TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 573
Tháng 3 - 2025
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học cổ Hy Lạp **Hippasus** (khoảng 530-450 TCN)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2023
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2024
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 300.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



SỬ DỤNG HỆ THỨC VIÈTE TRONG SỐ HỌC

HOÀNG VIỆT DŨNG (GV THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh, Nghệ An)
NGUYỄN CÔNG LỢI (GV THCS Thị trấn Quỳ Hợp, H. Quỳ Hợp, Nghệ An)

Hệ thức Viète được sử dụng ở một số bài toán liên quan đến phương trình bậc hai để giải quyết các bài toán liên quan. Ngoài ra, hệ thức này cũng khá hữu hiệu ở các dạng toán khác... Chúng tôi xin giới thiệu một ứng dụng của hệ thức Viète trong các bài toán số học.

Thí dụ 1. *Cho các số nguyên x thoả mãn x^2+2 chia hết cho $x-1$. Chứng minh rằng*

$$A=\frac{x^2+2025x-2023}{x-1}$$

là hiệu của hai số chính phương.

★ ***HDG.*** Trước hết ta viết lại A như sau:

$$A=\frac{x^2+2025x-2023}{x-1}=\frac{x^2+2+2025(x-1)}{x-1}$$

$$=\frac{x^2+2}{x-1}+2025.$$

Như vậy để chứng minh được A là hiệu của hai số chính phương ta cần phải tính được giá trị của $\frac{x^2+2}{x-1}$. Do x^2+2 chia hết cho $x-1$ nên tồn tại số nguyên m thoả mãn $\frac{x^2+2}{x-1}=m$. Đến đây ta quy bài toán về tìm các số nguyên m để phương trình $x^2-mx+m+2=0$ có các nghiệm đều nguyên.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x và tham số m, khi đó để phương trình có nghiệm thì ta cần có $\Delta_x=m^2-4(m+2)\geq 0$.

Giả sử phương trình có các nghiệm nguyên là x_1, x_2. Chú ý rằng phương trình trên có hệ số $a=1$ nên theo hệ thức Viète thì ta có:

$$x_1+x_2=m;\ x_1.x_2=m+2.$$

Như vậy chỉ cần tìm được các giá trị nguyên của hai nghiệm thì sẽ tìm được giá trị của m tương ứng. Từ các hệ thức Viète như trên ta có:

$$x_1.x_2-(x_1+x_2)=2 \text{ hay } (x_1-1)(x_2-1)=3.$$

Khi đó x_1-1 và x_2-1 là các ước của 3, mà ta lại có $3=1.3=-1.(-3)$ nên việc tìm hai nghiệm $x_1;x_2$ hoàn toàn đơn giản. Qua đó ta tìm được các giá trị m là $m=-2$ và $m=6$.

Do các giá trị m đều là số chẵn nên $A=m+2025$ là số lẻ. Đặt $A=2k+1$ với k là số nguyên dương. Khi đó ta có:

$$A=2k+1=(k+1)^2-k^2$$

là hiệu của hai số chính phương. Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

★ ***Nhận xét.*** Quá trình phân tích, suy luận như trên chủ yếu tập trung chủ yếu theo hướng sử dụng hệ thức Viète để giải quyết bài toán. **Ngoài ra ta cũng có thể giải quyết bài toán theo hướng khác như sau:**

+ ***Hướng 1.*** Do phương trình có nghiệm nguyên nên ta cần có Δ_x là số chính phương. Từ đó ta quy về giải phương trình nghiệm nguyên

$$m^2-4(m+2)=k^2$$

hay $\quad (m-2+k)(m-2-k)=12.$

+ ***Hướng 2.*** Ta có biến đổi

$$m=\frac{x^2+2}{x-1}=\frac{x^2-1+3}{x-1}=x+1+\frac{3}{x-1},$$

như vậy để tìm giá trị của m nguyên ta đi tìm x nguyên thoả mãn $x-1\in\{-3;-1;1;3\}$.

Thí dụ 2. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}.$$

★ ***HDG.*** Ta có $(3,7)=1$ nên từ phương trình đã cho ta thấy tồn tại số nguyên m thoả mãn $x+y=3m;\ x^2+y^2-xy=7m$. Biến đổi tiếp ta được $x+y=3m;\ xy=\dfrac{9m^2-7m}{3}$. Theo hệ thức Viète thì x và y là các nghiệm của phương trình $3X^2-9mX+\left(9m^2-7m\right)=0$.

Thế thì ta có $\Delta=-27m^2+84m$ và phương trình trên chỉ có nghiệm khi $\Delta=-27m^2+84m\ge 0$ hay $0\le 9m\le 28$. Do m là số nguyên nên $m=\{0;1;2;3\}$. Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $m=0$ suy ra $x+y=0$, khi đó ta được phương trình:

$$x^2-xy+y^2=0\Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=0$$
$$\Leftrightarrow 3xy=0\Leftrightarrow x=y=0.$$

+ Với $m=1$ suy ra $x+y=3$, khi đó ta được phương trình:

$$x^2-xy+y^2=7\Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=7\Leftrightarrow 3xy=2.$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Với $m=2$ suy ra $x+y=6$, khi đó ta được phương trình:

$$x^2-xy+y^2=14\Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=14$$
$$\Leftrightarrow 3xy=22.$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Với $m=3$ suy ra $x+y=9$, khi đó ta được phương trình:

$$x^2-xy+y^2=21\Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=21$$
$$\Leftrightarrow 3xy=60\Leftrightarrow xy=20.$$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases}x+y=9\\xy=20\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=4;y=5\\x=5;y=4\end{array}\right.$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là:

$$(x;y)\in\{(0;0),(4;5),(5;4)\}.$$

★ ***Nhận xét.*** Từ $x+y=3m;\ x^2+y^2-xy=7m$ ta có thể biến đổi theo một hướng khác là:

$$(x+y)^2-\left(x^2-xy+y^2\right)=(3m)^2-7m$$

hay $$3xy=9m^2-7m.$$

Lại có $4xy\le(x+y)^2$ nên từ hệ thức trên ta được:

$$3.9m^2\ge 4\left(9m^2-7m\right).$$

Biến đổi bất đẳng thức trên ta cũng thu được $0\le 9m\le 28$ và đến đây ta giải hoàn toàn tương tự như trình bày ở trên.

Thí dụ 3. *Tìm các số nguyên dương x,y sao cho $\sqrt{x+y}$ là số hữu tỷ và $\sqrt{x+y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}+2=0$.*

★ ***HDG.*** Đây là một phương trình nghiệm nguyên dạng vô tỷ, lẽ dĩ nhiên là khi biến đổi phương trình ta thường sử dụng phép nâng lên lũy thừa để loại bớt dấu căn bậc hai. Để ý rằng khi viết phương trình thành $\sqrt{x+y}+2=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ thì trong quá trình nâng lên lũy thừa sẽ xuất hiện các đại lượng $x+y$ và xy, điều này làm ta liên tưởng đến hệ thức Viète. Thực hiện bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$x+y+4+4\sqrt{x+y}=x+y+2\sqrt{xy}$$

hay $$2\sqrt{x+y}+2=\sqrt{xy}.$$

Do $x,y\in\mathbb{Z}^+$ và $\sqrt{x+y}\in\mathbb{Q}$ nên xy là số chính phương và $\sqrt{xy}\in\mathbb{N}$, hơn nữa $\sqrt{xy}$ là số chẵn.

Đặt $\sqrt{xy}=2a,\ a\in\mathbb{N}^*$. Khi đó từ phương trình trên ta được $\sqrt{x+y}=a-1$.

Từ đó suy ra $x+y=(a-1)^2;\ xy=4a^2$. Từ đó theo hệ thức Viète thì x và y là hai nghiệm của phương trình: $t^2-(a-1)^2t+4a^2=0$.

Thế thì ta lại có:

$$\Delta_t=(a-1)^4-16a^2=(a+1)^2\left(a^2-6a+1\right).$$

Để phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương ta sử dụng điều kiện Δ_t phải là số chính phương, ngoài ra từ $\sqrt{x+y}=a-1$ thì ta được $a\ge 2$.

Đặt $a^2-6a+1=b^2$ với $b\in\mathbb{N}$, khi đó ta được:

$$(a-b-3)(a+b-3)=8.$$

Như vậy $a-b-3;\ a+b-3$ cũng là ước của 8. Để ý rằng $0<a-b-3<a+b-3$ và $a-b-3;a+b-3$ cùng là số chẵn nên ta thu được $a-b-3=2$ và $a+b-3=4$.

Từ đó tìm được $a=6$ thỏa mãn, do đó ta có phương trình $t^2-25t+144=0$ suy ra $t_1=9;t_2=16$ thoả mãn.

Vậy các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình là:

$$(9;16),(16;9).$$

★ ***Nhận xét.*** Ngoài cách sử dụng hệ thức Viète như trên thì ta có thể biến đổi phương trình như sau:

$$\begin{aligned}2\sqrt{x+y}=\sqrt{xy}-2&\Leftrightarrow 4(x+y)=xy-4\sqrt{xy}+4\\&\Leftrightarrow 4\left(x+y+2\sqrt{xy}\right)=xy+4\sqrt{xy}+4\\&\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{xy}+2\right)^2\\&\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\sqrt{xy}+2\\&\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{y}-2\right)=2.\end{aligned}$$

Chú ý rằng từ $\sqrt{xy}$ và $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ là số tự nhiên khác 0 ta suy ra được $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$ là số tự nhiên khác 0.

Thật vậy, đặt $m=\sqrt{x}+\sqrt{y}\ (m\in\mathbb{N}^*)$, suy ra $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\left(m-\sqrt{x}\right)$ hay ta được $\sqrt{xy}+x=m\sqrt{x}$.

Dẫn đến $\sqrt{x}\in\mathbb{N}^*$, kết hợp với $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbb{N}^*$ ta có $\sqrt{y}\in\mathbb{N}^*$.

Như vậy $\sqrt{x}-2$ và $\sqrt{y}-2$ là các ước của 2. Đến đây ta tìm được kết quả như trên.

Thí dụ 4. *Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $\dfrac{1-a^2}{5a}=\dfrac{1-b^2}{5b}=\dfrac{1-c^2}{4c}=\dfrac{1-d^2}{4d}=p$ với p là số nguyên dương. Chứng minh rằng $A=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là một số chính phương.*

★ ***HDG.*** Từ giả thiết ta nhận thấy các số thực a, b, c, d khác 0. Biến đổi giả thiết của bài toán ta thu được:

$$a^2+5pa-1=0;\ b^2+5pb-1=0;$$
$$c^2+4pc-1=0;\ d^2+4pd-1=0.$$

Ta thấy hai đẳng thức đầu có dạng giống nhau và hai đẳng thức sau có dạng giống nhau, các đẳng thức trên đều có dạng phương trình bậc hai.

Xét hai phương trình bậc hai ẩn x là $x^2+5px-1=0$ và $x^2+4px-1=0$. Khi đó ta thấy a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2+5px-1=0$ và c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2+4px-1=0$. Lại biến đổi biểu thức A ta được:

$$\begin{aligned}&(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)\\&=\left[ab-(a+b)c+c^2\right]\left[ab+(a+b)d+d^2\right].\end{aligned}$$

Từ kết quả biến đổi biểu thức A ta thấy có sự xuất hiện tổng và tích các nghiệm của phương trình bậc hai, điều này làm ta liên tưởng đến việc sử dụng hệ thức Viète để xây dựng các hệ thức về nghiệm.

Như vậy theo hệ thức Viète ta được:

$$\begin{cases}a+b=-5p\\ab=-1\end{cases}\text{ và }\begin{cases}c+d=-4p\\cd=-1\end{cases}.$$

Thế vào biểu thức A ở trên ta được:

$$\begin{aligned}&\left[ab-(a+b)c+c^2\right]\left[ab+(a+b)d+d^2\right]\\&=\left(c^2+5pc-1\right)\left(d^2-5pd-1\right).\end{aligned}$$

Chú ý rằng: $\left(c^2+5pc-1\right)\left(d^2-5pd-1\right)$

$$=\left(c^2+4pc-1+pc\right)\left(d^2+4pd-1-9pd\right).$$

Kết hợp với $c^2+4pc-1=d^2+4pd-1=0$ ta được:

$$(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=-9p^2cd=9p^2=(3p)^2.$$

Vậy $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là một số chính phương.

★ ***Nhận xét.*** Với giả thiết a, b, c, d là số thực nên ta không thể sử dụng sử dụng các kiến thức số học liên quan để chứng minh A là số chính

phương. Như vậy với giả thiết và biểu thức A đã cho thì việc sử dụng hệ thức Viète để giải quyết bài toán là phương án khả tự nhiên và gọn gàng.

Thí dụ 5. *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho tồn tại số tự nhiên m thỏa mãn hệ thức sau:*

$$\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}.$$

★ ***HDG.*** Quan sát hệ thức $\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}$, hai đại lượng pq và $p+q$ làm ta liên tưởng đến hệ thức Viète.

• **Trường hợp 1:** Nếu $p=q$, khi đó kết hợp với $\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}$ ta được:

$$p=\frac{2\left(m^2+1\right)}{m+1}=2m-2+\frac{4}{m+1}.$$

Do $m\in\mathbb{N}$ và p là số nguyên tố nên $4\vdots(m+1)$, do đó $m\in\{0;1;3\}$. Từ đó ta tìm được $p=q=2$ và $p=q=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• **Trường hợp 2:** Nếu $p\neq q$ thì $(pq, p+q)=1$.

Khi đó gọi r là một ước chung của m^2+1 và $m+1$. Khi đó ta có:

$$\left[(m+1)(m-1)\right]\vdots r\Rightarrow\left(m^2-1\right)\vdots r.$$

Do đó $\left[\left(m^2+1\right)-\left(m^2-1\right)\right]\vdots r\Rightarrow 2\vdots r$ suy ra $r=1$ hoặc $r=2$.

+ Với $r=1$ suy ra $p+q=m+1; pq=m^2+1$, khi đó p và q là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2-(m+1)x+m^2+1=0.$$

Ta có:

$$\Delta=-3m^2+2m-3=-(m-1)^2-\left(2m^2+2\right)<0$$

nên phương trình trên vô nghiệm.

+ Với $r=2$ suy ra $2pq=m^2+1; 2(p+q)=m+1$, khi đó p và q là hai nghiệm của phương trình:

$$2x^2-(m+1)x+m^2+1=0.$$

Ta có:

$$\Delta=-7m^2+2m-7=-(m-1)^2-\left(6m^2+6\right)<0$$

nên phương trình vô nghiệm.

Vậy bộ các số nguyên tố cần tìm là:

$$(p;q)\in\{(2;2);(5;5)\}.$$

★ ***Nhận xét.***

• Có thể nói đây là một bài toán số học khó, tuy nhiên hai đại lượng pq và $p+q$ làm ta liên tưởng đến hệ thức Viète, do đó để tìm được các số nguyên tố p và q là cần làm xuất hiện phương trình bậc hai. Điều may mắn ở đây là các phương trình bậc hai lập được đều vô nghiệm.

• Ta viết lại hệ thức trên thành $(p+q)m^2-pqm+p+q-pq=0$, khi đó nếu thay $m=x$ thì ta viết lại được $(p+q)x^2-pqx+p+q-pq=0$. Từ đó ta phát biểu được bài toán:

Tìm các số nguyên tố p và q để phương trình sau có nghiệm nguyên dương:

$$(p+q)x^2-pqx+p+q-pq=0.$$

Thí dụ 6. *Tìm số nguyên tố p để p^2-p+1 là lập phương của một số nguyên tố khác.*

★ ***HDG.*** Giả sử tồn tại số nguyên tố q thoả mãn yêu cầu bài toán, khi đó ta có $p^2-p+1=q^3$ hay $p^2-p+1-q^3=0$. Có thể xem hệ thức là phương trình bậc hai ẩn p và tham số q. Khi đó để phương trình có nghiệm nguyên dương thì ta cần có $\Delta=1+4\left(q^3-1\right)=4q^3-3$ là số chính phương. Ngoài ra theo hệ thức Viète ta có hai nghiệm $p_1; p_2$ thoả mãn $p_1+p_2=1$ và $p_1.p_2=1-q^3$. Nhận thấy rằng các phân tích, suy luận như trên chưa đem lại hiệu quả cho việc tìm lời giải, do đó ta cần biến đổi đẳng thức trên về một dạng khác. Ta có thể viết lại đẳng thức trên thành:

$$p(p-1)=(q-1)\left(q^2+q+1\right).$$

Từ đó suy ra: $(q-1)\left(q^2+q+1\right)\vdots p$. Do p là số nguyên tố nên ta suy ra được $q-1\vdots p$ hoặc $q^2+q+1\vdots p$.

Nếu $q-1 \vdots p$ thì do q là số nguyên tố nên $q-1 \geq p$ hay $q > p$. Điều này dẫn đến:

$$p^2 - p + 1 = q^3 > p^3$$

hay $$p(p-1) > (p-1)(p^2+p+1)$$

và do vậy ta thu được $p > p^2 + p + 1$, điều này vô lí do p là số nguyên tố.

Như vậy ta phải có $q^2 + q + 1 \vdots p$, tức là tồn tại số nguyên dương k thoả mãn $q^2 + q + 1 = kp$. Khi đó từ $p(p-1) = (q-1)(q^2+q+1)$ ta được:

$$p - 1 = k(q-1).$$

Kết hợp với $q^2 + q + 1 = kp$ ta được:

$$q^2 + (1-k^2)q + (k^2 - k + 1) = 0.$$

Có thể xem $q^2 + (1-k^2)q + (k^2-k+1) = 0$ là phương trình bậc hai có ẩn q và tham số k.

Do phương trình có nghiệm nguyên tố nên $\Delta_q = (k^2-1)^2 - 4(k^2-k+1)$ phải là số chính phương.

Nếu q là số nguyên tố thoả mãn yêu cầu bài toán thì q là một nghiệm của phương trình trên, như vậy theo hệ thức Viète thì phương trình còn có một nghiệm nữa là q_1 thoả mãn $q + q_1 = k^2 - 1$ và $q.q_1 = k^2 - k + 1$. Từ các hệ thức trên ta suy ra được q_1 là số nguyên dương.

Ta có số nguyên tố $q \geq 2$ và như vậy nếu $q_1 \geq 2$ thì dễ thấy $q.q_1 \geq q + q_1$ hay ta có $k^2 - k + 1 \geq k^2 - 1$ nên $k \leq 2$. Thử trực tiếp $k = 1$ hoặc $k = 2$ ta đều có Δ_q không phải là số chính phương. Từ đó dẫn đến $q_1 = 1$.

Thay $q_1 = 1$ vào phương trình trên ta được $1^2 + (1-k^2).1 + (k^2-k+1) = 0$, giải phương trình ẩn k ta được $k = 3$ là số nguyên dương thoả mãn.

Thay trực tiếp $k = 3$ và $q_1 = 1$ vào $q.q_1 = k^2 - k + 1$ ta được $q = 7$. Lại thay $q = 7$ và $k = 3$ vào $p - 1 = k(q-1)$ ta được $p = 19$ thỏa mãn bài toán.

Vậy số nguyên tố cần tìm là $p = 19$.

★ ***Nhận xét.*** Để tìm số nguyên dương k thoả mãn $\Delta_q = (k^2-1)^2 - 4(k^2-k+1)$ là số chính phương ta có thể chặn Δ_q giữa hai số chính phương.

Dễ thấy $k^2 - k + 1 > 0$ nên $\Delta_q < (k^2-1)^2$. Mặt khác ta có:

$$\Delta_q = (k^2-1)^2 - 4(k^2-1) + 4 + 4k - 12$$
$$= (k^2-3)^2 + 4(k-3).$$

Nếu $k > 3$ thì ta có $\Delta_q > (k^2-3)^2$ và như vậy $(k^2-3)^2 < \Delta_q < (k^2-1)^2$. Do đó $\Delta_q = (k^2-2)^2$ hay $(k^2-1)^2 - 4(k^2-k+1) = (k^2-2)^2$ nên $2k^2 - 4k + 7 = 0$, phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Từ đó ta có $k \in \{1; 2; 3\}$ và thử trực tiếp ta thấy với $k = 3$ thì Δ_q là số chính phương.

Thí dụ 7 (Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà nội 2006 – 2007). *Tìm các chữ số a, b, c, d, e thỏa mãn điều kiện*

$$\overline{ab} + \overline{cde} = \sqrt{\overline{abcde}}.$$

★ ***HDG.*** *Đặt* $x = \overline{ab}$ và $y = \overline{cde}$ với $x, y \in \mathbb{N}^*$ và $10 \leq x \leq 99; 100 \leq y \leq 999$.

Theo bài ra ta có $x + y = \sqrt{1000x + y}$ hay ta được $(x+y)^2 = 1000x + y$. Với cách biến đổi khác ta được $(x+y)^2 - 1000(x+y) + 999y = 0$. Phương trình có dạng bậc hai nên để gọn gàng hơn ta thực hiện phép đặt $t = x + y$ với $t \in \mathbb{N}^*$ và $110 \leq t \leq 1098$.

Từ đó ta được $t^2 - 1000t + 999y = 0$ và phương trình bậc hai ẩn t có nghiệm khi

$\Delta_t' = 250000 - 999y \geq 0$, do đó suy ra $y \leq 250$.

Khi đó theo hệ thức Viète thì phương trình có hai nghiệm t_1 và t_2 thoả mãn:

$$t_1 + t_2 = 1000;\ t_1 t_2 = 999y.$$

Từ các hệ thức trên ta suy ra được $t_1 > 0; t_2 > 0$ và nếu $t_1 \in \mathbb{N}^*$ thì $t_2 \in \mathbb{N}^*$. Như vậy từ $t_1 t_2 = 999y$ ta được $t_1 t_2 \vdots 3$, đồng thời lại có $t_1 + t_2$ chia 3 dư 1 nên trong hai số tự nhiên t_1 và t_2 thì có một số chia hết cho 3 và số còn lại không chia hết cho 3.

Giả sử t_1 chia hết cho 3 và t_2 không chia hết cho 3. Để ý rằng $999 = 27.37$ và $(27,37) = 1$ nên ta được t_1 chia hết cho 27 và t_2 không chia hết cho 3.

Do 37 là số nguyên tố nên nếu $t_1 \vdots 37$ thì ta có $t_1 \vdots 999$, do đó $t_1 = 999; t_2 = 1$. Khi đó thay vào hệ thức Viète trên ta được $y = 1$, điều này vô lí. Do đó t_1 chia hết cho 27 và t_1 không chia hết cho 37 hay t_2 chia hết cho 37.

Khi đó tồn tại các số $m, n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $t_1 = 27m; t_2 = 37n$. Kết hợp với hệ thức Viète trên ta được $27m + 37n = 1000$ hay $n = 999 - 27m - 36n + 1$ nên n chia 9 có số dư là 1. Khi đó ta đặt $n = 9k + 1$ với k là số nguyên dương. Đến đây ta suy ra được:

$$27m + 37(9k + 1) = 1000$$

hay $333k = 1000 - 27m - 37 \leq 853$.

Từ đó dẫn đến $k \leq 2$. Với $k = 1$ thì $n = 10$ nhưng $m \notin \mathbb{Z}$. Do đó $k = 2$, suy ra $n = 19; 27m = 297$ nên $37n = 703$.

Vậy ta được $t_1 = 297; t_2 = 703$ và do đó ta có $y = 209$.

+ Nếu $x + y = 297$ thì ta được $x = 88$ (thỏa mãn).

+ Nếu $x + y = 703$ thì ta được $x = 494$, trường hợp này loại.

Vậy các chữ số cần tìm là:

$$a = b = 8; c = 2; d = 0; e = 9.$$

★ ***Nhận xét.*** Ta có một hướng khác để giải phương trình $(x + y)^2 = 1000x + y$. Từ phương trình trên ta có $(x + y)^2 - (x + y) = 999x$ hay $(x + y)(x + y - 1) = 999x$.

Chú ý là $(x + y)^2 \leq 99999$ nên ta được:

$$x + y \leq 316.$$

Để ý tiếp ta lại thấy $(x + y, x + y - 1) = 1$ và $(27,37) = 1$, nên kết hợp với kết quả trên ta được $x + y \vdots 27$ và $x + y - 1 \vdots 37$ hoặc $x + y \vdots 37$ và $x + y - 1 \vdots 27$. Đến đây ta đi xét hai trường hợp.

• **Trường hợp 1:** Với $x + y \vdots 27$ và $x + y - 1 \vdots 37$, khi đó tồn tại hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $x + y = 27m$ và $x + y - 1 = 37n$.

Từ đó suy ra $27m = 37n + 1$, giải phương trình nghiệm nguyên này ta được:

$$m = 37k + 11; n = 27k + 8 \text{ với } k \in \mathbb{N}^*.$$

Cũng từ $(x + y)(x + y - 1) = 999x$ ta được:

$$27m.37n = 999x \text{ nên } mn = x.$$

Từ đó suy ra $(37k + 11)(27k + 8) = x$. Đến đây chỉ cần xác định được giá trị của k thì xem như bài toán được giải. Chú ý rằng x là số nguyên dương có hai chữ số nên từ đẳng thức trên ta suy ra được $k = 0$ và do đó $x = 88$.

• **Trường hợp 2:** Với $x + y \vdots 37$ và $x + y - 1 \vdots 27$, khi đó tồn tại hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $x + y = 37m$ và $x + y - 1 = 27n$.

Từ đó suy ra $37m = 27n + 1$, giải phương trình nghiệm nguyên này ta được:

$$m = 27k - 8; n = 37k - 11 \text{ với } k \in \mathbb{N}^*.$$

Cũng từ $(x + y)(x + y - 1) = 999x$ ta được:

$$27m.37n = 999x \text{ hay } mn = x.$$

Từ đó suy ra $(37k - 11)(27k - 8) = x$. Trường hợp này không tìm được x thỏa mãn.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Với mỗi số nguyên a, gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2ax - 1 = 0$. Chứng minh $\left(x_1^{2n} - x_2^{2n}\right)\left(x_1^{4n} - x_2^{4n}\right)$ chia hết cho 48 với mọi số tự nhiên n.

(Trích đề thi chọn HSG lớp 9 tỉnh Bắc Ninh, năm học 2022 – 2023)

Bài 2. Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng $\frac{x^2y+1}{xy+1}$ với x, y là hai số nguyên dương.

(Trích đề thi TS lớp 10 THPT chuyên ~~TP. Hà Nội~~ ĐHSPHN, năm học 2021 – 2022)

Bài 3. Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố p, q, r thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$pq = r + 1 \text{ và } 2\left(p^2 + q^2\right) = r^2 + 1.$$

(Trích đề thi TS lớp 10 THPT chuyên tỉnh Quảng Nam, năm học 2021 – 2022)

Bài 4. Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương.

(Trích đề thi chọn HSG lớp 9 Tỉnh Bắc Ninh, năm học 2018 – 2019)

Bài 5. Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 6. Giả sử phương trình $2x^2 + 2ax + 1 - b = 0$ có 2 nghiệm nguyên (với a, b là tham số). Chứng minh rằng $a^2 - b^2 + 2$ là số nguyên và không chia hết cho 3.

(Trích đề thi TS lớp 10 PTNK TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015 – 2016)

Bài 7. Cho a, b, c là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được dưới dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 - bx + c = 0\ (1)$ có cả hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

(Trích đề thi TS lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2021 – 2022)

Bài 8. Cho p là một số nguyên dương. Giả sử phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ có hai nghiệm là $a_1; a_2$ và phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ có hai nghiệm $b_1; b_2$. Chứng minh rằng

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_2)$$

là hiệu của hai số chính phương.

Bài 9. Giả sử bốn số thực a, b, c, d đôi một khác nhau và thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a^2 - 2ac - 5d = b^2 - 2bc - 5d = 0 \\ c^2 - 2ca - 5b = d^2 - 2bd - 5b = 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $A = a + b + c + d$ là một hợp số.

Bài 10. Cho phương trình

$$4x^2 + (a+b)x + 2(a-b) + 16 = 0$$

với x là ẩn số và $a; b$ là các số nguyên. Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b^2}{2}$ là hợp số.

Bài 12. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8\left(x^2 + xy + y^2 + 1\right)$$

Bài 13. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho

$$\frac{4x^2 - 2xy + y^2}{2x + y} = \frac{3}{7}.$$

Bài 14. Tìm các số nguyên tố $p; q$ để phương trình sau có nghiệm nguyên dương:

$$(p+q)x^2 - pqx + p + q - pq = 0$$

Bài 15. Cho các số tự nhiên x, p, q thoả mãn $x^2 + px + q = 0$. Chứng minh rằng $p^2 + (q-1)^2$ là hợp số.

Bài 16. Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^3y + xy^2 + 2x^2y^2 - 4x - 4y + 4 = 0.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ TỰ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2025 - 2026

Bài 1. *Giải các phương trình sau:*

a) $\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-4\left(x-\frac{2}{x}\right)-9=0$;

b) $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$.

Lời giải. a) Đặt $x-\frac{2}{x}=t$ (1), suy ra:

$$x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+4.$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2-4t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=5 \end{array}\right.$$

Lần lượt thay các giá trị của t vào (1) thì phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$x_1=1; x_2=-2; x_3=\frac{5+\sqrt{33}}{2}; x_4=\frac{5-\sqrt{33}}{2}.$$

b) ĐK: $x\ge -2$ (1).

Đặt $\sqrt{x+5}=a; \sqrt{x+2}=b$ $(a\ge 0; b\ge 0)$ (2).

Ta có: $a^2-b^2=3$;

$$\sqrt{x^2+7x+10}=\sqrt{(x+5)(x+2)}=ab.$$

Thay vào phương trình đã cho ta được:

$$(a-b)(1+ab)=a^2-b^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(1-a)(1-b)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ 1-a=0 \\ 1-b=0 \end{array}\right.$$

nên $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5}=\sqrt{x+2} \text{ (vô nghiệm)} \\ \sqrt{x+5}=1 \\ \sqrt{x+2}=1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với (1) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Bài 2. a) *Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn:*

$$abc=1 \text{ và } \frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}=\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}+\frac{a^3}{c}.$$

Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c luôn tồn tại một số là lập phương của một trong hai số còn lại.

b) *Cho* $x=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$. *Chứng minh x có giá trị là một số nguyên.*

Lời giải. a) Đặt $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{a}{b^3} \\ y=\frac{b}{c^3} \\ z=\frac{c}{a^3} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}=\frac{b^3}{a} \\ \frac{1}{y}=\frac{c^3}{b} \\ \frac{1}{z}=\frac{a^3}{c} \end{array}\right.$, khi đó do $abc=1$ nên $xyz=1$ (1).

Từ đề bài suy ra:

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow x+y+z=yz+xz+xy \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$xyz+(x+y+z)-(xy+yz+zx)-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)(z-1)=0.$$

Vậy tồn tại ít nhất một số, chẳng hạn $x=1$ để $a=b^3$ (đpcm).

b) Đặt $\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}=a; \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}=b$

$$\Rightarrow x=a+b; a^3+b^3=2; ab=-\frac{1}{3}.$$

Ta có: $x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Suy ra: $x^3=2-x \Leftrightarrow x^3+x-2=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (vì } x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0).$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. *Cho các số dương x, y, z thỏa mãn:*

$$x + y + z \le 3.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2} + 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right).$$

Lời giải. Áp dụng các BĐT:

$$a + b \le \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)};$$

$$a + b + c \le \sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$$

(được suy ra từ bất đẳng thức Bunyakovsky) ta có:

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{2x} \le \sqrt{2\left(1 + x^2 + 2x\right)} = \sqrt{2}(x + 1);$$

$$\sqrt{1 + y^2} + \sqrt{2y} \le \sqrt{2\left(1 + y^2 + 2y\right)} = \sqrt{2}(y + 1);$$

$$\sqrt{1 + z^2} + \sqrt{2z} \le \sqrt{2\left(1 + z^2 + 2z\right)} = \sqrt{2}(z + 1);$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{3(x + y + z)}.$$

Lại có:

$$A = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2} + \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} + \left(2 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)$$

$$\Rightarrow A \le \sqrt{2}(x + y + z + 3) + \left(2 - \sqrt{2}\right)\sqrt{3(x + y + z)}$$

$\Rightarrow A \le 6 + 3\sqrt{2}$ (do $x + y + z \le 3$).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy $\max A = 6 + 3\sqrt{2}$.

Bài 4. *Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = R\sqrt{2}$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy D thuộc AB; E thuộc AC sao cho chu vi của tam giác ADE bằng $2R$.*

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ là hình vuông.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔADE.

Lời giải. a) Ta có:

$\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến) (1);

$AB = AC = \sqrt{OA^2 - OB^2} = R = OB = OC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $ABOC$ là hình vuông.

b) Theo bài ra ta có: $AD + DE + AE = 2R$ (3).

Suy ra: $DE = BD + CE$ (4).

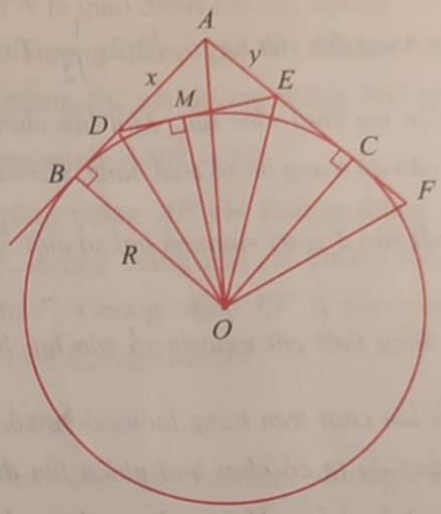
Vẽ $OM \perp DE$ $(M \in DE)$ (5). Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CF = BD$. Suy ra:

$\Delta BDO = \Delta COF$ (c.g.c) $\Rightarrow OD = OF$;

Lại có $DE = FE$ nên $\Delta ODE = \Delta OFE$ (c.c.c)

$\Rightarrow OM = OC = R$ (hai đường cao tương ứng) (6).

Từ (5) và (6) suy ra DE là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.



c) Đặt: $AD = x; AE = y \Rightarrow S_{ADE} = \dfrac{1}{2}xy$ $(x, y > 0)$

Ta có: $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (định lí Pythagore).

Vì $AD + DE + AE = 2R$ suy ra:

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2R \text{ (6)}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm ta có:

$$x + y \ge 2\sqrt{xy} \text{ và } \sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{2xy} \text{ (7)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Từ (6) và (7) suy ra:

$$2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy} \le 2R$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}\left(2 + \sqrt{2}\right) \le 2R$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \le \frac{2R}{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow xy \le \frac{2R^2}{3+2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S_{ADE} \le \frac{R^2}{3+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow S_{ADE} \le \left(3-2\sqrt{2}\right)R^2.$$

Vậy $\max S_{ADE} = \left(3-2\sqrt{2}\right)R^2 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Bài 5. 1) *Trên mặt phẳng cho 99 điểm phân biệt sao cho từ 3 điểm bất kì trong số chúng đều tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 50 điểm.*

2) *Trên bảng đen viết ba số* $\sqrt{2}; 2; \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Ta bắt đầu thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xoá hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a và b rồi viết vào 2 vị trí vừa xoá hai số mới* $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ *và* $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ *đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không đồng thời có ba số* $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$.

Lời giải. 1) Xét điểm A và hình tròn (C_1) có tâm A, bán kính bằng 1.

- Nếu tất cả 98 điểm còn lại đều nằm trong (C_1) thì hiển nhiên bài toán được chứng minh.

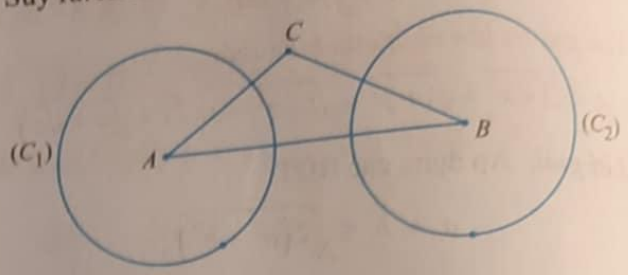
- Xét trường hợp có điểm B nằm ngoài (C_1).

Ta có: $AB > 1$ (1).

Vẽ hình tròn (C_2) tâm B, bán kính bằng 1.

+ Giả sử C là một điểm bất kì khác A và B. Khi đó điểm C thuộc một trong hai hình tròn (C_1) và (C_2). Thật vậy, giả sử C không thuộc hai hình tròn nói trên.

Suy ra: $AC > 1$ và $BC > 1$ (2).



Từ (1) và (2) suy ra bộ 3 điểm A, B, C không có hai điểm nào có khoảng cách nhỏ hơn 1 (vô lí vì trái với giả thiết).

Chứng tỏ $C \in (C_1)$ hoặc $C \in (C_2)$. Như vậy 99 điểm đã cho đều thuộc (C_1) và (C_2).

Mặt khác $99 = 49.2 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichlet ắt phải có một hình tròn chứa không ít hơn 50 điểm.

2) Giả sử ba số trên là a, b, c khi thay a, b bằng:

$$x = \frac{a+b}{\sqrt{2}}; \ y = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{2}$$

$$= a^2 + b^2.$$

Như vậy sau khi xóa đi 2 số a, b thay bởi các số mới: $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ thì tổng bình phương hai số mới không đổi. Do đó tổng bình phương của ba số trên bảng không đổi và bằng $2 + 4 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$.

Mặt khác tổng bình phương ba số

$\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$ là $\frac{1}{8} + 2 + 3 + 2\sqrt{2} \ne \frac{13}{2}$.

Vậy không thể đồng thời trên bảng có ba số

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}.$$

HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

Giới thiệu

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ HÀ NỘI LỚP 9 CẤP THCS

Năm học 2024 – 2025, thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1 (*5,0 điểm*)

1) Giải phương trình

$$3x + 5 - (x+4)\sqrt{x+1} = 0.$$

2) Cho a, b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\dfrac{a^2+1}{a} = \dfrac{b^2+1}{b} = \dfrac{c^2+1}{c}$. Tính giá trị của biểu thức $P = (a-b)(b-c)(c-a)$.

Bài 2 (*5,0 điểm*)

1) Một công ty cần thuê xe để vận chuyển 100 tấn hàng. Đơn vị cho thuê xe chỉ có hai loại xe. Loại xe thứ nhất mỗi xe chở được 18 tấn hàng, có giá thuê là 18 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Loại xe thứ hai mỗi xe chở được 12 tấn hàng, có giá thuê là 12 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Hỏi chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển 100 tấn hàng là bao nhiêu?

2) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$4x^3 = y^3(x + y + 2).$$

Bài 3 (*2,0 điểm*)

Cho a, b và c là các số thực không âm thỏa mãn

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc = 12.$$

a) Chứng minh $2a + bc \le 4$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a + 4b + c$.

Bài 4 (*6,0 điểm*)

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), $\widehat{BAC} < 60^0$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và D là điểm đối xứng với H qua đường thẳng BC. Kẻ đường kính CM của đường tròn (O).

a) Chứng minh MD là tia phân giác của góc $\widehat{BMC}$.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng CH và MB. Đường thẳng qua H và song song với đường thẳng BC cắt đường thẳng MD tại điểm P. Chứng minh $\widehat{ANP} = 90^0$.

c) Đường thẳng AP cắt đường thẳng BC tại điểm E, đường thẳng BH cắt đường thẳng MC tại điểm F. Chứng minh EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AP.

Bài 5 (*2,0 điểm*)

1) Tìm các số nguyên dương x, y để $\dfrac{(x^2y-1)^2+9}{2y^2}$ là bình phương của một số nguyên tố.

2) Một số nguyên dương n được gọi là có ***tính chất T*** nếu nó viết được dưới dạng tổng của k số nguyên dương lẻ liên tiếp, với k là số nguyên dương tuỳ ý lớn hơn 1.

a) Chứng minh 2025 là một số có ***tính chất T.***

b) Tìm tất cả các số có ***tính chất T.***

TRỊNH HOÀI DƯƠNG
(GV THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình, Hà Nội)

Giới thiệu

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3
THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2025

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	A	A	A	B	D	A

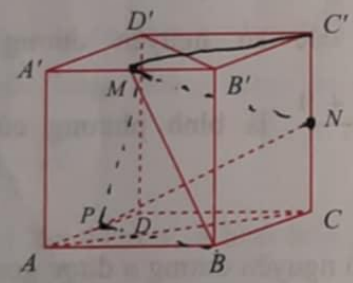
Câu	7	8	9	10	11	12
Đáp án	B	B	A	D	A	C

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG, SAI

Câu	Ý	Đáp án
Câu 1	a)	Sai
	b)	Sai
	c)	Đúng
	d)	Đúng
Câu 2	a)	Đúng
	b)	Đúng
	c)	Sai
	d)	Sai

Câu	Ý	Đáp án
Câu 3	a)	Đúng
	b)	Sai
	c)	Sai
	d)	Sai
Câu 4	a)	Sai
	b)	Đúng
	c)	Đúng
	d)	Sai

Câu 1.



a) Do $B'D'//BD$ và $ABCD$ là hình vuông nên
$$(AC, B'D') = (AC, BD) = 90°.$$

b) Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho D trùng với gốc toạ độ O và A thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, D' thuộc tia Oz. Từ cách chọn hệ trục toạ độ, ta có: $A(a;0;0), C(0;a;0), B(a;a;0)$ và $D'(0;0;h)$, với $h>0$.

Ta tính được $P\left(\frac{a}{2};0;0\right), M\left(a;\frac{a}{2};h\right), N\left(0;a;\frac{h}{2}\right)$ và $\overrightarrow{BM}=\left(0;-\frac{a}{2};h\right)$ và $\overrightarrow{NP}=\left(\frac{a}{2};-a;-\frac{h}{2}\right)$.

$BM \perp NP \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{NP}=0 \Rightarrow h=a$. Do đó:
$$d(BP, MC') = DD' = h = a.$$

c) Đường thẳng CD' có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(0;-1;1)$ và mặt phẳng (MNP) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$. Suy ra:
$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $\cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) Mặt phẳng (MNP) có phương trình là $2x+2y-2z-a=0$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MNP) bằng $d(A,(MNP))=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Diện tích tam giác MNP là :
$$S_{MNP} = \frac{1}{2}\sqrt{PM^2.PN^2 - (\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2.$$

Vậy thể tích của khối tứ diện $AMNP$ là:
$$V = \frac{1}{3}d(A,(MNP)).S_{MNP} = \frac{1}{16}a^3.$$

Câu 2. a) Khi chưa đạt tốc độ tối đa, lượng nước mà mỗi đập tràn đã xả trong khoảng thời gian từ a(s) đến b(s) được tính theo công thức:
$$\Phi = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

b) Vì tốc độ xả nước tối đa của mỗi đập tràn là $500(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$ nên thời gian tính từ khi mở đập tràn xả lũ đến khi lưu lượng nước đạt tốc độ tối đa là $t = t_0 = \frac{500}{k}(s)$.

c) Do đó, ta có $v(t)=\begin{cases} kt & \text{khi } 0 \le t \le t_0 \\ 500 & \text{khi } t \ge t_0 \end{cases}$.

Do đó trong 30 phút (1800 giây), lượng nước xả qua 5 đập tràn được mở trước là:

$$\Phi_1 = 5\int_0^{1800} v(t)\mathrm{d}t = 5\left(\int_0^{t_0} kt\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{1800} 500\mathrm{d}t\right).$$

d) Bốn đập tràn còn lại chỉ xả trong 25 phút (1500 giây). Lượng nước xả qua 4 đập tràn còn lại là:

$$\Phi_2 = 4\int_0^{1500} v(t)\mathrm{d}t = 4\left(\int_0^{t_0} kt\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{1500} 500\mathrm{d}t\right).$$

Do đó, lượng nước xả qua 9 đập tràn trong 30 phút là: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 9\int_0^{t_0} kt\mathrm{d}t + 5\int_{t_0}^{1800} 500\mathrm{d}t + 4\int_{t_0}^{1500} 500\mathrm{d}t$

$$= \frac{9}{2}kt_0^2 + 2500(1800 - t_0) + 2000(1500 - t_0)$$

$\Leftrightarrow \Phi = 7500000 - 2250t_0$.

Theo giả thiết, ta có $\Phi = 7387500$ hay $7500000 - 2250t_0 = 7387500 \Leftrightarrow t_0 = 50$. Suy ra $k = 10$.

Câu 3. a) Từ giả thiết, ta có:

$P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,35$ và $P(AB) = 0,3$.

b) Ta có $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0,3}{0,35} = \dfrac{6}{7}$.

c) Ta có $P(AB) + P(A\overline{B}) = P(A)$ nên

$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0,4 - 0,3 = 0,1$.

Do đó $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(A\overline{B})}{P(A)} = \dfrac{0,1}{0,4} = \dfrac{1}{4}$.

d) Ta có $P(B|A) = \dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \dfrac{0,35.\dfrac{6}{7}}{0,4} = \dfrac{3}{4}$.

Ta lại có $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,6$ và

$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = 0,35 - 0,3 = 0,05$.

Do đó $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,05}{0,6} = \dfrac{1}{12}$.

Suy ra $\dfrac{P(B|A)}{P(B|\overline{A})} = \dfrac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{1}{12}} = 9$. Vậy việc đưa bệnh nhân vào bệnh viện để điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ làm tăng tỷ lệ hồi phục lên 9 lần.

Câu 4. a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R = 2$.

b) Ta có:

$3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow 6\overrightarrow{OD} = (6;24;-18) \Rightarrow D(1;4;-3)$.

c) Đường thẳng OD có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = 4t \\ z = -3t \end{cases}$.

Giả sử $E(t_1;4t_1;-3t_1)$ và $F(t_2;4t_2;-3t_2)$ trong đó t_1, t_2 là các nghiệm của phương trình:

$(t-1)^2 + (4t-1)^2 + (3t+1)^2 = 4 \Leftrightarrow 26t^2 - 4t - 1 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt nên đường thẳng OD cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt. Ta có:

$$EF = \sqrt{26}.|t_1 - t_2| = \sqrt{26}.\frac{\sqrt{120}}{26} = 2\sqrt{\frac{15}{13}} = \frac{2\sqrt{195}}{13}.$$

(*Ở đây chúng ta sử dụng một kết quả quen thuộc:* Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $|x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$).

d) Ta có:

$f = 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 + 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2$

hay

$f = 6MD^2 + 3DA^2 + 2DB^2 + DC^2 = 6MD^2 + 672$.

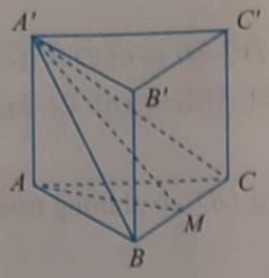
Ta lại có $ID = 5 > R = 2$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu (S) và hơn nữa, khi M di động trên mặt cầu (S) thì $\min MD = ID - R = 3$. Do đó f đạt giá trị nhỏ nhất bằng $6 \times 3^2 + 672 = 726$.

PHẦN III. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu	Đáp số
Câu 1	0,76
Câu 2	10
Câu 3	4,72

Câu	Đáp số
Câu 4	2,67
Câu 5	46,7
Câu 6	0,35

Câu 1. Gọi M là trung điểm của BC thì $AM \perp BC$. Lại có $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp AM$. Suy ra AM là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AA' và BC. Theo giả thiết $d(AA', BC) = 2\sqrt{3}$ nên $AM = 2\sqrt{3}$.



Ta có $BC \perp (AMA')$ nên góc nhị diện $[A', BC, A]$ chính là góc $\widehat{A'MA}$.

Tam giác $A'AM$ vuông tại A nên

$$MA' = \sqrt{MA^2 + AA'^2} = \sqrt{21}$$

và $\cos\widehat{AMA'} = \dfrac{MA}{MA'} = \sqrt{\dfrac{12}{21}} = \sqrt{\dfrac{4}{7}} \approx 0,76.$

Câu 2. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;1;2)$. Gọi $H(2t+1;t;2t+2) \in d$ là hình chiếu vuông góc của A trên d. Khi đó $\overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0$ hay $2(2t-1)+1(t-5)+2(2t-1)=0$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3;1;4).$$

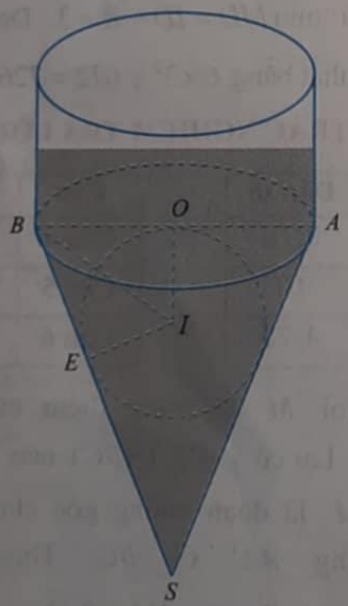
Nếu K là hình chiếu vuông góc của A trên (α) thì $d(A,(\alpha)) = AK \le AH$.

Dấu bằng xảy ra khi $(\alpha) \perp AH$. Lúc này (α) có phương trình $1(x-3)-4(y-1)+1(z-4)=0$

$\Leftrightarrow x-4y+z-3=0 \Leftrightarrow -x+4y-z+3=0.$

Suy ra $a=-1, b=4, c=-1$. Vậy $a+2b-3c=10$.

Câu 3.



Xét tam giác SAB có $AB = 2\times 15 = 30\,\text{cm}$ và $SA = SB = \sqrt{15^2+30^2} = 15\sqrt{5}\,\text{cm}.$

Suy ra đường tròn nội tiếp tam giác SAB có bán kính $r = \dfrac{2S_{SAB}}{SA+AB+BS} = \dfrac{900}{30\sqrt{5}+30} = \dfrac{15(\sqrt{5}-1)}{2}\,\text{cm}.$

Do đó bán kính của viên bi là $r = \dfrac{15(\sqrt{5}-1)}{2}\,\text{cm}$ và thể tích của viên bi là:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{15(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^3\,\text{cm}^3.$$

Giả sử sau khi thả viên bi vào phễu thì mặt nước dâng lên cao $x\,(\text{cm})$. Khi đó thể tích nước dâng lên là:

$$V_0 = 15^2\pi x = 225\pi x\,\text{cm}^3.$$

Thể tích nước dâng lên bằng đúng thể tích của viên bi nên

$$V_0 = V \Leftrightarrow 225\pi x = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{15(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{675}\left(\frac{15(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^3 \approx 4,72\,\text{cm}.$$

Vậy khi thả viên bi vào phễu thì mực nước dâng cao $4,72\,\text{cm}$ so với lúc chưa thả viên bi.

Câu 4. Gọi chiều dài của đáy bể là $x\,(\text{m})$ và chiều rộng của đáy bể là $y\,(\text{m}), x \ge y > 0$. Do tỷ số giữa chiều cao và chiều rộng bằng 4 nên chiều cao là $4y$. Suy ra thể tích của bể là

$$x \times y \times 4y = 4xy^2.$$

Theo giả thiết, ta có:

$$4xy^2 = 24 \Leftrightarrow x = \frac{6}{y^2}.$$

Tổng diện tích các mặt bên và mặt đáy là:

$$S = xy + 2(4xy + 4y^2) = 9xy + 8y^2 = \frac{54}{y} + 8y^2.$$

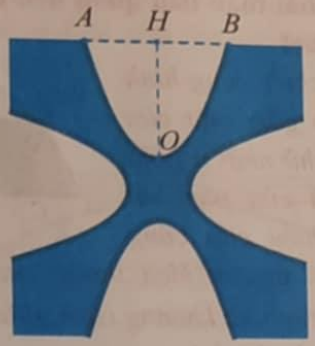
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$S = \frac{27}{y} + \frac{27}{y} + 8y^2 \ge 3\sqrt[3]{\frac{27}{y}.\frac{27}{y}.8y^2} = 54.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{27}{y}=8y^2 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$.

Với $y=\frac{3}{2}$ thì $x=\frac{8}{3}$. Vậy để xây bể tốn ít nguyên vật liệu nhất thì chiều dài của đáy bể là $\frac{8}{3}\approx 2,67(\text{m})$.

Câu 5.



Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho O trùng với gốc toạ độ và H thuộc tia Oy.

Parabol đi qua ba điểm A,O,B có phương trình dạng $y=ax^2$. Ta có $H(0;4)$ và $A\left(-\frac{5}{2};4\right), B\left(\frac{5}{2};4\right)$. Do đó, chúng ta tìm được $a=\frac{16}{25}$. Diện tích phần parabol bị cắt bỏ là:

$$S_0=8\times\left(10-\int_0^{\frac{5}{2}}\frac{16}{25}x^2\mathrm{d}x\right)=\frac{160}{3}.$$

Suy ra diện tích bề mặt hoa văn đó là:

$$S=100-\frac{160}{3}=\frac{140}{3}\approx 46,7\,\text{cm}^2.$$

Câu 6. Gọi A: "Lấy được hai viên bi trắng ở hộp 1 và 2 (mỗi hộp 1 viên)";

B: "Lấy được hai viên bi xanh ở hộp 1 và 2 (mỗi hộp 1 viên)";

C: "Lấy được một viên bi trắng và một viên bi xanh ở hộp 1 và 2 (mỗi hộp 1 viên)";

D: "Lấy được viên bi xanh từ hộp thứ ba".

Ta có: $P(A)=\frac{C_9^1}{C_{11}^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_9^1}=\frac{36}{99}$;

$$P(B)=\frac{C_2^1}{C_{11}^1}\cdot\frac{C_5^1}{C_9^1}=\frac{10}{99}$$

và $P(C)=\frac{9}{11}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{11}\cdot\frac{4}{9}=\frac{53}{99}$.

Ta lại có: $P(D|A)=\frac{7}{18}$; $P(D|B)=\frac{5}{18}$;

$$P(D|C)=\frac{6}{18}.$$

Suy ra:

$$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)$$
$$=\frac{36}{99}\cdot\frac{7}{18}+\frac{10}{99}\cdot\frac{5}{18}+\frac{53}{99}\cdot\frac{6}{18}$$
$$=\frac{620}{1782}\approx 0,35.$$

NGUYỄN TIÊN TIẾN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

****

SAI LẦM . . .

(Tiếp theo trang 47)

Lời giải của bạn Thái: Ba số

$$x^2+x-2, x^2+x-2, 2x^2+4x$$

là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân khivà chỉ khi $\left(x^2+x-2\right)^2=\left(x^2+x-2\right)\left(2x^2+4x\right)$

$\Leftrightarrow\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+3x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow x=-2, x=-1, x=1.$

Vậy $x=-2, x=-1, x=1$ là các giá trị cần tìm.

Lời giải của bạn Cường: Ba số

$$x^2+x-2, x^2+x-2, 2x^2+4x$$

là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, mà $x^2+x-2=x^2+x-2$ nên cấp số nhân đó có công bội $q=1$. Vì thế ta có:

$$x^2+x-2=x^2+x-2=2x^2+4x$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-2, x=-1.$$

Vậy $x=-2, x=-1$ là các giá trị cần tìm.

Theo các bạn, lời giải của bạn nào là đúng?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

MỘT SỐ DẠNG TOÁN THỰC TIỄN SỬ DỤNG HÀM SỐ BẬC 2 ĐỂ GIẢI

NGUYỄN CÔNG CHUẨN
(GV THPT chuyên, Đại học Vinh)

Trong đề thi học sinh giỏi và đề thi tốt nghiệp THPT Quốc gia môn Toán những năm gần đây đã quan tâm nhiều đến các bài toán có nội dung thực tiễn. Trong các bộ SGK hiện hành theo chương trình Giáo dục phổ thông 2018 (như bộ *Kết nối tri thức với cuộc sống*, *Chân trời sáng tạo*, ...) cũng đã đề cập, nhấn mạnh đến những ví dụ, bài tập có nội dung gắn với thực tiễn. Đặc biệt đề minh họa thi tốt nghiệp THPT Quốc gia năm 2025, năm đầu tiên thực hiện chương trình GDPT 2018 các bài toán có nội dung thực tiễn được đưa vào khá nhiều.

Qua quá trình giảng dạy trên lớp tôi thấy các em lúng túng và gặp rất nhiều khó khăn khi giải dạng toán này. Để giúp các em ôn tập và chuẩn bị tốt cho kì thi sắp tới, bài viết này xin giới thiệu đến các em: "*Một số dạng toán thực tiễn sử dụng hàm số bậc hai để giải*".

Để giải dạng toán này ta tiến hành qua các bước:

- Chọn hệ tọa độ phù hợp.
- Dịch bài toán sang ngôn ngữ tọa độ.
- Tìm hàm bậc hai $y=ax^2+bx+c$ (P) thỏa mãn điều kiện bài toán.
- Tính các yếu tố mà bài toán yêu cầu.

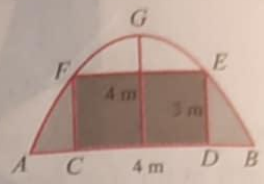
Chú ý: - Khi đỉnh của parabol (P) nằm trên trục tung thì phương trình của (P) có dạng $y=ax^2+c$.

- Khi đỉnh của parabol (P) nằm trên trục hoành thì phương trình của (P) có dạng $y=a\left(x-x_0\right)^2$ (x_0 là hoành độ đỉnh của (P)).
- Đặc biệt khi đỉnh của parabol (P) trùng với gốc tọa độ thì phương trình của (P) có dạng $y=ax^2$.

Sau đây là các dạng toán thường gặp:

1. Giải các bài toán liên quan đến tính các yếu tố của parabol

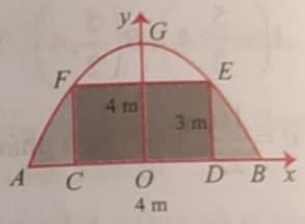
Bài 1. *Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên. Biết chiều cao cổng parabol là 4 m còn kích thước cửa ở giữa là 3 m × 4 m. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B (xem hình vẽ trên).*



Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Do đỉnh của parabol $\left(P\right)$ thuộc trục $0y$ nên phương trình $\left(P\right)$: $y=ax^2+c$ với $a<0$.

Chiều cao của cổng parabol là $4m$ nên tọa độ đỉnh của $\left(P\right)$ là $G\left(0;4\right)$.



Thế vào $\left(P\right)$ ta được:

$4=a.0^2+c\Rightarrow c=4\Rightarrow\left(P\right):\ y=ax^2+4$

Kích thước cửa ở giữa là $3\,\text{m}\times4\,\text{m}$ nên

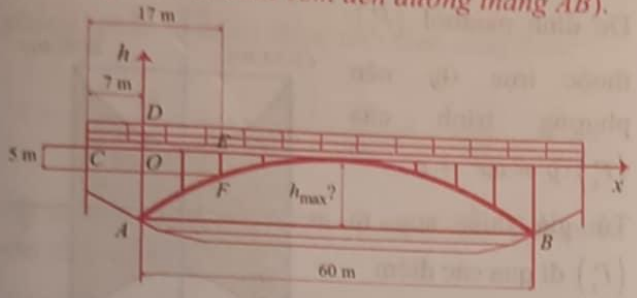
$E\left(2;3\right)\in\left(P\right)\Rightarrow3=a.2^2+4\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{4}$.

Vậy $\left(P\right):\ y=-\dfrac{1}{4}x^2+4$. A và B là giao điểm của $\left(P\right)$ và trục hoành. Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và trục hoành:

$$-\frac{1}{4}x^2+4=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=4\\x=-4\end{bmatrix}$$

nên $A\left(-4;0\right),B\left(4;0\right)$. Suy ra $AB=8\,\text{m}$.

Bài 2. *Một chiếc cầu được bắc qua sông. Để trợ lực cho cây cầu, người ta làm một vòm đỡ cong hình parabol. Với hệ trục toạ độ xOh được gắn vào như hình vẽ, biết rằng khoảng cách giữa 2 chân của vòm đỡ là AB = 60 m. Khoảng cách từ chân cầu (điểm C) tới điểm O là 7 m. Tại một điểm cách chân cầu (điểm C) 17 m, người ta đo được khoảng cách từ mặt cầu xuống vòm đỡ là 5 m. Tìm chiều cao tối đa h_{max} của vòm đỡ (khoảng cách từ đỉnh vòm đến đường thẳng AB).*



Lời giải. Parabol $h(x)$ có đỉnh nằm trên trục Ox và nằm hoàn toàn dưới trục Ox với hệ toạ độ như hình vẽ nên suy ra phương trình của $h(x)$ có dạng $h(x)=a(x-x_0)^2$ với $a<0$. Do $AB=60$ nên hoành độ của đỉnh parabol là 30. Do đó $x_0=30$. Vậy $h(x)=a(x-30)^2$. Ta có $OE=17-7=10$, suy ra toạ độ điểm F nằm trên parabol là $F(10;-5)$. Thay toạ độ $F(10;-5)$ vào phương trình parabol ta có:

$$-5=a(10-30)^2 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{80}.$$

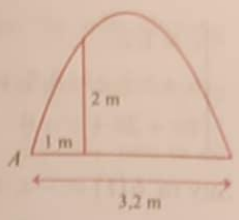
Ta có phương trình parabol là:

$$h(x)=-\frac{1}{80}(x-30)^2.$$

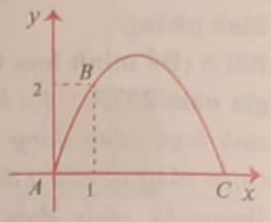
Độ dài h_{max} của vòm đỡ cũng chính là độ dài đoạn OA. Ta có:

$$OA=h(0)=\left|-\frac{1}{80}(0-30)^2\right|=\frac{90}{8}=11{,}25 \text{ m}.$$

Bài 3 (Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh lớp 10, năm học 2023 – 2024, tỉnh Hà Nam). *Cổng vòm hoa tại một lễ cưới có hình dạng là đường parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng vòm hoa là 3,2 m. Tại vị trí trên cổng vòm hoa có độ cao 2 m so với mặt đất người ta thả một sợi dây chạm đất cách chân A của cổng vòm hoa một đoạn 1 m (hình bên). Tính chiều cao của cổng vòm hoa (làm tròn đến hàng phần trăm).*



Lời giải. Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ, ta có: $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C\left(\frac{16}{5};0\right)$. Parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ và $a<0$.



Vì (P) đi qua các điểm $A(0;0), B(1;2), C\left(\frac{16}{5};0\right)$ nên ta có:

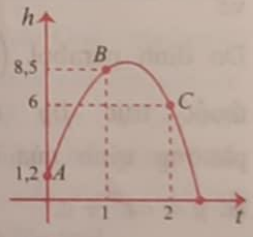
$$\begin{cases}0=a.0^2+b.0+c\\0=a.\left(\frac{16}{5}\right)^2+b.\frac{16}{5}+c\\2=a.1^2+b.1+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\\frac{256a}{25}+\frac{16b}{5}=0\\a+b=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=-\frac{10}{11};b=\frac{32}{11};c=0\Rightarrow(P):y=-\frac{10}{11}x^2+\frac{32}{11}x.$$

Chiều cao của cổng vòm hoa là:

$$y\left(-\frac{b}{2a}\right)=y\left(\frac{8}{5}\right)=-\frac{10}{11}.\left(\frac{8}{5}\right)^2+\frac{32}{11}.\frac{8}{5}=\frac{128}{55}\approx 2{,}33 \text{ (m)}.$$

Bài 4. *Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth (như hình vẽ sau), trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2 m. Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 8,5 m và sau 2 giây khi đá lên nó ở độ cao 6 m. Tính độ cao lớn nhất mà quả bóng đạt được (làm tròn đến hàng phần chục).*



Lời giải. Gọi parabol $(P): h(t)=at^2+bt+c$.

Do (P) đi qua các điểm $A(0;1,2)$, $B(1;8,5)$, $C(2;6)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} c=1,2 \\ a+b+c=8,5 \\ 4a+2b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1,2 \\ a+b=7,3 \\ 2a+b=2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4,9 \\ b=12,2 \\ c=1,2 \end{cases}.$$

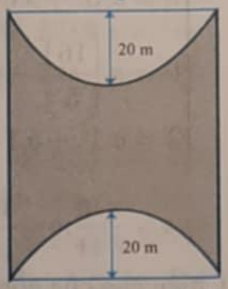
Suy ra $h(t)=-4,9t^2+12,2t+1,2$.

Chiều cao lớn nhất mà quả bóng đạt được là:

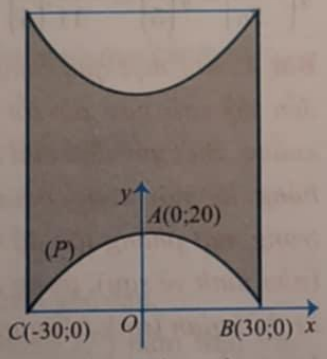
$$h\left(\frac{61}{49}\right)=\frac{4309}{490}\approx 8,8\text{ m}.$$

2. Giải các bài toán liên quan đến tính diện tích hình phẳng

Bài 5 (Đề minh họa thi tốt nghiệp THPT Quốc gia năm 2025). *Một kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60 m và 80 m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có phần biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ điểm đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20 m (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông ?*



***Lời giải. Cách 1*:** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Do đỉnh parabol (P) thuộc trục $0y$ nên phương trình của (P) là: $y=ax^2+c$.

Vì (P) đi qua các điểm $A(0;20)$, $B(30;0)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} c=20 \\ 900a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{45} \\ c=20 \end{cases}.$$

Suy ra $(P):y=-\dfrac{1}{45}x^2+20$.

Do tính đối xứng nên diện tích phần trồng hoa (phần tô đậm) là:

$$S_1=2\int_{-30}^{30}\left(-\frac{1}{45}x^2+20\right)dx=1600\,\text{m}^2.$$

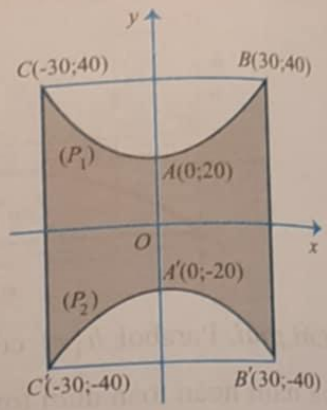
Diện tích của hình chữ nhật là:

$$S=60.80=4800\,\text{m}^2.$$

Diện tích của phần sân chơi là:

$$S_2=S-S_1=3200\,\text{m}^2.$$

***Cách 2*:** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Do đỉnh parabol (P_1) thuộc trục $0y$ nên phương trình của $(P_1):y=ax^2+c$.

