TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 572
Tháng 2 - 2025
ISSN: 2734-9284

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Tượng bán thân của nhà toán học Hungary **János Bolyai (1802-1860)** ở Cluj-Napoca

Được quét bằng CamScanner

TRAO TẶNG SÁCH CHO ĐỒNG BÀO NGƯỜI VIỆT TẠI ĐÔNG BẮC THÁI LAN

Ngày 10/01/2025, tại Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã có buổi trao tặng sách tiếng Việt cho bà con người Việt Nam tại Đông Bắc Thái Lan thông qua Tổng lãnh sự Việt Nam được tiến cử tại Khỏn Kèn, vương quốc Thái Lan.

Đến dự có ông Nguyễn Mạnh Đông - Phó Chủ nhiệm ủy ban Nhà nước về người Việt Nam ở nước ngoài. Về phía Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) có ông Nguyễn Tiến Thanh - Chủ tịch HĐTV, Tổng Giám đốc cùng đại diện lãnh đạo các phòng, ban chuyên môn.



Ông Nguyễn Tiến Thanh - Chủ tịch HĐTV, Tổng Giám đốc NXBGDVN phát biểu tại buổi trao tặng sách

Phát biểu buổi trao tặng sách, ông Nguyễn Tiến Thanh - Chủ tịch HĐTV, Tổng Giám đốc NXBGDVN cho biết: "Việc trao tặng tặng sách tiếng Việt không chỉ có ý nghĩa quan trọng trong việc phát triển văn hóa đọc và nâng cao khả năng sử dụng tiếng Việt trong cộng đồng người Việt Nam ở nước ngoài, các cuốn sách tiếng Việt còn góp phần khơi dậy niềm tự hào dân tộc, thúc đẩy các hoạt động giao lưu văn hóa, quảng bá hình ảnh Việt Nam với quốc tế".

Trong gần 70 năm hình thành và phát triển, NXBGDVN luôn chú trọng và duy trì những chương trình mang tính cộng đồng nhằm đem lại những lợi ích thiết thực cho xã hội. Các sản phẩm của NXBGDVN đã gắn bó với biết bao thế hệ học sinh; vượt qua bao khó khăn, vất vả để trở thành người bạn đồng hành với học sinh, giáo viên và bạn đọc trên mọi vùng miền của Tổ quốc.

Tổng lãnh sự Đinh Hoàng Linh cho biết, tại 20 tỉnh thuộc Đông Bắc Thái Lan hiện có hơn 100.000 bà con kiều bào người Việt đang sinh sống. Những cuốn sách tiếng Việt của NXBGDVN sẽ là món quà vô cùng quý giá trong việc giữ gìn ngôn ngữ dân tộc, văn hóa dân tộc. Ông Đinh Hoàng Linh nhấn mạnh: "Chúng ta đã có phố Việt Nam đầu tiên tại Udon Thani, Đông Bắc Thái Lan. Đây là niềm tự hào và cũng thêm ý thức trách nhiệm về việc cần quan tâm đầu tư xây dựng để phố Việt Nam mang không gian văn hoá và ngôn ngữ dân tộc, đậm nét truyền thống và lan toả các giá trị nhân văn Việt Nam. Tôi tin tưởng và hi vọng các cơ quan trong nước, đặc biệt NXBGDVN có thể đóng góp một phần quan trọng vào công việc ý nghĩa như thế!"

Những năm qua NXBGDVN đã có nhiều đóng góp tích cực trong việc hỗ trợ sách tiếng Việt cho cộng đồng người Việt Nam ở nước ngoài cũng như sự tham gia tích cực triển khai Đề án "Ngày tôn vinh tiếng Việt trong cộng đồng người Việt Nam ở nước ngoài giai đoạn 2023-2030" thông qua công tác phối hợp với các cơ quan đại diện Việt Nam ở nước ngoài và ủy ban Nhà nước về người Việt Nam ở nước ngoài - Bộ Ngoại giao tặng các "Tủ sách tiếng Việt" cho nhiều cộng đồng kiều bào trên thế giới, góp phần xây dựng không gian văn hoá học và đọc tiếng Việt, đóng góp hiệu quả vào việc cổ vũ, khuyến khích bà con ở xa Tổ quốc học tập và sử dụng tiếng Việt, thể hiện sinh động tấm lòng vì cộng đồng người Việt Nam ở xa Tổ quốc.

Tại buổi trao tặng sách, lãnh đạo NXBGDVN và Tổng lãnh sự Việt Nam được tiến cử tại Khỏn Kèn vương quốc Thái Lan đã trao đổi bên cạnh việc xây dựng các tủ sách tiếng Việt còn mở rộng phối hợp tổ chức các khoá tập huấn giảng dạy tiếng Việt tại địa bàn để nâng cao gìn giữ và phát triển ngôn ngữ và văn hóa Việt cho bà con kiều bào người Việt Nam tại 20 tỉnh Đông Bắc Thái Lan.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC PHẲNG CHO HỌC SINH LỚP 9

CHỬ VĂN TỚI
(GV THCS Lâm Thao, Lâm Thao, Phú Thọ)

Cực trị hình học là nội dung quan trọng và thường xuyên có mặt trong các đề thi học sinh giỏi Toán lớp 9 cũng như đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT và THPT chuyên. Vì vậy việc rèn luyện kĩ năng giải toán cực trị hình học phẳng cho học sinh là điều cần thiết và hữu ích. Có nhiều phương pháp để giải toán cực trị hình học phẳng như: Vận dụng quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu; Vận dụng các bất đẳng thức trong tam giác; Vận dụng các bất đẳng thức trong đường tròn; Vận dụng các bất đẳng thức đại số cổ điển; … Tuy nhiên phương pháp sử dụng bất đẳng thức cổ điển là một trong những chìa khóa quan trọng giúp chúng ta giải quyết các bài toán cực trị hình học phẳng cho học sinh lớp 9.

1. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky (B.C.S)

a) Kiến thức cần nhớ

Bất đẳng thức Bunyakovsky: *Cho hai dãy* $a_1;a_2;...a_n$ *và* $b_1;b_2;...b_n$ *bất kì, ta có:*

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}: a_i=tb_i\ (i=1,2,...,n)$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}\ (b_i\neq 0).$$

b) Dấu hiệu các bài toán cực trị hình học phẳng giải bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky

- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức có dạng $a.MA+b.MB$ trong đó $a,b\in\mathbb{R}$ và $MA^2+MB^2=\text{const}$ (hằng số). Khi đó dùng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\left(a.MA+b.MB\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(MA^2+MB^2\right),$$

từ đó ta tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức $a.MA+b.MB$.

- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+MB^2, trong đó $a.MA+b.MB=\text{const}$ và $a,b\in\mathbb{R}$. Khi đó sử dụng bất đẳng thức Bunhiaxopxki ta có:

$$\left(a.MA+b.MB\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(MA^2+MB^2\right)$$

$$\Rightarrow MA^2+MB^2 \ge \frac{\left(a.MA+b.MB\right)^2}{a^2+b^2},$$

từ đó ta tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+MB^2.

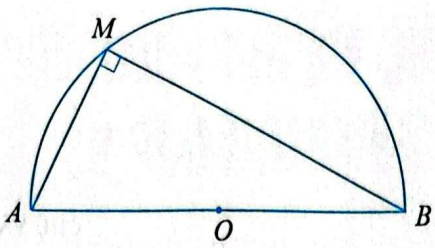
- Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác, giá trị lớn nhất chu vi tứ giác, …

c) Các thí dụ minh họa

Thí dụ 1. *Cho nửa đường tròn* $(O;R)$ *đường kính AB. M là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn. Xác định vị trí của điểm M để* $MA+\sqrt{3}.MB$ *đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải.

Được quét bằng CamScanner



Ta có $\widehat{AMB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác MAB vuông tại M, ta có:

$$MA^2+MB^2=AB^2=4R^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$MA+\sqrt{3}.MB\le\sqrt{\left(1^2+\sqrt{3^2}\right)\left(MA^2+MB^2\right)}$$

$$=\sqrt{4.4R^2}=4R \text{ (không đổi)}$$

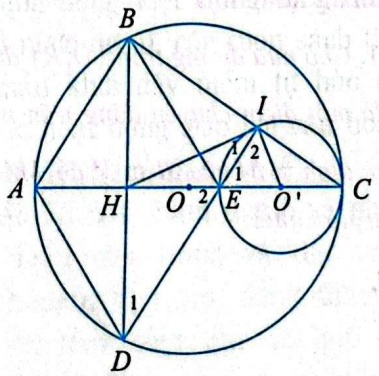
Dấu "=" xảy ra khi $\frac{MA}{1}=\frac{MB}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{MB}{MA}=\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \tan A=\sqrt{3}\Leftrightarrow\widehat{A}=60^0.$$

Vậy $MA+\sqrt{3}.MB$ đạt giá trị lớn nhất là $4R$ khi M nằm trên nửa đường tròn và $\widehat{A}=60^0$.

Thí dụ 2. *Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AC, điểm B thay đổi trên đường tròn và B không trùng với A, C sao cho $BC>BA$. Kẻ dây cung $BD\perp AC$ tại H. Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H. Đường tròn (O') đường kính EC cắt BC tại $I(I\neq C)$. Tìm vị trí của điểm B để chu vi tam giác IHO' đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải.



Chứng minh được tứ giác $ABED$ là hình thoi $\Rightarrow DE//AB$, mà $EI\ //\ AB$ (cùng $\perp BC$) $\Rightarrow D,E,I$ thẳng hàng $\Rightarrow\widehat{E_1}=\widehat{E_2}$ (đối đỉnh).

Vì $\Delta O'IE$ cân tại O' nên $\widehat{E_1}=\widehat{I_2}$, do đó:

$$\widehat{I_2}=\widehat{E_2}\quad(1).$$

Lại vì ΔBID vuông tại I, IH là đường trung tuyến nên suy ra: $HI=HD\Rightarrow\Delta HID$ cân tại $H\Rightarrow\widehat{I_1}=\widehat{D_1}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\Rightarrow\widehat{I_1}+\widehat{I_2}=\widehat{D_1}+\widehat{E_2}=90^0$

$\Rightarrow\Delta IHO'$ vuông tại I.

Ta có, chu vi $\Delta IHO'$ bằng

$$C_{\Delta IHO'}=IH+IO'+HO',$$

trong đó $HO'=\frac{1}{2}AC=R$ (không đổi). Do đó chu vi $\Delta IHO'$ lớn nhất $\Leftrightarrow IH+IO'$ lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\left(IH+IO'\right)^2=\left(1.IH+1.IO'\right)^2$$

$$\le\left(1^2+1^2\right)\left(IH^2+IO'^2\right)$$

$$=2.HO'^2=2R^2$$

$$\Rightarrow IH+IO'\le R\sqrt{2}\Rightarrow C_{\Delta IHO'}\le R\sqrt{2}+R.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow IH=IO'\Leftrightarrow\Delta IHO'$ vuông cân tại $I\Rightarrow\widehat{IO'H}=45^0\Rightarrow\widehat{ACB}=22,5^0\Rightarrow B$ nằm trên $\widehat{AC}$ sao cho sđ $\widehat{AB}=\frac{1}{4}$ sđ $\widehat{AC}$.

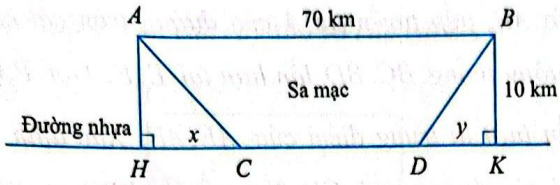
Vậy chu vi $\Delta IHO'$ lớn nhất bằng $R\sqrt{2}+R$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ B nằm trên $\widehat{AC}$ sao cho sđ $\widehat{AB}=\frac{1}{4}$ sđ $\widehat{AC}$. Có 2 vị trí của điểm B như vậy.

Thí dụ 3. *Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ấy muốn đến điểm B và cách A một khoảng là 70 km. Trong sa mạc thì xe anh ấy chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Nhà địa chất ấy phải đến được điểm B sau 2 h. Vì vậy nếu anh ấy đi thẳng từ A đến B sẽ không thể đến*

Được quét bằng CamScanner

đúng giờ. May mắn thay có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10 km. Trên đường nhựa này thì xe của nhà địa chất học này có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Làm thế nào để nhà địa chất học đến sớm nhất (đảm bảo trong khung giờ cho phép).

Lời giải.



Xét hình vẽ như trên. Chia quãng đường đi được theo ba giai đoạn sau:

Giai đoạn 1: Đi từ A đến C (từ sa mạc đến đường nhựa song song).

Giai đoạn 2: Đi từ C đến D (một quãng đường trên đường nhựa).

Giai đoạn 3: Đi từ D đến B (từ điểm kết thúc D trên đường nhựa đi tiếp đến B qua sa mạc).

Đặt $HC = x, DK = y\ (0 < x, y < 70)$.

Quãng đường đi từ $A \to C$ là: $\sqrt{x^2+10^2}$ (km).

Thời gian đi trên sa mạc từ $A \to C$ với vận tốc 30 km/h là: $t_1 = \dfrac{\sqrt{x^2+10^2}}{30}$ (h).

Quãng đường đi từ $D \to B$ là: $\sqrt{y^2+10^2}$ (km).

Thời gian đi trên sa mạc từ $D \to B$ với vận tốc 30 km/h là: $t_2 = \dfrac{\sqrt{y^2+10^2}}{30}$ (h).

Quãng đường đi từ $C \to D$ là:

$$CD = 70 - (x+y) \text{ (km)}.$$

Thời gian đi từ $C \to D$ với vận tốc 50 km/h là:

$$t_3 = \frac{70-(x+y)}{50} \text{ (h)}.$$

Tổng thời gian mà nhà địa chất học đi từ A đến B là: $T = t_1 + t_2 + t_3$

$$= \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{30} + \frac{\sqrt{y^2+10^2}}{30} + \frac{70-(x+y)}{50}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\sqrt{x^2+10^2} = \sqrt{\left(x^2+10^2\right)\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)} \ge \frac{3}{5}.x + \frac{4}{5}.10$$

$$= \frac{3}{5}x + 8$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{30} \ge \frac{1}{30}\left(\frac{3x}{5}+8\right).$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{3}{5} : x = \frac{4}{5} : 10 \Leftrightarrow \frac{3}{5} : x = \frac{2}{25} \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}.$$

Tương tự, ta cũng có: $\dfrac{\sqrt{y^2+10^2}}{30} \ge \dfrac{1}{30}\left(\dfrac{3y}{5}+8\right)$.

Dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{3}{5} : y = \frac{4}{5} : 10 \Leftrightarrow \frac{3}{5} : y = \frac{2}{25} \Leftrightarrow y = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow T \ge \frac{1}{30}\left(\frac{3x}{5}+8\right) + \frac{1}{30}\left(\frac{3y}{5}+8\right) + \frac{70-(x+y)}{50}$$

$$= \frac{x}{50} + \frac{4}{15} + \frac{y}{50} + \frac{4}{15} + \frac{7}{5} - \frac{x}{50} - \frac{y}{50} = \frac{29}{15}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{15}{2}$.

Vậy thời gian mà nhà địa chất đi từ A đến B ít nhất là $\dfrac{29}{15}$ (h).

2. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Cauchy

a) Kiến thức cần nhớ

Bất đẳng thức Cauchy:

Cho n số $a_1; a_2; ... a_n$ không âm, ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Được quét bằng CamScanner

b) Dấu hiệu các bài toán cực trị hình học phẳng giải bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Cauchy

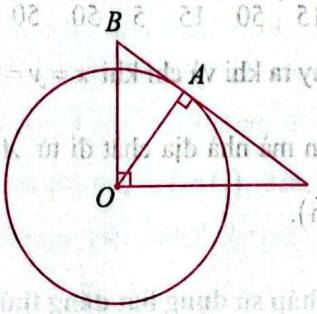
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a.MA+b.MB$, trong đó $a,b>0$ và $MA.MB=\text{const}$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a.MA+b.MB\ge 2\sqrt{ab.MA.MB}$, từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của $a.MA+b.MB$.

- Tìm giá trị lớn nhất của $MA.MB$, trong đó $MA+MB=\text{const}$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $MA.MB\le\dfrac{(MA+MB)^2}{4}$, từ đó tìm được giá trị lớn nhất của $MA.MB$.

c) Các thí dụ minh họa

Thí dụ 1. *Cho điểm M thay đổi bên ngoài đường tròn $(O;R)$, từ M kẻ tiếp tuyến MA với đường tròn (A là tiếp điểm), đường thẳng qua O vuông góc với OM cắt tiếp tuyến MA tại B. Tìm vị trí điểm M để tam giác MOB có diện tích nhỏ nhất.*

Lời giải.



Ta có:

$$S_{\Delta MOB}=\frac{1}{2}OA.MB=\frac{1}{2}R.MB=\frac{1}{2}R.(MA+AB).$$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔMOB vuông tại O ta có $MA.AB=OA^2=R^2$ (không đổi)

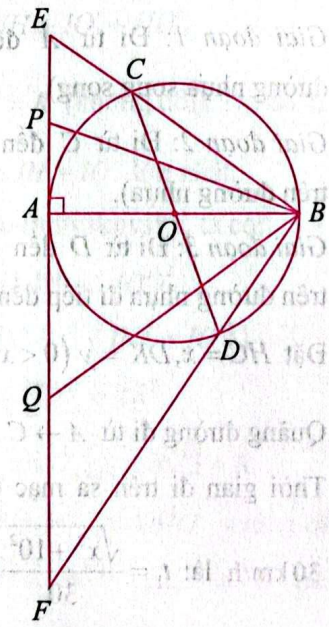
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$MA+AB\ge 2\sqrt{MA.AB}=2\sqrt{R^2}=2R.$$

Khi đó $S_{\Delta MOB}\ge\dfrac{1}{2}R.2R=R^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA=AB=R\Leftrightarrow OM=R\sqrt{2}$ hay M nằm trên đường tròn tâm O bán kính bằng $R\sqrt{2}$.

Thí dụ 2. *Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi không trùng với AB, tiếp tuyến tại A của đường tròn cắt các đường thẳng BC,BD lần lượt tại E,F. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AE,AF. Xác định vị trí của đường kính CD để tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất.*

Lời giải. Ta có:



$$S_{\Delta BPQ}=\frac{1}{2}BA.PQ$$
$$=R(PA+AQ)$$
$$=\frac{1}{2}R(AE+AF)$$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔBEF vuông tại B với đường cao BA, ta có:

$AE.AF=AB^2=4R^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$AE+AF\ge 2\sqrt{AE.AF}=2\sqrt{4R^2}=4R.$$

Khi đó:

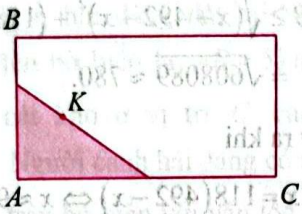
$$S_{\Delta BPQ}\ge\frac{1}{2}R.4R=2R^2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AE=AF\Leftrightarrow\Delta BEF$ vuông cân tại B $\Leftrightarrow ACBD$ là hình vuông $\Leftrightarrow CD\perp AB$.

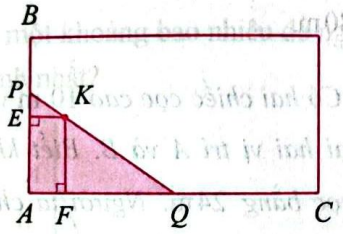
Vậy khi đường kính CD vuông góc với đường kính AB thì ΔBPQ có diện tích nhỏ nhất bằng $2R^2$.

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 3. *Một cái ao hình chữ nhật, tại một góc nhỏ của ao người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của ao để thả bèo (phần in đậm như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể đồng thời chạm vào hai bờ AB, AC và vào cái cọc K (bỏ qua đường kính của cây sào và của cái cọc).*



Lời giải.



Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của cây sào với hai bờ AB, AC. E, F lần lượt là hình chiếu của K trên AB, AC. Khi đó $KE = AF = 1\text{m}$, $KF = AE = 8\text{m}$.

Ta có: $KE // AQ \Rightarrow \dfrac{KE}{AQ} = \dfrac{PE}{PA}$

$$\Rightarrow \frac{KE}{AF+FQ} = \frac{PE}{PE+EA} \Rightarrow \frac{1}{1+FQ} = \frac{PE}{PE+8}$$

$$\Rightarrow 1+FQ = \frac{PE+8}{PE} = 1+\frac{8}{PE}$$

$$\Rightarrow FQ = \frac{8}{PE}.$$

Áp dụng định lí Pythagore cho ΔAPQ vuông tại A, ta có: $PQ^2 = AP^2 + AQ^2$

$$= (AE+PE)^2 + (AF+QF)^2$$

$$= (8+PE)^2 + \left(1+\frac{8}{PE}\right)^2$$

$$= 64 + 16PE + PE^2 + 1 + \frac{16}{PE} + \frac{64}{PE^2}$$

$$= \left(8PE + 8PE + \frac{64}{PE^2}\right) + \left(PE^2 + \frac{8}{PE} + \frac{8}{PE}\right) + 65.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có:

$$PQ^2 \geq 3\sqrt[3]{8PE.8PE.\frac{64}{PE^2}} + 3\sqrt[3]{PE^2.\frac{8}{PE}.\frac{8}{PE}} + 65$$

$$= 3.16 + 3.4 + 65 = 125$$

$$\Rightarrow PQ \geq 5\sqrt{5}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} PE = 2 \\ QF = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AP = 10 \\ AQ = 5 \end{cases}$.

(Dễ kiểm tra với $AP = 10, AQ = 5$ thì K thuộc cạnh PQ). Vậy chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể đồng thời chạm vào hai bờ AB, AC và vào cái cọc K là: $5\sqrt{5}$ m.

3. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Minkowski

a) Kiến thức cần nhớ

Bất đẳng thức Minkowski:

Cho hai dãy số thực $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Khi đó ta luôn có:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$\geq \sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2 + (b_1+b_2+...+b_2)^2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\exists t \in \mathbb{R} : a_i = tb_i \ (i = 1, 2, ..., n)$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} \ (b_i \neq 0).$$

b) Dấu hiệu các bài toán cực trị hình học phẳng giải bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Minkovsky

- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức có dạng $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, từ đó

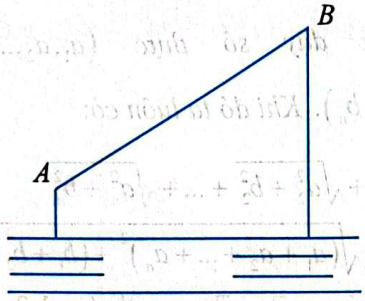
Được quét bằng CamScanner

tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ad=bc$.

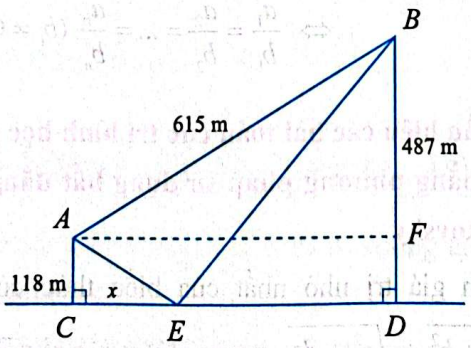
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức có dạng $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, trong đó $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$, từ đó tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ad=bc$.

c) Các thí dụ minh họa.

Thí dụ 1. *Hai vị trí A và B cách nhau* 615 m *và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A, B đến bờ sông lần lượt là* 118 m *và* 487 m *(như hình vẽ). Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi được bằng bao nhiêu mét (làm tròn đến mét).*



Lời giải.



Gọi C,D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B trên bờ sông. Kẻ $AF\perp BD$.

Ta có: $BF=487-118=369$ m.

Áp dụng định lí Pythagore cho ΔABF vuông tại F, ta có: $AF=\sqrt{615^2-369^2}=492$ (m) $=CD$.

Đặt $CE=x\ (0<x<492)\Rightarrow ED=492-x$.

Quãng đường người đó di chuyển là:

$$AE+EB=\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{(492-x)^2+487^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkovsky, ta có:

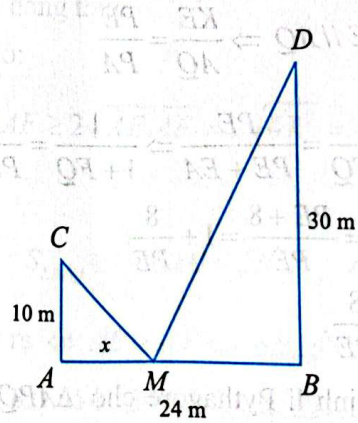
$$AE+EB\ge\sqrt{(x+492-x)^2+(118+487)^2}$$
$$=\sqrt{608089}\approx 780.$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$487x=118(492-x)\Leftrightarrow x\approx 96\text{ m}.$$

Vậy quãng đường ngắn nhất người đó có thể đi được là 780 m.

Thí dụ 2. *Có hai chiếc cọc cao* 10 m *và* 30 m *lần lượt đặt tại hai vị trí A và B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng* 24 m. *Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất.*



Lời giải. Đặt $AM=x\ (0<x<24)\Rightarrow MB=24-x$.

Tổng độ dài của sợi dây là:

$$CM+MD=\sqrt{10^2+x^2}+\sqrt{30^2+(24-x)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có:

Được quét bằng CamScanner

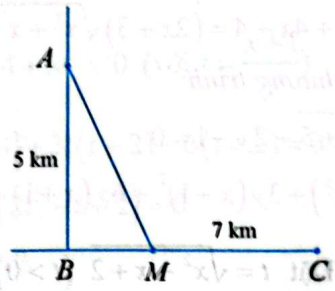
$$CM+MD\ge\sqrt{(10+30)^2+(x+24-x)^2}$$
$$=\sqrt{2176}=8\sqrt{34}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 10(24-x)=30x\Leftrightarrow x=6$.

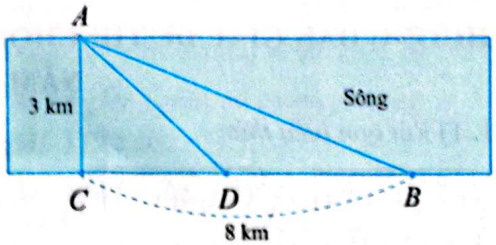
Vậy ta phải đặt chốt ở vị trí M sao cho $AM=6\text{m}, BM=18\text{m}$ thì tổng độ dài của sợi dây ngắn nhất bằng $8\sqrt{34}$ m.

4. Bài tập tự luyện.

Bài 1. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển là $AB=5\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho nhanh nhất?



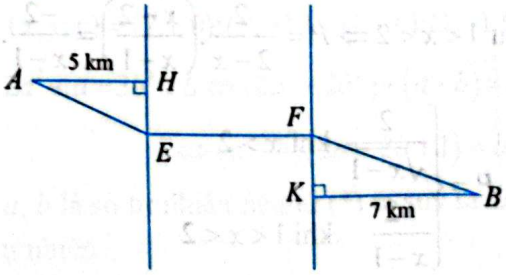
Bài 2. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hoặc có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC=8\text{km}$. Biết vận tốc của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị là giờ) để người đàn ông đến B.



Bài 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây AB cố định sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng $\frac{R}{2}$. Gọi H là trung điểm của AB, tia HO cắt đường tròn tại C. Trên cung nhỏ AB lấy điểm M $(M\neq A,B)$, CM cắt AB tại K. Gọi R_1,R_2 lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔMAK và ΔMBK. Xác định vị trí của điểm M để $R_1.R_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA=R\sqrt{2}$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). trên cung nhỏ BC lấy điểm M, tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt AB tại D và cắt AC tại E. Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác ADE đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông, biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7 km (như hình vẽ), biết tổng độ dài $HE+KF=24\text{km}$. Hỏi cây cầu cách thành phố A một khoảng là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$).



Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH HẢI DƯƠNG NĂM HỌC 2023 - 2024

Câu 1. 1) *Rút gọn biểu thức*

$$P=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\frac{1}{x-1}\right)$$

với $x>1;\ x\neq 2$.

2) *Cho các số thực* x, y, z *khác* 0 *thỏa mãn điều kiện* $x+y+z=0$. *Chứng minh rằng:*

$$Q=\sqrt{\frac{6x^2}{x^2-y^2-z^2}+\frac{6y^2}{y^2-z^2-x^2}+\frac{6z^2}{z^2-x^2-y^2}}$$

là số nguyên.

Lời giải. 1) Ta có:

$$P=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{(x-2)^2}}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{|x-2|}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right).$$

Đặt $T=\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}\ (T>0)$

$$\Leftrightarrow T^2=2x+2\sqrt{x^2-4(x-1)}$$

$$=2x+2\sqrt{(x-2)^2}=2x+2|x-2|$$

$$=\begin{cases}4x-4 \text{ (khi } x>2) & \Rightarrow T=\sqrt{4x-4}=2\sqrt{x-1}\\ 4 \quad \text{(khi } 1<x<2) & \Rightarrow T=2\end{cases}.$$

Do đó:

+ Nếu $x>2\Rightarrow P=\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{x-1}}.$

+ Nếu $1<x<2\Rightarrow P=\frac{2}{2-x}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=\frac{-2}{x-1}.$

Vậy: $P=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{x-1}} & \text{khi } x>2\\ \frac{-2}{x-1} & \text{khi } 1<x<2\end{cases}.$

2) Do $x+y+z=0\Rightarrow y+z=-x$

$$\Rightarrow (y+z)^2=(-x)^2=x^2\Rightarrow x^2-y^2-z^2=2yz.$$

Tương tự $y^2-z^2-x^2=2xz;\ z^2-x^2-y^2=2xy.$

Mặt khác: $x+y+z=0\Rightarrow y+z=-x$

$$\Rightarrow (y+z)^3=(-x)^3=-x^3\Rightarrow y^3+z^3+3yz(y+z)=-x^3$$

$$\Rightarrow y^3+z^3+3yz(-x)=-x^3\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

Từ đó suy ra:

$$Q=\sqrt{\frac{6x^2}{x^2-y^2-z^2}+\frac{6y^2}{y^2-z^2-x^2}+\frac{6z^2}{z^2-x^2-y^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3x^2}{yz}+\frac{3y^2}{xz}+\frac{3z^2}{xy}}=\sqrt{\frac{3\left(x^3+y^3+z^3\right)}{xyz}}$$

$$=\sqrt{\frac{3.3xyz}{xyz}}=3.$$

Câu 2. 1) *Giải phương trình:*

$$2x^2+4x+4=(2x+3)\sqrt{x^2+x+2}.$$

2) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2y+5}+2y-1=0 & (1)\\ 2\left(2y^3+x^3\right)+3y(x+1)^2+6x(x+1)+2=0 & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. 1) Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2}\ (t>0)$

$$\Leftrightarrow t^2=x^2+x+2\Rightarrow x^2=t^2-x-2.$$

Khi đó phương trình

$$2x^2+4x+4=(2x+3)\sqrt{x^2+x+2}$$

trở thành: $2(t^2-x-2)+4x+4=(2x+3)t$

$$\Leftrightarrow 2t^2+2x-(2x+3)t=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+(x^2+3x+2)-(2x+3)t=0$$

$$\Leftrightarrow (t^2+x^2-2xt)+3(x-t)+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)^2+3(x-t)+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-t+1)(x-t+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-t+1=0\\ x-t+2=0\end{array}\right.$$

Nếu $x-t+1=0\Leftrightarrow x+1=t$

$$\Rightarrow x+1=\sqrt{x^2+x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ (x+1)^2=x^2+x+2\end{cases}$$

Được quét bằng CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Nếu $x - t + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = t$

$$\Rightarrow x + 2 = \sqrt{x^2 + x + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ (x+2)^2 = x^2 + x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x = \dfrac{-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1; x = \dfrac{-2}{3}$.

2) ĐK: $x^2 + 2y + 5 \ge 0$. Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 2\left(2y^3 + x^3\right) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^3 + 4y^3 + 3y(x+1)^2 = 0 \ (3).$$

Nếu $y = 0$ thay vào phương trình (1) vô nghiệm, do đó $y \ne 0$, khi đó phương trình (3) tương đương với: $2\dfrac{(x+1)^3}{y^3} + 4 + 3\dfrac{(x+1)^2}{y^2} = 0$

$$\Rightarrow 2t^3 + 4 + 3t^2 = 0 \ (\text{với } t = \frac{x+1}{y})$$

$$\Leftrightarrow 2\left(t^3 + 8\right) + 3t(t+2) - 6(t+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+2)\left(2t^2 - t + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + 2 = 0 \\ 2t^2 - t + 2 = 0 \ (\text{vô nghiệm}) \end{cases}.$$

Với $t + 2 = 0 \Rightarrow \dfrac{x+1}{y} = -2 \Rightarrow 2y = -(x+1)$.

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$\sqrt{x^2 - x + 4} - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 4} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x^2 - x + 4 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Với $x = 0$ ta suy ra $y = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 3. 1) *Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 24x = -15$.*

2) *Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn: $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh $2a + 2b + 1$ và $3a + 3b + 1$ đều là các số chính phương.*

Lời giải. 1) Ta có:

$$3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 24x = -15$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 8x + 16) + 3y^2\left(z^2 + 2\right) + 2z^2 = 33$$

$$\Leftrightarrow 3(x-4)^2 + 3y^2\left(z^2 + 2\right) + 2z^2 = 33 \ (*)$$

$$\Rightarrow 3(x-4)^2 \le 33 \Leftrightarrow (x-4)^2 \le 11$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 \in \{0; 1; 4; 9\}.$$

TH1: $(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, thay vào phương trình (*) ta được: $3y^2\left(z^2 + 2\right) + 2z^2 = 33$, từ đây ta suy ra $2z^2 \vdots 3 \Leftrightarrow z^2 \vdots 3$ và $2z^2 \le 33 \Rightarrow z^2 \in \{0; 9\}$.

+ Nếu $z^2 = 0 \Rightarrow 6y^2 = 33 \Rightarrow y^2 = \dfrac{11}{2}$ (loại);

+ Nếu $z^2 = 9 \Rightarrow 33y^2 = 15 \Rightarrow y^2 = \dfrac{15}{33}$ (loại);

TH2: $(x-4)^2 = 1$, thay vào phương trình (*) ta được: $3y^2\left(z^2 + 2\right) + 2z^2 = 30$, tương tự như trên ta suy ra $z^2 \in \{0; 9\}$. Xét từng trường hợp không tồn tại số nguyên y.

TH3: $(x-4)^2 = 4$, thay vào phương trình (*) ta được: $3y^2\left(z^2 + 2\right) + 2z^2 = 21$, tương tự như trên ta suy ra $z^2 \in \{0; 9\}$. Xét từng trường hợp không tồn tại số nguyên y.

TH4: $(x-4)^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \{7; 1\}$. Thay vào phương trình (*) ta được: $3y^2\left(z^2 + 2\right) + 2z^2 = 6$, tương tự như trên ta suy ra $z^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y \in \{1; -1\}$

$\Rightarrow (x; y; z) \in \{(7,1,0); (7,-1,0); (1,1,0); (1,-1,0)\}$.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là:

$(x; y; z) = (7,1,0); (7,-1,0); (1,1,0); (1,-1,0)$.

2) $2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow \left(2a^2 - 2b^2\right) + (a-b) = b^2$

$$\Leftrightarrow (a-b)(2a + 2b + 1) = b^2 \ (*).$$

Do a, b là số tự nhiên nên từ (*) ta suy ra $a - b$ là số tự nhiên.

Được quét bằng CamScanner

Gọi $d=(a-b;2a+2b+1)\Rightarrow\begin{cases}(a-b)\vdots d\\(2a+2b+1)\vdots d\end{cases}$

$\Rightarrow(a-b)(2a+2b+1)\vdots d^2\Rightarrow b^2\vdots d^2\Rightarrow b\vdots d,$

mà $(a-b)\vdots d\Rightarrow a\vdots d\Rightarrow 2(a+b)\vdots d$, kết hợp với $(2a+2b+1)\vdots d\Rightarrow 1\vdots d\Rightarrow d=1.$

Do đó $(a-b)$ và $(2a+2b+1)$ là hai số nguyên tố cùng nhau, mà $(a-b)(2a+2b+1)=b^2$ là số chính phương, suy mỗi số $(a-b)$ và $(2a+2b+1)$ là các số chính phương. Vậy $(2a+2b+1)$ là số chính phương. Mặt khác $2a^2+a=3b^2+b$

$$\Leftrightarrow(3a^2-3b^2)+(a-b)=a^2$$

$$\Leftrightarrow(a-b)(3a+3b+1)=a^2\ (**).$$

Chứng minh tương tự như trên ta suy ra $(3a+3b+1)$ là số chính phương.

Vậy các số $(2a+2b+1)$ và $(3a+3b+1)$ là các số chính phương (đpcm).

Chú ý. Có thể chứng minh $(2a+2b+1)$ và $(3a+3b+1)$ là các số chính phương là các số chính phương như sau:

Từ cách phân tích (*) và (**) ta suy ra:

$$(a-b)^2(2a+2b+1)(3a+3b+1)=a^2b^2.$$

Do đó: - Nếu $a=b\Rightarrow a=b=0$

$\Rightarrow 2a+2b+1=3a+3b+1=1$ là số chính phương.

- Nếu $a\neq b\Rightarrow(2a+2b+1)(3a+3b+1)$ là số chính phương nên đặt

$$(2a+2b+1)(3a+3b+1)=k^2.$$

Gọi $d=(2a+2b+1;3a+3b+1)\Rightarrow\begin{cases}(2a+2b+1)\vdots d\\(3a+3b+1)\vdots d\end{cases}$

$\Rightarrow\left[3(2a+2b+1)-2(3a+3b+1)\right]\vdots d$

$\Rightarrow 1\vdots d\Rightarrow d=1,$ do đó $(2a+2b+1)$ và $(3a+3b+1)$ là hai số nguyên tố cùng nhau mà $(2a+2b+1)(3a+3b+1)=k^2$ là số chính phương, suy mỗi số $(2a+2b+1)$ và $(3a+3b+1)$ là các số chính phương (đpcm).

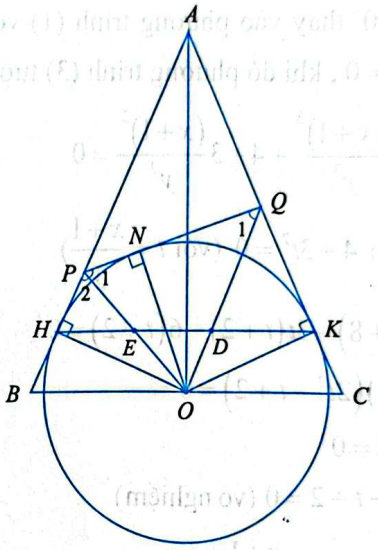
Câu 4. *1) Cho tam giác ABC cân tại A, O là trung điểm của BC. Đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB, AC tại H và K. Gọi P, Q là hai điểm thuộc các cạnh AB và AC sao cho* $\widehat{POQ}=\widehat{ABC}$.

a) Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) HK cắt OQ tại D. Chứng minh PD vuông góc với OQ.

2) Cho tam giác nhọn ABC có ba góc nhọn và trực tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\left(\frac{AB}{HF}\right)^2+\left(\frac{BC}{HD}\right)^2+\left(\frac{CA}{HE}\right)^2\geq 36.$

Lời giải. 1) a) (*h.1*)



Hình 1

Vì tam giác ABC cân tại A nên $\hat{C}=\hat{B}$ kết hợp với đề bài $\widehat{POQ}=\hat{B}\Rightarrow\widehat{POQ}=\hat{B}=\hat{C}.$

Ta có:

$$\widehat{POQ}+\widehat{POB}+\widehat{QOC}=180^0=\hat{B}+\widehat{POB}+\widehat{BPO}$$

$$\Rightarrow\widehat{POQ}+\widehat{QOC}=\hat{B}+\widehat{BPO}.$$

Mà $\widehat{POQ}=\hat{B}\Rightarrow\widehat{QOC}=\widehat{BPO}.$

Xét hai tam giác BPO và COQ có $\widehat{BPO}=\widehat{QOC}$ và $\hat{B}=\hat{C}\Rightarrow\Delta BPO\sim\Delta COQ$ (g.g) $\Rightarrow\frac{BP}{CO}=\frac{OP}{OQ}.$

Mà $CO=BO$ nên $\frac{BP}{BO}=\frac{OP}{OQ}$, mà $\widehat{POQ}=\hat{B}$

$\Rightarrow\Delta BPO\sim\Delta OPQ$ (c.g.c) $\Rightarrow\hat{P}_1=\hat{P}_2.$

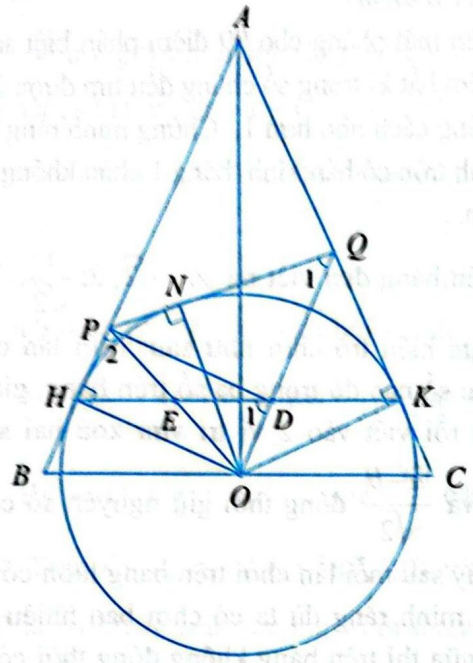
Được quét bằng CamScanner

Hạ $ON \perp PQ$ tại N. Vì $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 \Rightarrow ON = OH$ nên PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) (h.2) Theo tính chất tiếp tuyến suy ra:

$$AH = AK, AB = AC$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow HK // BC \Rightarrow \hat{D}_1 = \widehat{QOC} = \hat{P}_2$$



Hình 2

Gọi E là giao điểm của HK với OP. Xét 2 tam giác EPH và EDO có $\hat{D}_1 = \hat{P}_2$ và $\widehat{PEH} = \widehat{DEO}$ (đối đỉnh) nên $\Rightarrow \Delta EPH \sim \Delta EDO$ (g.g)

$$\Rightarrow \Delta EPH \sim \Delta EDO \Rightarrow \frac{EP}{ED} = \frac{EH}{EO}$$

$\Rightarrow \Delta EDP \sim \Delta EOH$ (c.g.c)

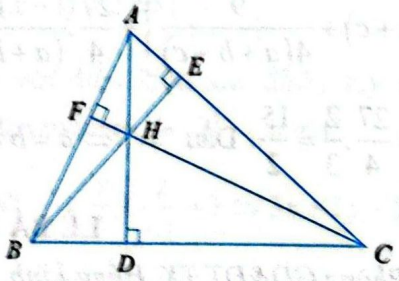
$\Rightarrow \widehat{EDP} = \widehat{EOH} \Rightarrow \widehat{EOH} + \hat{P}_2 = \widehat{EDP} + \hat{D}_1$.

Mà tam giác HPO vuông tại H nên

$$\widehat{EOH} + \hat{P}_2 = 90^0.$$

Suy ra $\widehat{EDP} + \hat{D}_1 = 90^0$ hay $\widehat{ODB} = 90^0$, tức là $PD \perp OQ$ (đpcm).

2)



$\Delta ACD \sim \Delta BHD; \Delta ABD \sim \Delta AHF$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BH} = \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{HF} \text{ (1).}$$

Tương tự ta cũng có:

$\Delta BCE \sim \Delta AHE; \Delta ABE \sim \Delta HBF$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{BE}{AE} = \frac{BF}{HF} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{FA+FB}{HF} = \frac{AC}{BH} + \frac{BC}{AH} \Rightarrow \frac{AB}{HF} = \frac{AC}{BH} + \frac{BC}{AH}.$$

Áp dụng BĐT $(a+b)^2 \geq 4ab$ suy ra:

$$\left(\frac{AB}{HF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BH} + \frac{BC}{AH}\right)^2 \geq 4.\frac{AC.BC}{BH.AH} = 4.\frac{BC}{BH}.\frac{AC}{AH}.$$

Đặt $x = S_{AHB}; y = S_{BHC}; z = S_{CHA}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = x + y + z.$$

Ta có: $\frac{S_{ABC}}{S_{AHB}} = \frac{2S_{ABC}}{2S_{AHB}} = \frac{BC.AD}{BH.AE}$.

Mà $\Delta ADC \sim \Delta AEH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AH}$.

Suy ra: $\frac{S_{ABC}}{S_{AHB}} = \frac{BC.AD}{BH.AE} = \frac{BC.AC}{BH.AH}$

$$\Rightarrow \frac{BC.AC}{BH.AH} = \frac{S_{ABC}}{S_{AHB}} = \frac{x+y+z}{x} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{HF}\right)^2 \geq 4.\frac{BC}{BH}.\frac{AC}{AH} = 4\left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right)$$

Tương tự: $\left(\frac{BC}{HD}\right)^2 \geq 4.\left(1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y}\right)$;

$$\left(\frac{CA}{HE}\right)^2 \geq 4.\left(1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right).$$

Do đó: $\left(\frac{AB}{HF}\right)^2 + \left(\frac{BC}{HD}\right)^2 + \left(\frac{CA}{HE}\right)^2$

$$\geq 4.\left[3 + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)\right]$$

$$\geq 4.9 = 36.$$

Câu 5. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)} + \frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)} + \frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)}.$$

Lời giải. Ta có:

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ TỰ LUYỆN THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TOÁN

(*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Bài 1. (*2,5 điểm*) Giải các phương trình sau:

a) $\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-4\left(x-\frac{2}{x}\right)-9=0$;

b) $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$.

Bài 2. (*2,0 điểm*)

a) Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn: $abc=1$ và

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}=\frac{b^3}{a}+\frac{c^3}{b}+\frac{a^3}{c}.$$

Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c luôn tồn tại một số là lập phương của một trong hai số còn lại.

b) Cho $x=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$. Chứng minh x có giá trị là một số nguyên.

Bài 3. (*1,0 điểm*) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right).$$

Bài 4. (*3,5 điểm*) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA=R\sqrt{2}$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy D thuộc AB; E thuộc AC sao cho chu vi của tam giác ADE bằng $2R$.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ là hình vuông.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔADE.

Bài 5. (*1,0 điểm*)

1) Trên mặt phẳng cho 99 điểm phân biệt sao cho từ 3 điểm bất kì trong số chúng đều tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 50 điểm.

2) Trên bảng đen viết ba số $\sqrt{2}; 2; \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta bắt đầu thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xoá hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a và b rồi viết vào 2 vị trí vừa xoá hai số mới $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không đồng thời có ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$.

HÀ VĂN NHÂN

(*GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa*)

Giới thiệu

***

☞ $P=\frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)}+\frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)}+\frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)}$

$$=\frac{\left(\frac{bc+1}{c}\right)^2}{\frac{ca+1}{a}}+\frac{\left(\frac{ca+1}{a}\right)^2}{\frac{ab+1}{b}}+\frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^2}{\frac{bc+1}{c}}$$

$$=\frac{\left(b+\frac{1}{c}\right)^2}{c+\frac{1}{a}}+\frac{\left(c+\frac{1}{a}\right)^2}{a+\frac{1}{b}}+\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^2}{b+\frac{1}{c}}.$$

Áp dụng BĐT Schwarz:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}(x>0, y>0, z>0),$$

ta có: $\frac{\left(b+\frac{1}{c}\right)^2}{c+\frac{1}{a}}+\frac{\left(c+\frac{1}{a}\right)^2}{a+\frac{1}{b}}+\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^2}{b+\frac{1}{c}}$

$$\ge a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge(a+b+c)+\frac{9}{a+b+c}$$

$$=\left[(a+b+c)+\frac{9}{4(a+b+c)}\right]+\frac{27}{4}.\frac{1}{(a+b+c)}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{27}{4}.\frac{2}{3}=\frac{15}{2}.$$ Dấu "=" $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

LÊ BÁ HOÀNG

(*Phòng GD&ĐT TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh*)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2025

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

1. C	2. A	3. A	4. B	5. D	6. C
7. D	8. A	9. C	10. A	11. C	12. C

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là $x^3-x=x-x^2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow x=0, x=1, x=-2$. Ta có bảng xét dấu:

x	-2		0		1	
x^3+x^2-2x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số là: $S=\int_{-2}^{1}\left|(x^3-x)-\left(x-x^2\right)\right|dx=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx-\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)dx=\frac{37}{12}$. Chọn A.

Câu 4. Trục Oy đi qua điểm $A(0;2;0)$ và có một VTCP là $\vec{j}(0;1;0)$ nên phương trình tham số của đường thẳng Oy là $\begin{cases}x=0\\y=2+t\ (t\in\mathbb{R})\\z=0\end{cases}$. Chọn B.

Câu 5. Ta có: $2\sin x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$. Trên đoạn $[0;2\pi]$, PT có 2 nghiệm là $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{2\pi}{3}$. Chọn D.

Câu 6. ĐK: $x>1$.

$\log_2 x+\log_2(x-1)=1 \Leftrightarrow \log_2 x(x-1)=1$

$\Leftrightarrow x(x-1)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện xác định, suy ra phương trình có tập nghiệm là $\{2\}$. Chọn C.

Câu 7. Vì $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1 \Leftrightarrow 3x+2y-3z=6$ nên mp(P) có một VTPT là $\vec{n}=(3;2;-3)$. Chọn D.

Câu 9. Ta có: $3^{2x+1}>3^{3-x} \Leftrightarrow 2x+1>3-x$

$\Leftrightarrow 3x>2 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$. Chọn C.

Câu 11. Vì $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}$ nên đáp án C đúng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. a) Sai, b) Đúng, c) Đúng, d) Sai.

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x+2}$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Đạo hàm của hàm số là $f'(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2}, \forall x\neq -2$.

c) $f'(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2}=0\ (x\neq -2) \Leftrightarrow (x+2)^2=1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+2=1\\x+2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm PT $f'(x)=0$ trên $\left[-\frac{3}{2};0\right]$ là $x=-1$.

d) Trên $\left[-\frac{3}{2};0\right]$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}, f(0)=\frac{1}{2}, f(-1)=0$

nên GTNN của hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x+2}$ trên $\left[-\frac{3}{2};0\right]$ là 0.

Câu 2. a) Đúng, b) Sai, c) Sai, d) Đúng.

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox là nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

b) Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=\pm 1$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

c) Thể tích được tính theo công thức

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2 dx.$$

d) $V=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2 dx=\frac{16\pi}{15}$.

Được quét bằng CamScanner

Câu 3. a) Đúng, b) Sai, c) Sai, d) Sai.

Gọi A là biến cố: "Học sinh được chọn bị cận thị", B là biến cố: "Học sinh được chọn là nữ".

a) Xác suất của biến cố chọn được học sinh bị cận thị là: $P(A)=\dfrac{42+47}{240}=\dfrac{89}{240}$.

b) Xác suất của biến cố chọn được học sinh nữ là:

$$P(B)=\frac{42+66}{240}=\frac{108}{240}=\frac{9}{20}.$$

c) Xác suất của biến cố chọn được học sinh bị cận thị, biết học sinh đó là nữ là:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{42}{108}=\frac{7}{18}.$$

d) Xác suất của biến cố chọn được học sinh là nữ, biết học sinh đó bị cận thị là:

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{42}{89}.$$

Câu 4. a) Đúng, b) Sai, c) Sai, d) Đúng.

Toạ độ $A(800;500;7)$, $B(940;550;9)$.

a) Đường thẳng AB có phương trình tham số là:

$$\begin{cases}x=800+70t\\ y=500+25t\\ z=7+t\end{cases}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{AB}=(140;50;2)$ nên độ dài quãng đường AB là $AB=\sqrt{140^2+50^2+2^2}$.

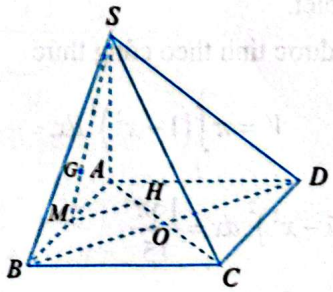
c) Vận tốc của máy bay là:

$$v=\frac{S}{t}=\frac{\sqrt{140^2+50^2+2^2}}{1/6}\approx 892 \text{ (km/h)}.$$

d) Điểm C thoả mãn $\overrightarrow{AB}=2.\overrightarrow{BC}$ suy ra toạ độ $C(1010;575;10)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. *Đáp số*: 0,24.



Gọi M là trung điểm của AB, O là giao điểm của AC và BD. Ta có:

$$\frac{d\big(G,(SAC)\big)}{d\big(M,(SAC)\big)}=\frac{SG}{SM}=\frac{2}{3}$$

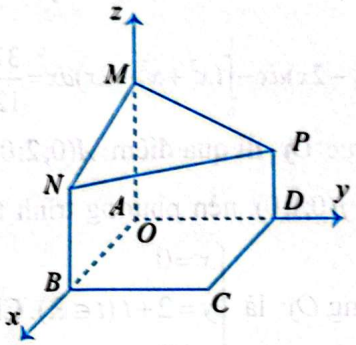
$\Rightarrow d\big(G,(SAC)\big)=\dfrac{2}{3}d\big(M,(SAC)\big)$. Gọi H là hình chiếu của M trên AC. Khi đó $MH\perp(SAC)$ nên

$$d\big(M,(SAC)\big)=MH=\frac{1}{2}BO=\frac{1}{4}BD=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $d\big(G,(SAC)\big)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\approx 0{,}24$.

Câu 2. *Đáp số*: 20.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ với đơn vị trên mỗi trục là 1 m.



Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(6;0;0)$, $D(0;6;0)$, $M(0;0;4)$, $N(6;0;3)$, $P(0;6;2)$. Phương trình mp(MNP) là $x+2y+6z-24=0$, mp(MNP) có một VTPT là $\vec{n}(1;2;6)$. mp$(ABCD)$ có một VTPT là $\vec{k}(0;0;1)$.

Khi đó: $\cos n^0=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{k}\right)\right|$

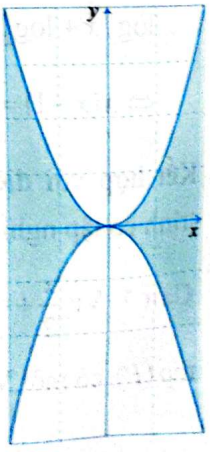
$$=\frac{|1.0+2.0+6.1|}{\sqrt{1^2+2^2+6^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{41}}{41}.$$

Suy ra $n=20$.

Câu 3. *Đáp số*: 10,7.

Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình bên với đơn vị của hai trục là dm.

Đường parabol phía trên có phương trình dạng $y=ax^2$ và đi qua các điểm $(-2;4)$, $(2;4)$



Được quét bằng CamScanner

nên $a=1$. Đường parabol phía dưới có phương trình dạng $y=a'x^2$ và đi qua các điểm $(-2;-4),(2;-4)$ nên $a'=-1$. Diện tích của hình chữ nhật là $4.8=32$ (dm^2).

Diện tích của phần màu sẫm bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol $y=x^2, y=-x^2$ và các đường thẳng $x=-2, x=2$.

Ta có:

$$S=\int_{-2}^{2}\left|x^2-(-x^2)\right|dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_{-2}^{2}=\frac{32}{3}\approx 10,7 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Câu 4. *Đáp số*: 9.

Gọi $M\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;x_0+\frac{1}{x_0+1}\right)$ với $x_0>-1$.

Khi đó để thuyền thu được sóng tốt nhất thì IM ngắn nhất. Ta tìm giá trị nhỏ nhất của IM.

$$IM^2=(x_0+1)^2+\left(x_0+1+\frac{1}{x_0+1}\right)^2$$

$$=2(x_0+1)^2+\frac{1}{(x_0+1)^2}+2.$$

Đặt $t=(x_0+1)^2, t>0$ thì $IM^2=2t+2+\frac{1}{t}$.

Xét hàm số $y=2t+2+\frac{1}{t}, t>0$. Ta có:

$$y'=2-\frac{1}{t^2}, y'=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	↗	

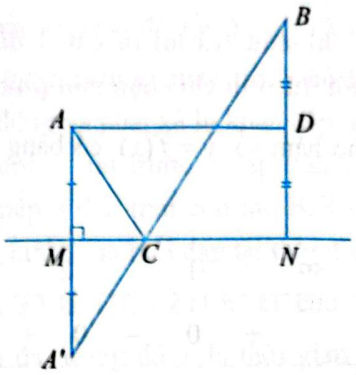
Hàm số đạt GTNN tại $x_0=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-1$.

Vậy $n=4;a=2;b=1\Rightarrow an+b=9$.

Câu 5. *Đáp số*: 5.

Gọi A' đối xứng với A qua MN, D là trung điểm của NB. Do A cố định nên A' cũng cố định.

Ta có: $T=CA+CB=CA'+CB\geq A'B$ (không đổi). Đẳng thức xảy ra khi $C=MN\cap A'B$.



Khi đó: $\frac{MC}{NC}=\frac{MA'}{NB}=\frac{MA}{NB}=\frac{1}{2}$ (1). Mặt khác

$$MN=AD=\sqrt{AB^2-DB^2}$$

$$=\sqrt{153-9}=12\text{km} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$MC=4$ km, $NC=8$ km. Khi đó $AC=5$ km.

Câu 6. *Đáp số*: 0,52.

Gọi V là biến cố: "Bạn Việt thực hiện thành công thí nghiệm", N là biến cố: "Bạn Nam thực hiện thành công thí nghiệm".

Ta có $P(V)=0,6$ và $P(N)=0,7$. Khi đó:

$V\cup N$ là biến cố: "Có ít nhất một bạn thực hiện thành công thí nghiệm";

$\overline{V}N\cup V\overline{N}$ là biến cố: "Có đúng một người thực hiện thành công thí nghiệm".

Ta có: $P(V\cup N)=0,6+0,7-0,6.0,7=0,88$ và

$$P\left(\overline{V}N\cup V\overline{N}\right)=P\left(\overline{V}N\right)+P\left(V\overline{N}\right)$$

$$=0,4.0,7+0,6.0,3=0,46.$$

Xác suất cần tính là:

$$P\left(\overline{V}N\cup V\overline{N}\,|\,V\cup N\right)=\frac{P\left(\overline{V}N\cup V\overline{N}\right)}{P(V\cup N)}$$

$$=\frac{0,46}{0,88}=\frac{23}{44}\approx 0,52.$$

QUÁCH THỊ TUYẾT NHUNG
(*GV THPT THPT chuyên Hưng Yên*)

Được quét bằng CamScanner

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2025

ĐỀ SỐ 3 (*Thời gian làm bài: 90 phút*)

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-5	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-5;1)$.

C. $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. $-\dfrac{1}{4x^4}+C$. **B.** $-\dfrac{5}{x^6}+C$.

C. $\dfrac{1}{4x^4}+C$. **D.** $\dfrac{5}{x^6}+C$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{a}=(3;-2;1)$. **B.** $\vec{b}=(2;-1;-3)$.

C. $\vec{c}=(-2;1;3)$. **D.** $\vec{d}=(3;2;1)$.

Câu 4. Bảng dưới đây ghi lại tốc độ của một số chiếc xe ô tô khi đi qua một điểm đo tốc độ:

Tốc độ (km/h)	$[50;52)$	$[52;54)$	$[54;56)$	$[56;58)$	$[58;60)$
Số xe ô tô	40	32	25	20	8

Khoảng biến thiên (đơn vị: km/h) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

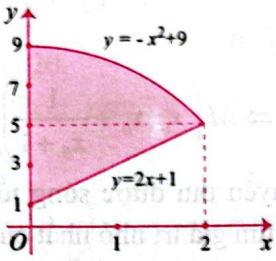
A. 8. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 12.

Câu 5. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ có phương trình là

A. $y=x+1$. **B.** $y=x-1$.

C. $y=x+3$. **D.** $y=x-3$.

Câu 6. Hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ dưới có diện tích bằng S. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

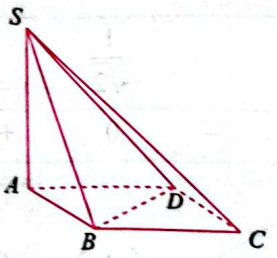


A. $S=\int_0^2(8-x^2-2x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_0^2(10-x^2-2x)\mathrm{d}x$.

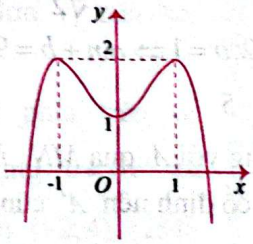
C. $S=\int_0^2(10+2x-x^2)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_0^2(x^2+2x-8)\mathrm{d}x$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, ABD là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy và $SA=AB\sqrt{3}$ (tham khảo hình dưới). Góc nhị diện $[S,BD,C]$ bằng

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 135°. **D.** 45°.



Câu 8. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có toạ độ là



A. $(-1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;0)$.

Được quét bằng CamScanner

Câu 9. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;-3;1)$ và bán kính $R=2$ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$.

B. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=2$.

C. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=4$.

D. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=2$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1=3$ và $a_2=6$. Số hạng a_6 của cấp số nhân là

A. 18. **B.** 192. **C.** 21. **D.** 96.

Câu 11. Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=4$ là

A. $x=83$. **B.** $x=79$. **C.** 66. **D.** $x=64$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và G là trọng tâm của tam giác SCD. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AS}$.

B. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AS}$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AS}$.

D. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AS}$.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M,N,P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh $A'B',CC',AD$. Biết rằng BM và NP vuông góc với nhau.

a) Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng 45°.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BP và MC' bằng $\sqrt{2}a$.

c) Nếu φ là góc giữa đường thẳng CD' và mặt phẳng (MNP) thì $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) Thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng $\frac{1}{16}a^3$.

Câu 2. Một hồ thuỷ điện có 9 đập tràn, mỗi đập có thể xả nước với tốc độ tối đa là $500(\text{m}^3/\text{s})$. Do mưa liên tục nên mực nước trong hồ lên cao đến mức báo động và phải xả lũ khẩn cấp. Khi có lệnh xả lũ, người ta mở trước 5 đập tràn và sau đó 5 phút mở tiếp 4 đập tràn còn lại. Biết rằng tốc độ lưu lượng nước qua mỗi đập tại thời điểm t (giây, kí hiệu là s) là $v(t)=kt(\text{m}^3/\text{s})$ cho đến khi đạt tốc độ tối đa, trong đó t là thời gian tính từ lúc đập đó được mở và k là một hằng số. Giả sử sau 30 phút từ khi có lệnh bắt đầu mở đập xả lũ, lưu lượng nước qua mỗi đập đều ở tốc độ tối đa và hồ thuỷ điện đã xả được 7387500m^3 nước.

a) Khi chưa đạt tốc độ tối đa, lượng nước mà mỗi đập đã xả trong khoảng thời gian từ a(s) đến b(s) được tính theo công thức $\Phi=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

b) Thời gian tính từ khi mở đập xả lũ đến khi lưu lượng nước đạt tốc độ tối đa ở 5 đập tràn mở trước là $t_0=\frac{500}{k}$ (giây).

c) Trong 30 phút (1800 giây), lượng nước xả qua 5 đập tràn được mở trước là

$$\Phi_1=5\int_0^{1800} v(t)\mathrm{d}t=5\int_0^{1800} kt\,\mathrm{d}t.$$

d) Giá trị của hằng số k thuộc khoảng $(9;10)$.

Câu 3. Kết quả khảo sát những bệnh nhân bị đột quỵ của một bệnh viện cho thấy tỷ lệ bệnh nhân hồi phục sau đột quỵ là 35%; tỷ lệ bệnh nhân được điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ là 40%; tỷ lệ bệnh nhân được điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ và hồi phục là 30%.

Gọi A là biến cố "Bệnh nhân được điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ".

Gọi B là biến cố "Bệnh nhân hồi phục".

a) Xác suất $P(A)=0,4$ và $P(AB)=0,3$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A|B)=0,6$.

c) Xác suất có điều kiện $P(\overline{B}|A)=0,4$.

Được quét bằng CamScanner

d) Việc đưa bệnh nhân vào bệnh viện để điều trị trong 6 giờ đầu sau khi đột quỵ làm tăng tỷ lệ hồi phục lên $\frac{10}{3}$ lần.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1), B(3;0;-1), C(0;21;-19)$, mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$ có tâm I và điểm D thoả mãn hệ thức:

$$3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}.$$

a) Tâm I có toạ độ là $(-1;-1;-1)$.

b) Điểm D có toạ độ là $(1;4;-3)$.

c) Đường thẳng OD cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F thoả mãn $EF=\frac{2\sqrt{195}}{13}$.

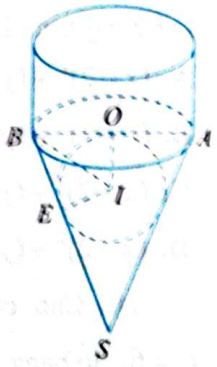
d) Nếu điểm M di động trên mặt cầu (S) thì biểu thức $f=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 672.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AA'=3$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA', BC bằng $2\sqrt{3}$. Cosin của góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

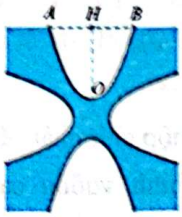
Câu 2. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) là lớn nhất, có phương trình là $ax+by+cz+3=0$. Giá trị của $a+2b-3c$ bằng bao nhiêu?

Câu 3. Một cái phễu được cấu thành bởi hai phần, một phần có dạng hình trụ (đứng), có bán kính đáy là 15 cm và phần còn lại có dạng hình nón, có chiều cao là 30 cm (đường cao của hình nón trùng với trục của hình trụ). Lúc đầu phễu chưa có nước. Người ta đổ nước vào phễu, mặt nước dâng cao đến ngang đáy hình nón (phần tiếp giáp giữa hình nón và hình trụ). Sau đó người ta thả vào phễu đó một viên bi hình cầu, bằng kim loại (không ngấm nước), sao cho nó vừa tiếp xúc với mặt bên vừa tiếp xúc với đáy của hình nón (xem hình minh họa). Khi đó mặt nước sẽ dâng cao lên. Sau khi thả viên bi vào phễu thì mặt nước dâng cao bao nhiêu cm so với lúc chưa thả viên bi? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 4. Gia đình bác An cần xây một bể chứa nước mưa dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $24\,m^3$. Tỷ số giữa chiều cao và chiều rộng bằng 4. Biết rằng bể chỉ có các mặt bên và mặt đáy (không có mặt trên). Chiều dài của đáy bể bằng bao nhiêu mét để xây bể tốn ít nguyên vật liệu nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 5. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol (xem hình minh họa). Biết rằng $AB=5\,cm, OH=4\,cm$, diện tích bề mặt hoa văn đó bằng bao nhiêu cm^2? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Câu 6. Có hai chiếc hộp đựng các viên bi: Hộp thứ nhất đựng 9 viên bi trắng và 2 viên bi xanh, hộp thứ hai đựng 4 viên bi trắng và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một viên bi và bỏ ra ngoài, sau đó dồn số bi từ hai hộp lại với nhau và cho vào hộp thứ ba (hộp thứ ba trước đó không chứa viên bi nào). Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ ba, xác suất để lấy được viên bi xanh là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Được quét bằng CamScanner

CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

(Kỳ 2)

Bài 9 (Lớp 9). *Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm).*

a) Chứng minh tứ giác ABOC là tứ giác nội tiếp.

b) Vẽ đường kính BD của đường tròn (O). Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD và đường tròn (O). Đường thẳng BC và đường thẳng AO cắt nhau tại H. Chứng minh $AB^2 = AE.AD = AH.AO$ và $\widehat{HDO} = \widehat{HBE}$.

c) Lấy điểm M thuộc tia đối của tia CB. Gọi N là chân đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng AB. Chứng minh đường thẳng BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

(Đề tuyển sinh lớp 10 THPT, TP. Hà Nội, năm học 2024 – 2025)

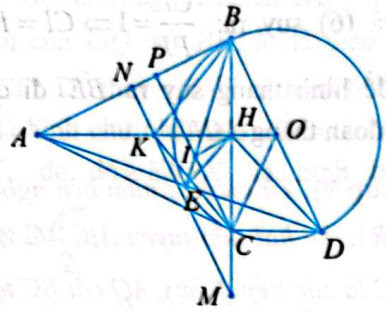
Lời giải. (h.13) a) Gọi K là trung điểm của AO. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $OB \perp AB$, $OC \perp AC$. Ta có BK, CK là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AO của các tam giác vuông BAO và CAO $\Rightarrow KB = KC = \dfrac{AO}{2} = KA = KO$ nên tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có ΔOBC cân tại O có OA là tia phân giác của $\widehat{BOC}$ (theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) nên $OA \perp BC$; $\Delta HAB \backsim \Delta BAO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AO} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (1).

Ta có $\widehat{BED} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $\widehat{ABD} = 90°$ (do $OB \perp AB$) nên $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$(g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$ (2).



Hình 13

Từ (1) và (2) suy ra: $AB^2 = AE.AD = AH.AO$.

Ta có: $\Delta HOB \backsim \Delta BOA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{OB}{OA}$

$\Rightarrow OB^2 = OH.OA \Rightarrow OD^2 = OH.OA \Rightarrow \dfrac{OD}{OH} = \dfrac{OA}{OD}$

$\Rightarrow \Delta DOH \backsim \Delta AOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{HDO} = \widehat{DAO}$ (3).

Dễ thấy bốn điểm A, B, H, E cùng thuộc đường tròn có đường kính là AB nên $ABHE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EBH} = \widehat{DAO}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{HDO} = \widehat{HBE}$.

c) ***Cách 1.*** Kẻ $CP \perp AB$ $(P \in AB)$, gọi I là giao điểm của CP và BE. Vì $ABHE$ là tứ giác nội tiếp nên ta có: $\widehat{EIC} = \widehat{PIB} = 90° - \widehat{ABE} =$ $= 90° - \widehat{AHE} = \widehat{EHC}$. Xét tứ giác có $\widehat{EIC} = \widehat{EHC}$

$\Rightarrow \widehat{BHI} = \widehat{BEC} = 180° - \widehat{BDC} = 180° - \widehat{ABH}$

$\Rightarrow \widehat{BHI} + \widehat{ABH} = 180° \Rightarrow AB // IH$. Xét tam giác BPC có $HB = HC$ và $AB // IH \Rightarrow IC = IP$. Nên theo bổ đề hình thang suy ra BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

Được quét bằng CamScanner

Cách 2. Vì $CP // BD \Rightarrow \widehat{ICB} = \widehat{CBD} = \widehat{CED}$. Mà $\widehat{CDE} = \widehat{CBI}$ nên $\Delta CIB \backsim \Delta ECD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CI}{EC} = \dfrac{IB}{CD}$.

Tương tự: $\Delta PIB \backsim \Delta EBD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{PI} = \dfrac{BD}{IB}$.

Từ đó suy ra:

$$\frac{CI}{EC}.\frac{EB}{PI} = \frac{IB}{CD}.\frac{BD}{IB} \text{ hay } \frac{CI}{PI} = \frac{BD.EC}{CD.EB} \quad (5).$$

Mặt khác, dễ chứng minh $BE.CD = BD.CE$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra: $\dfrac{CI}{PI} = 1 \Rightarrow CI = PI$. Theo theo bổ đề hình thang suy ra BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài 10 (Lớp 9). *Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm), AO cắt BC tại K.*

a) *Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp và AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC.*

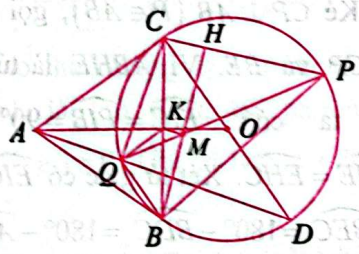
b) *Gọi P là điểm bất kì thuộc (O) sao cho BO nằm giữa hai tia BP và BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ B xuống PC, M là trung điểm của BH và PM cắt (O) tại Q (khác P). Chứng minh $\widehat{QMK} = \widehat{QCA}$.*

c) *Chứng minh $\widehat{AQC} = 90°$ và $AC = 2R.\tan\widehat{CPQ}$.*

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2024 – 2025)

Hướng dẫn giải câu b, c. (h.14)

b)



Hình 14

Ta có KM là đường trung bình của ΔCHB

$\Rightarrow KM // CH \Rightarrow \widehat{QMK} = \widehat{QPC} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{QC} = \widehat{QBC} = \widehat{QCA}$.

c) Xét tứ giác $BQKM$ có $\widehat{QMK} = \widehat{QBC}$ nên

$90° - \widehat{AKQ} = \widehat{QKB} = \widehat{QMB}$

$= \widehat{HMP} = 90° - \widehat{QPC} = 90° - \widehat{QCA} \Rightarrow \widehat{AKQ} = \widehat{QCA}$.

Xét tứ giác $AQKC$ có $\widehat{AKQ} = \widehat{QCA}$ nên $\widehat{AQC} = \widehat{AKC} = 90°$. Kéo dài AQ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là $D \Rightarrow \widehat{CQD} = 90° \Rightarrow CD$ là đường kính của đường tròn (O)

$\Rightarrow AC = CD.\tan\widehat{CDA} = 2R.\tan\widehat{CPQ}$.

Bài 11 (Lớp 9). *Cho tam giác ABC nhọn có $AB < BC < AC$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H, AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G; GE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I. Gọi J là giao điểm của BI và EF, K là giao điểm của OA và EF.*

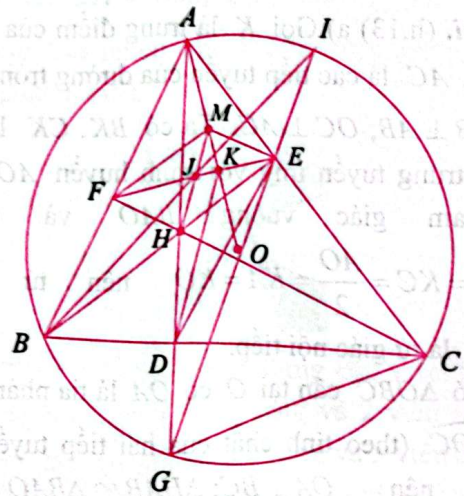
a) *Chứng minh $HF.CE.BC = HC.BF.EF$.*

b) *Chứng minh $JE = JF$ và $DK // HJ$.*

c) *Gọi P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua CF và BE; N là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng $NJ \perp EF$.*

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, năm học 2024-2025)

Hướng dẫn giải (h.15)



Hình 15

a) Dễ thấy tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$, suy ra:

$$\Delta HEF \backsim \Delta HCB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HF}{HB} = \frac{EF}{CB}.$$

Mặt khác: $\Delta FHB \backsim \Delta EHC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{BF}{CE}$.

Được quét bằng CamScanner

Từ đó suy ra: $\frac{HF}{HB}.\frac{HB}{HC}=\frac{EF}{CB}.\frac{BF}{CE}$

$\Rightarrow HF.CE.BC=HC.BF.EF.$

b) Ta có: $\widehat{GCB}=\widehat{GAB}=90^\circ-\widehat{ABC}=\widehat{FCB}$

$\Rightarrow \Delta DCH=\Delta DCG$ (g.c.g) $\Rightarrow DH=GD.$

Dễ thấy các tứ giác $AEHF$ và $AEDB$ nội tiếp nên $\widehat{ABE}=\widehat{ADE}$, $\widehat{HEF}=\widehat{HAF}=\widehat{DEB}$

$\Rightarrow \Delta BEF\backsim\Delta DEH(g.g)\Rightarrow\frac{EF}{EH}=\frac{BF}{DH}$ (1).

Dễ thấy các tứ giác $CDHE$ và $BCEF$ nội tiếp nên $180^\circ-\widehat{ACB}=\widehat{BFE}=\widehat{GHE}$. Mà $\widehat{FBJ}=\widehat{HGE}$ nên $\Delta BFJ\backsim\Delta GHE$(g.g)$\Rightarrow\frac{FJ}{HE}=\frac{BF}{GH}=\frac{1}{2}.\frac{BF}{DH}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{FJ}{HE}=\frac{1}{2}.\frac{EF}{EH}$

$\Rightarrow EF=2.FJ\Rightarrow JE=JF.$

Gọi M là trực tâm của tam giác AEF $\Rightarrow EM//FH$ và $FM//HE$ nên $EMFH$ là hình bình hành $\Rightarrow J$ là trung điểm của HM. Ta có:

$\widehat{AHB}=180^\circ-\widehat{ACB}=180^\circ-\widehat{AFE}=\widehat{AME}$ và

$\widehat{AEM}=90^\circ-\widehat{BAC}=\widehat{ABH}\Rightarrow\Delta AEM\backsim\Delta ABH$ (g.g)

$\Rightarrow\frac{AM}{AH}=\frac{AE}{AB}$. Vì $\Delta AEM\backsim\Delta ABH$ (g.g)

$\Rightarrow\widehat{OAE}=\widehat{BAD}$, mà $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$ nên $\Delta AKE\backsim\Delta ADB(g.g)\Rightarrow\frac{AK}{AD}=\frac{AE}{AB}$. Từ đó suy ra $\frac{AM}{AH}=\frac{AK}{AD}\Rightarrow HM//DK\Rightarrow HJ//DK.$

c) *Cách 1* (h.16) Ta dễ dàng chứng minh được:

$\widehat{EHC}=\frac{\overset{\frown}{PHQ}}{2}=\widehat{NHQ}\Rightarrow\widehat{NHE}=\widehat{NHQ}-\widehat{QHE}$

$=\widehat{EHC}-\widehat{OHE}=\widehat{OHC}$ (3).

Ta có: $\Delta NHQ\backsim\Delta EHC(g.g)\Rightarrow\frac{NH}{HE}=\frac{HQ}{HC}=\frac{HO}{HC}$ (4).

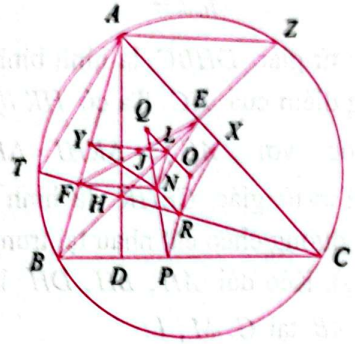
Từ (3) và (4 suy ra:

$\Delta NHE\backsim\Delta OHC(c.g.c)\Rightarrow\frac{NE}{OC}=\frac{HE}{HC}.$

Tương tự: $\Delta NHF\backsim\Delta OHB(c.g.c)\Rightarrow\frac{NF}{OB}=\frac{HF}{HB}.$

Từ đó suy ra: $\frac{NE}{OC}=\frac{NF}{OB}\Rightarrow NE=NF$ (do $\Delta HEF\backsim\Delta HCB\Rightarrow\frac{HE}{HC}=\frac{HF}{HB}$). Kết hợp với $JE=JF$ ta suy ra $NJ\perp EF.$

Cách 2 (h.16) Gọi T, Z lần lượt là giao điểm thứ hai của BE và CF với đường tròn (O). Khi đó ta chứng minh được $\Delta EAZ=\Delta EAH$ và $\Delta FAH=\Delta FAT$ nên ta có $AZ=AH=AT$. Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của AC và AB; L là giao điểm của OQ và BE; R là giao điểm của OP và CF. Dễ thấy $OLNR$ là hình bình hành và $OLEX$ là hình chữ nhật nên $NR=OL=EX$. Mà $NR//EX$, do đó $ENRX$ là hình bình hành $NE=RX=\frac{AT}{2}.$



Hình 16

Tương tự $NF=LY=\frac{AZ}{2}$. Từ đó suy ra $NE=NF$, kết hợp với $JE=JF$ ta thu được $NJ\perp EF.$

Bài 12 (Lớp 9). *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có tam giác ABD là tam giác nhọn và đường chéo AC đi qua tâm O của đường tròn (O). Gọi I là trung điểm BD, H là trực tâm của tam giác ABD, E là giao điểm khác A của AI với (O) và K là hình chiếu vuông góc của H lên AI.*

a) Chứng minh CEHK là hình bình hành và $IB^2=ID^2=IA.IK$.

b) Lấy điểm F trên cung nhỏ BD của đường tròn (O) sao cho $\widehat{BAF}=\widehat{DAI}$. Chứng minh các điểm K và F đối xứng nhau qua đường thẳng BD.

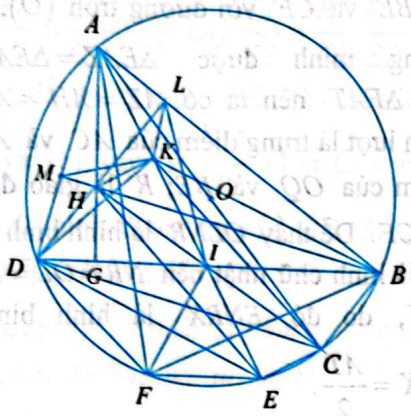
c) Chứng minh các đường phân giác trong các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BKD}$ cắt nhau trên BD.

Được quét bằng CamScanner

d) *Trên đường thẳng qua H và song song AC lấy điểm T sao cho TH = TK. Chứng minh các điểm O, K, F, T cùng thuộc một đường tròn.*

(Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán (chuyên), PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2024 – 2025)

Hướng dẫn giải (h.17)



Hình 17

a) Dễ thấy tứ giác $DHBC$ là hình bình hành nên I là trung điểm của HC. Ta có $HK // CE$ (cùng vuông góc với AE) $\Rightarrow \Delta KHI = \Delta ECI$ (g.c.g) $\Rightarrow IK = IE \Rightarrow$ tứ giác $CEHK$ là hình bình hành (do có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường). Kéo dài AH, BH, DH lần lượt cắt BD, AD, AB tại G, M, L.

Từ $\Delta AKH \backsim \Delta AGI$ (g.g), $\Delta ALH \backsim \Delta AGB$ (g.g) ta suy ra được: $AI.AK = AH.AG = AL.AB$

$\Rightarrow \dfrac{AI}{AL} = \dfrac{AB}{AK} \Rightarrow \Delta IAL \backsim \Delta BAK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{KIL} = \widehat{KBL}$.

Xét tứ giác $KIBL$ có $\widehat{KIL} = \widehat{KBL}$

$\Rightarrow \widehat{IKB} = \widehat{ILB} = \widehat{IBL} \Rightarrow \Delta IKB \backsim \Delta IBA$ (g.g)

$\Rightarrow ID^2 = IB^2 = IK.IA$.

b) Vì $\widehat{BAF} = \widehat{DAI} \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE} \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{DF}$

$\Rightarrow \Delta DIF = \Delta BIE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DIF} = \widehat{BIE} = \widehat{DIK}$.

Vì $ID^2 = IK.IA \Rightarrow \Delta IDK \backsim \Delta IAD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{IDK} = \widehat{IAD} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{DE} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BF} = \widehat{IDF}$.

Từ đó suy ra các điểm K và F đối xứng nhau qua đường thẳng BD.

c) Dễ thấy $AKHM$ là tứ giác nội tiếp nên $\Rightarrow \widehat{KHB} = 180° - \widehat{MHK} = \widehat{IAD} = \widehat{IDK}$. Xét tứ giác $DHKB$ có $\widehat{KHB} = \widehat{IDK}$ nên $\widehat{KDL} = \widehat{KBM}$.

Ta dễ dàng chứng minh được năm điểm A, L, K, H, M cùng thuộc một đường tròn

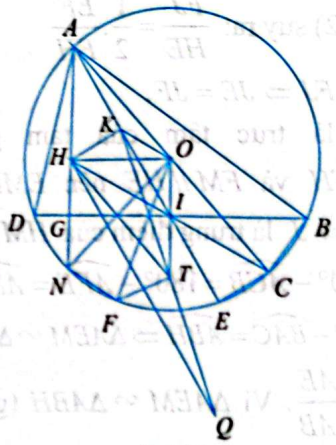
$\Rightarrow \widehat{KLD} = \widehat{KMB}$. Từ đó suy ra:

$$\Delta LDK \backsim \Delta MBK \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DK}{BK} = \frac{LD}{MB} \quad (1).$$

Mặt khác $\Delta LDA \backsim \Delta MBA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{LD}{MB}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{DK}{BK} = \dfrac{AD}{AB}$, suy ra các đường phân giác trong các góc BAD và BKD cắt nhau trên BD.

d) Gọi N là giao điểm thứ hai của AH và (O); Q là điểm đối xứng với K qua T (h. 18).



Hình 18

Ta có $GH = GN$ và $IH = IC$ nên IG là đường trung bình của tam giác $HNC \Rightarrow NC // BD$.

Mà $\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{BE} \Rightarrow EF // BD$. Từ đó suy ra:

$$EF // NC \Rightarrow NF = EC = HK.$$

Xét ΔKHQ có: $TH = TK = TQ \Rightarrow HK \perp QK$, mà $HK \perp AE$ nên $HQ // AE$.

Kết hợp với $HT // AC \Rightarrow \widehat{THQ} = \widehat{CAE}$

$\Rightarrow \widehat{HTK} = 2\widehat{THQ} = 2\widehat{EAC} =$ sđ$\overset{\frown}{EC} =$ sđ$\overset{\frown}{NF} = \widehat{NOF}$

$\Rightarrow \Delta ONF = \Delta THK$ (do $TH = TK, ON = OF,$ $HK = NF$ và $\widehat{HTK} = \widehat{NOF}$)

$\Rightarrow TH = ON = OA \Rightarrow OTHA$ là hình bình hành $\Rightarrow OT // AH$ và $OT = AH = 2.OI \Rightarrow O$ và T đối xứng với nhau qua $BD \Rightarrow OKFT$ là hình thang cân. Đến đây ta dễ dàng suy ra các điểm O, K, F, T cùng thuộc một đường tròn.

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/572 (Lớp 6). Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn $6x^2-3y^2-4xy+5x-y+1=0$. Chứng tỏ rằng $5x+y+2$ là một số chính phương.

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/572. Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ thỏa mãn $a^2+b^2 \vdots p^4$ và $a(a^2+16ab+b^2) \vdots p^4$. Chứng minh rằng

$$a(a^9+b^9) \vdots p^{20}.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/572 (Lớp 7). Chứng minh rằng

$$P=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}}$$

luôn là số vô tỷ với mọi n là số tự nhiên lớn hơn 1.

PHAN QUANG LINH
(GV Archimedes Academy, Hà Nội)

Bài T4/572. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua A cắt (O_1), (O_2) lần lượt tại C và D. Trên các cung $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{BD}$ (không chứa A) của (O_1) và (O_2), ta lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{BAM}+\widehat{DAN}=90^0$. Kẻ $ME \perp BC$ $(E \in BC)$, $NF \perp BD$ $(F \in BD)$. Chứng minh $EF \parallel CD$.

PHAN THỊ MÙI
(GV THCS Trần Quốc Toản, TX. Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T5/572. Giải phương trình

$$x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}.$$

NGUYỄN TỪ PHÚC
(Xóm Tân Mĩ, xã Ninh Mĩ, H. Hoa Lư, Ninh Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/572. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c}<6$ và $\frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a}<6$.

Chứng minh rằng $a+b+c<abc$.

NGUYỄN MINH TRƯỜNG
(SV K8, Cử nhân Khoa học Tài năng, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/572. Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F=\frac{1}{a+16}+\frac{1}{b+16}+\frac{1}{c+16}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T8/572. Cho tam giác ABC cân tại A. Giả sử trực tâm H của tam giác nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác. Tính tỷ số $\frac{AB}{BC}$.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(Pleiku, Gia Lai)

Bài T9/572. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a.b>0$. Chứng minh rằng phương trình $x^4+ax^3+bx+m=0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm thực với mọi số thực m.

ĐÀO QUỐC DŨNG
(GV THPT Dân tộc Nội trú Quỳ Hợp, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/572. Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc 2022 và hệ số cao nhất bằng 1. Biết rằng $P(x)$ có đúng 2022 nghiệm thực phân biệt không phải là số nguyên. Giả sử mỗi đa thức $P(x^2-2x-1)$ và $P(-x^2+2x+1)$ đều có 2696 nghiệm thực phân biệt. Hỏi có bao nhiêu nghiệm của $P(x)$ thuộc khoảng $(-2;2)$?

ĐỖ LÊ HẢI THỤY
(GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Được quét bằng CamScanner

Bài T11/572. Tìm tất cả các bộ hai số nguyên dương a, b sao cho $q^2-r=2007$ với q là thương và r là số dư khi chia a^2+b^2 cho $a+b$.

NGUYỄN VĂN HIỀN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T12/572. Cho tam giác ABC không cân tại A, (I) là đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng qua A song song với BC theo thứ tự cắt DE, DF tại M, N. Các đường thẳng qua M, N vuông góc với MN theo thứ tự cắt IF, IE tại P, Q. Chứng minh rằng

1) Ba điểm D, P, Q thẳng hàng.

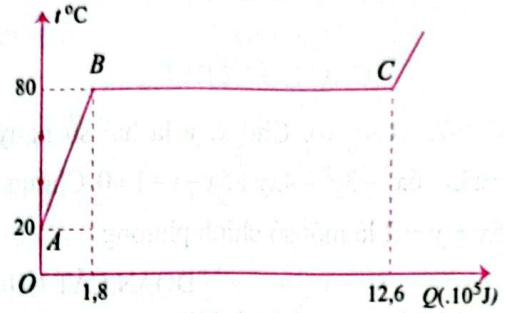
2) Ba đường thẳng DI, PE, QF đồng quy.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)
ĐÀO QUỐC CHUNG
(GV THCS Diễn Hải, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài L1/572. Cho đồ thị biểu diễn sự thay đổi nhiệt độ của khối chất lỏng theo nhiệt lượng cung cấp có dạng như hình dưới. Biết nhiệt dung riêng của chất lỏng đó là c = 2500 J/kg.K.

a) Xác định nhiệt hoá hơi của chất lỏng.

b) Hãy nêu cách xác định nhiệt hoá hơi của chất lỏng bất kì bằng thực nghiệm với các dụng cụ : cốc, bếp đun, nhiệt kế, đồng hồ bấm giây. Nhiệt dung riêng c của chất lỏng xem như đã biết.



VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/572. Điện năng từ một máy phát điện được truyền đi dưới hiệu điện thế 2000 V. Hiệu suất của quá trình truyền tải điện là 80%. Muốn hiệu suất truyền tải điện tăng thêm 15% thì cần phải tăng hiệu điện thế nơi truyền đi thêm bao nhiêu? Biết hệ số công suất bằng $k = 1$ và công suất được xác định bằng công thức $\mathcal{P} = kUI$.

THANH LÂM *(Hà Nội*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/572 (Grade 6). Given two integers x and y satisfying $6x^2-3y^2-4xy+5x-y+1=0$. Prove that $5x+y+2$ is a perfect square.

Problem T2/572. Let a, b be integers and p be an odd prime number satisfying $a^2+b^2 \vdots p^4$ and $a\left(a^2+16ab+b^2\right) \vdots p^4$. Prove that $a\left(a^9+b^9\right) \vdots p^{20}$.

Problem T3/572 (Grade 7). Prove that

$$P=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}}$$

is always irrational for every natural number n which is greater than 1.

Problem T4/572. Given two circles (O_1), (O_2) intersecting at A and B. A straight line through A intersects (O_1), (O_2) at C and D respectively. On the arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{BD}$ (not containing A) of (O_1) and (O_2), we take points M, N respectively so $\widehat{BAM}+\widehat{DAN}=90^0$. Draw $ME \perp BC\left(E \in BC\right)$, $NF \perp BD\left(F \in BD\right)$. Prove that $EF \,//\, CD$.

Problem T5/572. Solve the equation

$$x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/572. Let a, b, c be positive real numbers satisfying $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c}<6$ and $\frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a}<6$. Prove that $a+b+c<abc$.

(Xem tiếp trang 42)

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/568. *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $S(n).S(n+1)=155$, trong đó ký hiệu $S(m)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương m.*

Lời giải. Ta thấy:

$$S(n).S(n+1)=155=1.155=5.31 \quad (*).$$

Giả sử số $n=\overline{a_1a_2...a_k}$ có k chữ số $a_1, a_2, ..., a_k$ đều không lớn hơn 9. Nếu a_k khác 9 thì

$$n+1=\overline{a_1a_2...(a_k+1)}$$

nên $S(n+1)=S(n)+1$, lúc đó $S(n)$ và $S(n+1)$ là hai số nguyên dương liên tiếp nên tích của chúng là số chẵn, không thỏa mãn (*).

Xét $a_k=9$. Giả sử số $n=\overline{a_1a_2...a_t9...9}$ với h chữ số 9 và a_t khác 9 (**). Do $h\geq 1$ thì $S(n)\geq 9h\geq 9$, từ đó và (*) suy ra $S(n)$ chỉ có thể là 31 hoặc 155. Nếu $S(n)=155$ thì $S(n+1)$ khác 1, trái với (*). Vậy $S(n)=31$. Số n có dạng (**) với h chữ số 9 thì $S(n)=31=a_1+a_2+...+a_t+9h$ nên

$$a_1+a_2+...+a_t=9(3-h)+4.$$

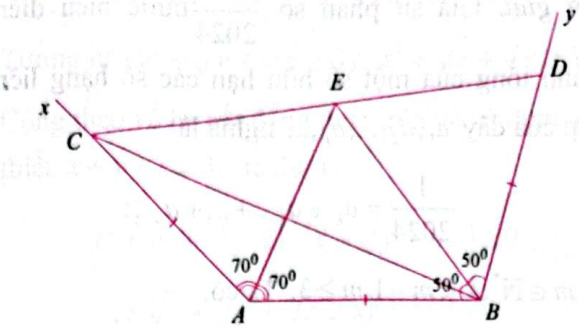
Số $n=\overline{a_1a_2...a_t9...9}$ nhỏ nhất khi $t=1$, lúc đó $a_1-4=9(3-h)$. Do $0\leq a_1\leq 9$ nên $a_1=4$ và $h=3$. Lúc đó $n=4999$ và $S(n)=31$, còn $n+1=5000$ và $S(n+1)=5$, thỏa mãn (*).

Nhận xét. Các bạn lớp 6 có lời giải đúng là: **Nghệ An**: *Bùi Hữu Anh Quân, Đinh Trí Dũng*, 6E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/568. *Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax, By sao cho $\widehat{BAx}=140^0$, $\widehat{ABy}=100^0$. Trên các tia Ax, By lần lượt lấy các điểm C, D sao cho $AC=BD=AB$. Tính số đo góc $\widehat{BCD}$.*

Lời giải.



Gọi E là giao điểm các tia phân giác của các góc $\widehat{BAx}, \widehat{ABy}$. Ta có:

$$\widehat{BAE}=\widehat{CAE}=70^0;\ \widehat{ABE}=\widehat{DBE}=50^0.$$

Do đó: $\widehat{AEB}=180^0-\widehat{BAE}-\widehat{ABE}$

$$=180^0-70^0-50^0=60^0.$$

Ta có $\Delta ABE=\Delta ACE$ (c.g.c), suy ra $\widehat{AEC}=\widehat{AEB}=60^0$. Tương tự có $\widehat{BED}=\widehat{AEB}=60^0$, ta thu được ba điểm C, E, D thẳng hàng. Vậy $\widehat{ACD}=\widehat{ACE}=\widehat{ABE}=50^0$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên

$$\widehat{ACB}=\frac{180^0-\widehat{BAC}}{2}=20^0.$$

Từ đó: $\widehat{BCD}=\widehat{ACD}-\widehat{ACB}=50^0-20^0=30^0$.

Nhận xét. Số bài giải gửi về Toà soạn không nhiều Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Bảo Châu, Nguyễn Văn Hoàng*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An**: *Hoàng Đức Minh*, 7C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Cộng hoà Áo**: *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz; **Nam Định**: *Trần Việt Khôi*, 7A5, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định.

HỒ HẢI

Bài T3/568. *Cho dãy số $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ xác định bởi $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Hỏi có bao nhiêu cách biểu diễn phân số $\frac{1}{2024}$ thành tổng của một số hữu hạn các số hạng liên tiếp (từ 2 số trở lên) của dãy số trên?*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Giả sử phân số $\frac{1}{2024}$ được biểu diễn thành tổng của một số hữu hạn các số hạng liên tiếp của dãy $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nghĩa là

$$\frac{1}{2024} = a_k + a_{k+1} + ... + a_{m-1};$$

$k, m \in \mathbb{N}^*, k < m-1, m \geq 3$. Ta có:

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + ... + \frac{1}{(m-1)m}$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{k} - \frac{1}{m}.$$

Suy ra $km = 2024(m-k)$.

Do đó $(2024-k)(2024+m) = 2024^2$.

Do $k, m \in \mathbb{N}^*$ nên $2024-k$, $2024+m$ đều là số tự nhiên và là ước của 2024^2.

Hơn nữa $2024+m > 2024 > 2024-k$. Từ đó ta có:

$$\begin{cases} 2024-k=a \\ 2024+m=\dfrac{2024^2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2024-a \\ m=\dfrac{2024^2}{a}-2024 \end{cases} (*)$$

(với a là một ước số tự nhiên nhỏ hơn 2024 của 2024^2).

Vì $2024^2 = 2^6 . 11^2 . 23^2$ nên số các ước số tự nhiên của 2024^2 là $(6+1).(2+1).(2+1) = 63$, trong đó có một ước số là 2024. Vì vậy sẽ có $\frac{63-1}{2} = 31$ ước số tự nhiên của 2024^2 nhỏ hơn 2024, tức là có 31 cách chọn a. Mỗi cách chọn a, theo (*) ta tìm được một cặp số (k, m), nên sẽ có một cách biểu diễn phân số $\frac{1}{2024}$ thành tổng của một số hữu hạn các số hạng liên tiếp của dãy $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Chẳng hạn, khi $a = 1$ thì ta tìm được $k = 2023$, $m = 2024^2 - 2024 = 2024.2023$; khi đó:

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{2023.2024} + \frac{1}{2024.2025} + ... + \frac{1}{(2024.2023-1)(2024.2023)}$$

(gồm 2023^2 số hạng liên tiếp của dãy đã cho).

Vậy có 31 cách biểu diễn phân số $\frac{1}{2024}$ thành tổng của một số hữu hạn các số hạng liên tiếp (từ 2 số trở lên) của dãy trên.

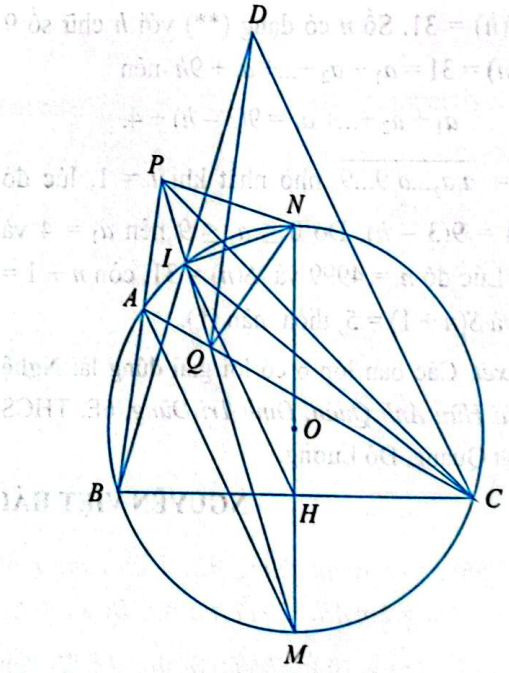
Nhận xét. Bài toán này liên quan đến việc suy luận tính số ước số của một số tự nhiên như sau: Nếu $N = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_m^{r_m}$ ($p_1, p_2, ..., p_m$ là các số nguyên tố phân biệt; $r_1, r_2, ..., r_m$ là các số tự nhiên) thì số các ước số của N là $(r_1+1)(r_2+1)...(r_m+1)$.

Có rất ít bạn tham gia gửi bài và cho đáp số không đúng.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/568. *Cho đường tròn $(O; R)$, dây cung $BC < 2R$. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB < AC$. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Kẻ đường kính MN của (O) cắt BC tại H. Đường thẳng qua H song song với AM cắt cung lớn BC tại I. Đường thẳng MI cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $NP = NQ$.*

Lời giải.



Gọi D là điểm đối xứng với B qua I.

Dễ thấy HI là đường trung bình của tam giác BCD, nên $HI // CD$, từ đó $AM // CD$. Ta có $\widehat{DCQ} = \widehat{CAM}$.

Được quét bằng CamScanner

Lại có M là điểm chính giữa cung BC nên IM là tia phân giác góc $\widehat{BIC}$, kết hợp tính chất góc nội tiếp ta có $\widehat{CAM} = \widehat{CIM} = \widehat{QIB}$.

Do đó $\widehat{DCQ} = \widehat{QIB}$, nên tứ giác $CDIQ$ nội tiếp. Từ đó suy ra $\widehat{QDI} = \widehat{QCI}$. Mà $\widehat{ICA} = \widehat{IBA}$, dẫn tới $AB // QD$. Áp dụng hệ quả định lí Thales, ta có $\frac{IQ}{IP} = \frac{ID}{IB} = 1$, nên I là trung điểm của PQ.

Mặt khác, do MN là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{NIM} = 90°$. Do đó tam giác PNQ cân tại N (vì có NI là trung tuyến đồng thời là đường cao).

Vậy $NP = NQ$.

Nhận xét. Không có bạn nào có lời giải đúng cho bài toán trên.

. NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/568. *Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh các bất đẳng thức:*

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge xy + yz + zx.$$

Hỏi mỗi dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

ta có: $x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3$;

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \le 3(x+y+z) = 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le 3.$$

Do đó $x^2 + y^2 + z^2 \ge \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$. Phần thứ nhất của bài toán được chứng minh.

Xét bất đẳng thức thứ hai:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge xy + yz + zx$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \ge (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2),$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \ge 9.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm, ta có:

$$x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \ge 3\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x}.\sqrt{x}} = 3x.$$

Tương tự: $y^2 + \sqrt{y} + \sqrt{y} \ge 3y$; $z^2 + \sqrt{z} + \sqrt{z} \ge 3z$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và sử dụng giả thiết $x + y + z = 3$, ta được:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \ge 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge xy + yz + zx.$$

Phần thứ hai của bài toán được chứng minh.

Vậy ta đã chứng minh xong bất đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge xy + yz + zx.$$

Mỗi dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Nhận xét. 1) Ta có bất đẳng thức:

$$(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0.$$ BĐT đúng.

2) Có thể chứng minh $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le 3$ bằng cách khác:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, ta có: $\sqrt{x} \le \frac{x+1}{2}$; $\sqrt{y} \le \frac{y+1}{2}$; $\sqrt{z} \le \frac{z+1}{2}$; cộng theo vế ba BĐT trên và sử dụng giả thiết $x + y + z = 3$ ta được $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le 3$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hà Tĩnh: *Đặng Sỹ Phước Đức*, 9A1, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Khắc Trí Nguyên*, 10E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; **Kiên Giang:** *Đào Đức Phúc Nguyên*, *Trần Khưu Nhật Anh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

NGUYỄN ANH DŨNG

Được quét bằng CamScanner

Bài T6/568. *Giải phương trình*

$$\frac{16(2x+\sqrt{x})-1}{4(3\sqrt{x}+1)}+\frac{8(2x+3\sqrt{x})-1}{5(2\sqrt{x}+1)}+\frac{8(x+2\sqrt{x})+5}{6\sqrt{x}+7}=7\sqrt{x}+1.$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{16\left(2x+\sqrt{x}\right)-1}{4\left(3\sqrt{x}+1\right)}+1\right)+\left(\frac{8\left(2x+3\sqrt{x}\right)-1}{5\left(2\sqrt{x}+1\right)}+1\right)+\left(\frac{8\left(x+2\sqrt{x}\right)+5}{6\sqrt{x}+7}+1\right)=7\sqrt{x}+4$$

hay $$\frac{32x+28\sqrt{x}+3}{12\sqrt{x}+4}+\frac{16x+34\sqrt{x}+4}{10\sqrt{x}+5}+\frac{8x+22\sqrt{x}+12}{6\sqrt{x}+7}=7\sqrt{x}+4.$$

Phân tích các tử số thành nhân tử, ta viết lại phương trình trên thành:

$$\frac{\left(4\sqrt{x}+3\right)\left(8\sqrt{x}+1\right)}{\left(4\sqrt{x}+3\right)+\left(8\sqrt{x}+1\right)}+\frac{\left(8\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}+4\right)}{\left(8\sqrt{x}+1\right)+\left(2\sqrt{x}+4\right)}+\frac{\left(2\sqrt{x}+4\right)\left(4\sqrt{x}+3\right)}{\left(2\sqrt{x}+4\right)+\left(4\sqrt{x}+3\right)}=7\sqrt{x}+4.$$

Đặt $a=4\sqrt{x}+3, b=8\sqrt{x}+1, c=2\sqrt{x}+4$ thì phương trình trên trở thành

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}=\frac{a+b+c}{2}\ (1).$$

Bất đẳng thức $xy\le\frac{1}{4}(x+y)^2$ cho ta $\frac{xy}{x+y}\le\frac{1}{4}(x+y)$. Áp dụng bất đẳng thức này, ta suy ra: $$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{1}{4}(a+b+b+c+c+a)=\frac{a+b+c}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Theo (1), ta phải có: $4\sqrt{x}+3=8\sqrt{x}+1=2\sqrt{x}+4$.

Giải ta tìm được $x=\frac{1}{4}$ và đây là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=\frac{1}{4}$.

Nhận xét. Do lỗi đánh máy, ở đề đăng trong số 568, ở mẫu của phân thức đầu tiên thiếu hệ số 3 trước $\sqrt{x}$. Tòa soạn chân thành xin lỗi bạn đọc.

Bản chất của bài giải phương trình trên chính là bất đẳng thức: với mọi $a,b,c>0$ ta luôn có

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}.$$

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T7/568. *Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh AB = c, BC = a, CA = b thỏa mãn 2b = a + c (a < b < c). Biết rằng R.r =130 (với R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC). Tìm bộ ba số nguyên (a, b, c) nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện bài toán.*

Lời giải. Gọi S, p lần lượt là diện tích và chu vi của tam giác ABC. Sử dụng giả thiết $a+c=2b$ (1) và $Rr=130$ ta có:

$$S=pr=\frac{abc}{4R}\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)r}{2}=\frac{abc}{4R}\Leftrightarrow\frac{3br}{2}=\frac{abc}{4R}$$
$$\Leftrightarrow ac=6Rr\Leftrightarrow ac=780\ (2).$$

Đến đây có một số cách giải tiếp như sau

Cách 1. (Của bạn *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**)

Do (1) và (2) nên a và c là nghiệm phương trình:

$$x^2-2bx+780=0\ (3).$$

PT(3) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'=b^2-780\ge 0$

$$\Leftrightarrow b\ge\sqrt{780}\approx 27{,}9.$$

Do $b\in\mathbb{N}^*$ nên $b\ge 28$. Để ba cạnh của tam giác có độ dài là các số nguyên dương nhỏ nhất thì b là số nguyên nhỏ nhất. Xét $b=28$. Khi đó (3) trở thành:

$$x^2-56x+780=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=26\\x_2=30\end{array}\right.$$

Do $a<b<c$ nên ta có: $a=26, c=30$.

Được quét bằng CamScanner

Thử lại ta thấy bộ ba số nguyên $(a, b, c) = (26, 28, 30)$ thỏa mãn bài toán.

Cách 2. (Của bạn *Đỗ Quang Anh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** và một số bạn khác)

Vì $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ và $a + c = 2b$ nên a và c cùng tính chẵn lẻ. Lại do (2) nên a và c cũng chẵn.

Đặt $a = 2m$, $c = 2n$ với $m,n \in \mathbb{Z}^+$ thì do $a < c$ nên $m < n$. Theo BĐT tam giác ta có: $a + b > c$

$$\Rightarrow a + \frac{a+c}{2} > c \Leftrightarrow 3a > c \Rightarrow 3m > n.$$ Ta có:

$$ac = 780 \Rightarrow mn = 195 \Rightarrow m^2 < mn = 195 < 3m^2.$$

Do đó: $\frac{195}{3} < m^2 < 195 \Leftrightarrow 8 \approx \sqrt{\frac{195}{3}} < m < \sqrt{195} \approx 14.$

Mà $m \in U(195)$ nên $m = 13$, $n = 15$. Khi đó:

$$a = 26, c = 30 \text{ và } b = 28.$$

Cách 3. (Của nhiều bạn)

Vì $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ và $a + c = 2b$ nên a và c cùng tính chẵn lẻ. Lại do (2) nên a và c cũng chẵn.

Từ $ac = 780 = 2^2.3.5.13$ và giả thiết $a < b < c$ ta có các trường hợp:

+ $a = 2.13 = 26$, $c = 2.15 = 30 \Rightarrow b = 28$ (thử lại ta thấy thỏa mãn).

+ $a = 2.3 = 6$, $c = 2.5.13 = 130 \Rightarrow b = 68$ (loại, vì không thỏa mãn BĐT tam giác $a + b > c$).

+ $a = 2.5 = 10$, $c = 2.3.13 = 78 \Rightarrow b = 44$ (loại, vì không thỏa mãn BĐT tam giác $a + b > c$).

+ $a = 2$, $c = 2.3.5.13 = 390 \Rightarrow b = 196$ (loại, vì không thỏa mãn BĐT tam giác $a + c > b$).

Vậy bộ số nguyên (a, b, c) cần tìm là $(26, 28, 30)$.

Nhận xét. 1) Ta nhắc lại:

$(a, b, c) = (a_i, b_i, c_i) \Leftrightarrow a = a_i, b = b_i$ và $c = c_i$.

$(a, b, c) \neq (a_i, b_i, c_i) \Leftrightarrow a \neq a_i$ hoặc $b \neq b_i$ hoặc $c \neq c_i$.

Trong đề toán nói tìm bộ ba số nguyên (a, b, c) nhỏ nhất hiểu theo nghĩa nếu có bộ (a_i, b_i, c_i) cũng thỏa mãn giả thiết như bộ (a, b, c) thì: $a \le a_i, b \le b_i, c \le c_i$.

Một số bạn đã nhầm lẫn trong lập luận này, ví dụ: Nếu tìm được các bộ: $(a = 6, b = 68, c = 130)$; $(a = 26, b = 28, c = 30)$; ... (đều thỏa mãn $a < b < c$, $a + c = 2b$) mà kết luận ngay bộ $(a, b, c) = (26, 28, 30)$ là bộ số nguyên nhỏ nhất cần tìm thì điều này không đúng vì bộ đầu tiên có $a = 6 < 26$. Còn bộ $(a = 6, b = 68, c = 130)$ bị loại là do không thỏa mãn BĐT tam giác!

2) Một số bạn khác có cách giải tương tự như những cách trên nhưng lập luận còn dài. Ngoài bạn *Hoài Nhanh*, *Quang Anh*, các bạn sau có lời giải đúng: **Đồng Tháp:** *Võ Hải Yến*, 12H, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Long An:** *Nguyễn Minh Tiến*, *Huỳnh Võ Huy Khánh*, *Trần Lê Trọng Phúc*, *Lê Hoàng Phong*; 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Kiên Giang:** *Hoàng Quốc Khánh*, *Đào Đức Phúc Nguyên*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Nguyễn Đặng Phương Vy*, 10A1, *Nguyễn Phạm Minh Phú*, 10E1, *Lê Quốc Dũng*, 10E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải; **Lâm Đồng:** *Trương Quang Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Sóc Trăng:** *Hà Lê Nguyên Phúc*, 10A8, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Han*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Trần Quang Nhật*, 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh, *Ngô Văn Trường*, 11A1, THPT Hoàng Mai, TX, Hoàng Mai.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/568. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (K) qua B và tiếp xúc với AI tại I, đường tròn (L) qua C và cũng tiếp xúc với AI tại I. Biết rằng đường tròn (K) cắt AB tại điểm thứ hai là P và đường tròn (L) cắt AC tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh $BCQP$ vừa là tứ giác ngoại tiếp vừa là tứ giác nội tiếp.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 12 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**).

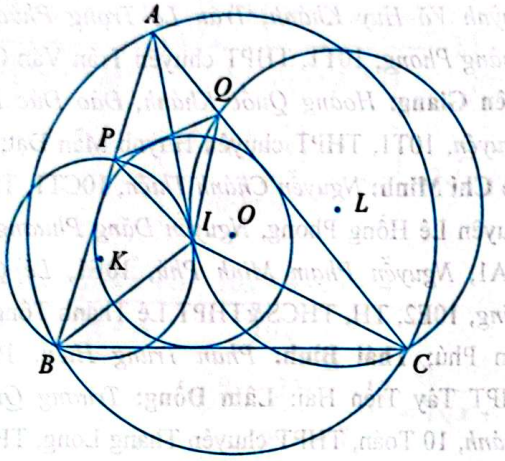
Vì hai đường tròn (K) và (L) cùng tiếp xúc với AI tại I nên $\overline{AP}.\overline{AB} = AI^2 = \overline{AQ}.\overline{AC}$. Suy ra tứ giác $BCQP$ là tứ giác nội tiếp.

Được quét bằng CamScanner

Giả sử tiếp tuyến đi qua P của đường tròn (I) khác với PB cắt AC tại Q'. Ta có:

$$\widehat{Q'PB}=2\widehat{BPI}=2(\widehat{PAI}+\widehat{AIP})=180^0-\widehat{Q'CB}$$

nên tứ giác $BCQ'P$ nội tiếp. Do đó Q' là giao điểm của AC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP, hay $Q\equiv Q'$, ta thu được tứ giác $BCQP$ ngoại tiếp đường tròn (I).



Vậy tứ giác $BCPQ$ vừa là tứ giác ngoại tiếp, vừa là tứ giác nội tiếp. Ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét. Ngoài bạn *Chương*, các bạn sau cũng có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Đỗ Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình**: *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải, Tiền Hải; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Duy Phúc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Gia Lai**: *Nguyễn Minh Hiếu*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Lâm Đồng**: *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, *Trương Quang Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Mai Thuý Vy*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Đỗ Tiến Dũng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Long An**: *Huỳnh Đăng Khánh, Trần Lê Trọng Phúc, Nguyễn Minh Tiến*, 10 Toán 1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Kiên Giang**: *Cái Hoàng Quốc Khánh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **TP. Hồ Chí Minh**: *Từ Thái Quân, Lê Nguyễn Bảo Trân*, 10E1, *Lê Khắc Trí Nguyên*, 10E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/568. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai số dương a và b để biểu thức $P = a(x^2 + y^2) + bz^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2024.*

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn)

Với c là một số thực dương nhỏ hơn a (ta sẽ chọn sau), áp dụng bất đẳng thức $m^2+n^2\ge 2mn$ ta có:

$$P=(a-c)(x^2+y^2)+\left(cx^2+\frac{b}{2}z^2\right)+\left(cy^2+\frac{b}{2}z^2\right)$$

$$\ge 2(a-c)xy+2xz\sqrt{\frac{bc}{2}}+2yz\sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

Ta cần chọn c sao cho $a-c=\sqrt{\frac{bc}{2}}$ hay $(a-c)^2=\frac{bc}{2}$ hay c là nghiệm của phương trình bậc hai: $2c^2-(4a+b)c+2a^2=0.$

Chọn nghiệm: $c=\dfrac{4a+b-\sqrt{8ab+b^2}}{4}$

$$=a-\frac{\sqrt{8ab+b^2}-b}{4}<a.$$

Khi đó: $P\ge 2(a-c)(xy+yz+zx)=2(a-c).$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$ và $\sqrt{c}x=\sqrt{\frac{b}{2}}z$ hay $z=\sqrt{\frac{2c}{b}}x$. Thay vào giả thiết ta được:

$$x^2\left(1+\sqrt{\frac{8c}{b}}\right)=1.$$

Từ đó ta tìm được:

$$x=y=\sqrt{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{8c}}},z=\sqrt{\frac{2c}{b+\sqrt{8bc}}}.$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2024 khi và chỉ khi $2(a-c)=2024$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{8ab+b^2}-b}{4}=a-c=1012$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{8ab+b^2}=b+4048$$

$$\Leftrightarrow 8ab+b^2=b^2+8096b+4048^2$$

$$\Leftrightarrow a=1012\left(1+\frac{2024}{b}\right).$$

Được quét bằng CamScanner

Nhận xét. Một vài bạn có lời giải sai vì không chú ý đến điều kiện dấu đẳng thức xảy ra khi nào.

Bạn *Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên** có lời giải đúng theo hướng trên. Bạn *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh** có lời giải đúng theo hướng đưa về lượng giác và khảo sát hàm số. Các bạn *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An** và *Thi Tiến Thành*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu, **Long An** giải theo hướng áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cũng cho đáp số đúng.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T10/568. *Tìm tất cả các bộ số nguyên không âm (a, b, c) sao cho $\left[\sqrt{an+b}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+c}\right]$ (1) với mọi số nguyên không âm n, trong đó ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.*

Lời giải (Dựa theo lời giải của tác giả). Từ giả thiết suy ra: $\sqrt{n}+\sqrt{n+c}-1<\sqrt{an+b}<\sqrt{n}+\sqrt{n+c}+1$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{1+\frac{c}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{a+\frac{b}{n}}<1+\sqrt{1+\frac{c}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Cho $n\to\infty$ ta suy ra: $\sqrt{a}=2\Rightarrow a=4$. Khi đó: $\left[\sqrt{4n+b}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+c}\right]$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Cho n lần lượt bằng 0, 1, 4 ta được:

$$\left[\sqrt{b}\right]=\left[\sqrt{c}\right]=k,\left[\sqrt{b+4}\right]=1+\left[\sqrt{c+1}\right],$$

$$\left[\sqrt{b+16}\right]=2+\left[\sqrt{c+4}\right] \text{ với } k\in\mathbb{N}.$$

• Nếu $c=0$ thì $\left[\sqrt{b}\right]=0$ nên $b=0$ (thỏa mãn).

• Nếu $c\geq 1$ thì $k\geq 1$. Khi đó: $k\leq\sqrt{b},\sqrt{c}<k+1$

$\Leftrightarrow k^2\leq b,\ c<(k+1)^2\Rightarrow k^2\leq b,c\leq(k+1)^2-1$

và $k^2<c+4<(k+1)^2+4<k^2+4k+4=(k+2)^2$

hay $k<\sqrt{c+4}<k+2$. Vậy có hai trường hợp:

$$\left[\sqrt{c+4}\right]=k \text{ hoặc } \left[\sqrt{c+4}\right]=k+1.$$

+ TH1: Nếu $\left[\sqrt{c+4}\right]=k+1$ thì $\left[\sqrt{b+16}\right]=k+3$

nên $b+16\geq(k+3)^2\Rightarrow(k+1)^2-1+16>(k+3)^2$

$\Rightarrow 4k<7\Rightarrow k=1$ và $\left[\sqrt{b}\right]=\left[\sqrt{c}\right]=1$

$\Rightarrow 1\leq b,c\leq 3$. Khi đó: $5\leq b+4\leq 7$ nên

$1+\left[\sqrt{c+1}\right]=\sqrt{b+4}=2$ hay $\left[\sqrt{c+1}\right]=1$. Suy ra:

$$\sqrt{c+1}<2\Rightarrow c+1<4\Rightarrow c\leq 2\Rightarrow c\in\{1,2\}.$$

- Với $c=1$, ta kiểm tra các giá trị $b\in\{1, 2, 3\}$.

Không khó để chứng minh với mọi số nguyên không âm n thì: $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]$;

$$\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right];\left[\sqrt{4n+3}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right].$$

Như vậy ta được 3 bộ (4, 1, 1); (4, 2, 1); (4, 3, 1).

- Với $c=2$, ta kiểm tra các giá trị $b\in\{1, 2, 3\}$.

Chứng minh tương tự với mọi số nguyên không âm n thì: $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right]$;

$$\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right];\left[\sqrt{4n+3}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right].$$

Như vậy ta được 3 bộ (4, 1, 2); (4, 2, 2); (4 ,3, 2).

+ TH2: Nếu $\left[\sqrt{c+4}\right]=k$ thì $\left[\sqrt{b+16}\right]=k+2$

nên $b+16\geq(k+2)^2\Rightarrow(k+1)^2-1+16>(k+2)^2$

$\Rightarrow 2k<12\Rightarrow k\leq 6\Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

- Với $k=1$ ta có:

$$\left[\sqrt{c+4}\right]=1\Rightarrow 1\leq\sqrt{c+4}<2\Rightarrow c<0 \text{ (loại).}$$

- Với $k=2$ ta có: $\left[\sqrt{b}\right]=\left[\sqrt{c}\right]=2$;

$$\left[\sqrt{c+4}\right]=2\Rightarrow\sqrt{c+4}<3\Rightarrow c<5;$$

$$2=\left[\sqrt{c}\right]\Rightarrow 2\leq\sqrt{c}\Rightarrow 4\leq c. \text{ Vậy } c=4.$$

Do đó: $\left[\sqrt{b+4}\right]=1+\left[\sqrt{4+1}\right]=3\Rightarrow\sqrt{b+4}\geq 3\Rightarrow b\geq 5$;

$\left[\sqrt{b}\right]=2\Rightarrow\sqrt{b}<3\Rightarrow b<9$. Vậy $b\in\{5,6,7,8\}$.

Xét $b\in\{5,6,7\}$. Tương tự như trên ta chứng minh được với mọi số nguyên không âm n thì

$$\left[\sqrt{4n+5}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+4}\right];$$

Được quét bằng CamScanner

$\left[\sqrt{4n+6}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+4}\right];\left[\sqrt{4n+7}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+4}\right].$

Với $b=8$ thì đẳng thức $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+4}\right]=\left[\sqrt{4n+8}\right]$ không xảy ra với $n=2$.

Như vậy ta được 3 bộ (4, 5, 4); (4, 6, 4); (4, 7, 4).

- Với $k=3$ đẳng thức (1) không xảy ra với $n=12$.
- Với $k=4$ đẳng thức (1) không xảy ra với $n=6$.
- Với $k=5$ đẳng thức (1) không xảy ra với $n=7$.
- Với $k=6$ đẳng thức (1) không xảy ra với $n=8$.

Kết luận: Có 10 bộ (a, b, c) thỏa mãn điều kiện đề bài là: (4, 0, 0); (4, 1, 1); (4,2,1); (4,3,1); (4, 1, 2); (4, 2, 2); (4, 3, 2); (4, 5, 4); (4, 6, 4); (4, 7, 4).

Nhận xét. Chỉ có duy nhất một bạn tham gia giải bài toán này nhưng bạn đó chỉ tìm được 4 bộ (4, 0, 0); (4, 1, 1);(4, 2, 1). (4, 3, 1);

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/568. *Cho dãy số (x_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases} x_1=a>0 \\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{x_n^2}{n^2},\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases} (1).$$

Tìm tất cả các giá trị của a để dãy (x_n) hội tụ.

Lời giải (theo đa số các bạn).

Để ý rằng $x_{n+1}-x_n>0$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ nên (x_n) là dãy đơn điệu tăng. Ta chứng minh

$$x_n+n^2\ge n(n+1)\sqrt{a},\forall n\in\mathbb{N}^* \quad (2).$$

Với $n=1$ thì $x_1+1\ge 2\sqrt{x_1}=2\sqrt{a}$.

Giả sử (2) đúng với $n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó

$$x_{n+1}+(n+1)^2=(x_n+n^2)+\frac{x_n^2}{n^2+1}+2n$$

$$\ge n(n+1)\sqrt{a}+2\frac{x_n}{n}+2n=n(n+1)\sqrt{a}+\frac{2}{n}(x_n+n^2$$

$$\ge n(n+1)\sqrt{a}+\frac{2}{n}\left[n(n+1)\sqrt{a}\right]=(n+1)(n+2)\sqrt{a}.$$

Suy ra (2) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Từ (2) suy ra khi $a\ge 1$ thì thì $x_n\ge n$ và dãy (x_n) phân kỳ.

Xét $0<a<1$. Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}=\frac{1}{x_k+k^2}\le\frac{1}{k(k+1)\sqrt{a}}$$

$$=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{\sqrt{a}},\ k=1,2,\ldots$$

Suy ra: $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}$

hay $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}\le\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}.$

Suy ra: $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}\le\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}$

hay $\frac{1}{x_{n+1}}\ge\frac{1}{x_1}-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{\sqrt{a}},$

suy ra $\frac{1}{x_{n+1}}>\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$ hay $x_{n+1}<\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}-a}.$

Vậy dãy (x_n) bị chặn trên và là dãy đơn điệu tăng nên hội tụ.

Kết luận: Dãy (x_n) hội tụ khi và chỉ khi $0<a<1$.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về dãy số đơn điệu. Đa số các bạn gửi bài đều đều cho kết quả đúng.

Bà Rịa - Vũng Tàu: *Đỗ Tiến Dũng*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Kiên Giang:** *Trần Hoàng Bách*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Long An:** *Nguyễn Trọng Nhân*, 11T1, *Nguyễn Gia Bảo*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*, 11CT, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/568. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A, K là điểm bất kỳ trên AM. Gọi (U), (V) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABK và ACK; P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BK, CK và (O). N là giao điểm của QU và PV. S là giao điểm của PQ và UV. Chứng minh rằng*

a) *N là điểm chính giữa của cung BC chứa A.*

b) *SK song song với BC.*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. a) Gọi N' là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Dễ thấy

$$(UB,UK)\equiv 2(AB,AK)\equiv(AB,AC)\equiv(QB,QC)\equiv(QB,QK)(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Do đó bốn điểm B, K, Q, U cùng thuộc một đường tròn. Từ đó, chú ý rằng $UB=UK$, suy ra QU là một trong hai phân giác của góc (QB,QK).

Do đó QU là một trong hai phân giác của góc (QB,QC). Điều đó có nghĩa là hoặc QU đi qua N hoặc QU đi qua M (1). Dễ thấy

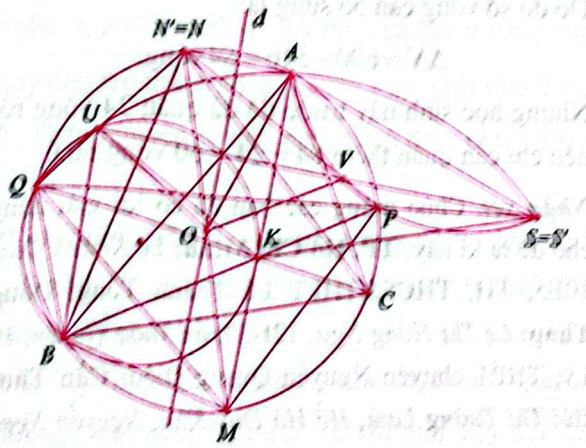
$$(\overrightarrow{UB},\overrightarrow{UK})\equiv 2(AB,AK)\equiv(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv(\overrightarrow{N'B},\overrightarrow{N'C})(\mathrm{mod}\,2\pi).$$

Từ đó, chú ý rằng $UB=UK$ và $N'B=N'K$, suy ra các tam giác UBK, $N'BC$ đồng dạng cùng hướng (2).

Giả sử QU đi qua M. Chú ý đến (2), ta có:

$$0\equiv(QU,QM)\equiv(QU,QK)+(QK,QM)\equiv(BU,BK)+(QC,QM)(\mathrm{mod}\,\pi)$$
$$\equiv(BN',BC)+(BC,BM)\equiv(BN',BM)$$
$$\equiv\frac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,\pi)\ \text{(mâu thuẫn)}.$$

Do đó QU không thể đi qua M (3). Từ (1) và (3) suy ra QU đi qua N'. Tương tự PV cũng đi qua N'. Vậy $N=QU\cap PV=N'$ (đpcm).



b) Gọi S' là giao điểm của PQ và tiếp tuyến với (O) tại A. Đương nhiên tam giác ONA cân tại O.

Dễ thấy: $UV\perp AK; UO\perp AB; VO\perp AC$.

Do đó: $(UV,UO)\equiv(AK,AB)\equiv-(AK,AC)\equiv-(VU,VO)(\mathrm{mod}\,\pi)$.

Do đó tam giác OUV cân tại O.

Vì $NA\perp MA; UV\perp MA$ nên $NA\parallel UV$.

Vậy NA và UV có đường trung trực chung d (d đi qua O và vuông góc với NA và UV).

Do đó O, U, A là ảnh đối xứng của O, V, N qua d.

Từ đó, chú ý rằng

$$(AS',AO)\equiv\frac{\pi}{2}\equiv(PM,PN)(\mathrm{mod}\,\pi)$$

và N, P, V thẳng hàng, suy ra:

$$(AS',AU)\equiv(AS',AO)+(AO,AU)\equiv(PM,PN)-(NO,NV)(\mathrm{mod}\,\pi)$$
$$\equiv(PM,PN)+(NV,NO)\equiv(PM,PN)+(NP,NM)$$
$$\equiv(PM,NM)(\mathrm{mod}\,\pi)\equiv(PQ,NQ)\equiv(QS',QU)(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Do đó A, S', U, Q cùng thuộc một đường tròn.

Tương tự: A, S', V, P cùng thuộc một đường tròn.

Vậy chú ý rằng QU, PV cùng đi qua N, ta có:

$$(S'U,S'V)\equiv(S'U,S'A)+(S'A,S'V)\equiv(QU,QA)+(PA,PV)(\mathrm{mod}\,\pi)$$
$$\equiv(QU,PV)+(PA,QA)\equiv(QN,PN)+(PN,QN)\equiv 0(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Điều đó có nghĩa là $S'\in UV$. Vậy $S=PQ\cap UV=S'$ thuộc tiếp tuyến tại A của (O).

Từ đó, chú ý rằng A, K đối xứng với nhau qua UV; $UV\perp AM$; $SA\perp AO$; $BC\perp MO$ và $OA=OM$, suy ra: $(SK,BC)\equiv(SK,UV)+(UV,BC)$

$$\equiv(UV,SA)+(AM,MO)(\mathrm{mod}\,\pi)\equiv(AM,AO)+(AO,AM)\equiv 0(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Nói cách khác $SK\parallel BC$.

Nhận xét. 1) Cần có thêm giả thiết K không phải là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, nếu K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì U trùng Q và V trùng P.

Được quét bằng CamScanner

2) Bài toán vẫn đúng nêu thay đoạn AM bởi đường thẳng AM với chú ý rằng K khác A, M và K không phải là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

3) Cái khó của bài toán này là vấn đề "lời giải không phụ thuộc hình vẽ".

4) Chỉ có bốn bạn tham gia giải bài toán này, tuy nhiên lời giải của cả bốn bạn đều phụ thuộc hình vẽ một cách trầm trọng.

5) Xin nêu tên cả bốn bạn: **Phú Thọ:** *Vi Văn Khánh, Trần Việt Tùng*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Nam Định:** *Bùi Ngọc Long*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Gia Lai:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 10A7, THPT Chi Lăng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/568. *Hai bình cách nhiệt hình trụ giống nhau, bình thứ nhất đựng nước ở nhiệt độ $t_1 = 5^\circ$C, bình thứ hai đựng nước đá, cùng tới độ cao $h = 20$ cm. Người ta rót hết nước ở bình 1 vào bình 2. Khi có cân bằng nhiệt, mực nước trong bình dâng cao thêm $\Delta h = 0{,}3$ cm so với lúc vừa rót xong nước. Xác định nhiệt độ ban đầu của nước đá. Biết nhiệt dung riêng của nước $c_1 = 4200$ J/kg.K, nhiệt dung riêng của nước đá $c_2 = 2000$ J/kg.K nhiệt nóng chảy của nước đá $\lambda = 3{,}4.10^5$ J/kg. Khối lượng riêng của nước và nước đá lần lượt là $D_1 = 1000$ kg/m^3 và $D_2 = 900$ kg/m^3.*

Lời giải. Mực nước dâng lên chứng tỏ có một lượng nước bị đông đặc. Gọi x là chiều cao của lượng nước đó. Sau khi đông đặc, nó có chiều cao $x + \Delta h$ nhưng khối lượng vẫn không đổi:

$$SxD_1 = S(x + \Delta h)D_2 \ (S\text{: diện tích đáy bình})$$

$$x = \frac{D_2.\Delta h}{D_1 - D_2} = 2{,}7 \text{ cm}.$$

Phương trình cân bằng nhiệt:

$$c_1.S.h.D_1(t_1 - 0) + \lambda.S.x.D_1 = c_2.S.h.D_2(0 - t_2).$$

Từ đó: $t_2 = -\dfrac{c_1.h.D_1.t_1 + \lambda.x.D_1}{c_2.h.D_2}$

$$= -\frac{4200.0{,}2.1000.5 + 3{,}4.10^5.0{,}027.1000}{2000.0{,}2.900} \approx -37{,}2^\circ\text{C}.$$

Nhận xét. Chúc mừng hai bạn sau đã có lời giải đúng cho bài này: *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tiền Hải, **Thái Bình**; *Hoàng Ngọc Gia Huy*, 12 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/568. *Một học sinh quấn một máy biến áp với dự định số vòng dây của cuộn sơ cấp gấp hai lần số vòng dây của cuộn thứ cấp. Do sơ suất nên cuộn thứ cấp bị thiếu một số vòng dây. Muốn xác định số vòng dây thiếu để quấn tiếp thêm vào cuộn thứ cấp cho đủ, học sinh này đặt vào hai đầu cuộn sơ cấp một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi, rồi dùng vôn kế xác định tỉ số điện áp ở cuộn thứ cấp để hở và cuộn sơ cấp. Lúc đầu tỉ số điện áp bằng 0,43. Sau khi quấn thêm vào cuộn thứ cấp 24 vòng dây thì tỉ số điện áp bằng 0,45. Bỏ qua mọi hao phí trong máy biến áp, để được máy biến áp đúng như dự định, học sinh này phải quấn tiếp vào cuộn thứ cấp bao nhiêu vòng dây?*

Lời giải. Gọi số vòng cuộn sơ cấp là N_1 và số vòng cuộn thứ cấp ban đầu là N_2. Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{N_2}{N_1} = 0{,}43 \\ \dfrac{N_2 + 24}{N_1} = 0{,}45 \end{cases}. \text{ Giải ra ta được: } \begin{cases} N_1 = 1200 \\ N_2 = 516 \end{cases}.$$

Theo đề bài, số vòng cuộn thứ cấp cần có là:

$$N_3 = \frac{N_1}{2} = \frac{1200}{2} = 600 \text{ vòng}.$$

Do đó số vòng cần bổ sung là:

$$\Delta N = 600 - 516 = 84 \text{ vòng}.$$

Nhưng học sinh này trước đó đã quấn 24 vòng rồi nên chỉ cần quấn thêm $84 - 24 = 60$ vòng nữa.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Khánh Duy*, 10E5, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Đồng Tháp:** *Lê Thị Hồng Nga*, 12H, *Trần Thảo Quyên*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Cần Thơ:** *Bùi Thị Tường Lam, Hồ Hà Duy Kha, Nguyễn Ngọc Trâm*, 10A2, TTGDNN-GDTX, Q. Ô Môn; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Minh Phúc*, 12 lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Được quét bằng CamScanner



MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ MÔ TẢ TẬP HỢP

VÕ HOÀNG THÀNH
(Trường Đại học sư phạm TP. Hồ Chí Minh)

Trong nhiều đề thi học sinh giỏi không ít lần xuất hiện các bài toán liên quan đến tập hợp. Cụ thể trong bài viết này, tác giả muốn giới thiệu một số bài toán đã sưu tầm về vấn đề mô tả tập hợp, tức là khi đã biết một số điều kiện giữa các phần tử thì có thể biết thêm tính chất gì về tập hợp đó.

Ta bắt đầu với một bài toán nhẹ nhàng sau.

Bài 1. *Trên bảng có ghi hai số 1 và 5. Ta ghi các số tiếp theo lên bảng theo quy tắc: nếu có hai số x,y phân biệt trên bảng thì ghi thêm số $z=x+y+xy$. Chứng minh rằng các số trên bảng (trừ số 1) đều có dạng $3k+2$ (với k là một số tự nhiên).*

Lời giải. Số hạng thứ ba được viết là 11. Giả sử có n số trên bảng, trong đó có $n-1$ số chia cho 3 dư 2 và một số 1. Số thứ $n+1$ được viết trên bảng đều tạo bởi hai số x,y có trong n số trước đó. Có hai trường hợp: $x=1$ và $y\equiv 2(\mathrm{mod}3)$ hoặc $x,y\equiv 2(\mathrm{mod}3)$. Rõ ràng cả hai trường hợp này đều tạo thành số $z=x+y+xy$ chia cho 3 dư 2. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Bình luận. Đây là một bài trong đề thi học sinh giỏi cấp THCS tỉnh Nghệ An năm 2016-2017. Để bài có thể phát biểu lại:

Cho tập hợp S có các phần tử là số nguyên dương. Biết rằng $1;5\in S$ và với mọi $x,y\in S$ thì $x+y+xy\in S$. Chứng minh rằng các phần tử của tập $S\setminus\{1\}$ đều chia cho 3 dư 2.

Dưới dạng phát biểu này, ta thấy trên S có một phép toán $x*y=x+y+xy$. Từ đó có thể biết thêm được một tính chất các phần tử của S là chia cho 3 dư 2.

Nói đơn giản, "phép toán" trên một tập hợp S có thể coi là một "quy tắc" $*$ đặt tương ứng mỗi cặp phần tử $(a,b)\in S\times S$ với duy nhất phần tử $c\in S$, thường được ký hiệu $c=a*b$. Trong một số trường hợp, ta có thể mô tả khá tường minh một tập hợp từ các phép toán. Ví dụ bài toán sau:

Bài 2. *Cho trước hai số nguyên dương $a,b\geq 2$. Đặt $T=\{ax+by:x,y\in\mathbb{N}\}$. Tập hợp $\mathbb{N}\setminus T$ có phần tử lớn nhất không?*

Lời giải. Nếu $d=(a,b)\geq 2$ thì mọi phần tử của T đều là bội của của d, do đó $kd+1\notin T$ với mọi số tự nhiên k, dẫn đến $\mathbb{N}\setminus T$ không có phần tử lớn nhất. Ta chứng minh $d=1$ thì $\mathbb{N}\setminus T$ hữu hạn, do đó có phần tử lớn nhất.

Vì $1\notin T$ nên $\mathbb{N}\setminus T$ khác rỗng. Theo bổ đề Bezout, do $(a,b)=1$ nên tồn tại các số nguyên $m,n\geq 0$ sao cho $am-bn=1$, suy ra:

$$1+bn=am\in T.$$

Với mọi $t\geq bn(bn-1)+(bn-1)$, đặt $t=qbn+r$ với $0\leq r<bn, r\in\mathbb{N}$. Do $t\geq bn(bn-1)+(bn-1)$ nên $q\geq bn-1\geq r$. Ta có:

$$\begin{aligned}t&=qbn+r=bn(q-r)+r(bn+1)\\&=bn(q-r)+ram\in T.\end{aligned}$$

Được quét bằng CamScanner

Vậy $\mathbb{N}\setminus T$ bị chặn trên bởi $bn(bn-1)+(bn-1)$, mà tập này cũng khác rỗng nên tồn tại phần tử lớn nhất.

Nhận xét. Bắt đầu từ a và b, sau hữu hạn bước thực hiện các phép toán cộng và nhân (chú ý rằng $ax+by$ có thể xem như tổng $a+\ldots+a+b+\ldots+b$ với x số a và y số b) ta nhận được các số tự nhiên, tập hợp tất cả các số như vậy chính là tập T. Cách mô tả tập T như được "sinh ra" bởi hai số a,b với hữu hạn các phép toán thế này chưa thật sự thuận tiện để làm việc.

Trong lời giải trên, ta chứng minh được nếu $(a,b)=1$ thì sẽ tồn tại số tự nhiên N để tất cả các số tự nhiên lớn hơn N đều thuộc T. Một cách tổng quát, ta chứng minh được kết quả sau:

$$\{ax+by : x,y\in\mathbb{Z}\}=\{dx : x\in\mathbb{Z}\},\ d=(a,b).$$

Tức là ta đã "biết rõ" tập hợp bên trái thực chất là tập tất cả các bội số nguyên của d, bài toán trở nên dễ dàng hơn rất nhiều. Áp dụng vào bài toán ban đầu, khi thay điều kiện $x,y\in\mathbb{Z}$ thành $x,y\in\mathbb{N}$, ta dễ dàng có cảm giác ngay là T có thể không "quét" hết tập $\mathbb{N}$ nhưng cũng sẽ quét hầu hết tập $\mathbb{N}$ nếu $(a,b)=1$.

Bài toán tiếp theo khá tương tự bài trên về mặt ý tưởng.

Bài 3. *Có bao nhiêu cặp số nguyên dương khác nhau (a,b) thỏa mãn có đúng 2018 số thực thuộc đoạn $[0,1]$ có thể viết dưới dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ với x,y là các số nguyên?*

Lời giải. Ta có:

$$S=\left\{\frac{x}{a}+\frac{y}{b} : x,y\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{bx+ay}{ab} : x,y\in x,y\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$=\left\{\frac{k(a,b)}{ab} : k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{k}{[a,b]} : k\in\mathbb{Z}\right\},$$

trong đó $[a,b]$ là bội chung nhỏ nhất của a,b. Ta thấy rằng $S\cap[0,1]$ có đúng 2018 phần tử khi và chỉ khi có có đúng 2018 số tự nhiên k thỏa $k\le[a,b]$, tức là khi $[a,b]=2017$. Từ đây ta tìm được các cặp số thỏa mãn là:

$$(a,b)=(1,2017),(2017,1),(2017,2017).$$

Bài 4. *Xét tập $S=\{a^2+3b^2 : a,b\in\mathbb{N}\}$. Nếu $25n\in S$ với n là một số tự nhiên, chứng minh rằng $2023n$ cũng là phần tử của S.*

Lời giải. Do $25n\in S$ nên tồn tại các số $c,d\in\mathbb{N}$ sao cho $25n=c^2+3d^2$. Vì $c^2+3d^2\vdots 5$ nên $c,d\vdots 5$, đặt $c=5c_0,d=5d_0(c_0,d_0\in\mathbb{N})$ thì $n=c_0^2+3d_0^2\in S$. Vậy nên

$$2023n=(34^2+3.17^2)(c_0^2+3d_0^2)$$

$$=(34c_0-51d_0)^2+3(34d_0+17c_0)^2\in S.$$

Hoàn tất chứng minh.

Nhận xét. Trong một số bài toán, các phép toán trong tập hợp chưa được cho trước. Bằng một số công cụ đại số ta có thể dự đoán và chứng minh được thật sự tồn tại phép toán trên tập hợp đó, từ đó có những hướng đi tốt hơn. Chẳng hạn, ở bài toán trên thấy rằng, nếu $m,n\in S$ thì $mn\in S$. Điều này được dự đoán từ đẳng thức:

$$(x^2+py^2)(z^2+pt^2)=(xz-pyt)^2+p(xt+yz)^2,$$

$$\forall x,y,z,t,p\in\mathbb{R}.$$

Bài 5. *Xét tập hợp $A=\{2^n-1 : n\in\mathbb{N}^*\}$ và tập S chứa A. Biết rằng nếu $a,b\in A$ và $\frac{a}{b}$ nguyên thì $\frac{a}{b}\in S$. Hỏi S có chứa tất cả các số nguyên dương lẻ không?*

Lời giải. Xét các số $a,b\in S$ với $a=2^m-1,b=2^n-1$ sao cho $\frac{a}{b}\in\mathbb{Z}$. Ta chứng

Được quét bằng CamScanner

mình m chia hết cho n. Thật vậy, đặt $m=kn+r$ $(k\in\mathbb{N},0\le r<n)$, khi đó:

$$2^m-1=\left(2^m-2^r\right)+\left(2^r-1\right)\vdots 2^n-1$$

$$\Rightarrow 2^r-1\vdots 2^n-1\Rightarrow 2^r-1=0\Rightarrow r=0.$$

Vậy nếu $a,b\in S$, $\frac{a}{b}$ là số nguyên thì có các số tự nhiên k,n sao cho

$$\frac{a}{b}=\frac{2^{kn}-1}{2^n-1}=2^{(k-1)n}+2^{(k-2)n}+\ldots+2^n+1.$$

Rõ ràng các phần tử của S đều có thể biểu diễn dưới dạng trên. Giả sử $13\in S$, khi đó tồn tại các số tự nhiên k,n thỏa mãn:

$$2^{(k-1)n}+2^{(k-2)n}+\ldots+2^n+1=13.$$

Suy ra $(k-1)n\le 3$. Thử trực tiếp các trường hợp có thể xảy ra, ta thấy không có trường hợp nào thỏa mãn. Vậy $13\notin S$, hay S không chứa hết tất cả các số tự nhiên lẻ.

Nhận xét. Trong chứng minh trên, ta thấy rằng $S=\left\{2^{kn}+2^{(k-1)n}+\ldots+2^n+1:k,n\in\mathbb{N}\right\}$. Khi biểu diễn trong hệ nhị phân, mỗi phần tử của S có dạng $\overline{10\ldots010\ldots01}_2$ (có $n+1$ chữ số 1, giữa hai số 1 liên tiếp có đúng k chữ số 0). Rõ ràng S không chứa tất cả các số nguyên lẻ được vì biểu diễn của số nguyên lẻ bất kỳ trong hệ nhị phân là $\overline{a_ia_{i-1}\ldots a_11}_2$, $a_j\in\{0,1\}$.

Bài toán trên cũng là ý tưởng mô tả "công thức tổng quát" các phần tử của S, tuy nhiên ở đây có dùng đến hệ nhị phân để kết quả được rõ ràng hơn.

Bài 6. *Đặt $M=\left\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Z},a^2-3b^2=1\right\}$. Chứng minh rằng tập hợp $M\cap(-0{,}001;0)$ có vô hạn phần tử.*

Lời giải. Xét phương trình nghiệm nguyên dương $x^2-3y^2=1$. Theo công thức nghiệm của phương trình Pell, tất cả nghiệm của phương trình này là $(x_n,y_n)_{n\ge1}$, trong đó:

$$\begin{cases}x_0=1,x_1=2,x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n\\ y_0=0,y_1=1,y_{n+2}=4y_{n+1}-y_n\end{cases},\ n\ge1.$$

Xét dãy $(a_n),(b_n)$ xác định bởi $a_n=-x_n,b_n=y_n$ với mọi $n\ge1$. Khi đó $a_n+b_n\sqrt{3}\in M$. Ta sẽ chứng minh tồn tại số N để $\left(a_n+b_n\sqrt{3}\right)_{n\ge N}\subset(-0{,}001;0)$.

Đặt $u=2+\sqrt{3}$ và $b=2-\sqrt{3}$. Từ công thức truy hồi của $(x_n),(y_n)$, ta tính được:

$$a_n=-\frac{u^n+v^n}{2},\ b_n=\frac{u^n-v^n}{2\sqrt{3}},\ \forall n\ge1.$$

Khi đó $a_n+b_n\sqrt{3}=-v^n<0$ với mọi $n\ge1$, và

$$a_n-b_n\sqrt{3}=-u^n\to-\infty \text{ khi } n\to+\infty.$$

Do đó tồn tại số N để với mọi $n\ge N$, ta có:

$$a_n-b_n\sqrt{3}<-1000$$

$$\Rightarrow a_n+b_n\sqrt{3}=\frac{1}{a_n-b_n\sqrt{3}}>-\frac{1}{1000}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Nhờ có công thức tổng quát mà các biến đổi đại số dễ dàng hơn. Câu hỏi của bài toán có thể tổng quát hơn: Với mọi $\delta>0$ thì $(x-\delta,x+\delta)\cap M$ có vô hạn phần tử.

Bài 7. (EGMO 2021) *Số 2021 là một số fantabulous. Với số nguyên dương m bất kỳ, nếu có phần tử trong tập $\{m,2m+1,3m\}$ là số fantabulous thì cả ba phần tử đều là số fantabulous. Hỏi 2021^{2021} có phải là số fantabulous không?*

Lời giải. Đặt T là tập hợp tất cả các số fantabulous. Ký hiệu $x\sim y$ nếu $x\in T\Leftrightarrow y\in T$.

Ta có $2n\sim n$. Thật vậy:

$$2n\sim 4n+1\sim 12n+3\sim 6n+1\sim 3n\sim n.$$

Do đó: $2021\sim1010\sim505\sim252$

$$\sim84\sim28\sim14\sim7\sim3\sim1.$$

Đặt $S=\mathbb{N}^*\setminus T$. Nếu S khác rỗng thì tồn tại phần tử $n=\min S$. Giả sử n chẵn thì $\frac{n}{2}\notin T$ (vì nếu

Được quét bằng CamScanner

không thì $n \in T$), kéo theo $\frac{n}{2} \in S$. Mà $n > 0$ nên $\frac{n}{2} < n$, vô lý với tính nhỏ nhất của n. Tương tự, nếu n lẻ thì ta cũng lập luận được $\frac{n-1}{2} \in S$, cũng vô lý với $n = \min S$. Vậy $S = \emptyset$, tức là $\mathbb{N}^* \subset T$, dẫn đến 2021^{2021} cũng là một số fantabulous.

Nhận xét. Câu hỏi đề bài là kết quả "yếu" hơn nhiều so với kết quả lời giải đã làm được, điều này cũng có thể là một chút khó khăn nếu chỉ tập trung vào con số 2021^{2021}. Ở bài này, phép toán giúp chứng minh được tập đang xét "quét" hết được $\mathbb{N}^*$. Ví dụ tiếp theo là một bài toán tương tự như vậy: từ phép toán có thể chứng minh được tập đang xét quét hết một tập nào đó.

Bài 8. (Indonesia Regional MO 2021) *Cho X là tập hợp gồm các phần tử là các số hữu tỉ dương thỏa mãn:*

i) Nếu x là số hữu tỉ và $2021 \le x \le 2022$ thì $x \in X$.

ii) Nếu $x, y \in X$ thì $\frac{x}{y} \in X$.

Chứng minh rằng tất cả các số hữu tỉ dương là phần tử của X.

Lời giải. Ta có $2021 \in X$ nên $1 = \frac{2021}{2021} \in X$.

Theo điều kiện ii), với mọi $x \in X$, ta có $\frac{1}{x} \in X$.

Cũng theo điều kiện ii), ta có $x, y \in X$ thì $x, \frac{1}{y} \in X$, nên là $xy = x \cdot \frac{1}{\frac{1}{y}} \in X$. Cũng từ đây suy ra được nếu $y \in X$ và $xy \in X$ thì $x = \frac{xy}{y} \in X$.

Với mọi số hữu tỉ $x \in \left(1, \frac{2022}{2021}\right)$, ta có $2021x \in \mathbb{Q} \cap (2021, 2022) \subset X$, mà $2021 \in X$ nên $x \in X$. Vậy $\mathbb{Q} \cap \left(1, \frac{2022}{2021}\right) \subset X$.

Với mọi số hữu tỉ $\frac{p}{q} > 1$ (p, q là các số nguyên, $p > q > 2021$), ta viết:

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{p-2}{p-3} \cdot \ldots \cdot \frac{q+1}{q}.$$

Chú ý rằng hàm số $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ giảm trên $(1, +\infty)$ nên $\frac{p}{p-1} < \frac{p-1}{p-2} < \frac{p-2}{p-3} < \ldots < \frac{q+1}{q} < \frac{2022}{2021}$.

Do đó $\frac{p}{p-1}, \frac{p-1}{p-2}, \frac{p-2}{p-3}, \ldots, \frac{q+1}{q} \in X$, kéo theo $\frac{p}{q} \in X$. Từ đây ta kết luận được $\mathbb{Q} \cap (1, +\infty) \subset X$.

Chú ý rằng nếu $x \in X$ thì $\frac{1}{x} \in X$ nên ta có điều phải chứng minh.

Tiếp theo là một bài toán khá thú vị: mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn qua một tổng các lũy thừa nguyên của $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 9. (APMO 2006) *Chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều có thể viết được dưới dạng tổng hữu hạn các lũy thừa nguyên khác nhau của số tỉ lệ vàng $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng bằng quy nạp. Trước tiên, $1 = \tau^0$. Ký hiệu $x = \overline{x_k x_{k-1} \ldots x_0 x_{-1} \ldots x_{-k}}$ nếu có biểu diễn

$$x = \sum_{i=-k}^{k} x_i \tau^i, \; x_i \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}.$$

Giả sử $n-1 = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0 a_{-1} \ldots a_{-k}}$ ($n \ge 2$, $a_i \in \{0,1\}$), ta chứng minh n cũng có thể biểu diễn như vậy.

Có thể giả sử $a_{i+1} a_i = 0$ với $i = k-1, k-2, \ldots, -k$. Thật vậy, nếu có $a_{i+1} = a_i = 1$, chọn chỉ số i lớn nhất. Chú ý rằng $\tau^i + \tau^{i+1} = \tau^{i+2}$ và $a_{i+2} = 0$ nên $\overline{\ldots a_{i+2} a_{i+1} a_i \ldots} = \overline{\ldots 011 \ldots} = \overline{\ldots 100 \ldots}$. Lặp lại các thao tác tương tự, ta nhận được biểu diễn

Được quét bằng CamScanner

$n-1=\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0 a_{-1}\ldots a_{-k}}$ mà không có hai chữ số 1 nào đứng cạnh nhau.

Nếu $a_0=1$ thì theo chứng minh trên, $a_{-1}=0$. Giả sử $a_{-2}=0$ thì

$$\overline{\ldots a_0 a_{-1} a_{-2}\ldots}=\overline{\ldots a_1 100 a_{-3}\ldots}=\overline{\ldots a_1 011 a_{-3}}.$$

Tiếp theo, xét trường hợp $a_{-2}=1$ và bằng thao tác tương tự như trên, ta có thể đưa $n-1$ về dạng $n-1=\overline{\ldots a_1 101010\ldots 100}$. Lúc này sử dụng liên tiếp các biến đổi $\overline{\ldots 100\ldots}=\overline{\ldots 011\ldots}$, ta sẽ được trường hợp $a_0=0$.

Tóm lại, trong mọi trường hợp ta đều có thể đưa về một biểu diễn mà trong đó $a_0=0$. Khi đó:

$$n=\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0 a_{-1}\ldots a_{-k}}+1=\overline{a_k a_{k-1}\ldots 1 a_{-1}\ldots a_{-k}}.$$

Vậy n cũng biểu diễn được theo dạng thỏa mãn đề bài. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Bình luận. Đây là một bài toán thú vị. Ta đã biết các số tự nhiên có thể biểu diễn được dưới dạng $n-$phân với n là số nguyên dương bất kỳ, trong đó biểu diễn của các số cần n chữ số. Bài toán trên giống như ta có thể biểu diễn các số tự nhiên với cơ số τ và chỉ cần hai chữ số 0 và 1.

Một số điều kiện giữa các phần tử trong tập hợp còn giúp đưa ra một số nhận xét về lực lượng của tập hợp đó.

Bài 10. *Cho tập $A\subset\mathbb{R}$ có ít nhất hai phần tử và có tính chất: nếu $x\in A, y\in\mathbb{R}\setminus A$ thì $x+y\notin A$. Chứng minh rằng A chứa vô hạn phần tử.*

Lời giải. Giả sử $0\notin A$ thì $x\in A$ kéo theo $x=x+0\notin A$, vô lý. Vậy $0\in A$.

Nếu tồn tại $x\in A$ mà $-x\notin A$ thì $0=x+(-x)\notin A$, vô lý. Do đó $-x\in A$ với mọi A.

Giả sử có $x,y\in A$ nhưng $x+y\notin A$. Vì $y\in A$ nên $-y\in A$, kéo theo $x=(-y)+(x+y)\notin A$, điều này cũng là vô lý. Vậy $x+y\in A$ với mọi $x,y\in A$.

Do A có ít nhất hai phần tử nên có $d\in A\setminus\{0\}$. Từ chứng minh trên, bằng quy nạp ta được $\{nd:n\in\mathbb{N}\}\subset A$ nên A có vô hạn phần tử.

Bài 11. *Tìm tất cả các tập hợp A khác rỗng gồm hữu hạn các số thực sao cho với mọi $x\in A$ thì $x+1-x^2\in A$ và $x-1+x^2\in A$.*

Lời giải. Giả sử có tập A thỏa mãn đề bài. Xét dãy (u_n) và (v_n) xác định bởi

$$\begin{cases}u_{n+1}=u_n^2+u_n-1,\ \forall n\geq 1\\ v_{n+1}=-v_n^2+v_n+1,\ \forall n\geq 1\end{cases}.$$

Rõ ràng nếu $u_1,v_1\in A$ thì $(u_n),(v_n)\subset A$.

Lấy $a\in A$ bất kỳ. Nếu $a>1$ thì chọn $u_1=a$, ta được dãy $(u_n)\subset A$ và dãy (u_n) tăng ngặt, điều này là vô lý do A hữu hạn. Tương tự, nếu $a<-1$ thì chọn $v_1=a$ ta cũng nhận được điều vô lý.

Nếu $a\in(0,1)$, chọn $v_1=a$, ta được $v_2=-a^2+a+1\in\left(1,\frac{5}{4}\right)$. Khi này chọn $u_1=v_2>1$, ta tiếp tục nhận được điều vô lý. Tương tự đối với trường hợp $a\in(-1,0)$ cũng không thỏa điều kiện A hữu hạn.

Vậy $a\in\{-1,0,1\}$. Thử trực tiếp, ta kết luận các tập thỏa mãn là $\{-1\},\{1\},\{\pm 1\},\{\pm 1,0\}$.

Nhận xét. Khi đã biết được phép toán trên một tập hợp, ta thực hiện liên tiếp các phép toán đó sẽ sinh ra một dãy chứa trong tập hợp. Nếu tập hợp là hữu hạn thì ta có thể nghĩ đến trường hợp dãy đó là dãy dừng hoặc dãy tuần hoàn kể từ một số hạng nào đó trở đi. Đến đây, điểm bất động có lẽ là một gợi ý tốt. Ví dụ trong bài toán trên, số ± 1 được định hướng từ nghiệm của hai phương trình: $x+1-x^2=x$ và $x-1+x^2=x$.

Được quét bằng CamScanner

Bài 12. (Bulgaria 1998) *Tìm tất cả các tập hợp A gồm hữu hạn các số thực không âm khác nhau sao cho*

i) *chứa ít nhất 4 phần tử;*

ii) *Với bất kỳ 4 phần tử đôi một khác nhau $a,b,c,d \in A$, ta có $ab+cd \in A$.*

Lời giải. Giả sử tồn tại tập hợp A thỏa mãn đề bài. Đặt $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ với $a_1>a_2>\ldots>a_n\geq 0$ và $n\geq 4$.

• Giả sử $a_1<1$, khi đó $a_n>0$. Thật vậy, nếu $a_n=0$ thì $a_{n-1}a_{n-2}=a_{n-1}a_{n-2}+a_na_1\in A$.

Xét các phần tử thuộc A:

$$x=a_1a_2+a_3a_4,\ y=a_1a_3+a_2a_4,\ z=a_1a_4+a_2a_3.$$

Khi đó $x>y>z$.

Nếu $z>a_4$ thì từ $x>y>z>a_4$, suy ra $x=a_1,y=a_2,z=a_3$. Mà từ $x=a_1$ và $z=a_3$ kéo theo $a_1=a_3$, vô lý.

Nếu $z=a_4$, ta có: $a_4=a_1a_4+a_2a_3$

$$\Rightarrow a_4(1-a_1)=a_2a_3>a_2a_4\Rightarrow 1-a_1>a_2\Rightarrow a_1+a_2<1.$$

Do đó $a_2<\dfrac{1}{2}$, dẫn đến:

$$x=a_1a_2+a_3a_4<2a_1a_2<a_1.$$

Vậy $x=a_2,y=a_3,z=a_4$. Tuy nhiên,

$$\begin{cases}y=a_3\\z=a_4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_3(1-a_1)=a_2a_4\\a_4(1-a_1)=a_2a_3\end{cases}\Rightarrow a_3=a_4.$$

Điều này cũng vô lý.

Do đó $z<a_4$, tức là tập hợp A có ít nhất 5 phần tử là a_1,a_2,a_3,a_4,z. Lập luận tương tự, ta thấy rằng dãy này có thể kéo dài mãi, điều này vô lý vì A là tập hữu hạn.

• Vậy $a_1\geq 1$. Lúc này $z>a_4$ nên $x=a_1,y=a_2,z=a_3$. Ta có:

$$a_1=a_1a_2+a_3a_4,a_3=a_1a_4+a_2a_3,$$

suy ra:

$$(1-a_2)a_1=a_3a_4\leq a_1a_4=a_3-a_2a_3=a_3(1-a_2)$$

$$\Rightarrow a_2=1\Rightarrow a_4=0.$$

Kết hợp với $a_2=y=a_1a_3+a_2a_4$ suy ra được $a_3=\dfrac{1}{a_1}$. Thử lại, tất cả tập hợp thỏa mãn đề bài là

$$A=\left\{0,1,x,\frac{1}{x}\right\},\ x\in\mathbb{R}\ \text{bất kỳ.}$$

Nhận xét. Trong một tập hợp hữu hạn các số thực luôn có thể sắp thứ tự các phần tử theo thứ tự tăng dần. Điều này cũng có nghĩa là luôn có phần tử lớn và nhỏ nhất trong một tập hữu hạn. Những điều kiện này giúp ta có những đánh giá tốt hơn khi xét tập hợp hữu hạn.

Bài toán cuối cùng trong các ví dụ liên quan đến vấn đề "mô tả" một tập hợp thỏa mãn các điều kiện cho trước.

Bài 13. *Tồn tại hay không tập hợp $A\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$ có ít nhất hai phần tử thỏa mãn:*

i) $\forall x,y\in A,x\neq y\Rightarrow\dfrac{x}{y}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

ii) $\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in A:\dfrac{x}{y}\in\mathbb{Q}$?

Lời giải. Câu trả lời là khẳng định, ta sẽ xây dựng một tập hợp A thỏa mãn i) và ii).

Với mỗi số thực $x\neq 0$, ký hiệu

$$R_x=\left\{y\in\mathbb{R}^*:\frac{y}{x}\in\mathbb{Q}\right\}.$$

Rõ ràng với mọi $x,y\in\mathbb{R}^*$ thì hoặc $R_x\cap R_y=\varnothing$, hoặc $R_x=R_y$. Ở mỗi tập R_x ta lấy đúng một phần tử, ký hiệu A là tập hợp tất cả các phần tử như vậy. Ta kiểm tra tập A này thỏa mãn hai điều kiện đề bài.

Thật vậy, với mọi $x,y\in A,x\neq y$ thì $R_x\neq R_y$, dẫn đến $R_x\cap R_y=\varnothing$, tức là $\dfrac{x}{y}\notin\mathbb{Q}$. Tiếp theo, với mọi $x\in\mathbb{R}$, chọn $y\in A\cap R_x$ thì $\dfrac{x}{y}\in\mathbb{Q}$.

Bài toán được hoàn tất.

Dưới đây là một số bài tập mà tác giả sưu tầm từ một số nguồn. Mong rằng chúng sẽ là những bài tập tự luyện có ích đối với độc giả.

Được quét bằng CamScanner

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các tập hữu hạn $A \subset \mathbb{N}^*$ sao cho tồn tại một tập hợp hữu hạn $B \subset \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$A \subset B \text{ và } \sum_{x \in B} x = \sum_{x \in A} x^2.$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a,b cho trước, luôn tồn tại số nguyên c sao cho hai tập hợp $S = \{x^2 + ax + b : x \in \mathbb{Z}\}$ và $T = \{2x^2 + 2x + c : x \in \mathbb{Z}\}$ là hai tập rời nhau.

Bài 3. Cho A là tập con của tập hợp các số nguyên dương. Biết rằng nếu $x, y \in A$ và $x > y$ thì $x - y > \dfrac{xy}{25}$. Tập A có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Bài 4. Một con sâu bò trên một tờ giấy hình vuông. Mỗi lần di chuyển, nó có thể dịch sang phải 2 đơn vị, sang trái 4 đơn vị, dịch lên trên 3 đơn vị, hoặc dịch xuống phía dưới 5 đơn vị. Trong quá trình di chuyển, các hướng ngang và dọc mà nó dịch (ta vừa kể) hợp nhau một góc 90°. Lập hệ tọa độ vuông góc mà gốc tọa độ trùng với vị trí xuất phát của con sâu, hai trục song song với hai chiều di chuyển ngang và đứng vuông góc nhau của nó. Tìm tất cả điểm nguyên mà con sâu có thể đến trong hệ trục tọa độ này.

Bài 5. Giả sử X là tập con của $\{1,2,\ldots,n\}$ thỏa mãn nếu $a,b \in X$ thì $ab \notin X$. Tập X có thể có tối đa bao nhiêu phần tử?

Bài 6. Gọi S là tập hợp tất cả các bộ ba số nguyên dương (a,b,c) sao cho $a + c = 2b$.

a) Xét tập hợp

$$T = \{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 : (a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3) \in S\}.$$

Chứng minh rằng $\mathbb{N} \setminus T$ là tập hữu hạn.

b) Xét tập hợp

$$H = \{1 + a_2b_2 + a_3b_3 : (1,a_2,a_3),(1,b_2,b_3) \in S\}.$$

Chứng minh rằng $\mathbb{N} \setminus H$ là tập vô hạn.

Bài 7. Cho A là tập con của tập các số hữu tỉ dương thỏa mãn các điều kiện:

i) $1 \in A$.

ii) Nếu $x \in A$ thì $x + 1 \in A$.

iii) Nếu $x \in A$ thì $\dfrac{1}{x} \in A$.

Chứng minh rằng A là tập các số hữu tỉ dương.

Bài 8. Cho S là một tập hợp gồm các phần tử là các số dương. Biết rằng với mọi bộ ba số đôi một phân biệt $a,b,c \in S$ thì $a^2 + bc$ là một số nguyên. Chứng minh rằng với mọi $x, y \in S$ thì $\dfrac{x}{y}$ là một số hữu tỉ.

Bài 9. Cho tập hợp $A_1 = \{m\}$ với m là một số nguyên dương. Với mọi số nguyên dương n, ta xác định tập hợp A_{n+1} là tập tất cả các số nguyên dương là tổng hoặc tích các chữ số của mỗi số thuộc tập A_n. Biết rằng các phần tử thuộc A_n đều là số lẻ với mọi n.

a) Có bao nhiêu số m thỏa mãn điều kiện đề bài nếu m có không quá 6 chữ số?

b) Có hay không giá trị lớn nhất của m thỏa mãn đề bài?

Bài 10. (*APMO 2004*) Xác định tất cả các tập hữu hạn S khác rỗng có các phần tử là số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{i+j}{(i,j)} \in S$ với mọi $i, j \in S$, trong đó (i,j) là ước chung lớn nhất của i và j.

Bài 11. Gọi A là tập mà mỗi phần tử là các số tự nhiên mà trong biểu diễn thập phân của chúng không có chữ số 0 nào. Biết rằng nếu số $a = \overline{a_1a_2\ldots a_k} \in A$ (biểu diễn dạng thập phân, a_i là các chữ số) thì số $b = \overline{b_1b_2\ldots b_k}$, trong đó b_j là số dư của $3a_j$ khi chia cho 10, cũng thuộc A. Ngoài ra, tổng các chữ số của b bằng tổng các chữ số của a.

a) Với $a \in A$ là số có k chữ số, tính tổng các chữ số của a theo k.

b) Tìm số bé nhất mà có k chữ số.

Được quét bằng CamScanner

Bài 12. Tìm các số thực a,b sao cho tồn tại tập $X \subset \mathbb{R}$ hữu hạn chứa a,b thỏa mãn: với mọi $x,y \in X$ thì $x+y-xy \in X$.

Bài 13. Tìm các tập hợp A khác rỗng gồm các phần tử là các số nguyên dương thỏa mãn nếu $a \in A$ thì $a^3+a^2+a+1 \in A$ và $\sqrt[3]{a}+1 \in A$.

Bài 14. (*USAMO 2001*) Cho S là tập con của $\mathbb{Z}$ thỏa mãn:

i) Tồn tại $a,b \in S$ sao cho $(a,b)=(a-2,b-2)=1$.

ii) Nếu $x,y \in S$ thì $x^2-y \in S$.

Chứng minh rằng $S=\mathbb{Z}$.

Bài 15. (*Romania 1996*) Cho các số thực x,y. Chứng minh rằng nếu tập hợp $\{\cos(n\pi x)+\cos(n\pi y): n \in \mathbb{N}\}$ hữu hạn thì x,y là các số hữu tỉ.

Bài 16. (*Romania 2002*) Tìm tất cả các tập A,B thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $A \cup B = \mathbb{Z}$.

ii) Nếu $x \in A$ thì $x-1 \in B$.

iii) Nếu $x,y \in B$ thì $x+y \in A$.

Bài 17. (*VMO 1990*) Cho $2n-1$ số tự nhiên liên tiếp $1,2,3,\ldots,2n-1$. Hãy gạch đi ít nhất $n-1$ số theo quy tắc sau:

a) Nếu đã gạch số a thì phải gạch số $2a$.

b) Nếu đã gạch số a và b thì phải gạch số $a+b$.

Hỏi rằng cần phải gạch số nào để tổng các số còn lại lớn nhất?

****

PROBLEMS ...

(Tiếp theo trang 24)

Problem T7/572. Given a triangle ABC with $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ satisfying $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=6$. Find the maximum value of the expression

$$F=\frac{1}{a+16}+\frac{1}{b+16}+\frac{1}{c+16}.$$

Problem T8/572. Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A. Suppose that the orthocenter H of the triangle lies on the incircle of the triangle. Calculate the ratio $\frac{AB}{BC}$.

Problem T9/572. Given real numbers a, b satisfying $a.b > 0$. Prove that the equation $x^4+ax^3+bx+m=0$ has at most 3 real solutions for every real parameter m.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/572. Given a real coefficient polynomial $P(x)$ of degree 2022 and the highest coefficient is 1. Given that $P(x)$ has exactly 2022 distinct real roots and all of them are not integers. Suppose that each of the polynomials $P(x^2-2x-1)$ and $P(-x^2+2x+1)$ has 2696 distinct real roots. How many roots of $P(x)$ are there in the interval $(-2; 2)$?

Problem T11/572. Find all pairs of positive integers a, b such that $q^2-r=2007$ where q is the quotient and r is the remainder when a^2+b^2 is divided by $a+b$.

Problem T12/572. Given a triangle ABC which is non-isosceles at A and (I) is its incircle. Let D,E,F be the touch points between (I) and BC, CA, AB respectively. The line through A parallel to BC intersects DE, DF at M, N respectively. The lines through M, N perpendicular to MN intersect IF, IE at P, Q respectively. Prove that

1) Three points D, P, Q are collinear.

2) Three lines DI, PE, QF are concurrent.

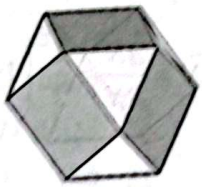
NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 113

PROBLEM. *Each face of the polyhedron shown is either a triangle or a square. Each square borders 4 triangles, and each triangle borders 3 squares. The polyhedron has 6 squares. How many triangles does it have?*



Solution. Each square borders 4 triangles. And there are 6 squares. Therefore, we get 24 triangles with some repetitions.

And we can see that each triangle is actually counted three times since it borders 3 squares.

Thus, the number of triangles in the above polyhedron is 24:3=8.

Remark: This problem is collected from a Kangaroo Math Test.

TỪ VỰNG

polyhedron : *đa diện*

triangle : *hình tam giác*

square : *hình vuông*

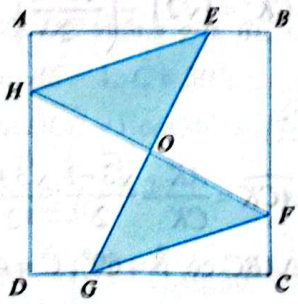
border : *tiếp giáp, có cạnh chung*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

BÀI DỊCH SỐ 111

BÀI TOÁN. *Hình vuông ABCD có diện tích là 80. Các điểm E, F, G và H nằm trên các cạnh của hình vuông sao cho AE = BF = CG = DH. Hỏi diện tích phần tô màu xám là bao nhiêu nếu AE = 3EB?*

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của HF và GE. Chúng ta có thể thấy rằng diện tích của các hình tứ giác $AEOH$, $EBFO$, $FCGO$, $GDHO$ đều bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình vuông $ABCD$ và diện tích các tam giác EOH, GFO bằng nhau (tại sao?). Diện tích của tam giác AHE bằng

$\frac{1}{2}AE \times AH = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}AB \times \frac{1}{4}AD = \frac{3}{32}$ diện tích hình vuông $ABCD$.

Vậy diện tích của phần được tô màu xám là:

$2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{32}\right) = \frac{5}{16}$ diện tích hình vuông $ABCD$, nó bằng 25.

Lưu ý: *Bài tập này được sưu tầm, chuyển thể từ một đề thi toán Kanggaroo.*

Nhận xét. Kỳ này các bạn *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, Cộng hoà Áo và *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh hai bạn.

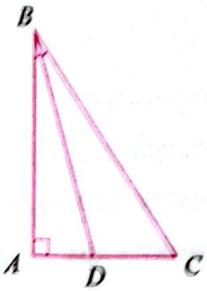
HỒ HẢI *(Hà Nội)*

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 92. *Không dùng bảng số, máy tính cầm tay. Tính* $\tan 15^0$.

Lời giải. ***Cách 1.*** Xét tam giác ABC vuông tại A, $\hat{B} = 30^0$, $AC = 1$.



Ta có: $AB = AC.\cot B$

$= 1.\cot 30^0 = \sqrt{3}$;

$BC = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{1}{\sin 30^0} = 2$.

Vẽ BD là đường phân giác của góc B. Ta có:

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = 15^0, \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}.$$

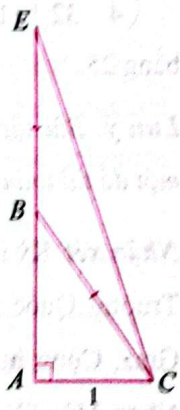
Do đó: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{AD+CD}{AB+BC}$. Suy ra:

$$\frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+2} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{2^2-3}$$

$$= 2\sqrt{3}-3.$$

Vậy $\tan 15^0 = \tan \widehat{ABD} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$.

Cách 2. Xét ΔABC vuông tại A, $\hat{B} = 30^0$, $AC = 1$. Trên tia đối của tia BA lấy E sao cho $BE = BC$. Tam giác BCE cân tại B do đó:



$$\widehat{BEC} = \widehat{BCE} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = 15^0.$$

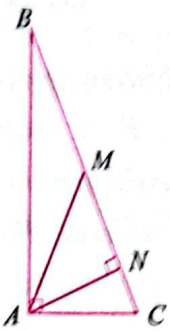
Ta có:

$BE = BC = 2, AB = \sqrt{3}$.

Từ đó:

$$\tan 15^0 = \tan \widehat{AEC} = \frac{AC}{AE} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

Cách 3. Xét ΔABC vuông tại A, $\hat{B} = 15^0$, $BC = 2$. Vẽ AM, AN lần lượt là đường trung tuyến và đường cao của tam giác ABC.



Ta có: $MA = MB = MC = 1$;

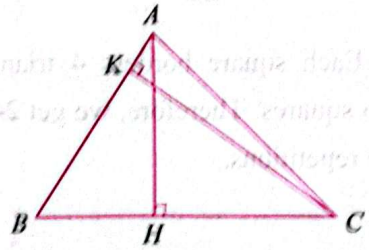
$\widehat{AMN} = 30^0$;

$AN = AM.\sin \widehat{AMN} = \dfrac{1}{2}$;

$MN = AM.\cos \widehat{AMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\tan 15^0 = \tan \widehat{ABN} = \frac{AN}{BN} = \frac{1}{2} : \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2-\sqrt{3}.$$

Cách 4.



Xét ΔABC có $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 45^0$; AH, CK là các đường cao của tam giác ABC.

Giả sử $AH = 1$. Ta có: $CH = AH = 1$; $AC = \sqrt{2}$;

$BH = AH.\cot B = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$CK = BC.\sin \widehat{CBK} = \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right).\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$;

$AK^2 = AC^2 - CK^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$;

$AK = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

$$\tan 15^0 = \tan \widehat{ACK} = \frac{AK}{CK} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} : \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

Cách 5. Xét ΔABC có $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 45^0$, $AB = 2$; AI, BL là các đường cao của tam giác ABC. Ta có:

$AI = AB.\sin \widehat{ABI} = 2.\sin 60^0 = \sqrt{3}$;

$BI = AB.\cos \widehat{ABI} = 2.\cos 60^0 = 1$;

$CI = AI.\cot \widehat{ACI} = \sqrt{3}.\cot 45^0 = \sqrt{3}$.

Ta có: $BC = BI + CI = 1 + \sqrt{3}$;

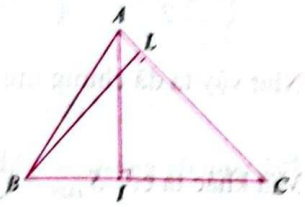
Được quét bằng CamScanner

$BL = BC.\sin\widehat{BCL} = \left(1+\sqrt{3}\right).\sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$;

$AL^2 = AB^2 - BL^2 = 4 - \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^2$

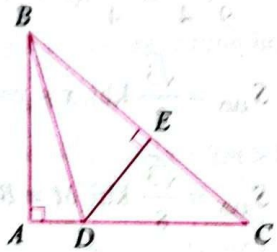
$= \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2$;

$AL = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Từ đó:



$\tan 15^0 = \tan\widehat{ABL} = \dfrac{AL}{BL} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} : \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$.

Cách 6. Xét ΔABC vuông tại A có $\hat{B} = 45^0$. D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = 15^0$. Vẽ DE vuông góc BC tại E. Giả sử $DE = 1$. Ta có:



$CE = 1, CD = \sqrt{2}$;

$BE = DE.\cot\widehat{DBE} = 1.\cot 30^0 = \sqrt{3}; BC = \sqrt{3}+1$;

$AC = AB = BC.\sin\widehat{ACB} = \left(1+\sqrt{3}\right).\sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$;

$AD = AC - CD = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$;

$\tan 15^0 = \tan\widehat{ABD} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} : \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$.

Cách 7. (*Xem hình ở cách 6*) Xét ΔABC vuông tại A, có $\hat{B} = 60^0$. D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = 15^0$. Vẽ DE vuông góc BC tại E. Giả sử $DE = 1$. Ta có: $BE = 1, \hat{C} = 30^0$;

$CE = DE.\cot\widehat{DCE} = 1.\cot 30^0 = \sqrt{3}$;

$CD = \dfrac{DE}{\sin C} = \dfrac{1}{\sin 30^0} = 2$;

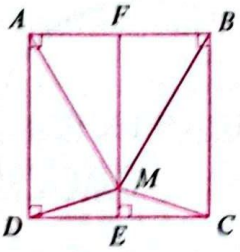
$AB = BC.\sin C = \left(\sqrt{3}+1\right).\sin 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$;

$AC = BC.\cos C = \left(\sqrt{3}+1\right).\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$.

Do đó: $AD = AC - CD = \dfrac{\sqrt{3}+3}{2} - 2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

$\tan 15^0 = \tan\widehat{ABD} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} : \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = 2-\sqrt{3}$.

Cách 8.



Xét hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trong hình vuông $ABCD$ sao cho $\widehat{MCD} = \widehat{MDC} = 15^0$. Ta chứng minh được tam giác MAB đều nên $MA = 2$. Vẽ ME vuông góc với CD tại E. Gọi F là giao điểm của ME và AB.

Ta có: $ADEF$ là hình chữ nhật; $EF = AD = 2$;

$MF = MA.\sin\widehat{MAF} = 2.\sin 60^0 = \sqrt{3}$.

Do đó: $DE = 1$, $ME = EF - MF = 2 - \sqrt{3}$;

$\tan 15^0 = \tan\widehat{MDE} = \dfrac{ME}{DE} = 2-\sqrt{3}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Nhận xét. Kỳ này các bạn: *Đăng Hoàng Khánh Ngọc*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu, *Lê Minh Hiếu*, 9/2, TH&THCS Thanh Phú, Bến Lức, **Long An**, *Trần Nhất Nguyên*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh**, *Nguyễn Đức Bốn*, 6003 Prairie wood ct Arlington, Texas, **Mỹ**, *Trương Mỹ Hạnh*, 9a4, THCS Quang Trung, Bảo Lộc, **Lâm Đồng** cũng đóng góp một số các giải tương tự như các cách mà bạn *Nguyễn Đức Tấn* đề xuất trong bài viết trên. Xin hoan nghênh các bạn.

(*Chú ý*: Một số bạn có lời giải đúng nhưng quên không viết tên và địa chỉ nên không có tên trong danh sách được khen).

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 94 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31/3/2025.

BÀI TOÁN 94. *Giải phương trình sau trên tập số thực*

$$(1-x)\sqrt{1+x} + (1+x)\sqrt{1-x} = 2\sqrt{1+x^2}.$$

TRẦN MINH VŨ

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

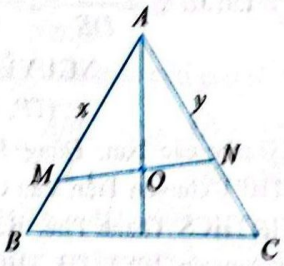
Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 100 (Phan Huy Khải, *500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức - NXB Hà Nội*).

Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1. Gọi O là tâm của tam giác. M là điểm di động trên AB, MO cắt AC tại N. Chứng minh $\frac{\sqrt{3}}{9} \le S_{AMN} \le \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải



Đặt $AM = x, AN = y$. Ta có:

$$S_{AMN} = S_{AMO} + S_{ANO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}xy\sin 60^0 = \frac{1}{2}x.AO.\sin 30^0 + \frac{1}{2}y.AO.\sin 30^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}xy = \frac{1}{4}AO(x+y) \Leftrightarrow xy = \frac{1}{\sqrt{3}}AO(x+y).$$

Do O là tâm tam giác đều ABC cạnh bằng 1 ta có:

$$AO = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó:

$$xy = \frac{1}{\sqrt{3}}AO(x+y) = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{3}(x+y) = \frac{1}{3}(x+y)$$

$$\Rightarrow x + y = 3xy \quad (1).$$

Đặt $xy = t$ thì từ (1) ta có: $x + y = 3t$.

Theo định lý Viète thì x, y là các nghiệm $\in [0;1]$ của phương trình: $f(z) = z^2 - 3tz + t = 0$ (2).

Để (2) có nghiệm $0 \le z_1 \le z_2 \le 1$ ta phải có:

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ f(0) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \\ 0 \le \frac{S}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2 - 4t \ge 0 \\ t \ge 0 \\ 1 - 2t \ge 0 \\ 0 \le \frac{3t}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{9} \le t \le \frac{1}{2}.$$

Như vậy ta đã chứng minh được: $\frac{4}{9} \le xy \le \frac{1}{2}$ (3).

Mặt khác ta có: $S_{AMN} = \frac{1}{2}xy\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$.

Từ (3) suy ra:

$$\frac{4}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{\sqrt{3}}{4}xy \le \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{9} \le S_{AMN} \le \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$S_{AMN} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ khi $x = y = \frac{2}{3}$ hay $MN // BC$.

$S_{AMN} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ khi $M \equiv B, NA = NC$

hoặc $N \equiv C, MA = MB$.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn sau đã có lời giải đúng: *Trần Quang Minh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh; *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền, Hải Phòng; *Đào Văn Nam*, CLB Toán Mathnine, Linh Đàm, Hà Nội; *Nguyễn Hùng Cường*, Xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31/3/2025.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

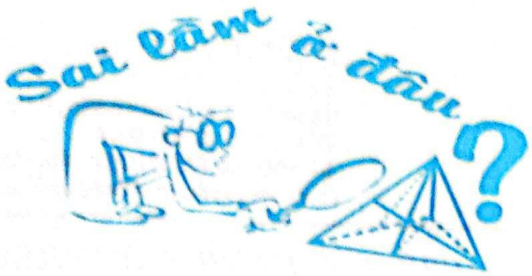
BÀI TOÁN 102. *Cho tam giác ABC và điểm F nằm trong tam giác thỏa mãn*

$$\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA}.$$

Gọi D, E lần lượt là giao điểm của BF với AC và CF với AB. Chứng minh $AB + AC \ge 4DE$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: ĐÁP ÁN NÀO ?

(Đề đăng trên TH&TT số 568, tháng 10 năm 2024)

Phân tích sai lầm: Lời giải của *Thanh Huyền* sai ở bước cho rằng phương trình $x^2-(1-m)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in [-1;+\infty)$. Khi đó giả sử xảy ra trường hợp $x_2 > x_1 = -1$ thì ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2-(1-m)x+2m>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;+\infty) \\ x \in (-\infty;-1)\cup(x_2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (x_2;+\infty).$$

Dẫn đến không có đường tiệm cận đứng $x=x_1=-1$ mà chỉ có $x=x_2$.

Lời giải đúng như sau:

ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2-(1-m)x+2m>0 \end{cases}$.

Do $5+6\sqrt{x+1}>0, \forall x \ge -1$ nên đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng khi chỉ khi phương trình $x^2-(1-m)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ (x_1+1)+(x_2+1)>0 \\ (x_1+1)(x_2+1)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m+1>0 \\ 1-m+2>0 \\ 2m+1-m+1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>5+2\sqrt{6} \text{ hoặc } m<5-2\sqrt{6} \\ m<3 \\ m>-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2<m<5-2\sqrt{6}.$$

Suy ra m có 2 giá trị nguyên, chọn đáp án **B**.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong lời giải của bạn *Thanh Huyền*!

KIHIVI

KẾT QUẢ LÀ 18 HAY 20 ?



Trong đề kiểm tra có bài toán: *Có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số đôi một khác nhau từ các chữ số của tập $A=\{1;2;5;7;8\}$ sao cho số đó nhỏ hơn 278?*

Sau giờ kiểm tra *Hưng* và *Hà* trao đổi với nhau. *Hưng* có kết quả lập được là 20 số, *Hà* có kết quả lập được là 18 số. *Hà* tự tin kết quả mình làm là đúng và trình bày lời giải cho *Hưng* như sau:

Số cần lập có dạng $\overline{1ab}$ hoặc $\overline{2ab}$.

+ Xét số có dạng $\overline{1ab}$: Lấy 2 chữ số trong 4 chữ số của tập $A\setminus\{1\}$ có $A_4^2=12$ cách

Suy ra trường hợp này các số lập được là 12

+ Xét số có dạng $\overline{2ab}$: Số cần lập nhỏ hơn 278 nên chỉ có thể là chữ số 1 hoặc 5, suy ra a có hai cách chọn; Có 3 cách chọn $b \in A\setminus\{2;a\}$

Suy ra trường hợp này các số lập được là:

$$2 \text{ x } 3 = 6.$$

Do đó số các số cần tìm là 12 + 6 = 18.

Vậy có 18 số có ba chữ số đôi một khác nhau nhỏ hơn 278 lập từ các chữ số đã cho.

Theo bạn lời giải của Hà có đúng không? Kết quả các số lập được là 18 hay 20?

NGUYỄN THANH GIANG
(Trường THPT chuyên Hưng Yên)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 572 (2.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142949, 024.35082701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS.TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS.TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM
Phó tổng biên tập : CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG
Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH
TS. LÊ HỒNG MAI

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Chứ Văn Tới – Giải toán cực trị hình học phẳng cho học sinh lớp 9.

8 **Hướng dẫn giải đề thi chọn HSG lớp 9 tỉnh Hải Dương, năm học 2023 - 2024.**

12 **Đề tự luyện thi vào lớp 10 THPT chuyên toán.**

13 **Thử sức trước kỳ thi THPTQG – Hướng dẫn giải đề số 2 – Đề số 3.**

19 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Anh Tuấn – Chứng minh hai góc bằng nhau (*kỳ 2*).

23 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/572, ..., T12/572, L1/572, L2/572.

25 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/568, ..., T12/568, L1/568, L2/568.

35 **Phương pháp giải toán**
Võ Hoàng Thành - Một số bài toán về mô tả tập hợp.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 113 – Bài dịch số 111.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 92 – Đề bài toán 94.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 100. Đề bài toán 102.

47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

(*Tiếp theo bìa 4*)

Ngày 11.2.1826 *Lobachevsky* đã đọc một bản luận văn trên diễn đàn vật lý - số học của Trường đại học Tổng hợp Cadan, để công bố kết quả nghiên cứu của mình về hình học phi Euclid. Sau đó, công trình nghiên cứu về hình học phi Euclid của *Lobachevsky* với tiêu đề "*Về các cơ sở hình học*", đã được đăng ở tờ "*Thông báo Cadan*" xuất bản năm 1829. Còn công trình của *J. Bolyai* về hình học phi Euclid được công bố vào năm 1931 (độc lập với *Lobachevsky*). Ngày nay, chúng ta gọi hình học phi Euclid (do *Lobachevsky* và *J. Bolyai* đã độc lập với nhau và đồng thời tìm ra) là ***hình học Lobachevsky*** hoặc ***hình học Lobachevsky - Bolyai***. Ngày 11.2.1826 được thế giới gọi là ngày ra đời của môn hình học này. Trong thời đại của *Lobachevsky*, hầu như không ai hiểu được tư tưởng của ông. Và nhiều người đã chế nhạo ông. Nhưng *Lobachevsky* đã dũng cảm và tin tưởng phát triển hình học mới của mình. Ông đã kiên trì nghiên cứu và công bố công trình nghiên cứu của mình càng ngày càng chi tiết hơn, đầy đủ hơn. Một năm trước khi qua đời, *Lobachevsky* đã bị mù. Khi đó ông còn đọc cho học trò của mình chép một công trình sáng tạo mới mang tên là "*Hình học phẳng*", trong đó ông đã chỉ rõ hình học Euclid chỉ là trường hợp giới hạn của hình học phi Euclid của ông. *Lobachevsky* đã gửi công trình cuối cùng này cho Trường đại học Tổng hợp Cadan - nơi cả cuộc đời sáng tạo của ông đã trôi qua ở đó. Ngày 24-2-1856, *N.I. Lobachevsky* đã qua đời. Vài chục năm sau người ta mới công nhận toàn bộ những tư tưởng của ông.

Công trình nghiên cứu của *Lobachevsky* và *J. Bolyai* về hình học phi Euclid là một thành tựu vĩ đại của khoa học, đã mở ra một kỷ nguyên mới trong sự phát triển của toán học, của vật lý và của nhiều ngành khoa học khác có liên quan.

Vào năm 1882, nhà toán học *H.J. Poincaré* đã xây dựng được một mô hình (gọi là mô hình Poincaré) của hình học Lobachevsky phẳng, khi sử dụng các "*vật liệu*" lấy từ hình học Euclid phẳng. Để giúp bạn đọc có thể hình dung được phần nào về các kết quả của hình học Lobachevsky phẳng, xin được giới thiệu sơ lược về mô hình này như sau (h.1).

Trong mặt phẳng Euclid, lấy một đường thẳng x nằm ngang chia mặt phẳng ra làm hai miền, mà ta gọi là "nửa trên" và "nửa dưới". Ta có các quy ước sau đây về các khái niệm cơ bản của hình học Lobachevsky phẳng: "Điểm" là điểm (Euclid) thông thường thuộc "nửa trên" và không thuộc x. "Đường thẳng" là nửa đường tròn thông thường thuộc "nửa trên" và có tâm thuộc x, hoặc là tia thông thường thuộc "nửa trên", có gốc thuộc x và vuông góc với x (để tiện cho việc phát triển sau này, ta coi các tia đó như là nửa đường tròn có bán kính - lớn vô cùng, có tâm thuộc x).

Tiếp tục, trong mô hình này, được xác định rõ ý nghĩa của các khái niệm cơ bản khác, mà cụ thể là của các tương quan cơ bản sau đây: "thuộc", "ở giữa", "bằng nhau" (còn gọi là "toàn đẳng"), trong đó "thuộc" và "ở giữa" được hiểu như thông thường.

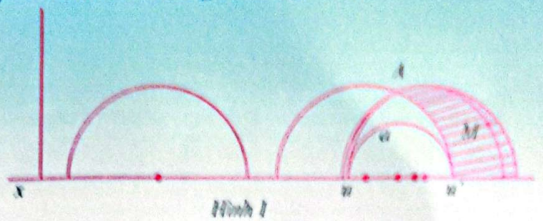
Người ta đã kiểm nghiệm tất cả các tiên đề của hình học Lobachevsky đối với mô hình nêu trên, và thấy rằng mô hình này đã thỏa mãn tất cả các tiên đề đó. Trong đó, tiên đề Lobachevsky đã được nghiệm đúng như sau:

Ký hiệu (L) là *Lobachevsky*. Cho trước đường thẳng (L) a và điểm (L) $A \notin a$. Xét trường hợp xảy ra như ở hình 1 (những trường hợp khác, bạn đọc tự xét lấy).

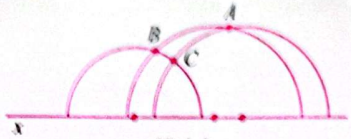
Khi đó ta có: Hai nửa đường tròn thông thường qua A, có tâm thuộc x và "tiếp xúc" với a (theo nghĩa thông thường) theo thứ tự tại u và u' chính là hai đường thẳng (L) Au và Au' qua A và không có điểm chung với a. Cần chú ý rằng u và u' không phải là điểm (L), nên Au và Au' đều không có điểm chung với a. Hai đường thẳng (L) Au và Au' được gọi là hai đường thẳng song song với đường thẳng (L) a. Những đường thẳng (L) đi qua A và một điểm (L) bất kỳ nằm trong "miền gạch chéo" là những đường thẳng (L) qua A mà không có điểm chung với a (các đường thẳng (L) này được gọi là các đường thẳng phân kỳ với a).

Rõ ràng rằng tiên đề Lobachevsky đã được nghiệm đúng.

Chú ý: 1) Thêm vào những điều ở trên, ta có định lý sau đây của hình học Lobachevsky: "*Tổng ba góc trong của một tam giác nhỏ hơn hai góc vuông*" là tương ứng với định lý dưới đây của hình học Euclid: "*Nếu một tam giác cong có ba cạnh là ba cung tròn thuộc ba đường tròn có tâm thẳng hàng thì tổng ba góc trong của tam giác đó nhỏ hơn hai góc vuông*" (h. 2).



Hình 1



Hình 2

2) Việc xây dựng thành công mô hình Poincaré của hình học Lobachevsky đã chứng minh được rằng:

a) Hình học Lobachevsky là phi mâu thuẫn (vì đã biết hình học Euclid là phi mâu thuẫn).

b) Từ các tiên đề khác của hình học Euclid không thể suy ra được tiên đề Euclid (và do đó không suy ra được định đề V của Euclid).


G. F. B. Riemann
(1826-1866)

Hình học Lobachevsky không phải là hình học phi Euclid duy nhất. Hình học Riemann nghĩa hẹp của *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826-1866) người Đức cũng là hình học phi Euclid. Hình học Riemann nghĩa hẹp khác cả hình học Euclid lẫn hình học Lobachevsky. Chẳng hạn như, trong hình học Riemann nghĩa hẹp, ta có:

1) Bất cứ hai đường thẳng nào, cùng thuộc một mặt phẳng thì cũng cùng thuộc một điểm. Do đó trong hình học Riemann nghĩa hẹp, không có khái niệm "hai đường thẳng song song".

2) Tổng ba góc trong của một tam giác lớn hơn 180°.

Để có được hệ tiên đề của hình học Riemann nghĩa hẹp, phải thay đổi hệ tiên đề của hình học Euclid nhiều hơn là những thay đổi mà *N.I. Lobachevsky* đã thực hiện (để có được hình học Lobachevsky). Vì vậy, hệ tiên đề của hình học Riemann nghĩa hẹp là khác khá nhiều so với hệ tiên đề của hình học Euclid và hệ tiên đề của hình học Lobachevsky.

Hình học Riemann nghĩa hẹp là trường hợp đặc biệt của hình học Riemann nghĩa rộng.

Ngoài các hình học: ***hình học Euclid***, ***hình học Lobachevsky***, ***hình học Riemann***, còn hình học nào nữa không?

Ngoài các hình học vừa nêu, còn nhiều hình học khác, trong đó có ***hình học fractal***. Thuật ngữ fractal do nhà toán học *Benoit Mandelbrot* (sinh ngày 20.11.1924) người Pháp gốc Ba Lan, đề nghị từ những năm 1970. Tuy mới ra đời nhưng hình học này đã phát triển nhanh chóng, gắn liền với đồ họa vi tính, có nhiều ứng dụng trong phân tích và tổng hợp hình, trong việc xây dựng mô hình của các quá trình địa lý, quá trình sinh học (hoạt động của tim người, phát triển của cây trồng, . . .).

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

(Theo *Các câu chuyện toán học* – NXB Giáo dục, 2003)

Được quét bằng CamScanner

Storytelling MATH

HÌNH HỌC PHI EUCLID

Truyện kể rằng, vào năm 1823 *Farkas Bolyai* (1775 - 1858), người Hungari, đã viết thư cho người con trai là *János Bolyai* (1802 -.1860) rằng: *"Con đừng đi vào con đường mà bố đã đi, đừng nhảy vào "hang không đáy" đã nuốt hết trí tuệ, tình lực và tâm huyết của bố"*. Đây là lời khuyên từ đáy lòng, từ trách nhiệm của người bố đã suốt cả cuộc đời nghiên cứu định đề V của Euclid, mà không thành công. Khi biết con mình yêu thích nghiên cứu *"lý thuyết các đường song song"*, thì *F. Bolyai* đã rất sợ hãi và đã viết cho con mình, trong một bức thư khác như sau: *"Con sẽ không thể nào chiến thắng được lý thuyết các đường song song bằng con đường ấy. Bố đã đi đến cuối con đường ấy và đã lạc vào một đêm đen dày đặc, một tia sáng của ngọn nến cũng không có và đã chôn vùi ở đó bao niềm hạnh phúc của đời mình. Khi lao vào các học thuyết có quanh về các đường song song, con sẽ chẳng còn gì cả. Con hãy lẩn tránh nó như lẩn tránh những dục vọng thấp hèn; nó sẽ làm hao mòn sức lực của con, cướp đi sự an nhàn, quấy đảo sự yên tĩnh và sẽ giết chết những niềm vui của cuộc sống. Bóng tối mịt mùng sẽ nuốt chứng cả những chòi tháp khổng lồ và sẽ chẳng có lóe sáng trên Trái Đất tối tăm; chẳng bao giờ con người có thể đạt tới một sự thực hoàn mĩ ngay chính trong hình học. Chúa Trời hãy cứu vớt con khỏi những ham mê con ôm ấp..."*. Nhưng *F. Bolyai* không ngờ rằng câu nói của chính ông trước đây đã làm *J. Bolyai* bị thu hút vào vấn đề này. Câu nói đó có nội dung: *"Ai chứng minh được tiên đề về các đường thẳng song song, người đó sẽ sáng ngời như một viên kim cương to bằng Trái Đất"*. Và chàng *J. Bolyai* trẻ tuổi đã không vì những lời cảnh báo của bố mình mà lùi bước. Tránh các thất bại của những người đi trước, *J. Bolyai* đã đi theo con đường riêng của mình. Ông đã không tìm cách chứng minh định đề V của *Euclid*, mà đã xét nó như là một tiên đề độc lập. Và khi phủ định định đề V của *Euclid*, *J. Bolyai* đã xây dựng được một hệ thống hình học mới (mà về sau được gọi là hình học phi Euclid, hay còn được gọi là hình học Lobachevsky). Các kết quả về hình học này của ông cũng phong phú và những chứng minh của ông rất hoàn thiện. *J. Bolyai* là một nhà toán học thiên tài, nhưng bị đố kị, chê bai và bị cả những điều đơm đặt về ông. Cuộc sống của *J. Bolyai* luôn bị bọn quý tộc chèn ép, bao vây cả về tinh thần lẫn vật chất. Người bố chính là một nhà toán học đầy tâm huyết và rất thương con. Nhưng từ bài học sai lầm được rút ra từ chính cuộc đời nghiên cứu toán học của mình, *F. Bolyai* đã vô tình trở thành vật cản của con trên con đường tìm tòi, sáng tạo.

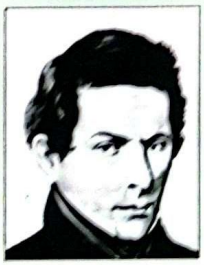


János Bolyai
(1802 -.1860)

Năm 1831, *J. Bolyai* đã công bố công trình của mình dưới dạng phụ lục ở cuối một cuốn sách của bố mình. Phụ lục trình bày *"Học thuyết tuyệt đối đúng về không gian"*. *F. Bolyai* đã viết thư cho *Carl Friedrick Gauss* (30.4.1777 23.2.1855) để nghị *Gauss* cho nhận xét về công trình nghiên cứu của *J. Bolyai*. Trong thư trả lời, *Gauss* đã nói rằng ông không thể ngợi khen công trình đó, vì như thế tức là tự khen mình. Ông nói rằng tư tưởng của *J. Bolyai* trong "phụ lục" chính là tư tưởng của ông trong nhiều năm trước đây. Sau đó *Gauss* đã viết thư cho *Goling* với ý cho rằng nhà toán học trẻ tuổi *J. Bolyai* là một thiên tài.

Phải nói rằng những lời đánh giá trên đây của nhà toán học lỗi lạc *Gauss* là hoàn toàn chân thực. Thật vậy, từ năm 1824, trong thư gửi cho người bạn là *Tolinos*, *Gauss* đã viết: *"Tổng ba góc trong của một tam giác phẳng phải nhỏ hơn 180°, giả định này sẽ dẫn đến những đặc thù khác hoàn toàn với hình học của chúng ta. Tôi phát triển nó và thu được những kết quả hoàn toàn khiến ta hài lòng"*. Và bức thư nổi tiếng mà *Gauss* đã gửi *Frants Adonf Taurinus* (1794 - 1874) cũng chứng tỏ rằng: *Gauss* đã nắm được các ý niệm quan trọng của hình học phi Euclid. Nhưng đó chỉ mới là những đoạn rời rạc, những phát kiến, mặc dù đã rất sâu sắc. Tuy nhiên, lúc bấy giờ *Gauss* đã không công bố những kết quả nghiên cứu này của mình.

Thư trả lời của *Gauss* đã làm cho *J. Bolyai* có những hiểu lầm lớn. *J. Bolyai* nghĩ rằng *Gauss* đã dùng uy danh của mình để cướp đi quyền phát minh về hệ thống hình học mới của ông. Vì thế, *J. Bolyai* rất đau lòng đã thề rằng sẽ vứt bỏ mọi nghiên cứu toán học. Tháng 10.1848, *J. Bolyai* đã được bố mình gửi cho luận văn: *"Nghiên cứu hình học về lý thuyết các đường song song"* của *Lobachevsky*, xuất bản bằng tiếng Đức năm 1840, tại Berlin. *J. Boyai* đã rất ngạc nhiên, vì thấy rằng *Lobachevsky* cũng đã đi đến những kết quả giống như của mình. Và *J. Bolyai* cũng rất khâm phục tài năng của *Lobachevsky*.



N. I. Lobachevsky
(1792 - 1856)

Cùng thời với *J. Bolyai*, ở Cadan (thủ đô của nước Cộng hòa tự trị Tacta thuộc Liên bang Nga), đã xuất hiện một ngôi sao sáng, đó là nhà toán học thiên tài *Nikolai Ivanovich Lobachevsky* (1792 - 1856). *Lobachevsky* đã từng là giáo sư xuất sắc, hiệu trưởng của Trường đại học Tổng hợp Cadan. Ông đã tìm cách chứng minh rằng từ các định đề và tiên đề khác của hình học Euclid cổ điển, không thể suy ra được định đề V. Để chứng minh điều đó, ông đã giữ nguyên các định đề và tiên đề khác (của hình học Euclid cổ điển) và thay thế định đề V bằng một tiên đề khác phủ định của tiên đề Euclid (tương đương với định đề V), và do đó cũng là phủ định của định đề V. Ngày nay, tiên đề này được gọi là tiên đề Lobachevsky. Tiên đề này có nội dung như sau: *"Trong mặt phẳng, qua một điểm không nằm trên một đường thẳng cho trước, có ít nhất là hai đường thẳng không cắt đường thẳng đã cho"*. Rồi từ đó *Lobachevsky* đã xây dựng nên một thứ hình học mới không có mâu thuẫn. Những kết quả của hình học mới này "trái mắt", trái với những trực quan hàng ngày của chúng ta, trái với hình học Euclid quen thuộc. Điều này được thể hiện ở nội dung của tiên đề Lobachevsky, hoặc ví dụ như ở định lý: *"Tổng ba góc trong của một tam giác nhỏ hơn hai góc vuông"*.

(Xem tiếp bìa 3)

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT2M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2025

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner