{4} + \frac{17}{2} \\ &= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{17}{2} \leq \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức $P = \dfrac{17}{2}$ xảy ra khi

$$\begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ \left(y - \dfrac{7}{2}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases}.$$

Vậy $\min P = -\dfrac{21}{2}$, đạt được khi $\begin{cases} x = -\dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$;

và $\max P = \dfrac{17}{2}$, đạt được khi $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$.

Các bạn có tìm ra đáp số giống như đáp số của bạn Hữu Thắng không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 575 (5.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập **: *TS.* TRẦN HỮU NAM** **Phó tổng biên tập : *CN.* TRẦN THỊ KIM CƯƠNG**

***Thư kí Tòa soạn*: CN. VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Anh Tuấn, Nguyễn Thị Thúy Bình – Sử dụng tổng các lũy thừa để giải bài toán tìm số dư khi chia một lũy thừa cho một số nguyên tố.

6 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 tỉnh Thanh Hóa năm học 2024 - 2025.

11 Đề thi chọn học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Nam Định, năm học 2024 - 2025.

13 **Thử sức trước kỳ thi THPTQG** – Hướng dẫn giải đề số 4 – Đề số 5.

19 **Diễn đàn dạy học toán**
Trần Quang Thuận, Hà Văn Thắng – Xác suất có điều kiện (kỳ 1).

26 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/575, ..., T12/575, L1/575, L2/575.

28 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/571, ..., T12/571, L1/571, L2/571.

38 **Phương pháp giải toán**
Nguyễn Minh Thọ - Tìm tòi phương pháp giải cho bài toán – Bất đẳng thức bốn biến.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 116 – Bài dịch số 114.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 95 – Đề bài toán 97.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 103. Đề bài toán 105.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*: KIM THANH, NHƯ HOÀNG**
***Trị sự, phát hành*: TRẦN THỊ MINH HIỀN**
***Mĩ thuật*: QUỐC HIỆP, THANH LONG**
***Thiết kế, chế bản*: MINH HÒA**

BỘ SÁCH ÔN THI VÀO LỚP 10

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI



CHINH PHỤC KÌ THI NÂNG TẦM ĐIỂM SỐ



GÓI ĐỀ LUYỆN THI
Chỉ từ
50.000đ/môn
20 đề thi thử
10 video chấm chữa

Nắm trọn kiến thức
Học đúng, nhớ lâu!

Hệ thống lý thuyết tinh gọn, dễ hiểu, đầy đủ trọng tâm giúp học sinh nắm chắc kiến thức và vận dụng linh hoạt vào bài thi.

Tối ưu phương pháp
Làm bài nhanh, lấy điểm cao!

Hướng dẫn chi tiết cách giải từng dạng bài, tránh lỗi sai thường gặp, chiến lược và bí kíp tăng điểm, giúp 2K10 rút ngắn thời gian và tối đa điểm số.

onthi.hoclieu.vn/vao10

Luyện đề bám sát
Tự tin trước mọi dạng đề!

Bộ đề thi được biên soạn theo ma trận của từng địa phương, giúp học sinh làm quen với cấu trúc đề thi thật.

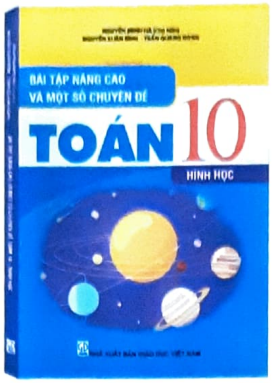
QUÉT MÃ
ĐỂ ĐƯỢC HỖ TRỢ NHANH NHẤT

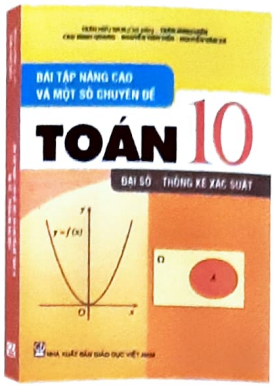
HỖ TRỢ - GIẢI ĐÁP - TƯ VẤN

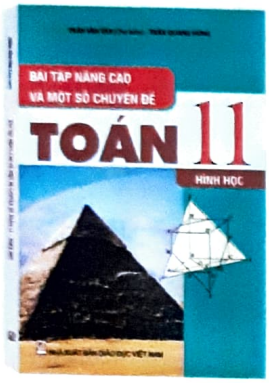
heid.vn - hoclieu.vn
HEID
1900 636 011
hotro@hoclieu.vn

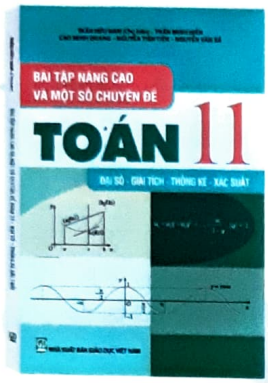
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Giới thiệu bộ sách

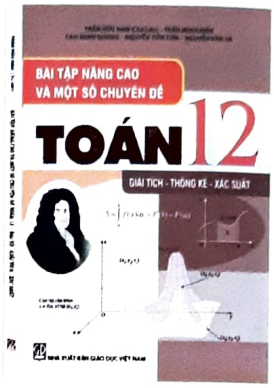












BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN

(DÀNH CHO HỌC SINH THPT – THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018)

TÁC GIẢ: TRẦN VĂN TẤN, NGUYỄN MINH HÀ, TRẦN QUANG HÙNG, TRẦN HỮU NAM,...

Bộ sách "Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán" gồm các cuốn:

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Đại số, Giải tích, Xác suất, Thống kê.

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Hình học

Mỗi cuốn sách gồm hai phần:

Phần một gồm các chương, bài bám sát Chương trình giáo dục phổ thông 2018, mỗi bài gồm:

• Tóm tắt kiến thức: tóm tắt những kiến thức trọng tâm của bài, được vận dụng để giải các bài tập, các dạng toán trong bài. Tuỳ theo nội dung từng bài mà ở phần này có thể có thêm phần Kiến thức bổ sung nâng cao liên quan đến chủ đề của bài học.

• Ví dụ minh hoạ: phương pháp giải, các ví dụ giúp học sinh hiểu sâu, rộng hơn những kiến thức đã học, đồng thời có được những kĩ năng cần thiết cho việc giải toán.

• Bài tập đề nghị: bổ sung các bài tập đề nghị cho mỗi dạng toán. Các bài tập được phân loại từ cơ bản đến nâng cao.

Phần hai gồm các Chuyên đề (dành cho học sinh khá, giỏi): các dạng toán thường xuất hiện trong các kì thi vào Đại học&Cao đẳng, trong các kì thi học sinh giỏi và Olympic. Các chuyên đề sẽ giúp học sinh phát triển kiến thức đã học, cung cấp cho học sinh cơ sở của những phương pháp giải toán thường sử dụng.

Sách được biên soạn theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 để học sinh có thể củng cố kiến thức của mình ngay sau mỗi giờ học trên lớp, đồng thời bổ sung và khắc sâu thêm một số vấn đề lí thuyết nhằm bồi dưỡng học sinh giỏi.

BẠN ĐỌC TÌM MUA SÁCH TẠI

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: Tầng 4, Toà Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Q. Thanh Xuân, TP. Hà Nội

Điện thoại: 024.35121533 (số máy lẻ 118) - 0904893398 | **Fax:** 024.35123278

Email: kinhdoanh.heps@gmail.com | **Website:** http://xbgdhn.vn/

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT5M25

In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2025

Giá: 18.000 đồng

Mười tám nghìn đồng