Từ giả thiết suy ra (P_1) đi qua các điểm $A(0;20)$, $B(30;40)$ nên ta có hệ

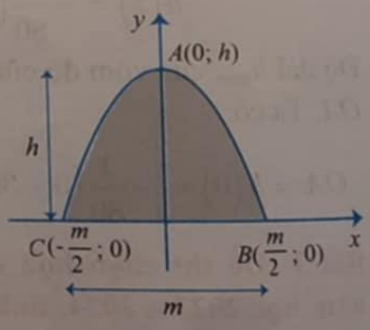
$$\begin{cases} c=20 \\ 900a+c=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{45} \\ c=20 \end{cases}.$$

Suy ra $(P_1):y=\dfrac{1}{45}x^2+20$. Tương tự ta lập được phương trình $(P_2):y=-\dfrac{1}{45}x^2-20$.

Vậy diện tích phần sân chơi là:

$$S=\int_{-30}^{30}\left[\left(\frac{1}{45}x^2+20\right)-\left(-\frac{1}{45}x^2-20\right)\right]dx$$
$$=\int_{-30}^{30}\left(\frac{2}{45}x^2+40\right)dx=3200\,\text{m}^2.$$

***Chú ý*:** Xét hình phẳng có phần biên cong là một phần của parabol chiều cao h khoảng cách giữa hai chân là m.



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ.

Do đỉnh parabol (P) thuộc trục $0y$ nên phương trình của $(P):y=ax^2+c$.

Từ giả thiết suy ra (P) đi qua các điểm $A(0;h)$, $B\left(\frac{m}{2};0\right)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} c=h \\ a.\dfrac{m^2}{4}+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{4h}{m^2} \\ c=h \end{cases}.$$

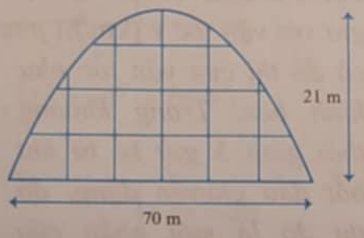
Suy ra $(P): y=-\dfrac{4h}{m^2}x^2+h$. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm) được tính theo công thức:

$$S=\int\limits_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}\left(-\frac{4h}{m^2}x^2+h\right)dx=\left(-\frac{4h}{3m^2}x^3+hx\right)\Big|_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}=\frac{2}{3}mh.$$

Áp dụng công thức này ta có ngay diện tích phần sân chơi là

$$S=60.80-2.\left(\frac{2}{3}.60.20\right)=3200\,\text{m}^2.$$

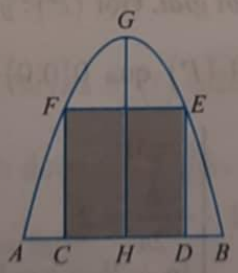
Bài 7. *Người ta dự định lắp kính cho cửa của một mái vòm có dạng hình parabol. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào, biết rằng vòm cửa cao 21 m và rộng 70 m.*



Lời giải. Áp dụng công thức nêu ở phần chú ý ta có ngay diện tích mặt kính cần lắp là

$$S=\frac{2}{3}.70.21=980\,\text{m}^2.$$

Bài 8. *Một cái cổng hình parabol như hình vẽ. Chiều cao $GH=4$ m, chiều rộng $AB=4$ m, $AC=BD=0,9$ m. Người ta làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ (phần tô đậm) có giá 1200000 đồng/m^2, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá 900000 đồng/m^2. Hỏi tổng chi phí để làm cái cổng là bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng trăm nghìn).*

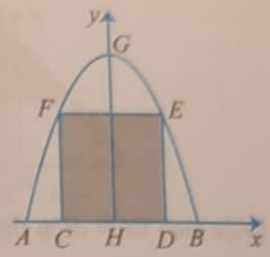


Lời giải. Chọn hệ tọa độ Hxy như hình vẽ.

Do đỉnh parabol (P) thuộc trục $0y$ nên phương trình của (P) là $y=ax^2+c$. Từ giả thiết suy ra (P) đi qua các điểm $G(0;4)$, $B(2;0)$ nên ta có hệ $\begin{cases} c=4 \\ a.4+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=4 \end{cases}$.

Suy ra $(P): y=-x^2+4$.

Từ giả thiết suy ra hoành độ điểm D là $x=1,1$.



Suy ra:

$$DE=CF=y(1,1)=2,79\,\text{m}.$$

Diện tích của cái cổng hình parabol là:

$$S=\frac{2}{3}.4.4=\frac{32}{3}\,\text{m}^2.$$

Diện tích của hai cánh cổng là:

$$S_{CDEF}=2,2.2,79=6,138\approx 6,14\,\text{m}^2.$$

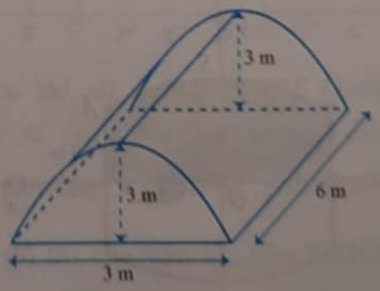
Diện tích làm xiên hoa là:

$$S_{xh}=S-S_{CDEF}=\frac{32}{3}-6,138\approx 4,53\,\text{m}^2.$$

Tổng chi phí để làm cái cổng như bài toán yêu cầu là $1200000.6,14+900000.4,53\approx 11400000$ đồng.

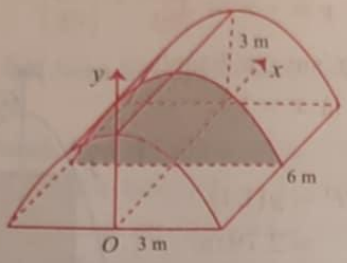
3. Giải các bài toán liên quan đến tính thể tích

Bài 9. *Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12A dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 m, chiều dài 6 m, đỉnh trại cách nền 3 m. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.*



Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Xét mặt phẳng (P) vuông góc với trục $0x$ tại điểm có hoành độ $x(0 \le x \le 6)$. Thiết diện thu được là hình phẳng (phần tô màu) có đường biên cong là đường parabol có chiều cao $3\,m$, khoảng cách hai chân là $3\,m$.



Diện tích thiết diện thu được là

$$S(x) = \frac{2}{3}.3.3 = 6\,\text{m}.$$

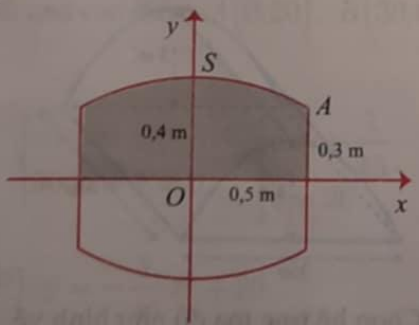
Thể tích cần tìm là

$$V = \int_0^6 S(x)dx = \int_0^6 6dx = 36\,\text{m}^2.$$

Bài 10. *Một thùng rượu vang có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40 cm, chiều cao thùng rượu là 1 m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol. Hỏi thùng rượu vang như trên chứa được bao nhiêu lít rượu vang (làm tròn đến hàng phần chục)?*



Lời giải.



Đổi $30\,\text{cm} = 0,3\,\text{m};\ 40\,\text{cm} = 0,4\,\text{m}$.

Gọi phương trình parabol (P) có đỉnh $S(0;0,4)$ và đi qua điểm $A(0,5;0,3)$ có dạng:

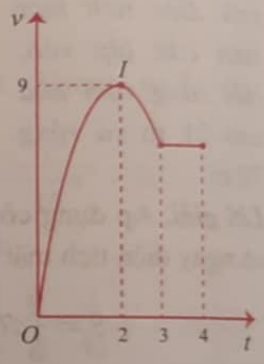
$$y = ax^2 + c\ \ (a \ne 0).$$

Từ giả thiết trên ta dễ dàng tìm được phương trình của $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$. Thể tích của thùng rượu chính bằng thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}; y = 0; x = -0,5; x = 0,5$ quay quanh trục $0x$. Thể tích thùng rượu bằng

$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}\right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \approx 425,5 \text{ (lít)}.$$

4. Giải các bài toán tính quãng đường đi được, biết đồ thị vận tốc có dạng hình parabol

Bài 11 (Đề thi tốt nghiệp TPHT Quốc gia, năm 2017, mã đề 103). *Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.*



Lời giải. Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c\ \ (a \ne 0)$..

Vì (P) qua $0(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên ta có

$$\text{hệ } \begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ b = 9 \\ c = 0 \end{cases}.$$

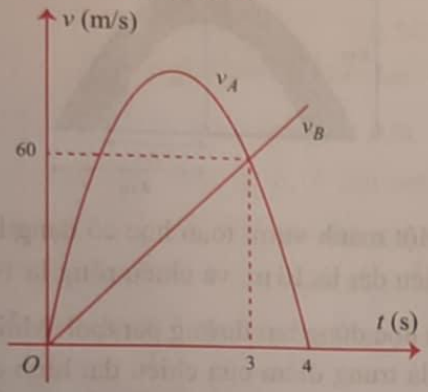
Phương trình của *(P)* là $y = \frac{-9}{4}x^2 + 9x$.

Ngoài ra tại $x=3$ ta có $y=\dfrac{27}{4}$.

Vậy quãng đường cần tìm là:

$$S=\int_0^3\left(\frac{-9}{4}x^2+9x\right)\mathrm{d}x+\int_3^4\frac{27}{4}\mathrm{d}x=27\ (\mathrm{km}).$$

Bài 12. *Cho đồ thị biểu thị vận tốc của hai chất điểm A và B xuất phát cùng lúc, bên cạnh nhau và cùng trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm A là một parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc chất điểm B là một đường thẳng. Hỏi sau khi đi được 3 giây, khoảng cách của hai chất điểm là bao nhiêu mét?*



Lời giải. Gọi $(P): v_A(t)=at^2+bt+c$.

Từ đồ thị ta có hệ

$$\begin{cases}c=0\\9a+3b+c=60\\16a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-20\\b=80\\c=0\end{cases}.$$

Suy ra $v_A(t)=-20t^2+80t$.

Quảng đường chất điểm A đi được sau 3 giây là

$$S_A=\int_0^3\left(-20t^2+80t\right)dt=180\,\mathrm{m}.$$

Gọi $v_B(t)=mt+n$. Từ đồ thị ta có hệ:

$$\begin{cases}n=0\\3m+n=60\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=20\\n=0\end{cases}.$$ Suy ra $v_B(t)=20t$.

Quảng đường chất điểm B đi được sau 3 giây là:

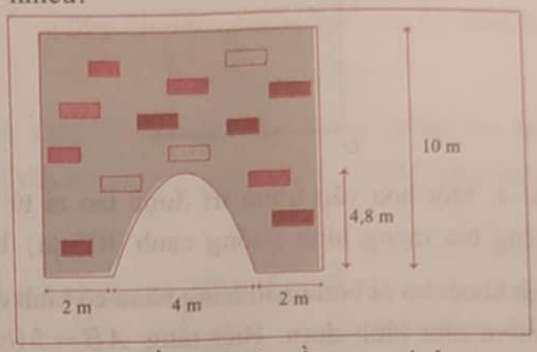
$$S_B=\int_0^3 20t\,dt=90\,\mathrm{m}.$$

Khoảng cách giữa hai chất điểm sau 3 giây là:

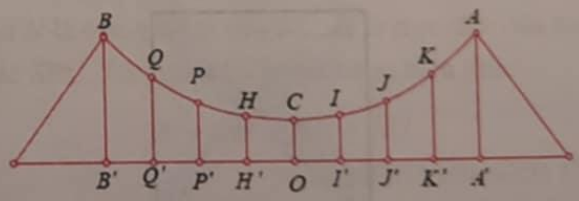
$$\left|S_A-S_B\right|=\left|180-90\right|=90\,\mathrm{m}..$$

SAU ĐÂY LÀ MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Hình dưới minh họa mặt cắt đứng của một bức tường cũ có dạng hình chữ nhật với một cổng ra vào có dạng hình parabol với các kích thước được cho như trong hình đó. Người ta dự định sơn lại mặt ngoài của bức tường đó. Chi phí để sơn bức tường là 15000 đồng/m^2. Tổng chi phí để sơn lại toàn bộ mặt ngoài của bức tường đó sẽ là bao nhiêu?

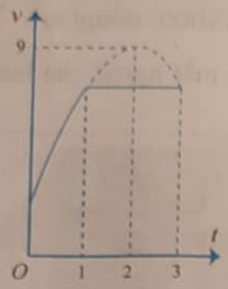


Bài 2. Dây truyền đỡ trên cầu treo có dạng parabol ACB như hình hình dưới. Đầu cuối của dây được gắn vào các điểm A,B trên mỗi trục AA' và BB' với độ cao 30 m. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng 200 m. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $OC=5$ m. Gọi K',J',I',O,H',P',Q' là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền: $KK',JJ',II',OC,HH',PP',QQ'$ gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo?

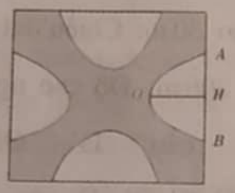


Bài 3 (*Đề thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia, năm 2017, mã đề 101*). Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v\,(\mathrm{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có

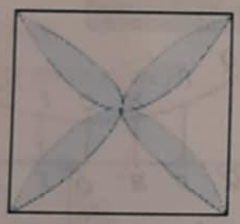
đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



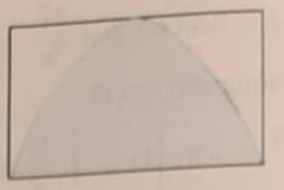
Bài 4. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh $10(\text{cm})$ bằng cách khoét bỏ đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình dưới. Biết rằng $AB = 5(\text{cm})$, đồng thời $OH = 4(\text{cm})$. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó?



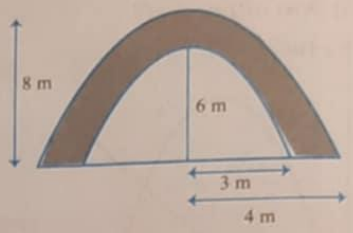
Bài 5. Một viên gạch hoa hình vuông có cạnh $40\,\text{cm}$. Người ta thiết kế sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đậm như hình vẽ dưới). Tính diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch.



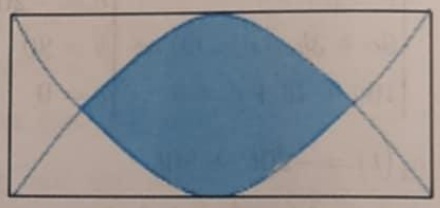
Bài 6. Bạn *An* có các tấm thẻ hình chữ nhật có kích thước khác nhau nhưng có cùng chu vi là $6\,\text{cm}$. Trên mỗi tấm thẻ *An* vẽ một hình parabol có đỉnh trùng với trung điểm một cạnh của tấm thẻ như hình dưới. Hỏi diện tích của hình parabol lớn nhất mà *An* vẽ được bằng bao nhiêu centimet vuông?



Bài 7. Nhà ông *An* cần sơn mặt trước của cái cổng như hình bên, các đường cong có dạng parabol với các kích thước được cho như hình vẽ. Biết giá thuê nhân công là $100\,000$ đồng/m^2. Hỏi ông *An* cần phải trả cho bên thi công bao nhiêu tiền để sơn cổng (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

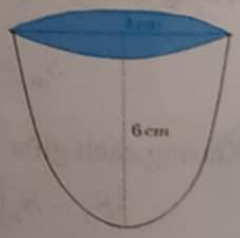


Bài 8. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là $16\,\text{m}$ và chiều rộng là $8\,\text{m}$. Các nhà toán học dùng hai đường parabol. Mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của chiều dài hình chữ nhật và đi qua hai mút của cạnh đối diện, phần mảnh vườn nằm ở miền trong của hai parabol (phần tô đậm như hình vẽ) được trồng hoa hồng.



Biết chi phí để trồng hoa là $45\,000$ đồng/m^2. Hỏi các nhà toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên mảnh vườn đó? (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

Bài 9. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ. Người ta đo được đường kính của miệng ly là $4\,\text{cm}$ và chiều cao là $6\,\text{cm}$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích của vật thể đã cho.





CÁC LỚP THCS

Bài T1/573 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương x, y sao cho x^2y+x+y chia hết cho xy^2+y+7.

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài T2/573 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB, AH. Trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho $DM = DA$. Gọi K là trung điểm của MH; KE cắt BC, BF lần lượt tại G và N. Biết $\widehat{GHN}=20^0$, tính góc $\widehat{NGF}$.

NGUYỄN VĂN BẢN
(GV THCS Thanh Yên, H. Điện Biên, Điện Biên)

Bài T3/573. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=2025$ và

$$a^2+b^2+c^2=2023(a+b+c).$$

Tính giá trị của biểu thức:

$$K=a\sqrt{\frac{(2025+b^2)(2025+c^2)}{2025+a^2}}+b\sqrt{\frac{(2025+c^2)(2025+a^2)}{2025+b^2}}+c\sqrt{\frac{(2025+a^2)(2025+b^2)}{2025+c^2}}.$$

PHẠM TRUNG KIÊN
(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

Bài T4/573. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=60^0$ và $\widehat{C}=10^0$. Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD}=20^0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{BA}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{BC}$.

LÊ KHÁNH HUY
(TP. Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T5/573. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z}=\frac{6}{35}\\ \frac{1}{y+z}+\frac{1}{x}=\frac{2}{9}\\ \frac{1}{z+x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{16}\end{cases}.$$

NGUYỄN TỬ PHÚC
(Xóm Tân Mỹ, xã Minh Mỹ, Hoa Lư, Ninh Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/573. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương $n\ge 2$ để 2025^n-2024^n chia hết cho n.

NGUYỄN KIM SÓ
(Trung tâm Bồi dưỡng và Phát triển tài năng Toán học Nam Sáng - SMART)

Bài T7/573. Cho x, y, z, t là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=(x+y+z+t)^2\times\left[\frac{1}{x(y+z+t)}+\frac{1}{y(z+t+x)}+\frac{1}{z(t+x+y)}+\frac{1}{t(x+y+z)}\right]$$

NGUYỄN VĂN TIẾN
(Lớp 03H, Công nghệ Hóa học, khoa Hóa kỹ thuật, ĐHBK Đà Nẵng)

Bài T8/573. Cho tam giác ABC đều có tâm O, $AB = 2$; Ax là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), S là điểm thay đổi trên Ax. Gọi N là trung điểm của BC, H là trực tâm của tam giác SBC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = OH + HN + NO.$$

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T9/573. Cho tam giác ABC không có góc tù và mỗi góc không nhỏ hơn $\frac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng

$$\cot A+\cot B+\cot C+3\cot A\cot B\cot C\le 4(2-\sqrt{2}).$$

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG
(Xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/573. Cho dãy số (u_n), $n = 1, 2, \ldots$ được xác định như sau:

$$u_1 = 1, u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + (n-1)u_1,\ n = 2, 3, \ldots$$

Tìm $\lim \dfrac{u_n\left(1-\left\{2^{n-2}\sqrt{5}u_n\right\}\right)}{2^{n-1}}$, ở đây $\{x\} = x - [x]$.

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/573. Tìm tất các các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao $f^2(x) + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG (*Pleiku*)

Bài T12/573. Cho bốn điểm phân A, B, C và D nằm trên đường thẳng l theo thứ tự đó. Giả sử (P) là đường tròn đi qua A và B, (Q) là đường tròn đi qua C và D. Gọi a và b thứ tự là các tiếp tuyến của (P) tại A và B; c và d thứ tự là các tiếp tuyến của (Q) tại C và D. Đặt $K = a \cap c$, $L = a \cap d$, $M = b \cap c$, $N = b \cap d$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm K, L, M, N cùng nằm trên một đường tròn ký hiệu là (R).

b) Chứng minh rằng nếu $AB = CD$ thì các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (P) và (Q) cắt nhau trên (R).

LÊ VIẾT ÂN

(Ocean Education, 40 đường số 9, phường 10, Q. Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh)

Bài L1/573. Hai bình có thể tích lần lượt là $V_1 = 40$ L, $V_2 = 10$ L thông nhau qua một cái van. Van chỉ mở khi áp suất trong bình 1 lớn hơn trong bình 2 từ 10^5 Pa trở lên. Ban đầu bình 1 chứa khí ở áp suất $p_0 = 0{,}9.10^5$ Pa và nhiệt độ $T_0 = 300$ K, còn bình 2 là chân không. Người ta làm nóng đều cả hai bình từ nhiệt độ T_0 lên nhiệt độ $T = 500$ K.

a) Tới nhiệt độ nào thì van mở?

b) Tính áp suất cuối cùng trong mỗi bình.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/573. Một rađa phát một xung sóng điện từ về phía chiếc máy bay đang bay thẳng, đều về phía rađa và thu được sóng phản xạ trở lại sau khoảng thời gian $\Delta t = 2.10^{-4}$s tính từ lúc phát. Biết tốc độ truyền sóng $c = 3.10^8$ m/s. Coi tốc độ của máy bay là rất nhỏ so với tốc độ ánh sáng.

a) Tính khoảng cách từ máy bay đến rađa vào thời điểm sóng điện từ phản xạ từ máy bay.

b) Hãy đề nghị một phương án để xác định tốc độ của máy bay.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/573 (Grade 6). Find the positive integers x, y such that $x^2y + x + y$ is divisible by $xy^2 + y + 7$.

Problem T2/573 (Grade 7). Given a right triangle ABC with the right angle A and the altitude AH. Let D, E, F be the midpoints of BC, AB, AH respectively. On the opposite ray of DA, take point M such that $DM = DA$. Let K be the midpoint of MH; KE intersects BC, BF at G and N respectively. Given that $\widehat{GHN} = 20^0$, find the measure of the angle $\widehat{NGF}$.

Problem T3/573. Given three positive numbers a, b, c satisfying the conditions $a + b + c = 2025$ and

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2023(a + b + c).$$

Find the value of the expression

$$K = a\sqrt{\frac{(2025 + b^2)(2025 + c^2)}{2025 + a^2}} + b\sqrt{\frac{(2025 + c^2)(2025 + a^2)}{2025 + b^2}} + c\sqrt{\frac{(2025 + a^2)(2025 + b^2)}{2025 + c^2}}.$$

Problem T4/573. Given triangle ABC with $\hat{B} = 60^0$ and $\hat{C} = 10^0$. Choose the point D on the side AC such that $\widehat{ABD} = 20^0$. Prove that

$$\frac{1}{BA} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{BC}.$$

Problem T5/573. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{6}{35} \\ \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{9} \\ \dfrac{1}{z+x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{16} \end{cases}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/573. Prove that there does not exist any positive integer $n \geq 2$ such that $2025^n - 2024^n$ divisible by n.

Problem T7/573. Let x, y, z, t be positive real numbers. Find the minimum value of the expression

$$A = (x+y+z+t)^2 \times \left[\frac{1}{x(y+z+t)} + \frac{1}{y(z+t+x)} + \frac{1}{z(t+x+y)} + \frac{1}{t(x+y+z)} \right].$$

Problem T8/573. Given an equilateral triangle ABC with the center O, $AB = 2$. Let Ax be the line passing through A and perpendicular to the plane (ABC) and S a moving point on Ax. Let N be the midpoint of BC, H the orthocenter of the triangle SBC. Find the maximum value of the expression

$$T = OH + HN + NO.$$

Problem T9/573. Given an triangle ABC with no obtuse angles and each angle is not less than $\frac{\pi}{4}$. Prove that

$$\cot A + \cot B + \cot C + 3\cot A \cot B \cot C \leq 4(2-\sqrt{2}).$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/573. Given the sequence of numbers (u_n), $n = 1, 2, \ldots$ determined as follows:

$u_1 = 1, u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + (n-1)u_1$, $n = 2, 3, \ldots$ Find the limit

$$\lim \frac{u_n \left(1 - \left\{2^{n-2}\sqrt{5}.u_n\right\}\right)}{2^{n-1}}, \text{ where } \{x\} = x - [x].$$

Problem T11/573. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f^2(x) + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x))$ for every $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem T12/573. Given four distinct points A, B, C and D lying on a line l in that order. Suppose that (P) is a circle passing through A and B, (Q) is a circle passing through C and D. Let a and b be the tangents of (P) at A and B; c and d the tangents of (Q) at C and D. Let $K = a \cap c$, $L = a \cap d$, $M = b \cap c$, $N = b \cap d$.

a) Prove that the four points K, L, M, N lie on the same circle denoted by (R).

b) Prove that if $AB = CD$ then the common external tangents of the two circles (P) and (Q) intersect on (R).

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)



Bài T1/569. *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn: $p^2 = qr + 4$.*

Lời giải. Từ giả thiết q và r đều là các số nguyên tố thì $qr \geq 4$ nên $p^2 = qr + 4 \geq 8$, suy ra $p > 2$. Với $p = 3$ thì $qr = 9 - 4 = 5$ nên không tìm được các số nguyên tố q, r thỏa mãn. Vậy số nguyên tố $p \geq 5$. Từ giả thiết có $qr = p^2 - 4 = (p-2)(p+2)$, suy ra $p-2$ và $p+2$ là các ước số của qr mà q và r là các số nguyên tố nên $p-2$ và $p+2$ đều là các số nguyên tố, lúc đó $p-2, p, p+2$ là ba số nguyên tố lẻ liên tiếp.

Cách 1. Giả sử rằng $r \geq q$. Khi chia cho 3 thì số nguyên tố $p > 3$ chỉ có dạng là $3k+1$ hoặc $3k+2$ với k là số nguyên dương. Nếu $p = 3k+1$ thì $r = p+2 = 3k+3 = 3(k+1)$ là hợp số (loại). Nếu $p = 3k+2$ thì $q = p-2 = 3k$ là số nguyên tố, điều này chỉ xảy ra khi $k = 1$, lúc đó $q = 3$; $p = 5$ và $r = 7$. Tương tự, khi $q \geq r$ thì chỉ có thể xảy ra $r = 3, p = 5$ và $q = 7$.

Cách 2. Xét ba số lẻ liên tiếp khi chia cho 6 thì phải có số chia hết cho 3. Với ba số lẻ liên tiếp $p-2, p, p+2$ mà $p \geq 5$ thì số chia hết cho 3 và là số nguyên tố chỉ là số 3, mà $p \geq 5$ nên chỉ xảy ra $p-2 = 3$, lúc đó $r = 3, p = 5$ và $q = 7$ hoặc $q = 3$; $p = 5$ và $r = 7$.

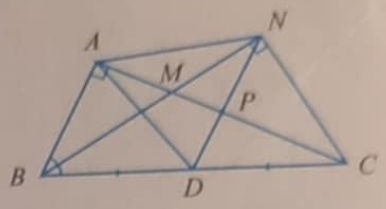
Vậy bài toán có hai nghiệm như trên.

Nhận xét. Một số bạn không loại trừ p bằng 2 hoặc 3 nên phải thử nhiều trường hợp, viết dài hơn. Các bạn lớp 6 dưới đây có lời giải đúng. **Bắc Ninh**: *Nguyễn Thái Sơn*, 6A3, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Hà Nội**: *Nguyễn Vũ Khang*, 6T, THCS Lương Thế Vinh, Tân Triều, Thanh Trì; *Nguyễn Phương Hoa*, 6A2, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **Thanh Hóa**: *Hoàng Minh Đăng*, 6H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An**: *Trương Đình Quốc Anh*, 6E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/569. *Cho tam giác ABC vuông tại A có đường trung tuyến AD, đường phân giác trong BM ($D \in BC, M \in AC$). Đường vuông góc hạ từ C xuống BM cắt BM tại N. Chứng minh $AN = CN$.*

Lời giải. Cách 1.



Tam giác BNC vuông tại N, có D là trung điểm cạnh BC (giả thiết) nên $DN = BD = CD$.

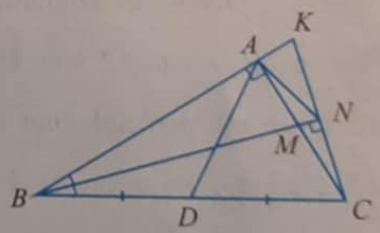
Do đó tam giác BDN cân tại D, dẫn đến $\widehat{DBN} = \widehat{BND}$ mà $\widehat{ABN} = \widehat{DBN}$ (giả thiết) suy ra $\widehat{ABN} = \widehat{BND}$. Từ đó suy ra $DN \,//\, AB$.

Vì $DN \,//\, AB$, D là trung điểm cạnh BC nên theo định lí đảo đường trung bình của tam giác ABC ta có P là trung điểm cạnh AC.

Mặt khác, do $DN \,//\, AB$ và $AB \perp AC$ nên $DN \perp AC$.

Xét tam giác ANC có $NP \perp AC, AP = PC$ nên cân tại N. Vậy $AN = CN$.

Cách 2. (Của bạn *Nguyễn Đăng Khoa*, 6C, THCS Phạm Văn Đồng, xã Hành Phước, huyện Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**)



Gọi K là giao điểm của AB và NC.

Trong tam giác KBC có BN là đường phân giác đồng thời đường cao nên là đường trung trực của đoạn thẳng KC. Suy ra $NK = NC$.

Xét tam giác ACK vuông tại A có AN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền KC nên $AN = KN = NC$. Vậy $AN = CN$.

Nhận xét. Cách 1 là của tác giả đề toán, cách 2 là của bạn *Nguyễn Đăng Khoa*. Một số bạn có cách giải khác cũng cho kết quả đúng nhưng lời giải dài. Một số bạn có lời giải còn mắc lỗi về chính tả, kí hiệu, ... rườm rà không cần thiết. Ngoài bạn *Khoa*, các bạn sau có lời giải đúng và tương đối ngắn gọn: **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai, TP. Hà Nội; **Nghệ An:** *Đặng Bá, Nguyễn Thái Dũng, Trần Bá Sang*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz; **Đồng Tháp:** *Phan Anh Hào*, TH, THCS&THPT Tương Lai, TP. Cao Lãnh.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/569. *Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:*

$$27x^3y^3 + 4xy = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y \quad (*).$$

Lời giải. Biến đổi (*) thành

$$27x^3y^3 = (x^2 - 4xy + 4y^2) + (2x - 4y)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3y^3 + 1 = (x - 2y)^2 + 2(x - 2y) + 1$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a^2 - a + 1) = (x - 2y + 1)^2 \ (**);\ a = 3xy$$

Do x, y là các số nguyên nên $a + 1$, $a^2 - a + 1$, $x - 2y + 1$ cũng là các số nguyên.

Đặt ƯCLN$(a+1, a^2 - a + 1) = d$, suy ra:

$$(a+1) \vdots d;\ (a^2 - a + 1) \vdots d.$$

Dẫn đến: $(a+1)^2 - (a^2 - a + 1) = 3a \vdots d$

$$\Rightarrow 3(a+1) - 3a = 3 \vdots d \Rightarrow a = 3xy \vdots d.$$

Từ $(a + 1) \vdots d$ và $a \vdots d$ suy ra $1 \vdots d$. vậy $d = 1$.

Kết hợp với (**) suy ra:

$$\begin{cases} a + 1 = u^2 \\ a^2 - a + 1 = v^2 \end{cases}; u, v \in \mathbb{N}; (u, v) = 1.$$

Xét phương trình: $v^2 = a^2 - a + 1$

(với $a = u^2 - 1 \geq -1, a \in \mathbb{Z}$).

+ Với $a = -1$ thì $3xy = -1$, điều này vô lí do x, y là các số nguyên.

+ Với $a = 0$ thì $3xy = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $y = 0$.

- Với $x = 0$, thay vào (*) ta có:

$$4y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow y(y - 1) = 0.$$

Do đó $y = 0$ hoặc $y = 1$.

- Với $y = 0$, thay vào (*) ta có:

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0.$$

Do đó $x = 0$ hoặc $x = -2$.

+ Với $a \geq 1$ thì $(a-1)^2 < a^2 - a + 1 < (a+1)^2$

$$\Rightarrow (a-1)^2 < v^2 < (a+1)^2 \Rightarrow v^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - a + 1 = a^2 \Rightarrow a = 1.$$

Suy ra $3xy = 1$, điều này vô lí do x, y là các số nguyên. Tóm lại, có ba cặp số nguyên $(x; y)$ là: $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(-2; 0)$ thỏa mãn điều kiện đã cho.

Nhận xét. Có nhiều bạn tham gia giải bài này và đa số đều cho kết quả đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **Hưng Yên:** *Trần Thanh Hà*, 8A, THCS Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Đăng Khoa*,6C, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành; **Lâm Đồng:** *Phạm Quang Minh*, 8A3, THCS Phan Châu Trinh, TP Đà Lạt; **Nghệ An:** *Nguyễn Thái Dũng, Nguyễn Quốc Bảo, Trần Ngọc Quân, Nguyễn Đắc Sang, Phạm Hồng Quân, Đào Thanh Long*, 7B, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sỹ Phước Đức*, 9A1, THCS Lê Văn Thiêm.

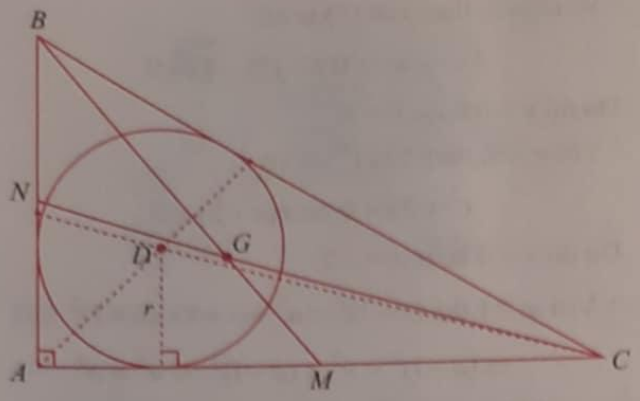
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/569. *Xét tam giác ABC vuông tại A có B, C thay đổi. Gọi G là trọng tâm và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $\dfrac{GB^2 + GC^2}{r^2}$.

Lời giải. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Áp dụng định lí Pythagore ta có $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC, AB. Ta có:

$$GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(BM^2 + CN^2)$$

$$= \frac{4}{9}(AB^2 + AM^2 + AC^2 + AN^2) = \frac{5}{9}(b^2 + c^2).$$



Lại có $b^2+c^2 \geq 2bc$. Suy ra: $GB^2+GC^2 \geq \dfrac{10bc}{9}$ (1).

Vì tam giác ABC vuông tại A và r là bán kính đường tròn nội tiếp, ta có: $S_{ABC}=\dfrac{bc}{2}=\dfrac{(a+b+c)r}{2}$.

Suy ra: $\dfrac{1}{r}=\dfrac{a+b+c}{bc}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}+b+c}{bc}$

$$\geq \frac{\sqrt{2bc}+2\sqrt{bc}}{bc}=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{bc}}.$$

Vậy $\dfrac{1}{r} \geq \dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{bc}}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{GB^2+GC^2}{r^2} \geq \frac{60+40\sqrt{2}}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$, hay tam giác ABC vuông cân tại A.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **Nghệ An:** *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/569. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)} -\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Lời giải. Sử dụng giả thiết $a+b+c=1$ và áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$4bc \leq (b+c)^2 \Leftrightarrow \frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}=\frac{1-a}{4}$$

suy ra: $\dfrac{bc}{a^2(b+c)} \leq \dfrac{1-a}{4a^2}=\dfrac{1}{4a^2}-\dfrac{1}{4a}$.

Tương tự: $\dfrac{ca}{b^2(c+a)} \leq \dfrac{1}{4b^2}-\dfrac{1}{4b}$;

$$\frac{ab}{c^2(a+b)} \leq \frac{1}{4c^2}-\frac{1}{4c}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Do đó:

$$P=\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)} -\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \leq -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có:

$$1=a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3$$

suy ra: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 9$;

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \geq 27.$$

Do đó:

$$P \leq -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq -\frac{3}{4}.27-\frac{1}{4}.9=-\frac{45}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\max P=-\dfrac{45}{2}$. Giá trị đó đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải là chứng minh các bất đẳng thức:

$$P \le -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 9$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge 27$,

suy ra kết quả. Hầu hết các bạn làm theo cách trên.

2) Có thể chứng minh bất đẳng thức

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$$

và sử dụng giả thiết $a+b+c=1$ để suy ra:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 9.$$

Có thể chứng minh bất đẳng thức

$$(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

và áp dụng, ta được

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \ge 27.$$

3) Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hải Phòng: *Phùng Nam Khánh*, *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền; **Hưng Yên:** *Trần Thanh Hà*, 8A, THCS Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** *Nguyễn Công Lĩnh*, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, 9C, *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên Đại học Sư phạm; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/569. *Cho hai số thực a, b thay đổi và luôn thỏa mãn $2a^2+2ab+b^2=\frac{4}{5}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{7a-2b-3}{4a+b+3}$.*

Lời giải. Ta có:

$$2a^2+2ab+b^2=\frac{4}{5} \Leftrightarrow (3a+2b)^2+(a-b)^2=4.$$

Đặt $x=3a+2b, y=a-b$ thì ta có: $x^2+y^2=4$;

$$7a-2b=(3a+2b)+4(a-b)=x+4y;$$

$$4a+b=(3a+2b)+(a-b)=x+y.$$

Do đó:

$$T=\frac{x+4y-3}{x+y+3} \Leftrightarrow (T-1)x+(T-4)y+3T+3=0.$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét đường tròn (C) tâm O, bán kính $R=2$: $x^2+y^2=4$ và đường thẳng (d):

$$(T-1)x+(T-4)y+3T+3=0 \ (*).$$

Tồn tại $a, b \Leftrightarrow$ đường tròn (C) và đường thẳng (d) có điểm chung $\Leftrightarrow d(O,(d)) \le R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3T+3|}{\sqrt{(T-1)^2+(T-4)^2}} \le 2$$

$$\Leftrightarrow 9(T^2+2T+1) \le 4(2T^2-10T+17)$$

$$\Leftrightarrow T^2+58T-59 \le 0 \Leftrightarrow -59 \le T \le 1.$$

$$T=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ -3y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{4}{5}, b=-\frac{6}{5}.$$

$$T=-59 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 20x+21y+58=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-40}{29} \\ y=\frac{-42}{29} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{-124}{145}, b=\frac{86}{145}.$$

Vậy $\max T=1$, $\min T=-59$.

Nhận xét. Ngoài cách giải hình học ở trên (của một số bạn và cũng là của tác giả đề toán), một số bạn sử dụng BĐT Bunyakovsky đánh giá vế trái của (*) cũng cho kết quả tương tự. Một số bạn sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai cũng có kết quả đúng nhưng lời giải dài hơn. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kiên Giang:** *Trần Hoàng Bách*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Nguyễn Phạm Minh Phú*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/569. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 26^n+1 là lũy thừa của một số nguyên dương với số mũ nguyên dương lớn hơn 1.*

Lời giải. Giả sử $26^n+1=a^m$ với a, m là các số nguyên dương lớn hơn 1 và a lẻ. Ta thấy 26^n+1 có chữ số tận cùng là 7 nên không thể là số chính

phương. Suy ra m lẻ. Đặt $m=2k+1$ với k nguyên dương. Khi đó:

$$2^n.13^n=26^n=(a-1)(a^{2k}+a^{2k-1}+...+a+1).$$

Suy ra $a-1\vdots 2^n$ vì $a^{2k}+a^{2k-1}+...+a+1$ là số lẻ. Suy ra $a-1\geq 2^n$ hay $a\geq 2^n+1$. Do đó:

$$(2^n+1)^m\leq a^m=26^n+1<32^n+1<(2^n+1)^5.$$

Suy ra $m<5$. Do đó $m=3$. Khi đó:

$$26^n=a^3-1 \text{ hay } (a-1)(a^2+a+1)=2^n.13^n.$$

Đặt $d=(a-1,a^2+a+1)$ thì $d\mid a-1$ và $d\mid a^2+a+1=(a-1)(a+2)+3$ nên $d\mid 3$. Hơn nữa $d\mid 26^n=2^n.13^n$ nên phải có $d=1$.

Vì $a^2+a+1>1$ và là số lẻ nên phải có $a^2+a+1=13^n$ và $a-1=2^n$. Suy ra $a=2^n+1$ và $(2^n+1)^2+2^n+1+1=13^n$ hay $4^n+3.2^n+3=13^n$. Suy ra $n=1, a=3$ (vì nếu $n\geq 2$ thì $4^n+3.2^n+3\equiv 3 \pmod 4$ trong khi $13^n\equiv 1 \pmod 4$).

Vậy $n=1$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn đề bài.

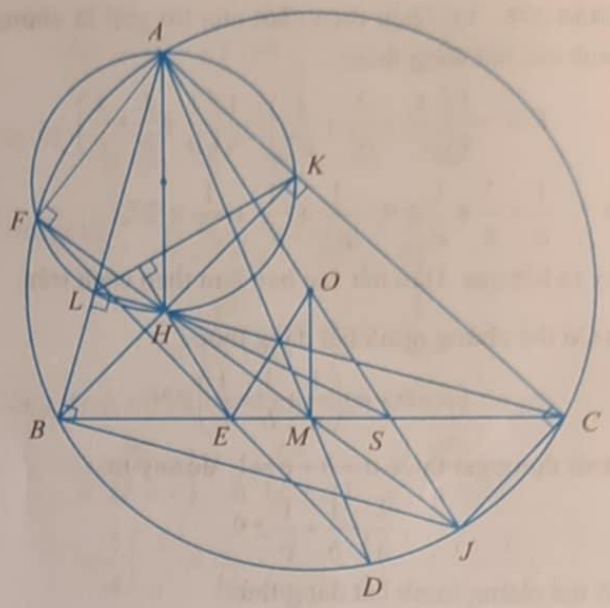
Nhận xét. Đây là một bài toán số học không khó nhưng có ít bạn gửi lời giải. Bạn *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc** là học sinh nhỏ tuổi nhất có lời giải đúng. Các bạn sau đây cũng có lời giải đúng:

Quảng Bình: *Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1 ,THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Phú Thọ:** *Hà Thanh Tùng*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội. **Nghệ An:** *Nguyễn Tuấn Khải*, 10A2, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T8/569. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Kẻ các đường cao BK, CL của tam giác $(K\in AC, L\in AB)$. H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng qua H vuông góc với KL cắt BC tại E. AO cắt BC tại S. Chứng minh rằng tam giác OES cân.*

Lời giải.



Ta chứng minh bài toán trong trường hợp tam giác ABC có ba góc nhọn. Các trường hợp góc A tù. góc B tù, góc C tù phép chứng minh hoàn toàn tương tự.

Gọi M là trung điểm của BC. AM cắt lại đường tròn (O) tại D. AS cắt lại đường tròn (O) tại J. Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại F (F khác A). Ta có:

$$JC\perp AC, BH\perp AC\Rightarrow BH\,//\,CJ,$$
$$CH\perp AB,\ JB\perp AB\Rightarrow JB\,//\,CH.$$

Từ đó tứ giác $BHCJ$ là hình bình hành, suy ra ba điểm H, M, J thẳng hàng. Lại có:

$$\widehat{AFH}=90^0,\ \widehat{AFJ}=90^0$$

suy ra bốn điểm F, H, M, J thẳng hàng. Ta sẽ chứng tỏ rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Thật vậy, gọi E' là giao điểm của DF với cạnh BC. Sử dụng *định lý Con Bướm* cho dây cung BC với M là trung điểm, hai dây cung AD, FJ cùng đi qua M ta thấy $MS = ME'$ suy ra tứ giác $HE'JS$ là hình bình hành, dẫn đến $HE'\,//\,SJ$, hay $HE'\,//\,AJ$. Dễ chứng minh $AJ\perp KL$. Từ đó $HE'\perp KL$ suy ra E trùng với E'. Nói cách khác M là trung điểm của ES. Kết hợp với $OM\perp ES$ ta có tam giác OES cân tại O.

Nhận xét. Định lý Con Bướm bạn đọc tự chứng minh. (Phép chứng mimh định lý này các bạn có thể tham khảo ở một số tài liệu hình học, chẳng hạn cuốn *Tài liệu Chuyên Toán Hình học 10*, NXBGD

Việt Nam, trang 329). Các bạn học sinh sau có lời giải tốt.

Hà Nội: *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Phú Thọ:** *Trần Việt Tùng*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì. **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh, Phạm Văn Phong*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Nam Định:** *Hoàng Hồng Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Nghệ An:** *Nguyễn Cảnh Phước Hưng, Nguyễn Tất Hoàng Anh, Nguyễn Tất Han*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Long*, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Quảng Nam:** *Đặng Thành Trung*, 11Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, *Trương Quang Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt. **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thanh Anh Thư*, 11T2, *Trần Thảo Quyên*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. **Bình Định:** *Nguyễn Trần Ngọc Thiện*, 11A1, THPT Số 1 Tuy Phước. **Long An:** *Huỳnh Đăng Khánh*, 10 T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu. **Kiên Giang:** *Nguyễn Sơn Khánh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt. **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Lê Nguyễn Bảo Trân*, 10E1, TH, THCS, THPT Lê Thánh Tông.

Bạn *Nguyễn Trọng Chiến* không ghi rõ địa chỉ của mình vào bài làm.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/569. *Giải hệ phương trình trên tập hợp các số thực:* $(I)\begin{cases} y+x^2=4x\ (1) \\ z+y^2=4y\ (2). \\ x+z^2=4z\ (3) \end{cases}$

Lời giải 1 (của *Nguyễn Kim Thành,Vương Khánh Toàn, Huỳnh Nguyễn Lê Minh* và một số bạn khác) Ta có:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2=4-y\\(y-2)^2=4-z\\(z-2)^2=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2=2-y+2\\(y-2)^2=2-z+2\\(z-2)^2=2-x+2\end{cases}(II).$$

Đặt $2-x=2X;2-y=2Y;2-z=2Z$. Khi đó:

$$(II)\Leftrightarrow\begin{cases}4X^2=2(Y+1)\\4Y^2=2(Z+1)\\4Z^2=2(X+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2X^2=Y+1\\2Y^2=Z+1\\2Z^2=X+1\end{cases}(III).$$

Do đó $X\ge -1;Y\ge -1;Z\ge -1$.

TH1: $X\ge 1$. Khi ấy:

$$Z^2\ge 1\Rightarrow Z\ge 1\Rightarrow Y^2\ge 1\Rightarrow Y\ge 1.$$

Không giảm tổng quát, coi $X\ge Y\ge 1$. Khi đó:

$$Y+1=2X^2\ge 2Y^2=Z+1\Rightarrow Y\ge Z.$$

$$Z+1=2Y^2\ge 2Z^2=X+1\Rightarrow Z\ge X.$$

Vậy $X\ge Y\ge Z\ge X\Rightarrow X=Y=Z$.

Thay vào (III) ta được

$$X=Y=Z=1\Rightarrow x=y=z=0.$$

TH2: $-1\le X<1$. Đặt $X=\cos t\,(0<t\le\pi)$.

Thay vào (III) ta được:

$$Y=2X^2-1=2\cos^2 t-1=\cos 2t$$

và $$Z=2Y^2-1=2\cos^2 2t-1=\cos 4t.$$

Do đó $X=\cos t=2Z^2-1=2\cos^2 4t-1=\cos 8t.$

Suy ra: $8t=\pm t+2k\pi\Leftrightarrow t=\dfrac{2k\pi}{7},k=1,2,3$

hoặc $t=\dfrac{2l\pi}{9},l=1,2,3,4.$

Khi $l=3$ thì $t=\dfrac{2\cdot 3\cdot\pi}{9}=\dfrac{2\pi}{3}$ và

$$X=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=2-2X=3\Rightarrow y=z=3.$$

Kết luận: Hệ đã cho có nghiệm $(0,0,0)$, $(3,3,3)$ và $(2-2\cos t,2-2\cos 2t,2-2\cos 4t)$ với $t=\dfrac{2k\pi}{7},k=1,2,3$ và $t=\dfrac{2l\pi}{9},l=1,2,4.$

Lời giải 2 (của tác giả *Trần Văn Lâm*). Đặt $f(x)=4x-x^2$. Khi ấy hệ trở thành $f(f(f(x)))=x$. Đây là phương trình đa thức bậc tám, do đó có tối đa 8 nghiệm. Mỗi nghiệm của nó được gọi là *điểm bất động* của hàm $f(f(f(x)))$. Đặt $h(x)=f(x+2)-2=2-x^2$ thì ta có $h(h(h(x)))=f(f(f(x)))-2$, với điểm

bất động x nào của hàm $f\left(f\left(f(x)\right)\right)-x$ cũng liên hệ với điểm bất động $x-2$ của hàm $h\left(h\left(h(x)\right)\right)-x$.

Vì $h(-2\cos t)=2-4\cos^2 t=-2\cos 2t$,

$h\left(h(-2\cos t)\right)=2-4\cos^2 2t=-2\cos 4t$,

$h\left(h\left(h(-2\cos t)\right)\right)=2-4\cos^2 4t=-2\cos 8t$

nên phương trình $h\left(h\left(h(x)\right)\right)=x$ có nghiệm là $\cos t=\cos 8t$. Đến đây giải theo cách giải 1.

Nhận xét. Dưới đây là danh sách các bạn đã có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Kiên Giang**: *Nguyễn Đức Mạnh*, 10T2, *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt. **Lâm Đồng**: *Trương Quang Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt. **Long An**: *Trương Thanh Bình*, 10T1, *Trần Lê Trọng Phúc*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu. **Phú Thọ**: *Trần Ngọc Tú*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, H. Tam Nông. **Quảng Bình**: *Vương Khánh Toàn*, 11CT1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Quảng Nam**: *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **TP. Hồ Chí Minh**: *Trần Nhất Nguyên*, 10E1, THPT Lê Thánh Tông; *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. Có một bạn làm đúng nhưng không ghi tên và địa chỉ, một bạn thì làm thiếu nghiệm.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/569. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_n=3u_{n-1}+2n^3-13n^2+23n-6, \text{ với } n=2,3,\ldots \end{cases}$$

Tìm tất cả các số nguyên tố p thỏa mãn u_p chia hết cho p.

Lời giải (của bạn *Nguyễn Trần Ngọc Thiện*, 11A1, THPT số 1 Tuy Phước, **Bình Định**). Ta có:

$$u_n=3u_{n-1}+2n^3-13n^2+23n-6$$

$$\Leftrightarrow u_n+n^3-2n^2+n+3$$

$$=3\left(u_{n-1}+(n-1)^3-2(n-1)^2+(n-1)+3\right).$$

Đặt $v_n=u_n+n^3-2n^2+n+3\Rightarrow v_n=3v_{n-1}$

$\Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân với công bội là 3, $v_1=6$

$\Rightarrow v_n=6.3^{n-1}\Rightarrow u_n=6.3^{n-1}-(n^3-2n^2+n+3)$

$\Rightarrow u_p=6.3^{p-1}-(p^3-2p^2+p+3)$

$=2.3^p-(p^3-2p^2+p+3)$.

Theo định lý Fermat bé ta có: $3^p\equiv 3 \pmod p$.

Lại có : $p^3-2p^2+p+3\equiv 3 \pmod p$

Vậy $u_p\equiv 2.3-3\equiv 3 \pmod p$.

Với $u_p\equiv 0 \pmod p\Rightarrow 3\equiv 0 \pmod p\Rightarrow p=3$.

Nhận xét. Bài này được nhiều bạn tham gia giải và có lời giải đúng. Các bạn có lời giải tốt bao gồm: **Kiên Giang:** *Trần Khưu Nhật Anh, Cái Hoàng Quốc Khánh*, 10T1, *Trần Hoàng Bách*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, *Nguyễn Nguyên Khôi*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Bình Định:** *Nguyễn Trần Ngọc Thiện*, 11A1. THPT số 1 Tuy Phước, *Đặng Nguyễn Việt Hoàng*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Thọ:** *Trần Việt Tùng*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Long An:** *Thi Tiến Thành*, *Nguyễn Gia Bảo*, *Nguyễn Minh Tiến*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Mỹ Anh*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Long*, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam:** *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Đỗ Tiến Dũng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/569. *Xác định tất cả các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn: $f(a-f(b))=f(f(a))-f(b)-1$ (1) với mọi a, b trong $\mathbb{Z}$.*

Lời giải. (Dựa theo ý của đa số các bạn)

Sử dụng ký hiệu $P(u,v)$ là phép thay thế đồng thời a bởi u và b bởi v trong (1).

Giả sử hàm $f(t)$ thỏa mãn (1). Thực hiện $P(a, f(a))$ ta thu được:

$$f(a-f(f(a)))=f(f(a))-f(f(a))-1$$

$$\Leftrightarrow f(a-f(f(a)))=-1, \forall a\in\mathbb{Z} \ (2).$$

Thực hiện $P(a, a-f(a))$ và sử dụng (2), ta thu được:

$$f(a-f(a-f(a)))=f(f(a))-f(a-f(a)))-1$$

$$\Leftrightarrow f(a+1)=f(f(a)), \forall a\in\mathbb{Z}.$$

Suy ra:

$f(a+1)=f((f(a)-1)+1)=f(f(f(a)-1))$ (3), $\forall a\in\mathbb{Z}$. Thực hiện $P(f(a)-1, a)$ và sử dụng (3), ta thu được: $f(-1)=f(f(f(a)-1))-f(a)-1$

$$=f(a+1)-f(a)-1, \forall a\in\mathbb{Z}.$$

Suy ra: $f(a+1)=f(a)+f(-1)+1, \forall a\in\mathbb{Z}$.

Nếu $f(-1)=-1$ thì $f(a+1)=f(a)$ với mọi $a\in\mathbb{Z}$ nên $f(a)=-1$ với mọi $a\in\mathbb{Z}$. Hàm này thỏa mãn (1).

Nếu $f(-1)\neq -1$ thì

$$f(a+1)=f(a)+p, \forall a\in\mathbb{Z}, 0\neq p\in\mathbb{Z} \ (4).$$

Từ (4), với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$f(n)=f(n-1+1)=f(n-1)+p$$

$$=\cdots=f(0)+np,$$

$$f(-n)=f(-(n-1)-1)=f(-(n-1))-p$$

$$=\ldots=f(0)-np.$$

Vậy nên $f(a)=pa+q, \forall a\in\mathbb{Z}, p, q\in\mathbb{Z}, p\neq 0$.

Thay vào (1), ta thu được:

$$p(a-pb-q)+q=p(pa+q)+q-bp-q-1, \forall a, b\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (p-p^2)a+(p-p^2)b+q+1-2pq=0, \forall a, b\in\mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow p=1, q=1$, tức $f(a)=a+1$.

Thử lại ta thấy các hàm số $f(a)=-1$ và $f(a)=a+1$, $a\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn bài toán.

Kết luận: Các hàm số cần tìm là $f(a)=-1$ và $f(a)=a+1$, $a\in\mathbb{Z}$.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm một biến với cặp biến tự do trong lớp hàm hợp trên tập số nguyên. Đa số các bạn gửi bài đều biết sử dụng phương pháp quy nạp hai phía để chứng minh công thức nghiệm và cho kết quả đúng.

TP. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Kiên Giang:** *Khưu Nhật Anh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Phú Thọ:** *Phùng Phong Huy*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*, 11CT, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Đỗ Tiến Dũng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/569. *Cho tam giác không cân ABC có (I) là đường tròn nội tiếp. Gọi E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và CA, AB. Đường tròn bàng tiếp trong của góc A của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại G. IB, IC lần lượt cắt AG tại M, N. Gọi L, K tương ứng là trung điểm AG, BC.*

a) *Chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác MBF, NCE, BIC cùng đi qua một điểm.*

b) *Gọi J là trực tâm của tam giác IMN. Chứng minh ba điểm L, K, J thẳng hàng.*

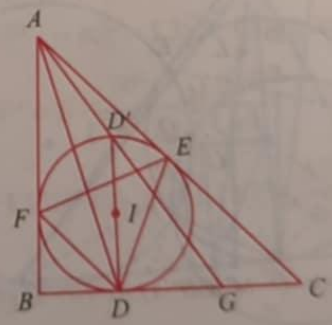
Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

Trong lời giải này, kí hiệu (XY) chỉ đường tròn đường kính XY.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC, (I), (I_a) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. G là tiếp điểm của (I_a) và BC. D' là điểm đối xứng của D qua I. Khi đó*

a) *DA là đường đối trung của tam giác DEF.*

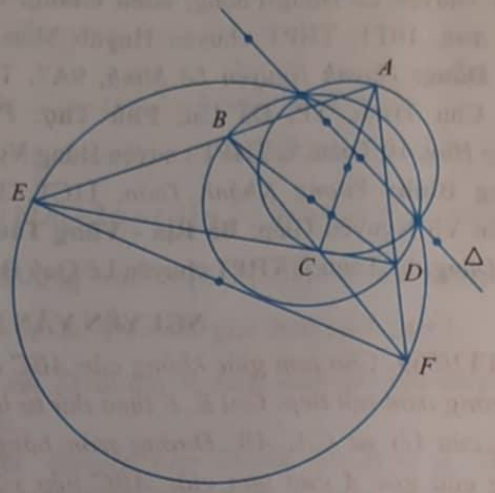
b) *$BD=CG$ và A, D', G thẳng hàng* (h.1).



Hình 1

Bổ đề 2. *Cho tứ giác bốn điểm A, B, C, D, không có ba điểm nào thẳng hàng. $AB\cap CD=E; AD\cap CB=F$. Khi đó các đường tròn $(AC), (BD), (EF)$ có chung trục đẳng phương.*

kí hiệu là Δ, và trực tâm của các tam giác ABF, ADE, CBE, CDF cùng thuộc Δ (h.2).



Hình 2

Các bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây.

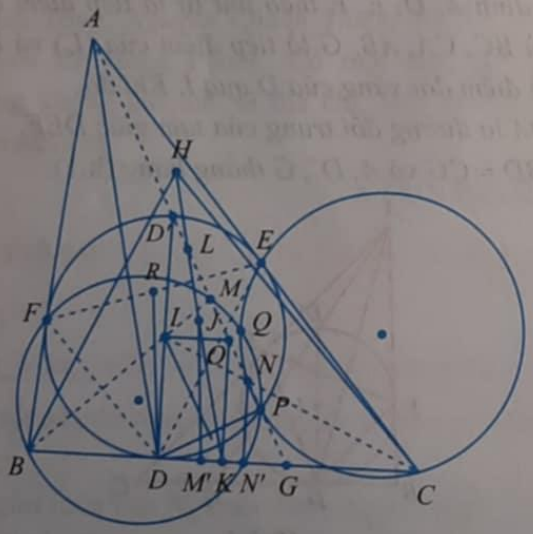
Trở lại giải bài toán T12.

a) Gọi D là tiếp điểm của (I) và BC; P là hình chiếu vuông góc của D trên AG (h.3).

Dễ thấy $NP \perp DP; NC \perp DE$. Từ đó, chú ý rằng EC tiếp xúc với (I), suy ra:

$$(NP, NC) \equiv (DP, DE) \equiv (EP, EC) (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Do đó P thuộc đường tròn (NCE). Tương tự, P thuộc đường tròn (MBF).



Hình 3

Gọi Q là giao điểm khác P của các đường tròn (NCE), (MBF). Dễ thấy:

$$(CI, CQ) \equiv (CN, CQ) \equiv (PN, PQ) (\mathrm{mod}\, \pi)$$
$$\equiv (PM, PQ) \equiv (BM, BQ) \equiv (BI, BQ) (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Do đó đường tròn (BIC) cũng đi qua Q.

Vậy các đường tròn (MBF), (NCE), (BIC) cùng đi qua Q.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác BIC; R là trung điểm của EF; O là trung điểm của MN; M', N' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, N trên BC; D' là điểm đối xứng của D qua I (h.3).

Dễ thấy $DE // HB; DF // HC$ và DB tiếp xúc với (I). Do đó:

$$(DE, DF) \equiv (HB, HC) \equiv -(HC, HB) (\mathrm{mod}\, \pi);$$
$$(ED, EF) \equiv (DB, DF) \equiv (CB, CH)$$
$$\equiv -(CH, CB) (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Điều đó có nghĩa là các tam giác HCB, DEF đồng dạng ngược hướng.

Kết hợp với K, R theo thứ tự là trung điểm của BC, EF, chú ý tới bổ đề 1, ta có:

$$(HC, HK) \equiv -(DE, DR) \equiv (DR, DE)$$
$$\equiv (DF, DA) (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Từ đó, chú ý rằng $HC // DF$, suy ra $HK // DA$.

Kết hợp với K, L theo thứ tự là trung điểm của BC, AG, chú ý tới bổ đề 1, ta có HK đi qua L (1).

Theo bổ đề 1, $IK // D'G \equiv MN$.

Kết hợp với O là trung điểm của MN, ta có:

$$I(BCOK) = I(MNOK) = -1.$$

Từ đó, chú ý rằng K là trung điểm của BC, suy ra $IO // BC$. Kết hợp với I là trung điểm của DD', chú ý tới bổ đề 1, ta có O là trung điểm của $D'G$.

Theo bổ đề 1, K là trung điểm của DG.

Vậy $OK // D'D \perp BC$. Do đó $OK // MM' // NN'$.

Kết hợp với O là trung điểm của MN, suy ra K là trung điểm của $M'N'$.

Từ đó, chú ý rằng K là trung điểm của BC, suy ra:

$$P_{K/(BN)} = \overline{KB}.\overline{KN'} = \overline{KC}.\overline{KM'} = P_{K/(CM)}.$$

Điều đó có rằng K thuộc trục đẳng phương của các đường tròn (BN), (CM).

Vậy, áp dụng bổ đề 2 cho bốn điểm B, I, N, G, chú ý rằng $BG \cap IN = C$; $BI \cap GN = M$, ta có H, K, J thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) suy ra L, J, K thẳng hàng.

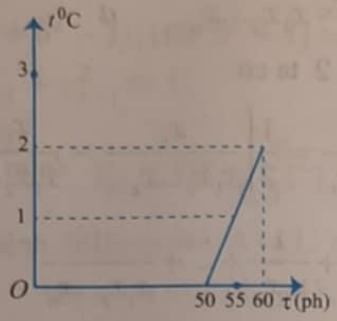
Nhận xét.

1) Bài toán này khó, chỉ có hai bạn tham gia giải: **Phú Thọ:** *Trần Việt Tùng*, 10TA, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Quảng Bình:** *Trần Đức Phát*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới.

2) Lời giải của bạn *Phát* chính là lời giải của tác giả bài toán.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/569. *Người ta bỏ một cục nước đá lạnh vào trong xô nước. Khối lượng hỗn hợp là $M = 10$ kg và thực hiện đo nhiệt độ t^oC của hỗn hợp. Đồ thị phụ thuộc nhiệt độ vào thời gian τ được biểu diễn như hình dưới.*



Biết nhiệt dung riêng của nước $c = 4200$ J/kg.K, nhiệt nóng chảy của nước đá $\lambda = 3{,}4.10^5$ J/kg. Hãy xác định có bao nhiêu nước đá đã bỏ vào xô ban đầu (bỏ qua sự mất mát nhiệt).

Lời giải. Từ đồ thị có thể thấy trong khoảng thời gian $\tau_1 = 50$ phút đầu tiên, nước đá đã bắt đầu tan. Sau đó nó bắt đầu nóng lên.

Gọi Q là nhiệt lượng mà bình thu được từ môi trường xung quanh trong 1 s.

Trong thời gian $\Delta\tau$ bình nhận được nhiệt lượng $Q.\Delta\tau$, do đó $\lambda.m = Q.\Delta\tau_1$ (1) trong đó m là khối lượng nước đá.

Khi nước nóng lên: $M.c.\Delta t = Q.\Delta\tau_2$ (2) trong đó Δt là độ biến thiên nhiệt độ của nước sau thời gian $\Delta\tau_2$. Từ (1) và (2) suy ra:

$$m = \frac{M.c}{\lambda}.\frac{\Delta t}{\Delta\tau_2}.\Delta\tau_1 \quad (3).$$

Từ đồ thị ta thấy nếu $\Delta\tau_2 = 10$ phút thì $\Delta t = 2^oC$ thay vào (3): $m = \dfrac{10.4200}{3{,}4.10^5}.\dfrac{2.50}{10} = 1{,}24$ kg.

Vậy lượng nước đá ban đầu là 1,24 kg

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Đỗ Hà Duy Kha*, 10A2, *Nguyễn Ngọc Trâm*, 11A2, *Lê Thị Hồng Nga*, 12H, TTGDNN – GDTX, quận Ô Môn, **Cần Thơ.**

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/569. *Điện năng được truyền đi từ một máy phát đến một khu dân cư bằng đường dây tải một pha, với hiệu suất truyền tải 90%. Do nhu cầu tiêu thụ điện của khu dân cư tăng lên 11% nhưng chưa có điều kiện nâng công suất của máy phát người ta dùng máy biến áp để tăng điện áp trước khi truyền đi. Coi hệ số công suất của hệ thống là k và không thay đổi ($\mathcal{P} = kUI$). Tính tỉ số số vòng dây giữa cuộn thứ cấp và cuộn sơ cấp.*

Lời giải. Gọi $\mathcal{P}$ là công suất truyền tải từ máy phát, $\Delta\mathcal{P}$ là công suất hao phí trên đường dây tải điện, $\mathcal{P}_t$ là công suất tiêu thụ của tải, n là tỉ số vòng dây giữa cuộn thứ cấp và cuộn sơ cấp.

Hiệu suất truyền tải được xác định:

$$H = \frac{\mathcal{P} - \Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}} = 1 - \frac{\Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}}$$

Ban đầu $H = 90\% \Rightarrow \begin{cases} \Delta\mathcal{P} = 0{,}1\mathcal{P} \\ \mathcal{P}_t = 0{,}9\mathcal{P} \end{cases}$

$$\Delta\mathcal{P} = RI^2 = R\frac{\mathcal{P}^2}{k^2U^2};\ \mathcal{P} = \mathcal{P}_t + \Delta\mathcal{P} \ (1).$$

Khi tăng điện áp lên n lần $U' = nU$ thì công suất tiêu thụ là $\mathcal{P}_t' = n\mathcal{P}_t = 1{,}1\mathcal{P}_t$. Công suất hao phí khi này: $\Delta\mathcal{P}' = R\dfrac{\mathcal{P}^2}{k^2n^2U^2} = \dfrac{\Delta\mathcal{P}}{n^2}$.

Ta có: $\mathcal{P} = 1{,}1\mathcal{P}_t + \Delta\mathcal{P} = 1{,}1\mathcal{P}_t + \dfrac{\Delta\mathcal{P}}{n^2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra: $0{,}001 = \dfrac{0{,}1}{n^2} \Rightarrow n = 10.$

Nhận xét. Hoang nghênh bạn *Lê Khánh Duy*, 10E5, TH, THCS&THPT Lê Thánh tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh** đã có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG



TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

TRẦN XUÂN ĐẶNG
(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định)

(Kỳ 1)

I. PHẦN THỨ NHẤT. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY SỐ

1) Phương pháp 1. Tìm công thức của số hạng tổng quát của dãy số

Bài toán 1. *Cho dãy số* $(x_n)(n \in \mathbb{N}^*)$ *được xác định bởi* $x_1 = 5$ *và* $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$.

a) *Tìm* x_n.

b) *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}$.

c) *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_1x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_1x_2\ldots x_n}\right)$.

Lời giải. a) Đặt $a = \dfrac{1}{2}(5+\sqrt{21})$. Khi đó $a+\dfrac{1}{a} = 5 = x_1$. Ta có: $x_2 = x_1^2 - 2 = a^2 + \dfrac{1}{a^2}$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được:

$$x_n = a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $x_n = \left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^{2^{n-1}} + \left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

b) Ta có: $x_1x_2\ldots x_n = \dfrac{a}{a^2-1}\cdot\left(a^{2^n} - \dfrac{1}{a^{2^n}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n} = \frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{a^{2^n}+a^{-2^n}}{a^{2^n}-a^{-2^n}} = \frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{1+a^{-2^{n+1}}}{1-a^{-2^{n+1}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n} = \frac{a^2-1}{a} = \sqrt{21}.$$

c) Với $k \geq 2$ ta có:

$$\frac{1}{x_1.x_2\ldots x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_k}{x_1x_2\ldots x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_1x_2\ldots x_k}\right).$$

Suy ra: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_1x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_1x_2\ldots x_n}$

$$= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n} = \sqrt{21}$ nên

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}+\ldots+\frac{1}{x_1x_2\ldots x_n}\right) = \frac{5-\sqrt{21}}{2}.$$

Sử dụng lượng giác để tìm số hạng tổng quát của dãy số

Bài toán 2. *Cho các dãy số thực dương* $(x_n),(y_n)(n \in \mathbb{N}^*)$ *được xác định bởi*

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

và $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2-1}$, $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1-4x_{n+1}^2}$

với mọi số nguyên dương n. Tìm giới hạn của các dãy số $(x_n),(y_n)$.

Sau đây là lời giải bài toán 2 của tác giả bài viết.

Từ giả thiết suy ra $y_n > \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Trước hết ta chứng minh $x_n^2 + y_n^2 = 1, \forall n \in N^*$. Thật vậy mệnh đề đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k\ (k \geq 1)$, tức là $x_k^2 + y_k^2 = 1$.

Đặt $a = x_{k+1}, b = y_{k+1}$ ta có:

$$x_k = a(4b^2 - 1),\ y_k = b(1 - 4a^2).$$

Vì $x_k^2 + y_k^2 = 1$ nên

$$a^2(4b^2-1)^2 + b^2(1-4a^2)^2 = 1$$
$$\Rightarrow (a^2 + b^2 - 1)(16a^2b^2 + 1) = 0$$
$$\Rightarrow x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = 1.$$

Ta chứng minh $y_n = \cos\frac{\pi}{4.3^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy mệnh đề đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k (k \geq 1)$, tức là $y_k = \cos\frac{\pi}{4.3^{k-1}}$. Ta có $1 > y_{k+1} > \frac{1}{2}$ nên tồn tại $\alpha_{k+1} \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ sao cho $y_{k+1} = \cos\alpha_{k+1}$. Ta có:

$$y_{k+1}(1 - 4x_{k+1}^2) = y_k \Rightarrow 4y_{k+1}^3 - 3y_{k+1} = y_k$$
$$\Rightarrow \cos 3\alpha_{k+1} = \cos\frac{\pi}{4.3^{k-1}}.$$

Vì $0 < \alpha_{k+1} < \frac{\pi}{3}$ nên

$$\alpha_{k+1} = \frac{\pi}{4.3^k} \Rightarrow y_{k+1} = \cos\frac{\pi}{4.3^k}.$$

Vậy mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $y_n = \cos\frac{\pi}{4.3^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $x_n = \sin\frac{\pi}{4.3^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0,\ \lim_{n\to+\infty} y_n = 1.$$

Bài toán 3 (Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm 2014). *Cho hai dãy số dương $(x_n), (y_n)$ được xác định bởi và*

$$\begin{cases} x_{n+1}y_{n+1} - x_n = 0 \\ x_{n+1}^2 + y_n = 2 \end{cases}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng hai dãy số trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

Lời giải. Ta có:

$$x_1 = \sqrt{3} = 2\sin\frac{\pi}{6}, y_1 = \sqrt{3} = 2\cos\frac{\pi}{6}.$$

Chúng ta chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $x_n = 2\sin\frac{\pi}{3.2^n}$ và $y_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n}$.

Thật vậy mệnh đề đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k\ (k \geq 1)$, tức là:

$$x_k = 2\sin\frac{\pi}{3.2^k} \text{ và } y_k = 2\cos\frac{\pi}{3.2^k}.$$

Ta có:

$$x_{k+1}^2 = 2 - y_k = 2 - 2\cos\frac{\pi}{3.2^k}$$
$$= 4\sin^2\frac{\pi}{3.2^{k+1}}.$$

Suy ra: $x_{k+1} = 2\sin\frac{\pi}{3.2^{k+1}}$ (vì $x_{k+1} > 0$)

và $y_{k+1} = \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{3.2^k}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^{k+1}}} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^{k+1}}$.

Vậy mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp, mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n. Từ đó suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2\sin\frac{\pi}{3.2^n}\right) = 0$$

và $\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\frac{\pi}{3.2^n}\right) = 2.$

Vậy các dãy $(x_n), (y_n)$ hội tụ và

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0, \lim_{n\to+\infty} y_n = 2.$$

2) Phương pháp 2. Chứng minh dãy đơn điệu và bị chặn

Bài toán 4. *Cho dãy số* $(x_n)(n \geq 1)$ *thỏa mãn đồng thời các điều kiện* $0 < x_1 < 1$ *và* $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, \forall n \geq 1$. *Chứng minh rằng dãy* (x_n) *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to +\infty$.

Lời giải. Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$x_2 < 2x_1, x_3 = x_2 + \frac{x_2^2}{4} < 2x_1 + x_1^2 < 3x_1.$$

Bằng phương pháp quy nạp dễ dàng chứng minh được: $x_n < nx_1, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$.

Tồn tại số nguyên dương m sao cho $mx_1 < m-1$. Suy ra $x_m < m-1 \ (m \geq 2)$.

Ta có:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2}{n^2} > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra dãy (x_n) là dãy tăng. Với $k \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} &= \frac{1}{x_k} - \frac{k^2}{k^2 x_k + x_k^2} \\ &= \frac{1}{x_k + k^2} \\ &< \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Giả sử $n > m \ (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n \geq 3$.

Ta có:

$$\sum_{k=m}^{n-1} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

Suy ra:

$$\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} < \frac{1}{m-1}.$$

Suy ra: $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_m} - \frac{1}{m-1}$

$$\Rightarrow x_n < \frac{(m-1)x_m}{m-1-x_m}.$$

Vậy dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Chú ý rằng chúng ta có thể chứng minh được:

$$x_n + n^2 \geq \sqrt{x_1} n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 5. *Cho dãy số thực* (x_n) *được xác định bởi* $x_1 = 1$ *và* $x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \ \forall n \geq 2$.

Với mỗi số nguyên dương n, *đặt* $y_n = x_{n+1} - x_n$. *Chứng minh rằng dãy số* (y_n) *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to +\infty$.

Lời giải. Ta có: $x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i$

$$\Rightarrow x_n \left[1 + \frac{2n}{(n-1)^2} \right] = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \frac{2n}{(n-1)^2}$$

$$\Rightarrow x_n \frac{n^2+1}{2n} = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Mặt khác $x_{n+1} \frac{n^2}{2(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ nên

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right), \ (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow x_n = x_{n-1} \left[1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right] \left[1 + \frac{1}{n-1} \right], \ (n \geq 3).$$

Ta có: $y_n = x_{n+1} - x_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n$

$$= \frac{n^2+n+1}{n^3} \left[1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right] \left[1 + \frac{1}{(n-2)^2} \right] \times \ldots$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{2^2} \right] \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \left(1 + \frac{1}{n-2} \right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2} \right) x_2$$

$$= \frac{2(n^2+n+1)}{n^2} \left[1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right] \left[1 + \frac{1}{(n-2)^2} \right] \ldots \left[1 + \frac{1}{2^2} \right],$$

$(n \geq 3)$. Xét dãy (z_n) $(n \in N^*)$ được xác định bởi: $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = 1$,

$$z_n = \left[1+\frac{1}{2^2}\right]\left[1+\frac{1}{3^2}\right]...\left[1+\frac{1}{(n-1)^2}\right], (n \geq 3)$$

$$\Rightarrow y_n = \frac{2(n^2+n+1)}{n^2} z_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Hiển nhiên dãy (z_n) là dãy tăng. Ta chứng minh BĐT: $\ln(1+x) < x$ (1), $\forall x > 0$. Thật vậy xét hàm số $f(x) = x - \ln(1+x), (x \geq 0)$. Ta có:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0, \forall x > 0.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	↗

$\Rightarrow f(x) > f(0), \forall x > 0$. Suy ra BĐT(1) đúng.

Hiển nhiên $z_n > 0 \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$. Với $n \geq 3$ ta có:

$$\begin{aligned} \ln z_n &< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(n-1)^2} \\ &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-2)(n-1)} \\ &< 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z_n < e$, $(\forall n \geq 3)$. Dãy (z_n) bị chặn trên

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} z_n = a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 2a.$

Vậy dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm học 2011 - 2012 có bài toán sau

Bài toán 6. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 3$ và $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2)$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tìm giới hạn đó.*

Cách tiếp cận lời giải: Giả sử $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ suy ra $a = 1$. Mặt khác:

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{10}{3}, x_3 = \frac{80}{27}, x_4 = \frac{67}{27}.$$

Như vậy chúng ta có thể dự đoán rằng $x_{n-1} > x_n, \forall n \geq 3$. Mặt khác:

$$x_{n-1} > x_n \Leftrightarrow x_{n-1} > 1 + \frac{3}{n-1}.$$

Từ đó chúng ta có lời giải của bài toán như sau

Lời giải. Ta có $x_1 = 3, x_2 = \frac{10}{3}$. Ta chứng minh $x_n > 1 + \frac{3}{n}$ (1) với mọi $n \geq 2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

Thật vậy (1) đúng với $n = 2$. Giả sử (1) đúng với $n = k (k \geq 2)$, tức là $x_k > 1 + \frac{3}{k}$. Ta có:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{k+3}{3(k+1)}(x_k + 2) \\ &> \frac{k+3}{3(k+1)}\left(3 + \frac{3}{k}\right) \\ &= \frac{k+3}{k} \\ &> 1 + \frac{3}{k+1}, \end{aligned}$$

tức là (1) cũng đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lí quy nạp thì (1) đúng với mọi $n \geq 2$.

Với $n \geq 3$ ta có:

$$\begin{aligned} x_{n-1} - x_n &= x_{n-1} - \frac{n+2}{3n} x_{n-1} - \frac{2(n+2)}{3n} \\ &= \frac{2n-2}{3n} x_{n-1} - \frac{2(n+2)}{3n}. \end{aligned}$$

Vì $x_{n-1} > 1 + \frac{3}{n-1}$ nên

$$x_{n-1} - x_n > \frac{2n-2}{3n}\left(1 + \frac{3}{n-1}\right) - \frac{2(n+2)}{3n} = 0.$$

Vậy $x_{n-1} > x_n, \forall n \geq 3$.

Mặt khác $x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, Vậy dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a (a \geq 1)$ ta có:

$a = \frac{1}{3}(a+2) \Rightarrow a = 1$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2013 có bài toán sau

Bài toán 7. *Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Ta có $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = 3 - \frac{7}{4\sqrt{2}}$.

Xét hàm số $f(x) = 3 - \frac{2+x}{2^x}$ $(x \geq 0)$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{2^x (x+2)\ln 2 - 2^x}{2^{2x}} > 0, \forall x > 0.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$

và $a_{n+1} = f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $0 < a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy (a_n) là dãy tăng. Bằng phương pháp quy nạp ta cũng dễ dàng chứng minh được $a_n < 2, \forall n \geq 3$. Vậy dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Ta có $a_3 > \frac{7}{4}$. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \left(\frac{7}{4} < b \leq 2\right)$ ta có: $b = 3 - \frac{2+b}{2^b} \Rightarrow 2^b (3-b) - b - 2 = 0$.

Xét hàm số:

$$g(x) = 2^x (3-x) - x - 2 \left(\frac{7}{4} < x \leq 2\right).$$

Ta có: $g'(x) = 2^x \left[(3-x)\ln 2 - 1\right] - 1, \forall x \in \left(\frac{7}{4};2\right)$;

$e > \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 \Rightarrow (3-x)\ln 2 - 1 < 0, \forall x \in \left(\frac{7}{4};2\right)$

$\Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{7}{4};2\right]$. Mặt khác $g(x)$ liên tục trên $\left[\frac{7}{4};2\right]$. Vậy $g(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{7}{4};2\right]$. Mặt khác $g(2) = 0$ nên PT $g(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x = 2$. Vậy $b = 2$.

Tóm lại dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

3) Phương pháp 3. Xét sự hội tụ của các dãy con

Bài toán 8. *Cho dãy số $(x_n)(n \in \mathbb{N}^*)$ thỏa mãn $0 < x_1 < 1$ và $x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n}$ với mọi $n \geq 1$ Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ .Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.*

Lời giải. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $0 < x_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} (0 < x < 1)$. Khi đó $f(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$ và $x_{k+1} = f(x_k), \forall k \in \mathbb{N}^*$.

TH1: $0 < x_1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Khi đó:

$x_3 > x_1 \Rightarrow x_4 < x_2$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được dãy (x_{2k-1}) là dãy tăng và (x_{2k}) là dãy giảm. Hơn nữa

$$x_{2k-1} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x_{2k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k-1} = a \left(0 < x_1 < a \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

và $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k} = b \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq b < x_2 < 1\right)$.

Ta có: $b=\sqrt{1-a}$ và $a=\sqrt{1-b}$.

$\Rightarrow a=\sqrt{1-\sqrt{1-a}} \Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(vì $0<a<1$) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

TH2: $1>x_1>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tương tự ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

TH3: $x_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

4) Phương pháp 4. Sử dụng định lí:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n=0 \ \ (|q|<1).$$

Bài toán 9. *Cho dãy số $(x_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ được xác định bởi $x_1=-\dfrac{1}{3}$ và $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2}-1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.*

Lời giải. Bằng phương pháp quy nạp dễ dàng chứng minh được $-1<x_n<0, \forall n\geq 1$.

Do đó nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a \ (a\in\mathbb{R})$ thì a là nghiệm âm của phương trình $t=\dfrac{t^2}{2}-1$

$\Rightarrow a=1-\sqrt{3}$.

Ta sẽ chứng minh $a=1-\sqrt{3}$ là giới hạn của dãy (x_n). Thật vậy:

$$|x_{n+1}-a|=\left|\frac{x_n^2}{2}-1-\left(\frac{a^2}{2}-1\right)\right|$$
$$=\frac{1}{2}|x_n-a||x_n+a|.$$

Vì $-1<x_n<0$ nên

$$-\sqrt{3}<x_n+a<1-\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow |x_n+a|<\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow |x_{n+1}-a|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}|x_n-a|.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$0\leq |x_{n+1}-a|\leq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n|x_1-a|, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Vì $0<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=0$ suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty}|x_{n+1}-a|=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n=a=1-\sqrt{3}.$$

5) Phương pháp 5. Phương pháp sử dụng định lí kẹp

Bài toán 10. *Cho dãy số $(x_n)(n\geq 1)$ được xác định bởi $x_n=\dfrac{1}{n^n}\sum\limits_{k=1}^{n}k^k, \forall n\geq 1$. Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.*

Lời giải. Với $n\geq 2$ ta có:

$$1=\frac{n^n}{n^n}<x_n<\frac{1}{n^n}\left(\sum_{k=1}^{n}n^k\right)$$
$$=\frac{n^{n+1}-n}{n^n(n-1)}=\frac{n^n-1}{n^n}.\frac{n}{n-1}<\frac{n}{n-1}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$.

Bài toán 11. *Cho dãy số $(x_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $1<x_1<\dfrac{3}{2}$ và $x_{n+1}=1+x_n-\dfrac{x_n^2}{2}(n\geq 1)$. Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.*

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x)=1+x-\frac{x^2}{2}\ \left(x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]\right).$$

Ta có: $f'(x)=1-x, \forall x\in\left(1;\frac{3}{2}\right).$

Suy ra: $f'(x)<0, \forall x\in\left(1;\frac{3}{2}\right).$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\left[1;\frac{3}{2}\right]$. Suy ra:

$$f\left(\frac{3}{2}\right)<f(x)<f(1), \forall x\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1<f(x)<\frac{3}{2}, \forall x\in\left(1;\frac{3}{2}\right).$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$1<x_n<\frac{3}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$$

và $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*.$

Ta có $\left|f'(x)\right|<\frac{1}{2}, \forall x\in\left(1;\frac{3}{2}\right).$

Theo định lí Lagrange, tồn tại $c\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$ sao cho:

$$\left|f(x_n)-f(\sqrt{2})\right|=\left|f'(c)\right|\left|x_n-\sqrt{2}\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right|, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra:

$$\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leq\frac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right|, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$\left|x_n-\sqrt{2}\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left|x_1-\sqrt{2}\right|, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left|x_1-\sqrt{2}\right|=0$ nên

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{2}.$$

6) Phương pháp 6. Phương pháp "min, max"

Bài toán 12. *Cho dãy số $(x_n)(n\geq 0)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x_0>0, x_1>0$ và $x_{n+1}=\sqrt{x_n}+\sqrt{x_{n-1}}(n\geq 1)$. Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.*

Lời giải. Chúng ta xây dựng các dãy (a_n) và (b_n) như sau:

$$a_0=\min\left\{x_0,x_1,4\right\}, a_n=2\sqrt{a_{n-1}}(n\geq 1),$$

$$b_0=max\left\{x_0,x_1,4\right\}, b_n=2\sqrt{b_{n-1}}(n\geq 1).$$

Dễ dàng chứng minh được:

$$a_n\leq a_{n+1}\leq 4, \forall n\in\mathbb{N} \text{ và}$$

$$4\leq b_{n+1}\leq b_n \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ta chứng minh

$$a_n\leq\min(x_{2n},x_{2n+1}), \forall n\in\mathbb{N}.$$

Thật vậy mệnh đề đúng với $n=0$. Giả sử mệnh đề đúng với $n=k(k\in\mathbb{N})$, tức là:

$$a_k\leq\min(x_{2k},x_{2k+1})$$

$$\Rightarrow a_k\leq x_{2k}, a_k\leq x_{2k+1}$$

$$\Rightarrow x_{2k+2}=\sqrt{x_{2k+1}}+\sqrt{x_{2k}}\geq 2\sqrt{a_k}=a_{k+1},$$

$$x_{2k+3}=\sqrt{x_{2k+2}}+\sqrt{x_{2k+1}}$$

$$\geq\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}$$

$$\geq 2\sqrt{a_k}=a_{k+1}.$$

Vậy mệnh đề cũng đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp, mệnh đề đúng với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Tương tự ta có:

$$b_n\geq\max(x_{2n},x_{2n+1}), \forall n\in\mathbb{N}.$$

Suy ra $a_n\leq x_{2n}\leq b_n, \forall n\in\mathbb{N}$ và $a_n\leq x_{2n+1}\leq b_n, \forall n\in\mathbb{N}.$

Dễ dàng chứng minh được

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 4.$$

Từ đó suy ra: $\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = 4$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = 4.$$

7) Phương pháp 7. Sử dụng định lí Stolz

Định lí Stolz về giới hạn của dãy số:

Cho hai dãy số $(x_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ *và* $(y_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ *thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

i) $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

ii) $y_{n+1} > y_n > 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$

Chứng minh: Giả sử ε là số thực dương cho trước. Vì $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a$ nên tồn tại $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho:

$$(y_{n+1}-y_n)(a-\frac{\varepsilon}{2}) < x_{n+1}-x_n < (a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n), \forall n\ge n_0.$$

Với $n\ge n_0+1$ ta có:

$$(y_{n_0+1}-y_{n_0})(a-\frac{\varepsilon}{2}) < x_{n_0+1}-x_{n_0} < \left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n_0+1}-y_{n_0}),$$

$$(y_{n_0+2}-y_{n_0+1})(a-\frac{\varepsilon}{2}) < x_{n_0+2}-x_{n_0+1} < \left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n_0+2}-y_{n_0+1}),$$

.....

$$(y_n-y_{n-1})(a-\frac{\varepsilon}{2}) < x_n-x_{n-1} < \left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_{n-1}).$$

Suy ra: $(y_n-y_{n_0})(a-\frac{\varepsilon}{2}) < x_n-x_{n_0} < (a+\frac{\varepsilon}{2})(y_n-y_{n_0}), \forall n\ge n_0+1$

$$\Rightarrow \left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{y_{n_0}}{y_n}\right)+\frac{x_{n_0}}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < \left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{y_{n_0}}{y_n}\right)+\frac{x_{n_0}}{y_n}, \forall n\ge n_0.$$

Ta có: $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(1-\frac{y_{n_0}}{y_n})+\frac{x_{n_0}}{y_n}\right] = a-\frac{\varepsilon}{2}$.

Suy ra tồn tại $n_1\in\mathbb{N}^*$ sao cho:

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(1-\frac{y_{n_0}}{y_n})+\frac{x_{n_0}}{y_n} > a-\varepsilon, \forall n\ge n_1.$$

Ta có: $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(1-\frac{y_{n_0}}{y_n})+\frac{x_{n_0}}{y_n}\right] = a+\frac{\varepsilon}{2}$.

Suy ra tồn tại $n_2\in\mathbb{N}^*$ sao cho:

$$(a+\frac{\varepsilon}{2})(1-\frac{y_{n_0}}{y_n})+\frac{x_{n_0}}{y_n} < a+\varepsilon, \forall n\ge n_2$$

$$\Rightarrow a-\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < a+\varepsilon, \forall n\ge n_3,$$

trong đó $n_3 = \max\{n_0+1, n_1, n_2\}$

$$\Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n}-a\right| < \varepsilon, \forall n\ge n_3$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = a.$$

Sử dụng định lý Stolz chúng ta có thể giải được bài toán sau

Bài toán 13. *Cho dãy số* $(x_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ *được xác định bởi*

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n - (x_n)^2, \forall n\ge 1.$$

Chứng minh rằng $\lim_{n\to+\infty}(nx_n) = 1$.

(Kỳ sau đăng tiếp)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 114

PROBLEM. *Choosing 3 vertices of a regular decagon randomly. Compute the probability that these 3 vertices make a right triangle.*

Solution. Inscribing this regular decagon in a circle.



The number of right triangles is equal to 5×8 since there are 5 ways to choose the hypotenuse which must be a diameter of the circle, and for each chosen diameter we have 8 ways to choose the right angle vextex.

Therefore the required probability is $\dfrac{5\times 8}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{3}$.

Remark: This problem is based on a problem on a Math contest of Bac Giang province (2017-2018)

TỪ VỰNG

regular decagon : *đa giác đều 10 cạnh*

randomly : *một cách ngẫu nhiên*

hypotenuse : *cạnh huyền*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 112

BÀI TOÁN. *Tính tổng vô hạn*

$$\sum_0^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cos(n\pi).$$

Lời giải. Ta có:

$$\sum_0^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cos(n\pi)=1-\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\dots$$

Đây là tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $r=-\dfrac{3}{4}$.

Do đó:

$$\sum_0^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cos(n\pi)=\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{4}{7}.$$

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được bài dịch nào của bài này gửi về Tòa soạn.

HÒ HẢI (*Hà Nội*)



BÀI TOÁN 93. *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện $A'D'MN$ và $BCC'D'$. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng $(ABB'A')$ song song với nhau.*

Lời giải. ***Cách 1.*** Để chứng minh đường thẳng AB song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P), ta lấy trong (P) hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, sau đó chứng minh $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng. Khi các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc (P) thì đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P). Ta có:

$$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AG'}-\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{D'C}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{ND'}\right)=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{8}\overrightarrow{AA'}.$$

Khi đó $\overrightarrow{GG'}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$ đồng phẳng. Mặt khác, $G\notin(ABB'A')$ nên đường thẳng GG' và mặt phẳng $(ABB'A')$ song song với nhau.

Cách 2. *Sử dụng định lí Thalès đảo.*

Gọi E và E' lần lượt là trọng tâm của các tam giác $D'MN$ và $CC'D'$. Ta có $A'E$ và BE' chéo nhau; $\dfrac{A'G}{A'E}=\dfrac{BG'}{BE'}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{A'G}{BG'}=\dfrac{A'E}{BE'}=\dfrac{GE}{G'E'}$.

Suy ra $A'B$, GG', EE' cùng song song với một mặt phẳng. Mà $A'B\subset(ABB'A')$;

$$EE'\subset(CDD'C')\Rightarrow EE'//(ABB'A').$$

Vậy $GG'//(ABB'A')$.

Cách 3. *Sử dụng khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.*

Gọi $E=A'G\cap(D'MN)$

$$\Rightarrow\frac{d(G;(D'MN))}{d(A';(D'MN))}=\frac{EG}{EA'}=\frac{1}{4}$$

và $E'=BG'\cap(CC'D')$

$$\Rightarrow\frac{d(G';(CC'D'))}{d(B;(CC'D'))}=\frac{E'G'}{E'B}=\frac{1}{4}.$$

Mà $d(A';(D'MN))=d(B;(CC'D'))$

$\Rightarrow d(G;(D'MN))=d(G';(CC'D'))$.

Suy ra $GG'//(CC'D')\Rightarrow GG'//(ABB'A')$.

Cách 4. *Sử dụng hai mặt phẳng song song.*

Gọi D_1 thỏa mãn $\overrightarrow{A'D_1}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{A'D'}$. Dựng mặt phẳng (α) đi qua D_1 và song song với mặt phẳng $(D'MN)$. Khi đó $G\in(\alpha)$.

Ta có mặt phẳng $(\alpha)//(CC'D')$ và mặt phẳng $(\alpha)\cap BC=C_1$ thỏa mãn $\overrightarrow{BC_1}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $G'\in(\alpha)$. Vậy $GG'\subset(\alpha)$, mà $(\alpha)//(ABB'A')\Rightarrow GG'//(ABB'A')$.

TRẦN ĐỨC PHƯƠNG

(GV THPT Giao Thủy, Nam Định)

Nhận xét. Kỳ này Tòa soạn không nhận được bài nào cho chuyên mục này.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 95 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/4/2025.

BÀI TOÁN 95. *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$S=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{7}{4xy}+4xy.$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm học 2024-2025, Quảng Ngãi)

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)



BÀI TOÁN 101 (USSR 1990). *Cho phương trình bậc ba:* $x^3+\square x^2+\square x+\square=0$.

Bạn F và bạn T chơi một trò chơi gồm ba lượt, ở mỗi lượt trước tiên bạn F chọn một số thực, sau đó bạn T điền số thực đó vào một trong ba ô trống trong phương trình. Sau ba lượt, trò chơi sẽ kết thúc. Bạn F sẽ là người chiến thắng nếu phương trình cuối có ba nghiệm nguyên phân biệt, nếu không thì bạn T là người chiến thắng. Theo em ai sẽ là người có chiến lược chiến thắng?

Lời giải. Bạn F sẽ là người chiến thắng nếu có chiến lược đúng. Xét các ô trống là a, b, c, ta có PT là: $x^3+ax^2+bx+c=0$. Bạn F chọn số 0 trong lần đầu tiên. Ta xét các trường hợp sau:

• TH1: Bạn T điền $a=0$. PT trở thành:

$$x^3+bx+c=0.$$

Sau đó F chọn số $-(mnp)^2$ với m, n, p là các số nguyên dương thỏa mãn: $m^2+n^2=p^2$.

Nếu T điền $b=-(mnp)^2$ thì F chọn $c=0$. PT trở thành: $x(x-mnp)(x+mnp)=0$.

Nếu T điền $c=-(mnp)^2$ thì F chọn

$$b=m^2n^2-n^2p^2-p^2m^2.$$

PT trở thành: $(x+m^2)(x+n^2)(x-p^2)=0$.

Như vậy với TH1 này PT luôn có 3 nghiệm phân biệt và do đó bạn F thắng.

• TH2: Bạn T điền $b=0$. PT trở thành:

$$x^3+ax^2+c=0.$$

Sau đó F chọn số $m^2(m+1)^2(m^2+m+1)^3$ với m là số nguyên dương lớn hơn 1.

Nếu T điền $a=m^2(m+1)^2(m^2+m+1)^3$ thì F có thể chọn $c=-m^8(m+1)^8(m^2+m+1)^6$.

PT trở thành:

$$(x-mp)[x+(m+1)p][x+m(m+1)p]=0,$$

ở đó $p=m^2(m+1)^2(m^2+m+1)^2$.

Nếu T điền $c=m^2(m+1)^2(m^2+m+1)^3$, thì F có thể chọn: $a=-(m^2+m+1)^2$. PT trở thành:

$$(x+mq)[x-(m+1)q][x-m(m+1)q]=0,$$

ở đó $q=m^2+m+1$.

Với TH2 này PT cũng luôn có 3 nghiệm phân biệt và do đó bạn F thắng.

• TH3: Bạn T điền $c=0$. PT trở thành:

$$x^3+ax^2+bx=0\Leftrightarrow x(x^2+ax+b)=0.$$

Đến đây, F chỉ cần chọn hai số nguyên a, b thỏa mãn: a, b khác 0, 1 và $a+b=-1$, thì PT trở thành

$$x(x-1)(x-a)=0 \text{ hoặc } x(x-1)(x-b)=0.$$

Với TH3 này PT cũng luôn có 3 nghiệm phân biệt và do đó bạn F thắng.

Dưới đây là một số ví dụ cụ thể:

F	T	F	T	F	Nghiệm
0	a	-3600	b	0	$-60, 0, 60$
			c	-481	$-16, -9, 25$
0	b	$4.9.7^3$	a	$-2^8.3^8.7^6$	$-8.27.49$
					$-4.27.49$
					$8.9.49$
			c	-49	$-14,21,42$
0	c	2	a	-3	$-3, 0, 1$
			b	-3	$0, 1, 2$

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được bài giải nào của các bạn cho bài này..

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/4/2025.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 103. *Cho* $\frac{3}{4}<a<1$. *Chứng minh rằng phương trình* $x^3(x+1)=(x+a)(2x+a)$ *có 4 nghiệm thực phân biệt và tìm các nghiệm này ở dạng chi tiết.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: BÀI TOÁN TỔ HỢP

(Đề đăng trên TH&TT số 569, tháng 11 năm 2024)

Phân tích sai lầm. Cả hai lời giải đều chưa đúng. Bởi lẽ:

Ở lời giải 1, xếp 6 người từng cặp vào 3 phòng, người ta không xếp vị trí chỗ ngồi ở các phòng nên không gian mẫu chưa chính xác. Hơn nữa ở các bước xếp người vào các phòng đã bị nhầm. Chẳng hạn nếu ở bước 1, 2, 3 và 4 đã chọn được 4 người ở 2 lớp A và B thì bước cuối sẽ không xếp được. Ví dụ phòng 1 có 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B; và phòng 2 cũng có 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B thì khi đó bắt buộc phòng số 3 sẽ có 2 học sinh lớp C.

Ở lời giải 2, để bước 3 không có 2 học sinh của cùng 1 lớp được xếp vào thì ở bước 2, chọn 2 người không trùng với 2 lớp của phòng 1. Chẳng hạn nếu phòng 1 có 2 học sinh lớp A và B thì phòng 2 phải chọn 2 học sinh lớp A và C hoặc B và C. Nên số cách xếp ở bước 2 phải là $C_4^2-1-1=4$.

Lời giải đúng. Sau đây là 2 cách giải đúng.

Cách 1. Xếp 6 người vào 3 phòng , mỗi phòng có 2 người nên trong 6 người ta lần lượt chọn tùy ý 2 người vào một phòng, vì vậy không gian mẫu có $n(\Omega)=C_6^2.C_4^2.C_2^2=90$.

Gọi A là biến cố không có hai học sinh cùng lớp nào được phân công vào cùng một phòng.

Bước 1: chọn 2 người vào phòng 1, trong 6 người sẽ có C_6^2 nhóm 2 người, trong đó có 3 cặp cùng lớp.Vì vậy vào phòng 1 có $C_6^2-3=12$ cách chọn.

Bước 2: Chọn 2 người vào phòng 2, trong 4 người còn lại sẽ có C_4^2 nhóm 2 người, trong đó có 1 cặp cùng lớp và sẽ không chọn cặp học sinh trùng cặp lớp ở phòng 1.

Vì vậy vào phòng 2 có $C_4^2-1-1=4$ cách chọn.

Bước 3: Ta xếp 2 người còn lại vào phòng cuối cùng, có 1 cách làm như vậy. Do đó $n(A)=12.4=48$. Cho nên $P(A)=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$.

Chọn B.

Cách 2. $\overline{A}$ là biến cố hai học sinh cùng lớp nào được phân công vào cùng một phòng.

TH1: Cả 2 học sinh của 3 lớp ngồi cùng phòng thì có $C_3^1.C_2^1=6$ (cách)

TH2: Cả 2 học sinh của 1 lớp ngồi cùng phòng. Chọn 1 cặp học sinh để xếp vào một phòng, có C_3^1 cách. Chọn phòng tùy ý để xếp cho cặp học sinh vừa chọn vào phòng đó, có 3 cách.

Xen kẽ 4 học sinh của 2 lớp còn lại và xếp vào 2 phòng còn nên có $C_2^1.2!=4$ cách.

Suy ra có $3.3.4=36$ cách xếp như vậy.

Vậy $n(\overline{A})=6+36=42$.

$$P(\overline{A})=\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}.$$

Vậy $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{8}{15}$. Chọn B.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng..

KIHIVI

GIÁ TRỊ x NÀO ?



Đề bài: *Tìm x để*

$$x^2+x-2, x^2+x-2, 2x^2+4x$$

là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

(Xem tiếp trang 15)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 573 (3.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142849, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập* : TS. TRẦN HỮU NAM** — ***Phó tổng biên tập* : CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG**
***Thư kí Tòa soạn* : ThS. HỒ QUANG VINH** — **TS. LÊ HỒNG MAI**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Hoàng Việt Dũng, Nguyễn Công Lợi – Sử dụng hệ thức Viète trong số học.

8 Hướng dẫn giải đề tự luyện thi vào lớp 10 THPT chuyên năm học 2025 - 2026.

11 Đề thi chọn học sinh giỏi TP. Hà Nội lớp 9 cấp THCS, năm học 2024 - 2025.

12 **Thử sức trước kỳ thi THPTQG** – Hướng dẫn giải đề số 3.

16 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Công Chuẩn – Một số dạng toán thực tiễn sử dụng hàm số bậc hai để giải.

23 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/573, ..., T12/573, L1/573, L2/573.

26 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/569, ..., T12/569, L1/569, L2/569.

36 **Phương pháp giải toán**
Trần Xuân Đáng - Tìm giới hạn của dãy số (*kỳ 1*).

44 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 114 – Bài dịch số 112.

45 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 93 – Đề bài toán 95.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 101. Đề bài toán 103.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*:** LÊ MAI, NHƯ HOÀNG — ***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Trị sự, phát hành*:** HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN — ***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

VIỆT NAM VÀ CUBA TĂNG CƯỜNG HỢP TÁC TRONG LĨNH VỰC XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Theo phóng viên TTXVN tại La Habana, từ ngày 22/2 đến 26/2, đoàn cán bộ Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam do Chủ tịch Hội đồng thành viên, Tổng Giám đốc Nguyễn Tiến Thanh dẫn đầu đã tới thăm và làm việc tại Cuba, nhằm tăng cường hợp tác trong lĩnh vực xuất bản giữa Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam và Bộ Đại học Cuba.

Trong buổi tiếp đoàn, Bộ trưởng Bộ Đại học Cuba Walter Baluja García bày tỏ mong muốn tăng cường hợp tác trong lĩnh vực xuất bản sách với Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam, đặc biệt là sách kĩ thuật số theo xu hướng phát triển hiện nay. Bộ trưởng cũng đánh giá cao sự tham dự của các đoàn Việt Nam tại Hội chợ sách quốc tế Habana thường niên, qua đó tăng cường giao lưu văn hóa giữa hai đất nước anh em Việt Nam - Cuba.



Quang cảnh buổi làm việc.
Ảnh: Việt Hùng - PV TTXVN

Bộ trưởng Walter Baluja García cho biết ngành giáo dục Cuba đã đào tạo hàng nghìn sinh viên Việt Nam trong những năm qua và đánh giá cao tinh thần học tập, sự thông minh, ý thức kỉ luật và sự hòa đồng của sinh viên Việt Nam.

Về phần mình, ông Nguyễn Tiến Thanh đã chia sẻ kinh nghiệm trong công tác xuất bản sách in và sách số của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, khẳng định sẵn sàng hỗ trợ Cuba trong việc in ấn và xuất bản sách phục vụ Đại hội quốc tế các trường Đại học lần thứ 15 tại Cuba và dịp kỉ niệm 100 năm ngày sinh của Tổng tư lệnh Fidel Castro vào năm 2026.



Bộ trưởng Bộ Đại học Cuba Walter Baluja García làm việc với Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam.
Ảnh: Việt Hùng - PV TTXVN

Ông Nguyễn Tiến Thanh nhấn mạnh, việc giúp đỡ và hỗ trợ Cuba luôn xuất phát từ trái tim của mỗi người Việt Nam. Nhân dân Việt Nam luôn ghi nhớ và biết ơn nhân dân Cuba anh em bởi sự giúp đỡ chí tình, chí nghĩa trong công cuộc đấu tranh bảo vệ Tổ quốc, xây dựng và phát triển đất nước.

Hai bên cũng nhất trí sẽ kí kết một Biên bản ghi nhớ về hợp tác trong lĩnh vực xuất bản nhân dịp chuyến thăm và làm việc sắp tới tại Việt Nam của Thứ trưởng Bộ Đại học Cuba Reynaldo Velázquez Zaldívar.

Trong thời gian tại Cuba, đoàn cán bộ Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam cũng đã tham dự Hội chợ sách quốc tế La Habana lần thứ 33 và làm việc với Viện sách Cuba.

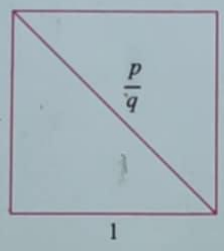
Theo TTXVN

DID YOU KNOW?

VÌ SAO NGƯỜI TA CHIA RA HAI LOẠI SỐ HỮU TỈ VÀ SỐ VÔ TỈ?

Câu hỏi này liên quan đến một câu chuyện cổ lý thú. Vào thế kỉ thứ VI trước Công nguyên, nhà toán học cổ Hy Lạp là *Pythagore* (khoảng 570-495 TCN) và những người theo trường phái của ông lúc đó cho rằng trên đời chỉ có loại số nguyên và tỷ số giữa hai số nguyên (phân số, số hữu tỷ). Họ cho rằng phải có một số đơn vị đủ nhỏ, không thể phân chia, để một độ dài bất kỳ có thể biểu thị qua những số đơn vị này. Điều đó cũng có nghĩa rằng người ta có thể dùng số nguyên hoặc tỉ số giữa hai số nguyên để biểu diễn độ dài của một đoạn thẳng tùy ý. Thế nhưng thực tế lại không phải như vậy, một người trong trường phái Pythagore tên là *Hippasus* (khoảng 530-450 TCN), đã phát hiện ra rằng trên thực tế không tồn tại đơn vị đo lường chung nào như vậy. Để khẳng định điều này *Hippasus* đã thực hiện chứng minh như sau:

Xét một hình vuông có cạnh bằng 1 và đường chéo giả sử được biểu diễn bằng tỉ số của hai số nguyên $\frac{p}{q}$, với p và q là các số nguyên không có ước số chung (khác 1).



Theo định lí Pythagore ta có:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \text{hay } p^2 = 2q^2.$$

Vì $2q^2$ là số chẵn nên p^2 là số chẵn, do đó p là số chẵn (p không thể là số lẻ vì nếu p một số lẻ, chẳng hạn $p = 2n + 1$ thì $p^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ là số lẻ). Vì p là số chẵn nên có thể đặt $p = 2a$ với a là số nguyên. Khi đó $p^2 = 4a^2 = 2q^2$ hay $q^2 = 2a^2$, điều này chứng tỏ q^2 là số chẵn và như vậy q cũng phải là số chẵn. Do vậy p và q đều có ước chung là 2. Điều này trái với giả thiết p và q không có ước số chung khác 1. Chứng minh này đã chứng minh tính không thông ước của đường chéo hình vuông với các cạnh của nó (hai đoạn thẳng có độ dài a và b được gọi thông ước với nhau nếu tồn tại đoạn thẳng có độ dài c và hai số nguyên dương m, n sao cho $a = mc$ và $b = nc$ hay $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$).

Khám phá của *Hippasus* đã khẳng định, trong hình học các số hữu tỷ không đủ để giải thích các thuộc tính cơ bản nó, chẳng hạn như các số hữu tỷ đã không đủ để so sánh độ dài các đường chéo hình vuông, đường chéo hình lập phương, hoặc đường chéo ngũ giác đều với độ dài các cạnh của nó.

Tuy nhiên, *Hippasus* không được ca ngợi vì khám phá của mình. Theo một ghi chép, ông đã có khám phá này khi đang đi biển, nhưng ngay sau đó ông bị các nhà toán học cùng trường phái Pythagore ném ra khỏi tàu vì phát hiện của ông đã đi ngược lại học thuyết của họ. Một ghi chép khác lại cho rằng *Hippasus* chỉ đơn thuần là phải đi lưu vong vì khám phá này. Dù *Hippasus* nhận hậu quả là gì, khám phá của ông đã đẩy trường phái Pythagore vào những bế tắc trong những lập luận toán học, nhưng chính điều đó làm nhận thức của con người về các loại số tiến lên một bước. Việc không thể dùng số nguyên hoặc phân số để đo độ dài của đường chéo hình vuông có cạnh bằng 1 hay độ dài của đường chéo hình lập phương có cạnh bằng 1 không có nghĩa là độ dài của các đường chéo này không tồn tại. Theo định lí Pythagore ta thấy độ dài đường chéo hình vuông là căn bậc hai của số 2, tức là số $\sqrt{2}$, độ dài đường chéo hình lập phương là căn bậc hai của số 3, tức là số $\sqrt{3}$. Như vậy ngoài số nguyên và phân số người ta phát hiện một loại số mới mà thời đó còn chưa biết. Do các số $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,... không biểu diễn được dưới dạng tỉ số của hai số nguyên nên người xưa gọi đó là **số vô tỉ**, mà nghĩa đen của từ này chính là: số không biểu diễn được dưới dạng tỉ số của hai số nguyên.

TH&TT

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT3M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2025
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng