

TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 1 - SỐ 7 THÁNG 7 , 2017

Số và hình

GIẢ THUYẾT
THỜI GIAN MA

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ISSN 2525-2437

TRONG SỐ NÀY

Số và hình 3
Ngô Bảo Châu

TOÁN HỌC TỪ CỔ ĐIỂN ĐẾN HIỆN ĐẠI

Đối xứng hơn hình cầu *(tiếp theo)* 5
Barry Mazur

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

Tuyển sinh, tuyển chồng và giải thưởng Nobel! 11
Hà Huy Khoái

GIẢI TOÁN CÙNG BẠN

Con kiến mà leo cành đa 16
Thầy giáo làng

THÁCH THỨC TOÁN HỌC 19
(nhiều tác giả)

ĐỐI THOẠI TOÁN HỌC

37 **Đội tuyển IMO2017: Toán không chỉ là những bài tập, Toán là cuộc đời**
Mi Ly thực hiện

ĐẤU TRƯỜNG TOÁN HỌC

41 **Các cuộc thi giải toán của Hungary**
Trần Nam Dũng

GÓC STEM

45 **Giải STEM quốc tế của vùng đất nắng lửa Quảng Trị**
Nguyễn Đình Thành Công thực hiện

TRẠM THIÊN VĂN

47 **Thế nào là một ngày?** *(tiếp theo)*
Phạm Vũ Lộc

Ngày hội Toán học mở 2017 49

QUÁN TOÁN

Giả thuyết Thời gian Ma 50
Nguyễn Ái Việt

TOÁN CỦA BI

57 **Học lập trình Scratch (Bài 1)**
Bùi Việt Hà

CUỘC THI TÔI & TOÁN HỌC



Để cùng nhau trao đổi nhẹ nhàng và ngắn gọn những suy nghĩ của bạn về Toán học, Tạp chí Pi mở cuộc thi "Tôi & Toán học", với thể lệ như sau:

1. Nội dung Viết về "Tôi & Toán học": tại sao bạn yêu Toán, tại sao không yêu Toán, tại sao sợ Toán, Toán có ích gì cho bạn,....

2. Hình thức: bài viết không quá 700 chữ (khoảng 1 trang A4, cỡ chữ 12).

3. Bài gửi về: ***BBT@pi.edu.vn***. Subject: **Bài dự thi "Tôi & Toán học".**

4. Thời gian nhận bài: từ 14/3 đến 22/7, năm 2017
(lưu ý: 14/3 hàng năm được lấy làm "Pi day", do viết là 3,14; còn 22/7 chính là giá trị gần đúng của số π đã được biết đến từ lâu).

5. Bài dự thi hợp lệ: tuân thủ đúng những quy định nêu trên (về độ dài, thời gian gửi, địa chỉ gửi, subject thư), có ghi rõ Tên người dự thi, địa chỉ liên hệ, nơi học tập, làm việc, năm sinh.

6. Bài viết có chất lượng sẽ được đăng trên Tạp chí Pi.

7. Giải thưởng: Chia thành 4 đối tượng:
- Tiểu học
- THCS
- THPT
- Khác

Trong mỗi đối tượng có:
- 01 giải nhất: mỗi giải gồm 01 năm báo Pi + 10 Pi tiền mặt
- 02 giải nhì, mỗi giải gồm 01 năm báo Pi + 7 Pi tiền mặt
- 03 giải ba, mỗi giải gồm 01 năm báo Pi + 3 Pi tiền mặt
- 10 giải khuyến khích, mỗi giải gồm 01 năm báo Pi.

Ghi chú: 1 Pi tiền mặt bằng 314.159 đồng.

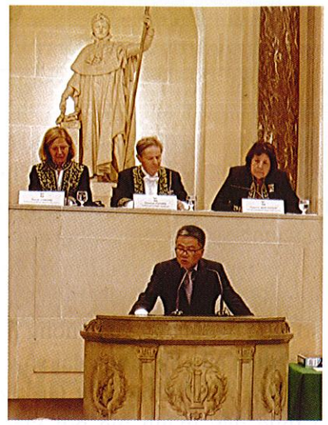
Ban Giám khảo:
- **Ngô Bảo Châu,**
- **Hà Huy Khoái,**
- **Nguyễn Ái Việt.**

Nhà tài trợ TH truemILK

SỐ VÀ HÌNH

(Diễn từ đọc tại Lễ tiếp nhận các thành viên nước ngoài của Viện Hàn lâm Khoa học Pháp ngày 20/6/2017)

Ngô Bảo Châu



GS Ngô Bảo Châu đọc diễn từ tại buổi lễ
Ảnh: Hoàng Hồng Minh

Trong bài viết duy nhất của ông về lý thuyết số "Về những số nguyên tố nhỏ hơn một giá trị nhất định", Riemann đã ghi dấu ấn cho sự phát triển của lĩnh vực này cho nhiều thế kỷ sau đó. Những số nguyên tố, xuất hiện trong dãy số tự nhiên có vẻ rất phân tán, tuân thủ một quy luật thống kê tự nhiên đơn giản hơn ta tưởng. Riemann đã chứng minh rằng quy luật này, định lý về số nguyên tố, được ấn định bởi vị trí các không điểm của một hàm giải tích duy nhất, hàm zeta. Ông cũng phát biểu giả thuyết nổi tiếng về vị trí các không điểm mà cho đến ngày nay nó vẫn là điều bí ẩn. Định lý về số nguyên tố sau này đã được Hadamard và de la Vallée-Poussin chứng minh, dựa trên một dạng yếu của giả thuyết Riemann. Trước khi phát biểu giả thuyết của mình, Riemann đã nghiên cứu những tính chất giải tích của hàm zeta, bao gồm phương trình hàm, một sự đối xứng kỳ lạ mà cho đến tận ngày nay nó không ngừng làm ta ngạc nhiên.

Trong luận văn mang tên "Về các giả thuyết nền tảng của hình học", Riemann đã đưa ra những tư tưởng làm đảo lộn sâu sắc những điều chúng ta hiểu về hình học cùng những tác động tới lý thuyết hấp dẫn. Sau Riemann, một sắc thái mới được đặt lên các hình thể của vật thể hình học, thường ở số chiều lớn, xoá nhoà những tính chất đặc thù của tam giác hay thiết diện conic.

Chính Riemann có thể đã không nghi ngờ sự tồn tại của các mối liên quan giữa hai lĩnh vực. Những mối liên quan này dần dà được khám phá ra trong thế kỷ 20 và thường mang theo mầm mống của sự phát triển với quy mô lớn lao.

André Weil đã chỉ rõ sự giống nhau hình thức giữa cấu trúc của các số hữu tỷ và cấu trúc của hàm phân hình trên diện Riemann thông qua một hàm hữu tỷ trên một đường cong xác định trên trường hữu hạn. Ông đã phát biểu một tương tự của giả thuyết Riemann đối với những đối tượng trên, và chứng minh bằng các công cụ của hình học đại số. Ông đã mạnh dạn phỏng đoán rằng dạng của giả thuyết Riemann đã chứng minh không chỉ giới hạn đối với đường cong, các vật thể hình học chiều bằng 1, mà còn đúng cho chiều tuỳ ý. Ông đã tiên đoán về sự tồn tại của các lý thuyết đồng điều đối với đa tạp đại số trên trường hữu hạn, mà người ta có thể suy ra tương tự của giả thuyết Riemann từ các tiên đề.

Lý thuyết đồng điều đầu tiên đối với các không gian tôpô đã được Henri Poincaré đưa ra đầu thế kỷ 20. Đó là việc xác định những bất biến mà người ta có thể gán cho các không gian tổng quát, trước tiên chắc chắn là loại mặt mà Riemann đã nghiên cứu trong luận văn của mình. Trực giác của Weil, rằng những bất biến tôpô của thế giới các hình phải được lan truyền tới các đa tạp đại số trên trường hữu hạn, mà chúng mặc nhiên thuộc về thế giới của những con số, vừa mạnh dạn vừa phong phú. Sự phát triển kỳ diệu của hình học đại số vào giữa thế kỷ 20 dưới ảnh hưởng của Grothendieck đã được thúc đẩy mạnh mẽ bởi việc xây dựng các lý thuyết đồng điều của Weil. Sự phát triển này đã được đăng quang bởi chứng minh giả thuyết Riemann đối với các đa tạp đại số trên trường hữu hạn của Deligne vào đầu thập kỷ 70.

Không lâu trước khi Deligne chứng minh giả thuyết Weil, Langlands phát biểu một tập hợp các giả thuyết mà sự mạnh dạn của nó có thể cạnh tranh, thậm chí vượt cả các giả thuyết của Weil. Ông đã chỉ ra một tập hợp các hàm giải tích, mà các hàm L của chúng kết hợp với các dạng tự đẳng cấu, cũng được Poincaré phát hiện. Các hàm L tự đẳng cấu được định nghĩa theo một thủ tục giống như các thủ tục đã sản sinh ra hàm zeta Riemann và tạo thành một họ tự nhiên mà hàm zeta là một phần tử. Langlands giả thuyết rằng các hàm L của ông có thể thác triển giải tích và thỏa mãn một phương trình hàm tương tự như phương trình hàm của hàm zeta. Ông liên hệ giả thuyết này với các cấu trúc chi phối các biểu diễn tuyến tính của các nhóm Lie. Ông cũng giả thuyết rằng các hàm L tự đẳng cấu mang trong nó những thông tin số rõ ràng nhất của đối đồng điều Weil của các đa tạp đại số xác định trên trường các số hữu tỷ.

Những giả thuyết của Langlands đã thay đổi sâu sắc việc nghiên cứu lý thuyết số. Đặc biệt, chúng đã tạo sự tăng tiến ngoạn mục của Wiles trong những năm 90 về giả thuyết Tanyiama-Weil đối với đường cong elliptic, đưa tới chứng minh đầu tiên cho định lý cuối cùng của Fermat. Những năm 90 cũng chứng kiến sự ra đời của một ngành toán học hoàn toàn mới, đó là lý thuyết Langlands hình học, do Drinfeld và Gérard Laumon khởi xướng. Nó là mối liên kết phong phú mới giữa thế giới cụ thể của các con số và thế giới ảo của hình thế hình học.

Công trình của tôi, tiếp nối các công trình của Drinfeld và Laumon, đề cập vấn đề mà Langlands gọi là bổ đề cơ bản, một cái tên hàm ý một điều gì ít nhiều mang tính kỹ thuật. Nó nói về những đẳng thức giữa những quỹ đạo tích phân nào đó xuất hiện trong giải tích điều hoà. Khó khăn gặp phải lớn hơn nhiều so với khi ta thoạt nhìn, bởi vì những con số để đo các quỹ đạo tích phân này cho đến nay vẫn chưa tính nổi. Việc giải quyết bổ đề cơ bản dựa trên ý tưởng là đẳng thức giữa những con số bí hiểm này phải quy về việc so sánh giữa những đối tượng hình học nào đó. Đặc biệt, những vật thể hình học liên quan đến cơ học cổ điển, thí dụ như chuyển động của con quay, mà người ta gọi là hệ khả tích đầy đủ Hitchin, có khả năng giải thích được bổ đề cơ bản của Langlands.

Đối với tôi hình như từ thời xa xưa cho tới nay, nhà toán học luôn đi tìm mối quan hệ khi thì chắc chắn và sáng sủa, khi thì mong manh và bí ẩn giữa thế giới các con số và thế giới hình thể. Hai thế giới này không ngừng tỏa sáng và đồng thời khai sáng chúng ta. Khi nhắc tên những người nổi tiếng, mà nhiều người trong số họ có mặt tại đây, tôi thấy hết niềm vinh dự mà các vị dành cho tôi khi chấp nhận tôi trong cùng đội ngũ.

Xin cảm ơn đã lắng nghe.

(*Nguyễn Đình Đống dịch từ tiếng Pháp. Hà Huy Khoái và Ngô Bảo Châu hiệu đính*).



ĐỐI XỨNG HƠN HÌNH CẦU

(tiếp theo)

Barry MAZUR

(Dịch từ nguyên bản tiếng Pháp. Người dịch: Nguyễn Hoàng Thạch)

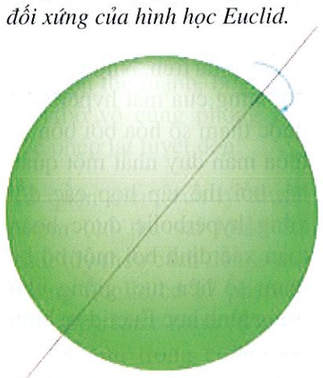
Các bề mặt hình học rất đối xứng

Ba loại mặt rất đối xứng cổ điển là: mặt phẳng Euclid, mặt cầu và mặt hyperbolic. Loại mặt thứ ba, rất khó nắm bắt, còn được gọi là mặt phẳng Bolyai hay mặt phẳng Lobatchevsky, theo tên các nhà toán học khám phá ra nó. Ba mặt (hay hình học) này khác nhau một cách tinh tế: chúng đều thỏa mãn các tiên đề của hình học Euclid, trừ tiên đề thứ năm về sự tồn tại duy nhất của một đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước.

Điều đáng chú ý là ba hình học này được đặc trưng bởi cách chúng xử lý tiên đề thứ năm. Cho một đường thẳng L và một điểm P nằm ngoài đường thẳng. Trong hình học Euclid, có duy nhất một đường thẳng đi qua P và song song với L. Trong hình học cầu, không có đường thẳng nào đi qua P và song song với L (chính xác hơn, mọi "đường thẳng" trong hình học cầu là các đường



HÌNH 4. TRONG MẶT PHẲNG EUCLID, *có ba loại chuyển động độc lập: tịnh tiến Đông - Tây, tịnh tiến Bắc - Nam và quay. Kết hợp ba chuyển động cơ bản này, chúng ta thu được một bộ liên tục, ba chiều các đối xứng của hình học Euclid.*



Với mặt cầu, phép quay một góc bất kỳ quanh một đường kính bất kỳ bảo toàn các cấu trúc. Vì có một tập hợp liên tục hai chiều các đường chéo và một lựa chọn tự do của góc quay, chúng ta cũng thu được một bộ liên tục các tham số của các đối xứng của mặt cầu.

tròn và chúng đôi một cắt nhau). Trong hình học hyperbolic, qua P chắc chắn có nhiều đường thẳng song song với L.

Cả ba dạng mặt đều "rất đối xứng", theo nghĩa mỗi mặt có một loạt các đối xứng được đặc trưng bởi ba tham số và bảo toàn tất cả các thuộc tính nội tại của nó. Với hai cấu trúc quen thuộc là mặt phẳng Euclid và mặt cầu, có thể trực tiếp minh họa ba tham số của các đối xứng của chúng (xem *hình 4*). Trái lại, với mặt hyperbolic, cần một cuộc thảo luận công phu hơn để nắm bắt được các cấu trúc hình học cơ bản.

Hình học phẳng và hình học cầu được liên hệ với nhau bởi thực tế là cả hai đều có thể được biểu diễn trong một không gian Euclid ba chiều. Các đối xứng của chúng được sinh ra từ các đối xứng của không gian Euclid ba chiều chứa chúng, nhờ thế nên có thể dễ dàng minh họa. Điều này không còn đúng với mặt hyperbolic. Tất nhiên, chúng ta vẫn có thể, và chúng ta sẽ, biểu diễn một số khía cạnh của mặt hyperbolic trong hình học Euclid, nhưng làm như thế sẽ đánh mất các khía cạnh khác của mặt hyperbolic. Sự rắc rối này tương tự vấn đề mà Gerhardus Mercator và các nhà vẽ bản đồ khác gặp phải khi muốn biểu diễn một hình học cầu (là Trái đất) trên mặt phẳng Euclid. Trong những "biểu diễn" chuẩn của hình học hyperbolic được giới thiệu ở đây, chúng ta sẽ cố gắng chỉ rõ các ưu điểm và nhược điểm của chúng.

Biểu diễn đầu tiên của mặt hyperbolic: nửa mặt phẳng Euclid phía trên (sau đây sẽ được gọi là biểu diễn A). Chúng ta cho tương ứng mặt hyperbolic với một nửa mặt phẳng phức (xem *hình 5a*). Biểu diễn này có ưu điểm là bảo toàn góc. Ngược lại, các độ dài bị biến dạng. Các "đường thẳng" của hình học này (hay còn gọi là các đường trắc địa) xuất hiện dưới hai dạng: các nửa đường thẳng thẳng đứng hoặc các nửa đường tròn. Sự khác nhau này là ngoại lai đối với hình học hyperbolic: nó là một giả tượng của biểu diễn này.

Trong biểu diễn này, các đối xứng của mặt hyperbolic là các biến đổi

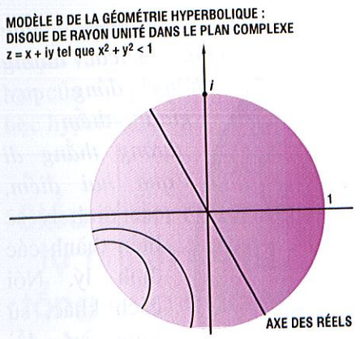
$$z \mapsto (az+b)/(cz+d)$$

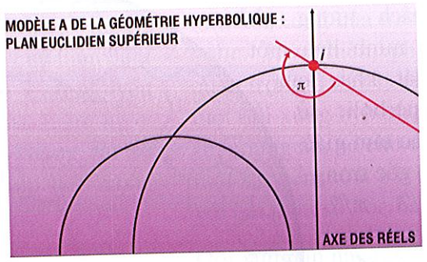
ở đó a,b,c,d là các số thực thỏa mãn $ad-bc=1$ và z là một số phức trong nửa mặt phẳng phía trên. Như vậy, các đối xứng của mặt hyperbolic được tham số hóa bởi bốn số thỏa mãn duy nhất một quan hệ, bởi thế tập hợp các đối xứng hyperbolic được hoàn toàn xác định bởi một bộ ba tham số liên tục, giống như trong hình học Euclid và hình học cầu.

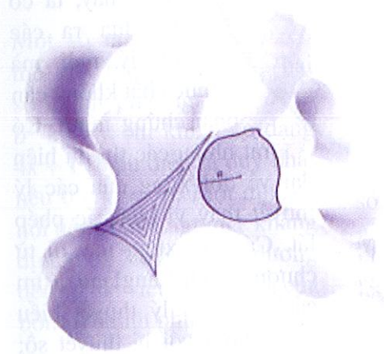
Trong hình học hyperbolic, đối xứng "làm quay 180 độ" mặt hyperbolic quanh một điểm cố định vừa lý thú lại vừa bổ ích. Chẳng hạn, xét "đường thẳng" được biểu diễn bởi nửa đường tròn bán kính đơn vị và điểm i trên đó. Ánh xạ $z \mapsto -1/z$ là một đối xứng của mặt hyperbolic giữ nguyên điểm i và "quay" mặt hyperbolic một góc π quanh điểm i: phép biến đổi này biến nửa đường tròn đơn vị thành chính nó, đưa các điểm bên ngoài nó vào bên trong và ngược lại (xem *hình 5a*). Thực ra phép biến đổi này biến một "đường thẳng" chứa i bất kỳ thành chính nó bằng cách quay nó đi một góc π.

Biểu diễn thông dụng thứ hai của mặt hyperbolic là mô hình Beltrami-Poincaré (sau đây gọi là biểu diễn B). Mô hình này biểu diễn mặt hyperbolic như một đĩa bán kính đơn vị trong mặt phẳng Euclid, được đồng nhất với đĩa đơn vị trong mặt phẳng phức (xem *hình 5b*). Trong biểu diễn này, các "đường thẳng" là các cung tròn vuông góc với biên của đĩa. Giống như trong mô hình A, các góc trong hình học hyperbolic là các góc trong hình học Euclid, nhưng các độ dài bị biến dạng.

Chúng ta hãy đưa ra một biểu diễn thứ ba, một biểu diễn cục bộ của mặt hyperbolic:







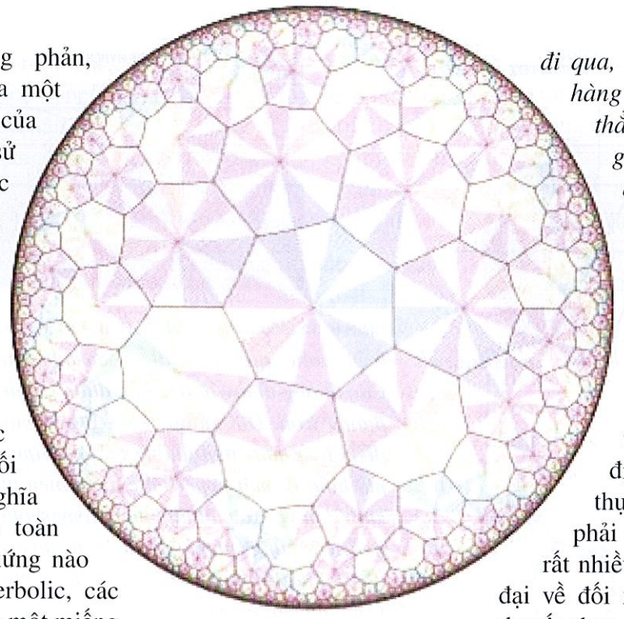
HÌNH 5. BA BIỂU DIỄN CỦA MẶT HYPERBOLIC. *Trong mô hình A, mặt hyperbolic được biểu diễn bởi mặt phẳng phức phía trên. Các đường thẳng là các nửa đường thẳng dọc hoặc các nửa đường tròn. Đối xứng $z \mapsto -1/z$ là phép biến đổi cố định điểm i và quay mọi đường thẳng đi qua i một góc π. Trong mô hình B, mặt hyperbolic được biểu diễn bởi một đĩa bán kính đơn vị. Các đường thẳng hyperbolic là các đường kính hoặc các cung vuông góc với biên của đĩa. Hai biểu diễn trên bảo toàn góc nhưng không bảo toàn khoảng cách. Mô hình C nhúng mặt hyperbolic vào trong một không gian Euclid ba chiều. Trên mặt này, chỉ là một phần của mặt hyperbolic vô hạn, các số đo được giữ nguyên so với các số đo của mặt hyperbolic, thí dụ tất cả các kích thước của một tam giác hoặc của một hình tròn: biểu diễn này có ưu điểm là bảo toàn cả góc lẫn độ dài. Bù lại, các đối xứng không hiển nhiên.*

một mặt trong không gian Euclid ba chiều. Không gian này có một ưu điểm là cả góc lẫn độ dài đều không bị biến dạng. Độc giả có thể chiêm ngưỡng mô hình C (*hình 5c*), trông như một chiếc lá xà-lách kỳ lạ được cuộn lại. Lần này, các góc và các độ dài của hình học hyperbolic chính bằng các góc và các độ dài của hình học Euclid. Vấn đề là bằng cách này, chúng ta chỉ biểu diễn được một phần của mặt hyperbolic vô hạn. Phiền phức hơn, rất khó để mô tả một cách trực quan các đối xứng của hình học hyperbolic trong biểu diễn này. Đặc biệt, các đối xứng này nói chung không thể được tạo ra từ các đối xứng bảo toàn các mặt của không gian Euclid chứa mặt hyperbolic.

Trong nhóm liên tục các đối xứng của mỗi hình học, có các nhóm rời rạc các đối xứng của các phép lát đối xứng của hình học đó. Đây chính là nơi mặt hyperbolic thể hiện thế mạnh, bởi nó có một bộ vô cùng phong phú các phép lát tuyệt đẹp.

Từ quan điểm của lý thuyết nhóm (có thể sai khác đôi chút tùy theo cách đếm), mặt phẳng Euclid có 17 phép lát đối xứng khác nhau (độc giả có thể tìm trong cuốn sách của Weyl các mô tả cụ thể của chúng). Trái lại, mặt hyperbolic có một lượng vô hạn và chưa được biết hết các phép lát khác nhau. Mặt hyperbolic "đối xứng hơn hình cầu và mặt phẳng Euclid", theo nghĩa số vô hạn các phép lát của nó sử dụng các nhóm thú vị hơn (và vì vô cùng đa dạng nên mô tả của các nhóm này cũng phức tạp hơn) so với các nhóm các đối xứng của các phép lát (cũng vô hạn) của hình cầu hay 17 nhóm các đối xứng của mặt phẳng Euclid. Chẳng hạn, trong hình 7 là biểu diễn theo mô hình A và mô hình B của một phép lát như thế của mặt hyperbolic.

Một cách tương phản, hình 6 minh họa một phép lát khác của mặt hyperbolic, sử dụng các tam giác với các góc trong $\pi/2, \pi/3, \pi/7$ (trong hình học, hyperbolic tổng các góc trong của một tam giác luôn luôn nhỏ hơn π). Các phép lát này là đối xứng, theo nghĩa chúng được bảo toàn bởi một số đối xứng nào đó của mặt hyperbolic, các đối xứng này biến một miếng lát thành một miếng lát khác. Đặc biệt, mặc dù có những sự khác biệt rõ ràng giữa hai mô hình A và B, tất cả các tam giác xuất hiện ở một trong ba hình vẽ (*hình 6* và *hình 7* - ND) đều đồng dạng trong hình học hyperbolic: cho hai tam giác bất kỳ, luôn tìm được các phép biến hình biến tam giác này thành tam giác kia.



HÌNH 6. MỘT PHÉP LÁT CỦA MẶT HYPERBOLIC. *Phép lát này được gọi là 2-3-7 vì các góc của mỗi tam giác đều bằng $\pi/2, \pi/3, \pi/7$.*

Đối xứng của các lý thuyết, gương và đối xứng ẩn

Tới đây, chúng ta mới chỉ xét đến các đối xứng có thể trực quan hóa được bằng các biểu diễn Euclid không hoàn hảo. Ngày nay, từ "đối xứng" đã được các nhà toán học và các nhà vật lý học mở rộng và hành hạ một cách không thương tiếc. Có những đối xứng chiếu toàn bộ một số lý thuyết lên những lý thuyết khác, hoặc lên chính chúng. Lại có đối xứng phản chiếu một lý thuyết hoặc một phần của một lý thuyết như là ảnh trong gương của một lý thuyết khác. Một thí dụ cổ điển là nguyên lý đối ngẫu trong hình học xạ ảnh, trong đó, chẳng hạn trong trường hợp hai chiều, nếu chúng ta hoán đổi các từ ngữ và các câu như sau: *điểm ↔ đường thẳng, điểm thuộc vào ↔ đường thẳng đi qua, các điểm thẳng hàng ↔ các đường thẳng đồng quy, giao điểm ↔ đường thẳng đi qua hai điểm*, các định lý sẽ biến thành các định lý. Nói cách khác, sử dụng sự đối ngẫu này, ta có thể đưa ra các định lý mới mà thực chất không cần phải chứng minh. Có rất nhiều các thí dụ hiện đại về đối xứng của các lý thuyết thay vì của các phép lát. Các đối xứng này đi từ chương trình Langlands (tìm cách kết nối lý thuyết biểu diễn nhóm với lý thuyết số; một kết quả liên quan đã mang về huy chương Fields năm 2002 cho nhà toán học người Pháp Laurent Lafforgue) tới những phát triển hiện nay về các đối xứng gương kết nối hình học đại số với hình học symplectic. Tuy nhiên, tác giả cho rằng không một cuộc thảo luận nào về đối xứng có thể được coi là đầy đủ nếu không nhắc đến những đối xứng ẩn tuyệt đẹp, vốn có vai trò nền tảng trong lý thuyết số.

Để nắm bắt được các đối xứng ẩn này, chúng ta sẽ được dẫn dắt bởi một thí dụ cụ thể, cổ xưa và một thí dụ tổng quát hơn, mới hơn. Cả hai thí dụ đều quan trọng và đều phụ thuộc vào các đối xứng vô hạn của các phép lát của hình học hyperbolic.

Biểu diễn các số tự nhiên bằng tổng của các số chính phương

Một số nguyên tố lẻ p có thể viết thành tổng của hai số chính phương: $p = a^2 + b^2$ khi và chỉ khi p có dạng $4k+1$ (biểu diễn là duy nhất nếu $0 < a < b$). Một định lý nổi tiếng của Lagrange khẳng định mọi số nguyên dương đều có thể viết thành tổng của bốn số chính phương.

Ngày nay, hai định lý kinh điển và rất chính xác này là một phần của một bức tranh rộng lớn hơn. Với mọi cặp số nguyên dương r và N, người ta nghiên cứu hàm đếm $A_r(N)$ = số bộ r số nguyên $(n_1, \ldots, n_r)$ thỏa mãn $n_1^2 + \cdots + n_r^2 = N$. Thông tin số học này được tập hợp trong hàm sinh

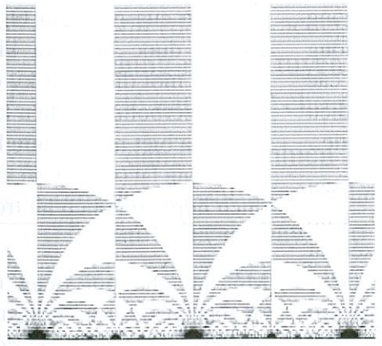
$$\Theta_r(z) = 1 + A_r(1)e^{\pi i z} + A_r(2)e^{2\pi i z} + \cdots + A_r(N)e^{N\pi i z} + \ldots$$

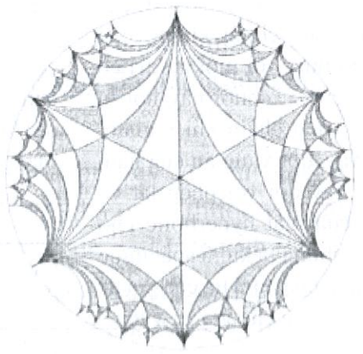
Dễ dàng nhận thấy $\Theta_r(z)$ là một chuỗi hội tụ khi $z = x + iy$ với $y > 0$ (nghĩa là khi z thuộc nửa mặt phẳng phía trên). Quả vậy, khi đó, các số hạng tương ứng với $e^{N\pi i z}$ giảm theo tốc độ hàm mũ khi N tăng. Như vậy, liên hệ với hình học hyperbolic qua mô hình A, chúng ta có thể coi $\Theta_r(z)$ như một hàm trong mặt hyperbolic. Thêm vào đó, $\Theta_r(z)$ không đổi nếu ta thay z bởi $z+2$, tức là qua một đối xứng của mặt hyperbolic. Tuy nhiên, phát hiện quan trọng ở đây là $\Theta_r(z)$ có một đối xứng hyperbolic thật sự, nhưng ẩn, nó cho chúng ta một sự kiểm soát bất ngờ đối với bài toán số học ban đầu.

Đối xứng ẩn này rất dễ mô tả khi r là bội số của 4:

$$\Theta_r(-\frac{1}{z}) = (-1)^{r/4} \times z^{r/2} \Theta_r(z).$$

Đối xứng $z \mapsto -1/z$ (phép quay hyperbolic, quay 180 độ quanh điểm i trong mô hình A) đã được đề cập đến trong phần thảo luận về mô hình A. Từ đó suy ra hàm $\Theta_r(z)$ tự lặp lại một cách rất đơn giản khi chúng ta chuyển từ mảnh này sang mảnh khác trong phép lát vô hạn của mặt hyperbolic được mô tả trong hình 7a (mô hình A) và hình 7b (mô hình B).





HÌNH 7. MỘT PHÉP LÁT CỦA MẶT HYPERBOLIC, *minh họa trong hai mô hình A (trái) và B (phải). Đây là một trong rất nhiều phép lát đối xứng của mặt hyperbolic.*

Dù hai cách biểu diễn khác nhau, tất cả các tam giác đều đồng dạng: tồn tại các phép biến đổi cho tương ứng một tam giác bất kỳ với một tam giác bất kỳ khác.

Như vậy, nếu biết hàm $\Theta_r(z)$ trên ba miếng lát thích hợp trong phép lát được mô tả ở hình 7, chúng ta có thể dễ dàng xác định giá trị của nó tại một điểm bất kỳ của mặt hyperbolic nhờ vào các đối xứng, ẩn hoặc không ẩn. Chúng ta có thể rút ra được gì từ điều thú vị này?

Chúng ta đã sinh ra một hàm $\Theta_r(z)$, được hiểu và định nghĩa như một "chiếc hộp" để chứa một bộ các hàm đếm số học thú vị $A_r(N)$, dưới hình thức một chuỗi Fourier cổ điển. Đặc biệt, viết $z = x+iy$, hàm sinh trở thành:

$$\Theta_r(z) = 1 + A_r(1)e^{-\pi y}e^{\pi ix} + A_r(2)e^{-2\pi y}e^{2\pi ix} + \cdots + A_r(N)e^{-N\pi y}e^{-N\pi ix} + \cdots$$

May thay, chúng ta làm việc trong nửa mặt phẳng phía trên ($y > 0$), nên các số hạng mũ chứa y đều hội tụ. Tuy nhiên, nếu thay $y = 0$ vào biểu thức, chuỗi không còn hội tụ nữa; với mỗi giá trị cố định của x, chuỗi này hội tụ ngày càng chậm khi y giảm. Dù vậy, đối xứng ẩn của hàm sinh này đối với phép lát vô hạn của mặt hyperbolic cho phép chúng ta kiểm soát được hành vi của hàm tại các giá trị y nhỏ và tại các giá trị y lớn.

Với dạng kiểm soát này (và thêm không ít công sức), chúng ta thu được các kết quả thú vị, như kết quả sau của Carl Jacobi, một hệ quả của lý thuyết vừa được nói đến: *Số cách biểu diễn một số nguyên N dưới dạng tổng của 8 số chính phương bằng 16 lần tổng có trọng số sau của các lập phương của các ước số của N:* $\sum_{d/N}(-1)^{d+N}d^3$.

Nếu chúng ta quan tâm đến số điểm trên một lưới nguyên trong một không gian Euclid nhiều chiều nằm cách gốc tọa độ một khoảng cách nào đó, kết quả trên là câu trả lời cho trường hợp 8 chiều. Chúng ta gặp lại bài toán xếp hình cầu một cách bất ngờ!

Phương trình bậc ba

Một bài toán khác có sự xuất hiện của các đối xứng ẩn là bài toán giải phương trình bậc ba. Thử hình dung một phương trình (E) có dạng $Y^2 = X^3 + aX + b$, ở đó a và b là các số nguyên và đa thức bậc ba $X^3 + aX + b$ không có nghiệm kép. Các phương trình dạng đó định nghĩa các đối tượng toán học kỳ diệu mang tên các đường elliptic.

Xét "tính module số học" sau của phương trình (E). Cho một số nguyên tố p, xét tất cả các cặp số nguyên (x,y) sao cho y^2 bằng $x^3 + ax + b$ cộng với một bội số của p. Một cặp (x,y) như vậy được gọi là một nghiệm của (E) "modulo p". Hai cặp (x,y) và (x',y') như vậy được gọi là tương đương nếu x' và x đồng dư modulo p, y' và y đồng dư modulo p. Gọi $N_E(p)$ là số lớp tương đương của tập các nghiệm của (E) modulo p.

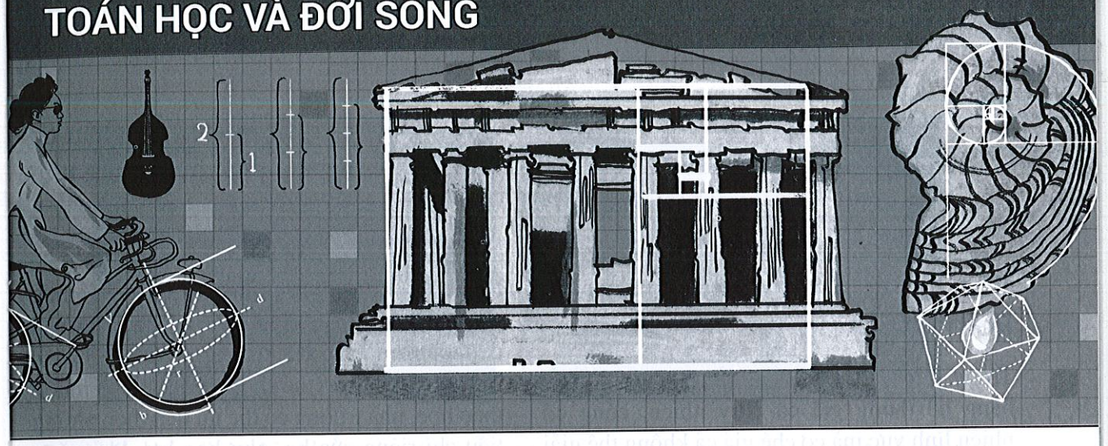
Một trong những bước tiến lớn của lý thuyết số, được kéo theo bởi phát hiện lớn của nhà toán học người Anh Andrew Wiles, là sự tồn tại của một hàm sinh

$$\Theta_E(z) = 1 + A_E(1)e^{2\pi iz} + A_E(2)e^{4\pi iz} + \cdots + A_E(N)e^{2N\pi iz} + \cdots$$

sao cho $A_E(N) = p - N_E(p)$ với mọi số nguyên tố lẻ p. Thêm vào đó, hàm sinh $\Theta_E(z)$ này hội tụ với mọi số phức z thuộc nửa mặt phẳng trên, và nó thỏa mãn một số đối xứng ẩn tương tự như các đối xứng của hàm $\Theta_r(z)$.

Như vậy, tương tự như hàm $\Theta_r(z)$ được thảo luận trong mục trước, nhờ vào các đối xứng ẩn của nó, hàm $\Theta_E(z)$ có thể được hiểu và kiểm soát tại mọi điểm bất kỳ của mặt hyperbolic với điều kiện chúng ta biết một số hữu hạn các miếng lát (tại một số vị trí thích hợp) của phép lát trong hình 7.

Một hệ quả nổi tiếng của sự tồn tại của các đối xứng này, đạt được nhờ các công trình tuyệt đẹp của Jean-Pierre Serre, Gerhart Frey và Ken Ribet, là chứng minh của định lý lớn của Fermat.



TUYỂN SINH, TUYỂN CHỒNG VÀ GIẢI THƯỞNG NOBEL!

Hà Huy Khoái

Một điểm mới trong kỳ thi THPT năm nay là học sinh có thể ghi nhiều nguyện vọng, miễn là xếp chúng theo thứ tự ưu tiên. Phần mềm tuyển sinh của Bộ sẽ xếp thí sinh vào trường theo nguyện vọng cao nhất mà thí sinh có thể đạt được, tức là, nếu thì sinh được xếp theo nguyện vọng nào đó, chẳng hạn nguyện vọng 5, thì chắc chắn các trường ứng với nguyện vọng 1, 2, 3, 4 đều có điểm chuẩn đầu vào cao hơn điểm của thí sinh.

Thuật toán đảm bảo cho việc xét tuyển như trên là *thuật toán chấp nhận trì hoãn* (deffered acceptance algorithms), mà việc phát minh, cải tiến và ứng dụng nó vào tuyển sinh, thiết kế thị trường đã mang lại giải Nobel Kinh tế năm 2012 cho Alvin Roth và Lloyd.

Điều đáng ngạc nhiên là thành tựu lớn lao như vậy lại bắt đầu từ một bài báo chỉ dài 7 trang đăng trên một tạp chí khá quen thuộc với các bạn chuyên toán và thầy giáo chuyên Toán (D. Gale and L. S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage*, American Mathematical Monthly, 69, 1962, pp. 9-15). Như tên gọi của nó, bài báo ban đầu chỉ nhằm bàn chuyện tuyển sinh và hôn nhân bền vững (tránh ly dị!) Có lẽ các tác giả của bài báo cũng không hình dung được hiệu quả việc ứng dụng các kết quả đó vào thực tiễn, điều thường thấy với các công trình toán học.

Qua bài viết ngắn này, chúng ta sẽ tìm hiểu về thuật toán chấp nhận trì hoãn, sự ra đời của nó, tiền đề cho việc ứng dụng vào thực tiễn, cũng như hiệu quả mà thuật toán mang lại.

Tiền đề thực tiễn của lý thuyết Roth và Shapley

Trong kinh tế, nhiều vấn đề được giải quyết bằng hệ thống giá cả. Tuy nhiên, cũng có nhiều lĩnh vực mà cơ chế giá cả không thể giải quyết trọn vẹn vấn đề, nhất là khi đụng chạm đến phạm trù đạo đức. Ví dụ như việc hiến tặng nội tạng, hay phân phối học sinh vào các trường công lập. Đặc điểm chung của những lĩnh vực đó là các "sản phẩm" không hoàn toàn đồng nhất, hoặc thị trường rất "mỏng".

Năm 1984, Roth nghiên cứu thị trường tuyển dụng bác sĩ mới ra trường ở Mỹ. Cho đến trước những năm 1940, thị trường này còn "mỏng" và không tập trung. Thời gian sau đó bắt đầu chứng kiến sự bùng nổ của thị trường, dẫn đến hiện tượng tắc nghẽn. Để có thể tuyển dụng được, các bệnh viện phải đưa ra những quyết định tuyển người rất sớm, vì nếu từ chối ứng viên nào đó, rất có thể là đã quá muộn để có một ứng viên khác nộp đơn. Tình hình đó buộc các bệnh viện đưa ra những thời hạn chót cho ứng viên rất gấp. Điều này kéo theo việc sinh viên phải nhận chỗ làm tương lai thậm chí ngay từ khi chưa quyết định mình sẽ theo chuyên ngành gì.

Tình hình tương tự cũng được quan sát thấy ở các nước khác như Anh và Canada.

Để giải quyết tình trạng trên, khoảng những năm 1950 ở Mỹ đã thành lập những trung tâm điều phối, nhằm giúp cho thị trường bác sĩ mới tránh được hiện tượng "tắc nghẽn". Năm 1984, Roth phát hiện ra rằng, thuật toán mà các trung tâm điều phối ở Mỹ áp dụng thực chất gần với thuật toán chấp nhận trì hoãn của Gale và Shapley trong một bài báo đã nêu.

Một hiện tượng khác cho thấy sự cần thiết phải có thuật toán điều phối tương tự là vấn đề tuyển sinh vào các trường công lập ở New York. Học sinh có thể chọn trường mình muốn theo học, nhà trường có thể ưu tiên theo những tiêu chí riêng của họ, như học lực, khả năng thể thao, văn nghệ,... Cho đến trước năm 2003, việc phân phối học sinh vào các trường theo nguyên tắc sau: mỗi học sinh đưa ra 5 nguyện vọng theo thứ tự ưu tiên, các trường lấy từ trên xuống cũng theo thứ tự ưu tiên của họ. Nếu học sinh nào mà cả năm nguyện vọng đều không được thỏa mãn (hết chỗ) thì buộc phải theo sự sắp xếp của thành phố. Quy tắc này giống với cách tuyển sinh đại học (theo thứ tự điểm) áp dụng trước đây ở Việt Nam. Tạm gọi đó là *thuật toán chấp nhận tức khắc*. Theo quy tắc này, hằng năm ở New York có khoảng 30.000 học sinh không được theo học ở trường nào trong 5 trường có nguyện vọng.

Roth phát hiện ra rằng, những vấn đề nêu trên đối với thị trường bác sĩ, cũng như tuyển sinh và nhiều vấn đề khác của thực tiễn, có thể giải quyết nhờ *thuật toán chấp nhận trì hoãn*.

Thuật toán chấp nhận trì hoãn

Những vấn đề của thị trường bác sĩ và tuyển sinh có nét chung: đó là cần đến sự "ghép cặp" (giữa nhà tuyển dụng và ứng viên, giữa học sinh và nhà trường). Việc ghép cặp này phải bảo đảm ba yêu cầu:

- *Ổn định*: không xảy ra "nguyện vọng chéo", tức là không xảy ra việc ứng viên A muốn vào X thì bị ghép vào Y, ngược lại ứng viên B muốn vào Y thì bị ghép vào X. Nếu có tình trạng đó, các ứng viên sẽ có nguyện vọng trao đổi, và hệ thống mất ổn định.



David Gale (trái) và Lloyd Shapley, hai đồng tác giả của thuật toán chấp nhận trì hoãn được công bố lần đầu vào năm 1962.

- *Khuyến khích sự thành thật*: các ứng viên cần đưa ra thứ tự ưu tiên thật sự của mình. Thuật toán cần đảm bảo sao cho sự thành thật làm lợi cho ứng viên, tránh tình trạng người gian dối được hưởng lợi.

- Thuật toán phải *đơn giản, dễ áp dụng*.

Điều đáng ngạc nhiên là một thuật toán đáp ứng cả ba yêu cầu đó đã được hai nhà toán học Gale và Shapley đưa ra năm 1962, nhưng chính các tác giả không hề biết về khả năng áp dụng thuật toán.

Thuật toán chấp nhận trì hoãn có thể mô tả như sau.

Xét một thị trường hai phía, gồm nhà tuyển dụng và ứng viên (ví dụ nhà trường và sinh viên). Các trường và sinh viên gửi danh sách thứ tự ưu tiên của mình đến một trung tâm thông tin.

Bước 1: Trung tâm xếp các sinh viên vào các trường theo "nguyện vọng 1" của họ. Các trường nhận (tạm thời) theo thứ tự ưu tiên. Khi đã đủ số cần thiết, những ứng viên còn lại bị từ chối.

Quá trình trên được lặp lại, cụ thể là:

Ở bước thứ k, mỗi sinh viên bị từ chối ở các bước 1 đến $k-1$ sẽ được đưa vào trường tiếp theo trong danh sách các nguyện vọng của sinh viên đó. Các trường sẽ lại xét theo danh sách mới (bao gồm các sinh viên đã được chấp nhận tạm thời ở những bước trước và những sinh viên vừa được đưa vào) và đưa ra danh sách chấp nhận tạm thời mới. Những sinh viên còn lại bị từ chối.

Quá trình kết thúc khi không còn đơn nhập học nào bị từ chối, hoặc khi chỉ còn lại những sinh viên đã bị từ chối ở tất cả các bước.

Có thể minh họa thuật toán một cách đơn giản như sau (theo cách trình bày của Shapley). Giả sử có bốn chàng trai Adam, Bob, Charlie và Don, cùng "theo đuổi" ba cô gái Mary, Jane và Kate.

"Thứ tự ưu tiên" của các chàng trai được cho bởi bảng sau đây:

Adam	Bob	Charlie	Don
Mary	Jane	Mary	Mary
Jane	Mary	Kate	Kate
Kate	Kate	Jane	Jane

Thứ tự ưu tiên của các cô gái:

Mary	Jane	Kate
Adam	Adam	Don
Bob	Charlie	Charlie
Charlie	Don	Bob
Don	Bob	Adam

Ngày thứ nhất, các chàng trai cầu hôn các cô gái mà mình thích nhất. Trong những người

đến cầu hôn, mỗi cô gái chấp nhận (tạm thời) người đứng thứ tự cao nhất trong bảng ưu tiên của mình, từ chối những người còn lại.

Các chàng trai bị từ chối sẽ tiếp tục cầu hôn cô gái thứ hai trong "bảng ưu tiên". Các cô gái sẽ xét những lời cầu hôn mới, kết hợp với người đã "lựa chọn tạm thời" để chấp nhận (vẫn chỉ là tạm thời) người có thứ tự cao nhất trong bảng ưu tiên.

Quá trình tiếp tục cho đến khi những chàng trai chưa được ghép cặp đã bị từ chối bởi tất cả các cô gái.

Với trường hợp cụ thể trên đây, quá trình diễn ra như sau:

	Ngày 1	Ngày 2	Ngày 3	Ngày 4	Ngày 5
Mary	Adam (Charlie và Don bị từ chối)	Adam (không có lời cầu hôn mới)	Adam (không có lời cầu hôn mới)	Adam (từ chối Bob)	**Adam** (không có lời cầu hôn mới)
Kate	Không có lời cầu hôn nào	Don (Charlie bị từ chối)	Don (không có lời cầu hôn mới)	Don (không có lời cầu hôn mới)	**Don** (Bob bị từ chối)
Jane	Bob	Bob (không có lời cầu hôn mới)	Charlie (Bob bị từ chối)	Charlie (không có lời cầu hôn mới)	**Charlie** (không có lời cầu hôn mới)

Như vậy, với Thuật toán chấp nhận trì hoãn, kết quả "ghép cặp" sẽ là: Mary-Adam; Kate-Don; Jane-Charlie. Gale và Shapley đã chứng minh chặt chẽ về mặt toán học những kết luận sau đây:

- Thuật toán kết thúc sau hữu hạn bước, và cho một lời giải ổn định.

- Lời giải là tốt nhất có thể đối với các chàng trai. Nếu các cô gái được chủ động kén rể, thì kết quả sẽ tốt nhất cho các cô gái. Trong ví dụ trên đây, kết quả ghép cặp không thay đổi, tuy nhiên trong trường hợp tổng quát, kết quả có thể sẽ khác. Tức là, thuật toán nhằm ưu tiên quyền lợi cho "ứng viên".

- Thuật toán áp dụng được cho cả những trường hợp số chàng trai và số cô gái khác nhau.

Cho đến những năm 1970, thuật toán chấp nhận trì hoãn của Gale và Shapley chỉ có ý nghĩa lý thuyết.

Lý thuyết thiết kế thị trường

Alvin Roth là người phát hiện ra khả năng ứng dụng to lớn của thuật toán chấp nhận trì hoãn. Roth chỉ ra rằng quan điểm "ổn định" giúp ta hiểu được khi nào thị trường hoạt động tốt, khi nào thì không. Cùng với các cộng sự, Roth đã kết hợp giữa những nghiên cứu thực tế với những thí nghiệm kiểm soát được trong phòng thí nghiệm, với việc sử dụng tương tự trên máy tính để kiểm tra cơ chế hoạt động của thị trường. Họ đã hoàn thiện và phát triển thuật toán của Gale và Shapley, áp dụng chúng để đề xuất những cơ chế giúp thị trường hoạt động tốt hơn. Những nghiên cứu này đã tạo nên một lĩnh vực mới trong kinh tế, được gọi là *thiết kế thị trường*. Trong lý thuyết của mình, Roth sử dụng cả những thành tựu của lý thuyết trò chơi hợp tác và bất hợp tác.

Từ năm 2003, những phương án do Roth và các cộng sự đề xuất cũng được áp dụng vào việc tuyển sinh của các trường công lập ở New York. Kết quả thật ấn tượng: con số khoảng 30.000 học sinh không được học đúng nguyện vọng hằng năm giảm xuống còn khoảng 3.000. Nhiều thành phố khác cũng bắt đầu áp dụng thuật toán đó, chẳng hạn Boston bắt đầu áp dụng từ 2005.

Những nghiên cứu về thiết kế thị trường của Roth cũng được áp dụng rộng rãi ở nhiều nước khác, như Anh, Canada, Nhật, vì những vấn đề đặt ra ở đó là hoàn toàn tương tự.

Những công trình về thiết kế thị trường của Roth và Shapley không chỉ liên quan đến những thị trường hai phía, mà còn cả những thị trường một phía. Năm 1974, Shapley và Scarf nghiên cứu những thị trường một phía, trong đó người tham gia có những tài sản nào đó (chẳng hạn những lô đất) mà họ muốn trao đổi với nhau không thông qua việc trả tiền. Mô hình này còn được cải tiến cho trường hợp có những người tham gia mà không có tài sản gì! Shapley và Scarf chứng minh rằng, thuật toán chu trình thương mại hàng đầu (top-trading cycle algorithm) của Gale sẽ đưa ra được một phân phối ổn định. Có thể mô tả thuật toán đó như sau.

Xét một tập hợp những đối tượng tham gia trao đổi. Ta vẽ một mũi tên xuất phát từ mỗi đối tượng A và đi đến đối tượng B đang nắm giữ tài sản mà A thích nhất. Làm như vậy, về mặt toán học, ta được một đồ thị hữu hạn có hướng. Trong mỗi đồ thị như vậy đều tồn tại ít nhất một chu trình. Khi đó những đối tượng nằm trong chu trình sẽ trao đổi với nhau, và họ được loại ra ngoài hệ thống. Quá trình tiếp tục cho đến khi không còn đối tượng nào. Roth và Postlewaite (1977) chứng minh rằng tồn tại duy nhất một phân phối ổn định.

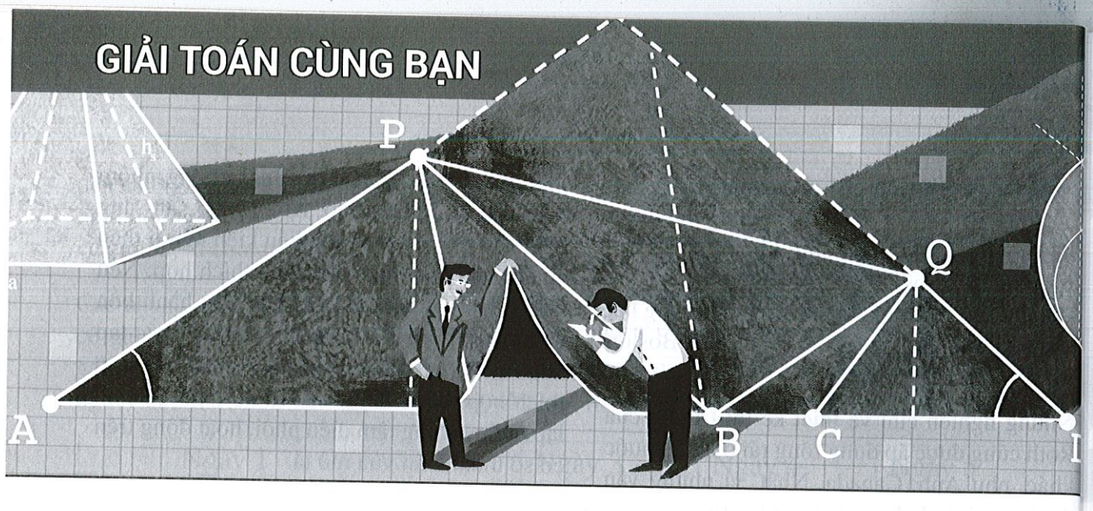
Thuật toán trên đây được áp dụng rất hiệu quả ở Anh trong vấn đề điều phối việc hiến tặng nội tạng. Ví dụ, một người nào đó muốn hiến thận cho người thân của mình, nhưng nhóm máu của họ không hợp. Khi đó, họ sẵn sàng hiến cho người khác, với điều kiện người thân của mình nhận được quả thận thích hợp. Nếu chỉ có hai cặp như vậy chỉ cần tiến hành bốn ca mổ đồng thời. Tuy nhiên, vấn đề phức tạp hơn nhiều nếu không tìm ngay được một cặp thích hợp. Điều này dẫn đến việc phải thành lập những trung tâm điều phối, hoạt động trên cơ sở thuật toán vừa mô tả.

Kết luận

Giải Nobel 2012 của Roth và Shapley là thành tựu của việc kết hợp giữa lý thuyết toán học (thuật toán chấp nhận trì hoãn của Gale-Shapley và thuật toán chu trình thương mại hàng đầu của Gale) với những nghiên cứu trong phòng thí nghiệm và thực tiễn thị trường (Roth và các cộng sự). Điều này một lần nữa minh chứng cho tiềm năng ứng dụng của những nghiên cứu toán học trừu tượng, và những thành tựu đạt được với sự phối hợp những nghiên cứu đa ngành, một xu hướng tất yếu của khoa học hiện đại.

Sự đơn giản và hiệu quả của thuật toán chấp nhận trì hoãn cho chúng ta hy vọng có thể tìm thấy những ứng dụng của nó trong thực tiễn Việt Nam. Ví dụ như trong việc thiết kế cơ chế tuyển sinh thế nào cho phù hợp với xã hội; thiết kế cơ chế hoạt động của Trung tâm Điều phối hiến tặng nội tạng được thành lập cách đây không lâu.

Năm 2013, Trường Đại học Thăng Long đã đề xuất với Bộ GDĐT một phương án tuyển sinh dựa trên thuật toán chấp nhận trì hoãn. Chương trình đã được chạy thử với giả định có 1.000.000 thí sinh (gần với con số thực tế), mỗi thí sinh đề xuất 20 nguyện vọng, và kết quả cuối cùng được cho chỉ sau 2 giờ chạy máy tính.



Con kiến mà leo cành đa

Thầy giáo làng

Khi làm Toán (làm bài tập cũng như nghiên cứu Toán), ta thường phải qua bước dự đoán kết quả (trừ những bài tập kiểu "Chứng minh rằng..." Để dự đoán, trước tiên cần thử với những trường hợp "tầm thường" nhất: số dữ liệu ít nhất, vị trí đặc biệt nhất,... Điều này "xưa như Trái đất"! Vậy nhưng thực hành nó thế nào trong những bài toán cụ thể thì không phải bao giờ cũng đơn giản, nó chỉ "có vẻ đơn giản" sau khi đã làm xong bài. Giống như những nhà "chiến lược sau trận đánh", và cũng giống như phần đông thầy giáo, tôi sẽ thử phân tích "công đoạn: dự đoán - chứng minh - khái quát" qua hai bài toán đơn giản sau đây.

Bài 1: Con kiến mà leo cành đa. *Trên một cành cụt của cây đa có 2017 con kiến (chẳng biết chúng làm gì mà tập trung đông thế). Anh Pi muốn diệt đàn kiến đó, nên bôi vào hai đầu cành đa thuốc diệt kiến, con nào chạm phải đầu cành là chết. Lũ kiến bị đánh động, bắt đầu bò lung tung trên cành đa, con thì về phía này, con thì về phía kia. Vốn tính kỷ luật, mặc dù có biến nhưng các con kiến đều bò với tốc độ rất đều, mỗi phút được 1 mét, đồng thời khi hai con bò từ hai phía ngược nhau gặp mặt, mỗi con đều quay phắt lại và tiếp tục bò. Biết rằng cành cụt dài 2m, hỏi sau bao nhiêu lâu kể từ khi kiến thấy động, bắt đầu bò, thì không còn con nào sống sót?*

Nhiều kiến quá, mà hễ gặp nhau lại quay đầu thì bao giờ mới đến đầu mút? Nếu chỉ có MỘT con thì sao nhỉ? Cứ cho là nó đứng sát đầu mút bên trái, bò sang bên phải, thì cũng chỉ sống được 2 phút thôi. Nếu có hai con, một con đứng sát đầu mút trái và bò về bên phải, một con đứng sát đầu mút phải và bò về bên trái. Sau một phút, chúng gặp nhau ở giữa cành đa, rồi quay ngược đầu bò tiếp. Cũng chỉ sống thêm một phút nữa!

Dự đoán: thời gian sống sót của bầy kiến không quá 2 phút, dù chỉ có một con, 2017 con, hay bao nhiêu con đi nữa! Nếu bạn bị cận, mà lại không đeo kính, thì khi quan sát đàn kiến để giải bài này, bạn sẽ phát hiện ra ngay dự đoán đấy! Vấn đề là bạn không thể nhìn thấy những con kiến nhỏ bé quay đầu khi gặp nhau, mà vẫn tưởng con nào con nấy đều "thẳng tiến". Mà đã thẳng tiến thì có bao nhiêu con vẫn chỉ sau không đầy 2 phút là hết sạch!

Như vậy, lũ kiến tuy quay đi quay lại khi gặp nhau nhưng vẫn có thể xem như chỉ có hai loại: loại bò sang phải và loại bò sang trái (theo cách của anh chàng cận thị quên kính). Và như thế, lời giải của bài toán là hiển nhiên.

Nếu đàn kiến không ở trên cành đa, mà ở dưới đất rồi bò lung tung thì bài toán khó hơn nhiều đấy. Tuy vậy, để không bị rối trí về việc chúng cứ hễ gặp nhau là quay đầu, ta lại sử dụng ý tưởng "phân loại đàn kiến" như trên.

Bài toán 2. Kiến bò trên bàn cờ. *Có một bảng ô vuông đơn vị gồm m hàng, m cột, mà ở tâm của một số ô nào đó có một con kiến (có thể có những ô không có con nào, và nếu có thì chỉ có một con). Ở thời điểm ban đầu (xem là thời điểm 0) các con kiến bắt đầu bò song song với một trong các cạnh của bảng, tốc độ đều, mỗi phút bò được 1 đơn vị độ dài. Khi hai con kiến bò theo hai hướng ngược nhau mà gặp nhau, mỗi con đều quay một góc 90° sang phải và tiếp tục bò. Khi có nhiều hơn hai con kiến gặp nhau cùng lúc, hoặc khi hai con bò theo hai hướng vuông góc gặp nhau, mỗi con cứ tiếp tục bò mà không đổi hướng. Khi một con kiến nào đó chạm phải cạnh ngoài cùng của bảng ô vuông, con kiến đó bị chết.*

Xét mọi khả năng có thể (tập hợp các ô vuông có kiến lúc xuất phát, hướng bò của mỗi con...), hãy xác định thời điểm muộn nhất có thể mà trong bảng còn có kiến, hoặc chỉ ra trường hợp mà vĩnh viễn tồn tại kiến trong bảng.

Bài này khó đấy! Chả thế mà nó được chọn làm bài C5 trong Shortlist của IMO năm 2011 (tức là bài mà theo đánh giá của ban soạn đề, có "cấp độ khó thứ 5" trong các bài Tổ hợp. Năm đó bài tổ hợp được chọn là C3). Nó khó, vì kiến được bò 4 hướng, chứ không phải hai hướng như trên cành đa. Đã thế, khi thì quay đầu lúc gặp nhau, khi lại không quay.

Tuy vậy, nếu bạn đã nắm vững ý tưởng giải quyết bài 1 (là bài quá dễ), thì bài này xem ra cũng chẳng có gì là khó!

Ta lại bắt đầu với tình huống "tầm thường". Giả sử chỉ có MỘT con kiến, lại đứng ở ô tận cùng phía "đông-nam" của bảng, và bò về phía tây. Khi đó sau $\left(m-\frac{1}{2}\right)$ phút, không còn kiến nào trong bảng. Tuy nhiên, chưa nên vội kết luận là dù có bao nhiêu con đi nữa, chúng cũng không tồn tại sau thời điểm $\left(m-\frac{1}{2}\right)$.

Ta xét tình huống có 2 con kiến: một con ở góc đông-nam, bò về phía tây, một con ở góc tây-nam, bò về phía đông. Hai con gặp nhau ở điểm giữa của cạnh dưới của bảng, tại thời điểm $\left(\frac{m-1}{2}\right)$. Sau đó một con sống thêm được $\frac{1}{2}$ phút nữa, con kia quay lên hướng bắc và sống thêm $m-\frac{1}{2}$ phút nữa. Như vậy, kiến tồn tại trong bảng đến phút thứ $\frac{3m}{2}-1$.

Kinh nghiệm giải bài 1 giúp ta dự đoán rằng, dù xuất phát có bao nhiêu con kiến, ở vị trí nào, bò thế nào thì cũng sau không quá $\frac{3m}{2}-1$ phút là không còn con kiến nào sống sót.

Ta xét hai con kiến a và a', đi hai hướng ngược nhau và gặp nhau. Người tinh mắt sẽ thấy mỗi con đều quay phải 90° theo quy định, nhưng người không tinh lắm có thể nhầm là mỗi con đều quay *trái* 90°. Đối với cả hai người, lời giải bài toán là như nhau. Vì thế, ngay từ đầu, có thể quy định khi hai con bò hai chiều ngược nhau mà gặp nhau, cả hai con có thể hoặc

đồng thời quay phải, hoặc đồng thời quay trái tuỳ ý thích của chúng!

Giả thiết trên đây không làm thay đổi kết quả bài toán, nhưng lại làm bài toán đơn giản đi nhiều (tương tự như trong trường hợp "cành đa", ta xem các con kiến có thể không cần đổi hướng). Như vậy, ngay từ đầu, các con kiến có thể phân thành hai loại: loại ĐN gồm những con kiến luôn quay về hướng đông hoặc nam khi gặp con đối đầu, loại TB gồm những con luôn quay về tây hoặc bắc trong những trường hợp như vậy.

Để tính thời gian "tồn tại" của một con kiến, ta cần xem nó gặp con "đối đầu" lần cuối ở vị trí nào, sau đó chỉ còn xem khoảng cách xa nhất có thể từ đó đến cạnh của bảng ô vuông.

Để thuận tiện, ta chọn một hệ toạ độ sao cho các đỉnh của bảng ô vuông có toạ độ lần lượt là $(0,0)$, $(m,0)$, (m,m), $(0,m)$. Rõ ràng tại thời điểm t, các con kiến ĐB đều đã làm tổng cộng t bước bò sang phải hoặc bò lên trên, do đó đã đi ra khỏi vùng các điểm có toạ độ $\{(x,y) : x+y < t+1\}$, các con kiến TN đều đã bò khỏi vùng $\{(x,y) : x+y > 2m-t-1\}$. Như vậy, tại thời điểm t, các cuộc "đối đầu" chỉ có thể diễn ra trong vùng xác định bởi

$$\{(x,y) : t+1 \le x+y \le 2m-t-1\}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta có thể xem có hai loại kiến BT và ĐN (tức là luôn quay bắc hoặc tây, và quay nam hoặc đông). Lý luận như trên suy ra rằng, các cuộc "đối đầu" chỉ có thể xẩy ra trong vùng xác định bởi $\{|x-y| \le m-t-1\}$.

Tóm lại, tại thời điểm t các cuộc "đối đầu" chỉ có thể diễn ra trong vùng xác định bởi

$$B(t) = \{(x,y) : t+1 \le x+y \le 2m-t-1\} \cup \{|x-y| \le m-t-1\}.$$

Nếu một con kiến nào đó hoàn toàn không gặp cuộc đối đầu nào thì nó sẽ chết sau không quá $\left(m-\frac{1}{2}\right) < \left(\frac{3m}{2}-1\right)$ phút.



Minh họa: Linh Rab

Bây giờ ta giả sử một con kiến ĐB có lần đối đầu cuối cùng tại điểm (x,y), thời điểm t. Khi đó $(x,y) \in B(t)$, và như vậy $x+y \ge t+1$, $x-y \ge -(m-t-1)$. Từ đó ta có

$$x \ge \frac{(t+1)-(m-t-1)}{2} = t+1-\frac{m}{2}.$$

Do tính đối xứng, ta có

$$y \ge t+1-\frac{m}{2}.$$

Sau cuộc đối đầu cuối cùng này, con kiến bò thẳng đến cạnh của bảng ô vuông, và sống thêm không quá $m-\min\{x,y\}$ phút nữa. Như vậy, tổng thời gian mà con kiến "tồn tại" trong bảng ô vuông là không vượt quá

$$t+(m-\min\{x,y\}) \le t+m-\left(t+1-\frac{m}{2}\right) = \frac{3m}{2}-1.$$

Do tính đối xứng, ước lượng trên cũng đúng cho các con kiến TN.

Kết luận: trong mọi trường hợp, chậm nhất là sau phút thứ $\frac{3m}{2}-1$ sẽ không còn con kiến nào trong bảng. Điều này không phụ thuộc số kiến, cách phân bố cũng như cách mà mỗi con kiến bò trong bảng.

Như đã thấy, con kiến leo "cành đa 1 chiều" là bài toán dễ, nhưng bò trên mặt phẳng hai chiều thì đã không còn đơn giản nữa.

Các bạn thử cho kiến bò trong không gian ba chiều nhé, sẽ là bài toán rất hay đấy. Còn nếu là "con kiến trong không gian n chiều" thì đã là đề tài nghiên cứu không hề đơn giản.



- *Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn) và phải được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).*
- *Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).*
- *Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kì này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ trên trang bài toán hoặc bài giải. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).*
- *Các bài toán đề xuất đã gửi cho Chuyên mục không được công bố hoặc gửi đăng ở bất cứ nơi nào khác, khi chưa có sự đồng ý của Tạp chí Pi.*
- *Pi tin chắc rằng các lời giải đã được đăng tải trên Tạp chí cho các bài toán của "Thách thức kì này" chưa hẳn đã là những lời giải tốt nhất có thể cho các bài toán đó. Vì thế, Pi rất vui lòng đón nhận từ bạn đọc những lời giải mới tốt hơn, hay hơn cho các bài toán đã có lời giải được đăng tải trên Tạp chí.*

Thách thức kì này

Dành cho cấp THCS

P71. Tìm tất cả các số thực x sao cho trong 4 số $x^2+4\sqrt{3}$, $x^2-\frac{4}{x}$, $x^2+\frac{4}{x}$ và $x^4+40\sqrt{3}$, có đúng một số không phải là số nguyên.

Lưu Thanh Hà (Kiên Giang)

P72. Tìm tất cả các bộ 3 số nguyên dương (a,b,c) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1/ $a = b+[\sqrt{4c-1}]$;

2/ $ab = c^2+1$.

(Với x là số thực, $[x]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Hà Duy Hưng (Hà Nội)

P73. Gọi O, I, H tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, trực tâm của tam giác nhọn, không đều ABC. Chứng minh rằng không có đỉnh nào của tam giác ABC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH.

(*Tam giác nhọn* là tam giác có tất cả các góc trong đều là góc nhọn).

Nguyễn Thanh Giang (Tp. Hồ Chí Minh) st.

P74. Người ta tô tất cả các cạnh và các đường chéo của một 2017-giác đều bởi k màu, sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

a) Với mỗi màu x và với mỗi cặp đỉnh A, B của 2017-giác đều, hoặc đoạn thẳng AB được tô bởi màu x, hoặc tồn tại đỉnh C (của 2017-giác đều) sao cho các đoạn thẳng AC và BC cùng được tô bởi màu x;

b) Với X, Y, Z là 3 đỉnh đôi một phân biệt tùy ý của 2017-giác đều, tất cả các cạnh của tam giác XYZ được tô bởi tối đa 2 màu.

Chứng minh rằng $k \leq 2$.

(2017-giác đều là đa giác đều có 2017 đỉnh).

Hà Thanh (Cần Thơ) st.

Dành cho cấp THPT

P75. Cho dãy số thực dương $(a_n)_{n\geq 1}$ thoả mãn điều kiện:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} < 4a_n,$$

với mọi n nguyên dương.

Chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_{n+1},$$

với mọi n nguyên dương.

Nguyễn Đình Toàn (Paris, CH Pháp)

P76. Cho tam giác ABC với $AB = AC \neq BC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Đường thẳng BI cắt AC tại D; đường thẳng đi qua D và vuông góc với AC cắt AI tại E. Chứng minh rằng điểm đối xứng với I qua AC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Nhóm "TTTH" st.

P77. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Nguyễn Văn Quý (Hà Nội)

P78. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 3$ có tính chất: Với $2n$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tùy ý, thỏa mãn điều kiện

$$|a_k| + |b_k| = 1,$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$, luôn tồn tại n số $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{-1; 1\}$ sao cho

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} x_k b_k\right| \leq 1.$$

Nhóm "TTTH" st.

P79. Cho số nguyên $n > 1$. Giả sử p, q là các số nguyên dương lẻ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1/ $1 \leq p, q \leq 2^n$;

2/ $\cos\left(\frac{kp\pi}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{kq\pi}{2^n}\right) < 0$, với mọi số nguyên dương lẻ k.

Chứng minh rằng $p + q = 2^n$.

Vũ Thế Khôi (Hà Nội)

P80. Có 2017 người tham dự một Festival quốc tế. Biết rằng, trong mỗi nhóm tùy ý gồm 7 người (trong số 2017 người vừa nêu) đều có tối đa 12 cặp quen nhau. Hỏi, trong Festival có thể có tối đa bao nhiêu cặp quen nhau ?

Nguyễn Khắc Minh (Hà Nội)

Giải bài kì trước

P41. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn đúng 3 trong 4 điều kiện dưới đây:

1/ $a = 5b + 9$;

2/ $a + 6$ chia hết cho b;

3/ $a + 2017b$ chia hết cho 5;

4/ $a + 7b$ là số nguyên tố.

Lời giải (*theo ý tưởng giải của bạn Catherine Doan, lớp 6, trường Bessborough, Moncton, NB, Canada*)**.**

Giả sử (a, b) là cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Ta có các Nhận xét sau:

Nhận xét 1. (a, b) không thể thỏa mãn đồng thời các điều kiện 1/ và 4/.

Thật vậy, giả sử ngược lại, (a, b) thỏa mãn đồng thời 1/ và 4/. Khi đó, phải có

$$a + 7b = (5b + 9) + 7b = 12b + 9$$

là số nguyên tố; đây là điều vô lí, vì $12b + 9$ lớn hơn 3 và chia hết cho 3.

Nhận xét 2. (a, b) không thể thỏa mãn đồng thời các điều kiện 3/ và 4/.

Thật vậy, giả sử ngược lại, (a, b) thỏa mãn đồng thời 3/ và 4/. Khi đó, phải có

$$a + 2017b = (a + 7b) + 2010b$$

chia hết cho 5.

Suy ra, $a + 7b$ chia hết cho 5, mâu thuẫn với $a + 7b$ là số nguyên tố, do $a + 7b > 5$.

Từ hai Nhận xét trên, hiển nhiên suy ra (a, b) không thể thỏa mãn 4/, vì nếu ngược lại thì (a, b) chỉ có thể thỏa mãn tối đa 2 điều kiện (2/ và 4/), trái với yêu cầu của đề bài.

Như vậy, (a, b) thỏa mãn đồng thời 1/, 2/ và 3/.

Từ 1/ và 2/, suy ra

$$a + 6 = (5b + 9) + 6 = 5b + 15$$

chia hết cho b. Dẫn tới, 15 chia hết cho b. Suy ra, $b \in \{1; 3; 5; 15\}$. $(*)$

Từ 1/ và 3/, suy ra

$$\begin{aligned} a + 2017b &= (5b + 9) + 2017b \\ &= 5(404b + 1) + 2b + 4 \end{aligned}$$

chia hết cho 5.

Dẫn tới, $2b + 4$ chia hết cho 5. Kết hợp điều này với $(*)$, ta được $b = 3$.

Do đó, $a = 5b + 9 = 24$.

Bằng cách thử lại trực tiếp, dễ thấy cặp số (24, 3) thỏa mãn đồng thời các điều kiện 1/, 2/, 3/ và không thỏa mãn điều kiện 4/ của đề bài, vì $24 + 7 \times 3 = 45$ không là số nguyên tố.

Vậy, (24, 3) là cặp số duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét.

1. Lưu ý rằng, cặp số (24, 3) là kết quả của mạch suy luận logic dạng "suy ra", xuất phát từ giả thiết cặp (a, b) thỏa mãn yêu cầu đề bài, mà không phải dạng "khi và chỉ khi". Vì thế, việc kiểm tra sự thỏa mãn, không thỏa mãn các điều kiện đề bài của cặp số (24, 3) (gọi vắn tắt là "*thử lại*") là điều cần thiết, bắt buộc.

2. Các bạn *Nguyễn Hải Nam* (lớp 8A6, trường THCS Cầu Giấy, Quận Cầu Giấy, Tp. Hà Nội) và *Nguyễn Tấn Tài* (lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước) có ý tưởng giải giống ý tưởng giải của lời giải trên; tuy nhiên, lời giải của cả hai bạn đều chưa hoàn chỉnh, vì thiếu phần "thử lại". Đây cũng là nhược điểm chung của tất cả các lời giải mà Tòa soạn đã nhận được (bạn Catherine Doan có kiểm tra lại điều kiện 4/). Cùng với nhược điểm này, hầu hết các lời giải mà Tòa soạn nhận được còn có một nhược điểm chung khác. Đó là sự thiếu chuẩn xác trong diễn đạt

các suy luận logic, khi dùng thuật ngữ "đúng - sai" để diễn đạt sự thỏa mãn hay không thỏa mãn các điều kiện của đề bài; chẳng hạn, từ hai Nhận xét 1 và 2 rút ra kết luận "điều kiện 4/ không đúng" là một diễn đạt sai.

3. Ngoài ba bạn Catherine Doan, Nguyễn Hải Nam và Nguyễn Tấn Tài, các bạn *Nguyễn Quang Minh* (lớp 8 trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp. Biên Hòa, tỉnh Đồng Nai), *Chu Thị Thanh* (lớp 9E1, trường THCS Vĩnh Tường, huyện Vĩnh Tường, tỉnh Vĩnh Phúc), *Doãn Quang Tiến* (10A1, trường THPT Phú Mỹ, huyện Tân Thành, tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu), *Lâm Nhựt Thịnh* (lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh) và *hai bạn khuyết danh* cũng lập luận đúng để tìm ra "nếu (a,b) là cặp số thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $(a,b)=(24,3)$". Ngoại trừ bạn Tiến, tất cả các bạn còn lại đều dựa trên Nhận xét 1 (trong lời giải nêu trên) để tìm ra cặp (a,b) thông qua việc xét 2 trường hợp: (a,b) thỏa mãn đồng thời các điều kiện 1/, 2/, 3/ và (a,b) thỏa mãn đồng thời các điều kiện 2/, 3/, 4/.

Nguyễn Khắc Minh

P42. Hỏi có thể chọn ra tối đa bao nhiêu số từ 2017 số nguyên dương đầu tiên, sao cho tổng lập phương của hai số bất kì trong các số được chọn ra là một số không chia hết cho 4?

Lời giải (*phỏng theo lời giải của bạn Nguyễn Quang Minh, lớp 8, trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp. Biên Hòa, tỉnh Đồng Nai*)**.**

Dễ thấy, với a là số nguyên dương, ta có:

+ Nếu a là số chẵn (tức a chia hết cho 4 hoặc chia 4 dư 2) thì a^3 chia hết cho 4; (1)
+ Nếu a là số lẻ (tức a chia 4 dư 1 hoặc chia 4 dư 3) thì a^3 chia 4 dư 1 (nếu a chia 4 dư 1) hoặc a^3 chia 4 dư 3 (nếu a chia 4 dư 3). (2)

Xét một cách chọn bất kì một số số thỏa mãn yêu cầu đề bài, từ 2017 số nguyên dương đầu tiên. Giả sử số số được chọn là n $(n\geq 2)$ và trong đó có m số chẵn, k số lẻ.

Do tổng lập phương của 2 số bất kì trong n số được chọn không chia hết cho 4, nên từ (1) và (2) suy ra, với a,b là hai số nguyên dương tùy ý trong n số đó, ta sẽ có hoặc a,b khác tính chẵn lẻ, hoặc a,b cùng lẻ và đồng thời có cùng số dư khi chia cho 4. Từ đó, do trong 2017 số nguyên dương đầu tiên có 505 số chia 4 dư 1 và 504 số chia 4 dư 3, nên suy ra ta có:

+ $m\leq 1$ (vì nếu $m\geq 2$ thì trong n số được chọn tồn tại 2 số cùng chẵn);
+ $k\leq 505$ (vì nếu $k\geq 506$ thì trong n số được chọn tồn tại 2 số cùng lẻ và đồng thời có số dư khác nhau khi chia cho 4).

Như vậy, $n=m+k\leq 1+505=506$.

Dễ thấy, từ 2017 số nguyên dương đầu tiên, chọn ra 506 số gồm 505 số chia 4 dư 1 và một số chẵn (tùy ý) ta sẽ có 506 số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy, có thể chọn ra tối đa 506 số từ 2017 số nguyên dương đầu tiên sao cho tổng lập phương của hai số bất kì trong các số được chọn là một số không chia hết cho 4.

Nhận xét.

1. Nhằm giúp các học sinh THCS chưa làm quen với các kiến thức cơ bản về đồng dư tiện theo dõi lời giải, trong lời giải trên, kí hiệu đồng dư không được sử dụng trong việc diễn đạt các lập luận toán học có liên quan.

2. Kết quả quen thuộc sau đây đã được sử dụng để tìm số các số chia 4 dư 1 và số các số chia 4 dư 3, trong 2017 số nguyên dương đầu tiên: "*Cho m,k,n là các số nguyên dương, với $1\leq m\leq k\leq n$. Kí hiệu s là số các số nguyên dương chia k dư m, trong n số nguyên dương đầu tiên; ta có*:

$$s=\left[\frac{n-m+k}{k}\right].$$

([x] *kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x*)."

3. Các bạn *Catherine Doan* (lớp 6, trường Bessborough, Moncton, NB, Canada), *Chu Thị Thanh* (lớp 9E1, trường THCS Vĩnh Tường, huyện Vĩnh Tường, tỉnh Vĩnh Phúc), *Lâm Nhựt Thịnh* (lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh) và một bạn *khuyết danh* có ý giải đúng. Lời giải của các bạn, nói chung, gồm 2 phần: phần 1 xác định điều kiện để tổng lập phương của hai số nguyên dương không chia hết cho 4; phần 2, dựa trên kết quả phần 1, chỉ ra cách chọn cụ thể để có nhiều nhất các số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Trong phần 2, lập luận của các bạn còn mang tính cảm nhận trực quan; các bạn chưa lập luận (chứng minh) được một cách chặt chẽ, về mặt toán học, tính tối đa của số các số được chọn ra. Trong lời giải trên, để chứng minh có thể chọn ra nhiều nhất 506 số, ta lập luận số số thỏa mãn yêu cầu đề bài không thể vượt quá 506, sau đó chỉ ra cách chọn 506 số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Đây là phương pháp lập luận logic thông dụng trong việc giải các bài toán dạng tìm giá trị lớn nhất của một đại lượng nào đó.

Lưu Thanh Hà

P43. Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(2-a)(2-b)(2-c)\geq abc.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Lời giải (*của tác giả bài toán*)**.**

Nhận thấy, nếu (a,b,c) là bộ số thỏa mãn điều kiện đề bài thì $(|a|,|b|,|c|)$ cũng là bộ số thỏa mãn điều kiện đề bài. Hơn nữa, ở bất đẳng thức cần chứng minh, khi thay a,b,c tương ứng bởi $|a|,|b|,|c|$, giá trị của vế trái không tăng và giá trị của vế phải không giảm. Vì thế, để giải bài đã ra, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ở đề bài với điều kiện $a,b,c\geq 0$ và $a^2+b^2+c^2=3$.

Dễ thấy, trong 3 số a,b,c luôn tồn tại 2 số cùng không lớn hơn 1 hoặc cùng không nhỏ hơn 1. Không mất tổng quát, giả sử 2 số đó là a,b. Khi đó, ta có:

$$(a-1)(b-1)\geq 0,$$

hay $1+ab\geq a+b$.

Do đó

$$\begin{aligned}(2-a)(2-b)&=4-2(a+b)+ab\\&\geq 4-2(1+ab)+ab\\&=2-ab.\end{aligned}\qquad(1)$$

Từ ràng buộc đối với a,b,c, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$4=(a^2+b^2)+(c^2+1)\geq 2ab+2c.$$

Suy ra $2\geq ab+c$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$$(2-a)(2-b)\geq c\geq 0.\qquad(3)$$

Từ (2), ta có $2-c\geq ab\geq 0$. (4)

Nhân (3) và (4), vế với vế, ta được bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu của đề bài.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở tất cả các bất đẳng thức đã nêu trên.

Vì thế, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét.

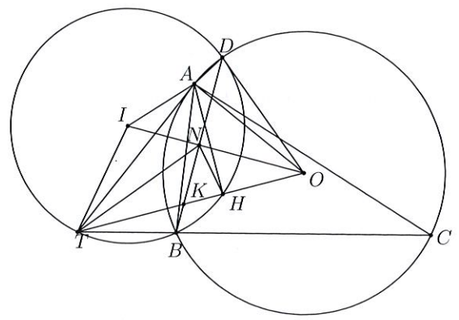
Các bạn *Nguyễn Minh Hùng* (lớp 9B, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Tp. Hà Nội), *Trần Tiến Mạnh* (lớp 11A1, trường THPT chuyên, ĐH Vinh), *Doãn Quang Tiến* (lớp 10A1, trường THPT Phú Mỹ, huyện Tân Thành, tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu) và *một bạn khuyết danh* có lời giải đúng.

Võ Quốc Bá Cẩn

P44. Cho tam giác nhọn ABC, với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên OT. Đường tròn ngoại tiếp tam giác TBH cắt (O) tại điểm thứ hai D khác B. BD cắt TO tại K. Chứng minh rằng

$$\frac{HT}{HO} = 2\frac{KT}{KO}.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Trần Vũ Duy, Tp. Hồ Chí Minh*)**.**



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác TBH.

Gọi N là giao điểm của OI và BD.

Vì BD là dây cung chung của (I) và (O) nên $OI \perp BD$ tại N, hay $BN \perp OI$. (1)

Vì TA tiếp xúc với (O) tại A nên tam giác TAO vuông tại A. Mà $AH \perp TO$ nên

$$OH \cdot OT = OA^2.$$

Từ đó, vì $OA = OB$ nên $OH \cdot OT = OB^2$. (2)

Suy ra OB là tiếp tuyến của đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác TBH. Do đó $OB \perp BI$. Vì thế, OBI là tam giác vuông tại B. Kết hợp điều này với (1), suy ra

$$ON \cdot OI = OB^2 \quad (3)$$

$$IN \cdot IO = IB^2 = IT^2. \quad (4)$$

Từ (2) và (3), suy ra $ON \cdot OI = OH \cdot OT$. Do đó $INHT$ là tứ giác nội tiếp. Vì thế

$$\angle HNO = 180^\circ - \angle HNI = \angle ITH. \quad (5)$$

Từ (4), suy ra $\dfrac{IN}{IT} = \dfrac{IT}{IO}$.

Do đó $\triangle INT \sim \triangle ITO$ $(c.g.c)$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra

$$\angle INT = \angle ITO = \angle ITH = \angle HNO.$$

Do đó

$$\angle TNB = 90^\circ - \angle INT = 90^\circ - \angle HNO = \angle HNB.$$

Suy ra NB là phân giác trong của góc $\angle HNT$.

Mà $NO \perp NB$ nên NO là phân giác ngoài của góc $\angle HNT$..

Từ đó, vì T,H,O thẳng hàng và NB cắt TO tại K, suy ra

$$\frac{KT}{KH} = \frac{OT}{OH}.$$

Do đó

$$\frac{HT}{HO} = \frac{OT}{OH} - 1 = \frac{KT}{KH} - 1 = \frac{KT - KH}{KH} = \frac{KT - KH + HT}{KH + HO} = \frac{2KT}{KO}.$$

Nhận xét.

Các bạn *Trương Mạnh Tuấn* (lớp 11 Toán, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội) và *Trần Tiến Mạnh* (lớp 11 Toán, trường THPT chuyên, ĐH Vinh) cũng có lời giải đúng.

Trần Quang Hùng

P45. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD, $CD = 2AB$. Gọi P là trung điểm của CD. Trên các đường thẳng BC,AD, lấy các điểm M,N tùy ý ($M \in BC, N \in AD$). PA cắt DM tại R và PB cắt CN tại Q. Các đường tròn (PAB) và (PQR) cắt nhau tại điểm thứ hai X khác P. Trên đường tròn (PQR), lấy điểm Y sao cho $PY \parallel QR$. Gọi H là trực tâm của tam giác PAB và gọi K là điểm đối xứng với H qua QR. Chứng minh rằng $XK \perp XY$.

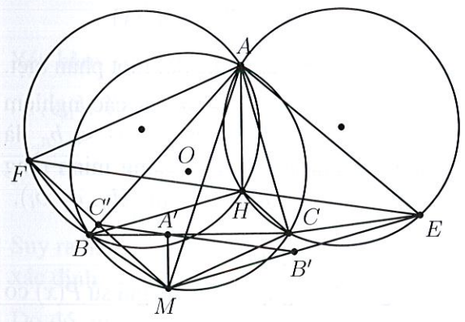
Lời giải (*dựa theo lời giải của nhóm bạn Nguyễn Hoàng Đức, Trịnh Hoàng Hiệp và Nguyễn Tấn Tài, lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước*)**.**

Trước hết, ta chứng minh Bổ đề sau:

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O); H là trực tâm của tam giác đó. M là một điểm thuộc (O). A',B',C' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC,CA,AB. E,F theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua AC,AB. Khi đó

1. A',B',C' thẳng hàng và E,H,F thẳng hàng.
2. Đường thẳng đi qua 3 điểm A',B',C' song song với đường thẳng đi qua 3 điểm E,H,F.

Chứng minh.



Trong phần trình bày dưới đây, kí hiệu XYZ chỉ đường thẳng đi qua ba điểm thẳng hàng X,Y,Z; $R_{XY}(Z)$ kí hiệu điểm đối xứng của Z qua XY.

1) Vì A',B',C' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC,CA,AB nên các bộ bốn điểm M,A',B',C và M,A',C',B là các bộ 4 điểm cùng thuộc một đường tròn.

Do đó

$$\begin{aligned}(A'B',A'C') &\equiv (A'B',A'M) + (A'M,A'C') \pmod{\pi}\\ &\equiv (CB',CM) + (BM,BC') \pmod{\pi}\\ &\quad (\text{ vì } C \in (A'B'M) \text{ và } B \in (A'C'M))\\ &\equiv (CA,CM) + (BM,BA) \pmod{\pi}\\ &\quad (\text{ vì } A \in CB' \text{ và } A \in BC')\\ &\equiv (BA,BM) + (BM,BA) \pmod{\pi}\\ &\quad (\text{ vì } B \in (CAM))\\ &\equiv (BA,BA) \equiv 0 \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Vì vậy A',B',C' thẳng hàng.

Dễ thấy

$$\begin{aligned}(HA,HB) &\equiv (CB,CA) \pmod{\pi}\\ &\quad (\text{ vì } HA \perp CB \text{ và } HB \perp CA)\\ &\equiv (MB,MA) \pmod{\pi} (\text{ vì } M \in (ABC))\\ &\equiv (FA,FB) \pmod{\pi} (\text{ vì } F = R_{AB}(M)).\end{aligned}$$

Do đó A,B,H,F cùng thuộc một đường tròn.

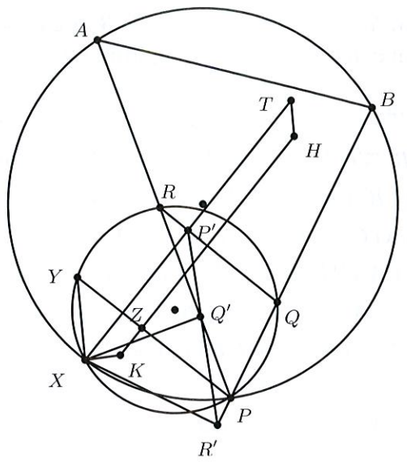
Tương tự A,C,H,E cùng thuộc một đường tròn. Vì vậy

$$\begin{aligned}(HE,HF) &\equiv (HE,HA) + (HA,HF) \pmod{\pi}\\ &\equiv (CE,CA) + (BA,BF) \pmod{\pi}\\ &\quad (\text{ vì } C \in (HEA) \text{ và } B \in (HAF))\\ &\equiv (CA,CM) + (BM,BA) \pmod{\pi}\\ &\quad (\text{ vì } M = R_{AC}(E) = R_{AB}(F))\\ &\equiv (BA,BM) + (BM,BA) \pmod{\pi}\\ &\quad (\text{ vì } B \in (CAM))\\ &\equiv (BA,BA) \equiv 0 \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó H,E,F thẳng hàng.

2) Chú ý rằng B',C' theo thứ tự là trung điểm của ME,MF, nên theo kết quả phần 1, suy ra $A'B'C' \parallel EHF$.

Trở lại bài toán.



Gọi Z là giao điểm của HK và YP; T là điểm đối xứng của X qua QR; P', Q', R' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của X trên QR, RP, PQ.

Dễ thấy X, Q, P', R' cùng thuộc một đường tròn. (1)

Theo phần 1 của Bổ đề, P', Q', R' thẳng hàng. (2)

Theo phần 2 của Bổ đề, $P'Q' \parallel HT$. (3)

Vì $P'X$ và HK cùng vuông góc với QR nên $P'X \parallel HK$. (4)

Dễ thấy

$$\begin{aligned}(YZ,YX) &\equiv (YP,YX) (\bmod \pi) \text{ (vì } P \in YZ)\\ &\equiv (QP,QX) (\bmod \pi) \text{ (vì } Q \in (YPX))\\ &\equiv (QR',QX) (\bmod \pi) \text{ (vì } R' \in QP)\\ &\equiv (P'R',P'X) (\bmod \pi) \text{ (do (1))}\\ &\equiv (P'Q',P'X) (\bmod \pi) \text{ (do (2))}\\ &\equiv (HT,HK) \bmod \pi) \text{ (do(3) và (4))}\\ &\equiv (KH,KX) (\bmod \pi)\\ &\quad \text{(vì } K = R_{RQ}(H) \text{ và } X = R_{RQ}(T))\\ &\equiv (KZ,KX) (\bmod \pi) \text{ (vì } Z \in KH).\end{aligned}$$

Do đó K, X, Y, Z cùng thuộc một đường tròn.

Kết hợp với $ZK \perp ZY$, suy ra $XK \perp XY$.

Nhận xét.

1. Lời giải nêu trên cho thấy, không cần tới các giả thiết "*ABCD* là hình thang, $CD = 2AB$, P là trung điểm của CD", vẫn có thể chứng minh được kết luận của bài toán. Nói cách khác, các giả thiết đó là các giả thiết thừa.

2. Sau khi lược bỏ các giả thiết thừa nêu trên, bài toán có thể được phát biểu lại như sau:

"*Cho tam giác PAB. R và Q, tương ứng, là các điểm tùy ý trên các cạnh PA, PB. Các đường tròn (PAB) và (PQR) cắt nhau tại điểm thứ hai X, khác P. Trên đường tròn (PQR), lấy điểm Y sao cho PY ∥ QR. Gọi H là trực tâm của tam giác PAB và gọi K là điểm đối xứng với H qua QR. Chứng minh rằng XK ⊥ XY.*"

3. Lời giải của một số bạn không hoàn chỉnh do chỉ đúng với một số thế hình nhất định (trong số các thế hình có thể, thỏa mãn các giả thiết của đề bài).

Nguyễn Minh Hà

P46. Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực, bậc n và có n nghiệm thực đôi một phân biệt ($n \geq 2$)

a) Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) = P(x) + P'(x)$$

cũng có n nghiệm thực đôi một phân biệt.

b) Gọi $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ là các nghiệm của $P(x)$ và $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ là các nghiệm của $Q(x)$. Chứng minh rằng $\min\limits_{1\leq i\leq n-1}(a_{i+1}-a_i) \leq \min\limits_{1\leq i\leq n-1}(b_{i+1}-b_i)$.

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

a) Không mất tổng quát, có thể giả sử $P(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1.

Vì $a_1, a_2, ..., a_n$ là các nghiệm của $P(x)$ nên

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

Do đó

$$\begin{aligned}Q(a_i) &= P'(a_i)\\ &= (a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)\end{aligned}$$

Vì $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ nên từ (1) suy ra dãy $Q(a_1), Q(a_2), \ldots, Q(a_n)$ là dãy đan dấu.

Vì vậy, giữa a_i và a_{i+1} , $i = \overline{1, n-1}$, có ít nhất 1 nghiệm của $Q(x)$.

Hơn nữa, ta có:

- Nếu n chẵn thì $Q(a_1) < 0$ và $\lim\limits_{n\to-\infty} Q(x) = +\infty$; do đó, $Q(x)$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-\infty, a_1)$.
- Nếu n lẻ thì $Q(a_1) > 0$ và $\lim\limits_{n\to-\infty} Q(x) = -\infty$; do đó $Q(x)$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-\infty, a_1)$.

Từ các lập luận trên đây, hiển nhiên suy ra $Q(x)$ có n nghiệm thực phân biệt.

b) Giả sử ngược lại, tồn tại j sao cho $b_{j+1} - b_j < \min\limits_{1\leq i\leq n-1}(a_{i+1}-a_i)$.

Do b_j, b_{j+1} là nghiệm của $Q(x)$ nên

$$\frac{P'(b_j)}{P(b_j)} = \frac{P'(b_{j+1})}{P(b_{j+1})} = -1. \quad (2)$$

Ta có:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-a_i}. \quad (3)$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{a_1; a_2; \ldots, a_n\}$. Từ (3), ta có

$$f'(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-a_i)^2}.$$

Suy ra hàm $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Do đó, từ (2) suy ra tồn tại $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$ sao cho $b_j < a_k < b_{j+1}$.

Từ giả thiết phản chứng, suy ra

$$a_{i+1} - a_i > b_{j+1} - b_j,$$

với mọi $i = 1, 2, ..., n-1$. Do đó

$$b_j - a_i > b_{j+1} - a_{i+1}, \quad (4)$$

với mọi $i = 1, 2, ..., n-1$.

Nhận thấy, với mọi $i \leq k-1$, cả hai vế của (4) đều dương; với mọi $i \geq k$, cả hai vế của (4) đều âm. Vì thế, với mọi $i = 1, 2, ..., n-1$, ta có

$$\frac{1}{b_j - a_i} < \frac{1}{b_{j+1} - a_{i+1}}.$$

Từ đó, với lưu ý $\dfrac{1}{b_j - a_n} < 0 < \dfrac{1}{b_{j+1} - a_1}$, suy ra

$$\begin{aligned}\frac{P'(b_j)}{P(b_j)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{b_j - a_i} + \frac{1}{b_j - a_n}\\ &< \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{b_{j+1} - a_{i+1}} + \frac{1}{b_{j+1} - a_1}\\ &= \frac{P'(b_{j+1})}{P(b_{j+1})},\end{aligned}$$

mâu thuẫn với (2).

Vì vậy, giả sử phản chứng là sai và ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét.

1. Sử dụng định lý Rolle, ta có thể chứng minh khá dễ dàng $Q(x)$ có n nghiệm thực, trong đó có $n-1$ nghiệm phân biệt, nằm xen kẽ với các nghiệm của $P(x)$. Tuy nhiên, chứng minh nghiệm còn lại khác tất cả $n-1$ nghiệm đó thì không đơn giản.

2. Đây là một bài toán khó. Để giải nó, phải biết kết hợp nhuần nhuyễn các kiến thức đại số và giải tích, trong đó có tính chất cơ bản sau đây:

"*Nếu đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n$ thì*

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

và $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{1}{x-x_1} + \dfrac{1}{x-x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x-x_n}$."

3. Bài đã ra là một bổ đề quan trọng trong lời giải bài toán 6, ngày thi thứ hai của Olympic

Toán học sinh viên thế giới, tổ chức tại Blagoevgrad, tháng 8 năm 2007. Bài toán đó như sau:

"*Cho $f \neq 0$ là một đa thức với hệ số thực. Định nghĩa dãy đa thức $f_0, f_1, f_2, \ldots$ bởi:*

$$f_0 = f \text{ và } f_{n+1} = f_n + f_n', \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương N sao cho với mọi $n \geq N$, tất cả các nghiệm của f_n đều thực."

Ý tưởng giải là sử dụng bổ đề (tức bài đã ra) để chứng minh bằng quy nạp theo bậc của f rằng f_n sẽ có n nghiệm thực phân biệt, nếu n đủ lớn.

Mời bạn đọc thử sức với bài toán vừa nêu trên.

4. Tính đến thời điểm Tạp chí lên trang, Toà soạn không nhận được một lời giải đúng nào từ bạn đọc.

Trần Nam Dũng

P47. Tìm số thực k bé nhất sao cho với mọi bộ ba số thực không âm a,b,c, ta luôn có

$$abc + k((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) + 2 \geq a+b+c.$$

Lời giải (*của nhóm bạn Nguyễn Hoàng Đức, Trịnh Hoàng Hiệp, Nguyễn Tấn Tài, lớp 11A trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước*)**.**

Kí hiệu (1) là bất đẳng thức đã nêu trong đề bài.

Giả sử k là số thực sao cho bất đẳng thức (1) đúng với mọi bộ ba số thực $a,b,c \geq 0$.

Trong (1), thay $a = 0, b = c = 2$, ta được

$$2 + 8k \geq 4.$$

Suy ra $k \geq \dfrac{1}{4}$.

Ta sẽ chứng minh $k = \dfrac{1}{4}$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm, tức chứng minh với mọi bộ ba số thực không âm a,b,c, ta luôn có

$$abc + 2 + \frac{1}{4}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \geq a+b+c$$

hay

$$a^2+b^2+c^2+2abc+4 \geq ab+bc+ca+2(a+b+c). \quad (2)$$

Xét 3 số $a(b-1)(c-1)$, $b(c-1)(a-1)$, $c(a-1)(b-1)$, ta có

$$a(b-1)(c-1)\cdot b(c-1)(a-1)\cdot c(a-1)(b-1) = abc(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \geq 0.$$

Suy ra có ít nhất một trong 3 số nêu trên không âm. Không mất tổng quát, giả sử

$$a(b-1)(c-1) \geq 0.$$

Khi đó, ta có $abc \geq a(b+c-1)$.

Do vậy, bất đẳng thức (2) sẽ được chứng minh, nếu ta chứng minh được

$$a^2+b^2+c^2+2a(b+c-1)+4 \geq ab+bc+ca+2(a+b+c)$$

hay

$$a^2-(4-b-c)a+b^2+c^2-bc-2(b+c)+4 \geq 0 \quad (3)$$

với mọi $a,b,c \geq 0$.

Dễ thấy, vế trái của (3) được biến đổi thành

$$\left(a-2+\frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b-c)^2.$$

Vì thế, (3) luôn đúng với mọi a,b,c và do đó, với mọi $a,b,c \geq 0$.

Vậy $k = \dfrac{1}{4}$ là giá trị cần tìm, theo yêu cầu của đề bài.

Nhận xét.

1. Để chứng minh trong 3 số $a(b-1)(c-1)$, $b(c-1)(a-1)$, $c(a-1)(b-1)$, có ít nhất một số không âm, ngoài cách đã nêu trong lời giải trên, còn có thể lập luận như sau:

"Theo nguyên lý Dirichlet, trong 3 số a,b,c phải có hai số nằm cùng phía đối với 1 (nghĩa là, hoặc cùng không vượt quá 1 hoặc cùng không nhỏ hơn 1). Suy ra, trong 3 số $(b-1)(c-1)$, $(c-1)(a-1)$, $(a-1)(b-1)$, có ít nhất một số không âm. Từ đây, kết hợp với giả thiết $a,b,c \geq 0$, ta sẽ thu được điều muốn chứng minh."

2. Để chứng minh (3), ngoài cách gom bình phương đúng như trong lời giải trên, ta còn có thể chứng minh bằng cách coi biểu thức ở vế trái của (3) như một tam thức bậc 2 đối với a và xét dấu biệt thức của tam thức đó.

3. Theo bạn *Nguyễn Hữu Thắng* (lớp 11A1, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, tỉnh Nghệ An), bất đẳng thức (2) còn có thể được chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3.

Bất đẳng thức Schur bậc 3 được phát biểu như sau:

"Với mọi bộ 3 số thực $a,b,c \geq 0$, ta luôn có

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba biến nhận các giá trị bằng nhau hoặc một biến bằng 0, hai biến còn lại nhận giá trị bằng nhau."

Trong các bất đẳng thức bậc 3 của 3 biến không âm, bất đẳng thức Schur là một bất đẳng thức mạnh, có nhiều ứng dụng. Ngoài cách viết nêu trên, bất đẳng thức Schur bậc 3 còn có một số cách viết thông dụng khác dưới đây:

(i) $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0.$

(ii) $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc.$

(iii) $(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(ab+bc+ca)(a+b+c).$

Bất đẳng thức (i) có thể được chứng minh một cách đơn giản như sau:

"Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $a-b=x, b-c=y$, ta có $x,y \geq 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$ax(x+y) - bxy + cy(x+y) \geq 0. \quad (*)$$

Dễ thấy

$$(*) \Leftrightarrow ax^2 + (a-b+c)xy + cy^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng và do đó $(*)$ được chứng minh."

Dạng (i) cho phép tổng quát hoá bất đẳng thức Schur bậc 3 thành:

$$a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-c)(b-a) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0.$$

4. Ngoài các bạn Nguyễn Hoàng Đức, Trịnh Hoàng Hiệp, Nguyễn Tấn Tài và Nguyễn Hữu Thắng có lời giải tốt, các bạn có tên sau đây cũng có lời giải đúng: *Doãn Quang Tiến* (lớp 10A1, trường THPT Phú Mỹ, huyện Tân Thành, tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu), *Trần Tiến Mạnh* (lớp 11A1, trường THPT chuyên ĐH Vinh) và *Nguyễn Văn Trường* (lớp 11.7, trường THPT Bình Hưng Hoà, Quận Bình Tân, Tp. Hồ Chí Minh).

Trần Nam Dũng

Lời bàn.

Từ lời giải nêu trên có thể thấy $k = \dfrac{1}{4}$ cũng là số thực nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức đã nêu trong bài **P47** luôn đúng với mọi bộ ba số thực a,b,c mà $abc \geq 0$.

Nhóm TTTH

P48. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ và tất cả các bộ n số nguyên $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ sao cho đa thức

$$S(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 3$$

phân tích được thành tích của hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Lời giải (*dựa theo lời giải của tác giả bài toán*).

Giả sử $n \geq 2$ và $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ là các số nguyên sao cho ta có phân tích

$$S(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i) - 3 = G(x)\cdot H(x) \qquad (1)$$

trong đó, $G(x)$ và $H(x)$ là hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Không mất tổng quát, giả sử $\deg G \geq \deg H$. Rõ ràng, hệ số cao nhất của $G(x)$ và $H(x)$ phải cùng bằng 1, hoặc cùng bằng –1. Hiển nhiên, có thể coi cả hai hệ số đó cùng bằng 1 (vì trong trường hợp cả hai hệ số đó cùng bằng –1, ta thay $G(x)$ và $H(x)$ tương ứng bởi $-G(x)$ và $-H(x)$).

Qui ước, trong phần trình bày dưới đây:

– mỗi số nguyên i, mà $1 \leq i \leq n$, sẽ được gọi tắt là một *chỉ số*.

– với X là tập hữu hạn, kí hiệu $|X|$ là số phần tử của nó.

Xét các trường hợp sau:

1. *Trường hợp 1*: $n \geq 4$.

Lúc này, nếu $\deg H = 1$, tức là $H(x) = x - a$, với a là một số nguyên nào đó, thì từ (1) ta sẽ có

$$\prod_{i=1}^{n}(a-a_i) = 3.$$

Điều này là vô lý, vì 3 không thể biểu diễn được thành tích của nhiều hơn ba số nguyên đôi một phân biệt. Vì vậy

$$2 \leq \deg H \leq \deg G \leq n-2. \qquad (2)$$

Đặt $R(x) = G(x) + H(x)$. Ta có các Nhận xét sau:

Nhận xét 1: $R(x)$ là một đa thức khác hằng, với hệ số nguyên và $\deg R \leq n-2$.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, $R(x)$ là một đa thức hằng, $R(x) \equiv c$. Khi đó, (1) được viết lại thành

$$\prod_{i=1}^{n}(x-a_i) - 3 \equiv cG(x) - (G(x))^2.$$

Trong đồng nhất thức trên, hệ số cao nhất của đa thức ở vế trái là 1, của đa thức ở vế phải là –1, và ta gặp mâu thuẫn. Vậy, $R(x)$ không thể là đa thức hằng.

Các kết luận còn lại của Nhận xét 1 là hiển nhiên.

Nhận xét 2: Với mọi chỉ số i, $R(a_i) \in \{-2;2\}$.

Chứng minh: Từ (1), với i là một chỉ số tùy ý, ta có

$$G(a_i)\cdot H(a_i) = -3.$$

Suy ra $(G(a_i), H(a_i)) \in \{(-3,1);(3,-1);(1,-3);(-1,3)\}$.

Do đó $R(a_i) \in \{-2,2\}$, với mọi chỉ số i.

Nhận xét 3: Với mọi bộ ba chỉ số i,j,k mà $i \neq j$ và $R(a_i) = R(a_j) \neq R(a_k)$, ta có

$$(a_k - a_i)(a_k - a_j) \mid 4.$$

Chứng minh: Đặt $c = R(a_k)$. Theo Nhận xét 2, $c \in \{-2;2\}$ và $R(a_i) = R(a_j) = -c$. Áp dụng định lý Bezout (và Nhận xét 1), ta có phân tích

$$R(x) + c = (x-a_i)(x-a_j)P(x),$$

trong đó $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Do đó $R(a_k) + c = (a_k - a_i)(a_k - a_j)P(a_k)$. Suy ra

$$(a_k - a_i)(a_k - a_j) \mid |R(a_k) + c| = 2|c| = 4.$$

Nhận xét 4: $(a_i - a_j) \mid 4$ với mọi cặp chỉ số i, j mà $R(a_i) \neq R(a_j)$.

Chứng minh: Theo Nhận xét 2, $R(a_i), R(a_j) \in \{-2;2\}$. Vì thế, từ giả thiết $R(a_i) \neq R(a_j)$, suy ra trong hai số $R(a_i)$ và $R(a_j)$, có một số bằng -2 và số còn lại bằng 2. Không mất tổng quát, giả sử $R(a_i) = -2$ và $R(a_j) = 2$. Khi đó, ta có

$$R(x) + 2 = (x-a_i)P(x)$$

và

$$R(x) - 2 = (x-a_j)Q(x),$$

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên.

Do đó $4 = R(a_j) + 2 = (a_j - a_i)P(a_j)$

và $-4 = R(a_i) - 2 = (a_i - a_j)P(a_i)$.

Suy ra $(a_i - a_j) \mid 4$.

Xét các trường hợp sau:

- *Trường hợp 1a:* $n \geq 6$.

Vì $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ nên với mọi chỉ số $i \geq 6$, ta có $a_i - a_1 > 4$. Vì thế, theo Nhận xét 4, phải có

$$R(a_i) = R(a_1) \text{ với mọi chỉ số } i \geq 6. \qquad (3)$$

Suy ra $R(a_6) = R(a_1)$, mà

$$|(a_4 - a_6)(a_4 - a_1)| \geq 2 \times 3 > 4,$$

nên theo Nhận xét 3, phải có

$$R(a_6) = R(a_1) = R(a_4).$$

Từ đó, do $|(a_2 - a_6)(a_2 - a_4)| \geq 4 \times 2 > 4$ nên theo Nhận xét 3, phải có

$$R(a_1) = R(a_6) = R(a_4) = R(a_2).$$

Vì thế, do $|(a_5 - a_1)(a_5 - a_2)| \geq 4 \times 3 > 4$ nên theo Nhận xét 3, phải có

$$R(a_6) = R(a_4) = R(a_1) = R(a_2) = R(a_5). \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra phương trình

$$R(x) - R(a_1) = 0$$

có nhiều hơn $n-2$ nghiệm. Điều này mâu thuẫn với Nhận xét 1.

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ trường hợp 1a không thể xảy ra.

Tiếp theo, gọi I là tập hợp các chỉ số i mà $R(a_i) = 2$ và J là tập hợp các chỉ số i mà $R(a_i) = -2$. Theo Nhận xét 2, hiển nhiên ta có

$$|I| + |J| = n. \qquad (5)$$

- *Trường hợp 1b:* $n = 5$.

Từ (1) và (2), suy ra $\deg G = 3$, $\deg H = 2$. Do đó, $R(x) - 2$ và $R(x) + 2$ đều là các đa thức bậc ba có hệ số cao nhất bằng 1. Suy ra $|I| \leq 3$ và $|J| \leq 3$. Kết hợp với (5), suy ra chỉ có thể xảy ra một trong hai khả năng sau:

– *Khả năng 1:* $|I| = 3$ và $|J| = 2$.

– *Khả năng 2:* $|I| = 2$ và $|J| = 3$.

Xét khả năng 1. Giả sử $I = \{i_1 < i_2 < i_3\}$. Theo định lý Bezout, ta có phân tích

$$R(x) - 2 = (x-a_{i_1})(x-a_{i_2})(x-a_{i_3}). \qquad (6)$$

Nếu $1 \in J$ thì từ (6) suy ra

$$\begin{aligned} 4 &= |R(a_1) - 2| \\ &= |(a_1 - a_{i_1})(a_1 - a_{i_2})(a_1 - a_{i_3})|. \end{aligned} \qquad (7)$$

Mặt khác, do $1 \notin I$ nên $1 < i_1 < i_2 < i_3$. Vì thế

$$(a_1 - a_{i_1})(a_1 - a_{i_2})(a_1 - a_{i_3}) \geq 1 \times 2 \times 3 = 6,$$

trái với (7). Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ $1 \notin J$. Do đó, $1 \in I$; vì thế, $i_1 = 1$.

Bằng cách lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được $i_3 = 5$.

Từ đó, suy ra $i_2 \in \{2;3;4\}$.

+ Nếu $i_2 = 2$ thì do $4 \in J$ nên từ (6), ta có

$$\begin{aligned} 4 &= |R(a_4) - 2| = |(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_5)| \\ &\geq 3 \times 2 \times 1 = 6, \end{aligned}$$

vô lí.

+ Nếu $i_2 = 3$ thì do $2 \in J$ nên từ (6), ta có

$$\begin{aligned} -4 &= R(a_2) - 2 \\ &= (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_5) > 0, \end{aligned}$$

vô lí.

+ Nếu $i_2 = 4$ thì do $3 \in J$ nên từ (6), ta có

$$\begin{aligned} -4 &= R(a_4) - 2 \\ &= (a_3 - a_1)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) > 0, \end{aligned}$$

vô lí.

Những điều vô lí nhận được ở trên cho thấy khả năng 1 không thể xảy ra.

Bằng cách tương tự, ta chứng minh được khả năng 2 cũng không thể xảy ra.

Như vậy, trường hợp 1b không thể xảy ra.

- *Trường hợp 1c:* $n = 4$.

Từ (1) và (2), dễ thấy $\deg G = \deg H = 2$. Suy ra, $R(x) - 2$ và $R(x) + 2$ đều là các đa thức bậc hai có hệ số cao nhất bằng 2. Suy ra $|I| \leq 2$ và $|J| \leq 2$. Kết hợp với (5), suy ra $|I| = |J| = 2$.

Xét cặp chỉ số i, j mà $R(a_i) \neq R(a_j)$. Theo Nhận xét 2, trong 2 số $R(a_i)$ và $R(a_j)$, phải có một số bằng –2 và số còn lại bằng 2. Không mất tổng quát, giả sử $R(a_i) = -2$ và $R(a_j) = 2$. Khi đó, ta có

$$R(x) + 2 = 2(x - a_i)P(x)$$

và

$$R(x) - 2 = 2(x - a_j)Q(x),$$

trong đó, $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên và có hệ số cao nhất bằng 1.

Từ đó, dễ dàng suy ra

$$2(a_i - a_j) \mid 4.$$

Dẫn tới $(a_i - a_j) \mid 2$.

Từ đó, vì $a_4 - a_1 > 2$ nên phải có

$$R(a_1) = R(a_4).$$

Do đó, hoặc $\{1;4\} = J$ hoặc $\{1;4\} = I$.

Nếu $\{1;4\} = J$ thì $\{2;3\} = I$ và

$$R(x) + 2 = 2(x - a_1)(x - a_4).$$

Từ đó, suy ra

$$4 = R(a_2) + 2 = 2(a_2 - a_1)(a_2 - a_4) < 0,$$

vô lí.

Vì vậy, $\{1;4\} = I$. Do đó, $\{2;3\} = J$ và

$$R(x) - 2 = 2(x - a_1)(x - a_4).$$

Từ đó, suy ra

$$4 = -(R(a_2) - 2) = 2(a_2 - a_1)(a_4 - a_2) \quad (8)$$

và

$$4 = -(R(a_3) - 2) = 2(a_3 - a_1)(a_4 - a_3) \quad (9)$$

Vì $a_2 - a_1$, $a_4 - a_2$ là các số nguyên dương và $a_4 - a_2 \geq 2$ nên từ (8) suy ra

$$a_2 - a_1 = 1 \text{ và } a_4 - a_2 = 2.$$

Vì $a_3 - a_1, a_4 - a_3$ là các số nguyên dương và $a_3 - a_1 \geq 2$ nên từ (9) suy ra

$$a_3 - a_1 = 2 \text{ và } a_4 - a_3 = 1.$$

Từ đó, suy ra a_1, a_2, a_3, a_4, theo thứ tự đó, là 4 số nguyên liên tiếp.

Ngược lại, với $n = 4$ và a_1, a_2, a_3, a_4, theo thứ tự đó, là 4 số nguyên liên tiếp, ta có

$$\begin{aligned} S(x) &= (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) - 3 \\ &= (x - a_1)(x - a_1 - 1)(x - a_1 - 2)(x - a_1 - 3) - 3 \\ &= ((x - a_1)(x - a_1 - 3) - 1)((x - a_1)(x - a_1 - 3) \\ &\quad + 3), \end{aligned}$$

thỏa mãn yêu cầu đề ra.

2. *Trường hợp 2:* $n = 3$. Lúc này, $\deg G = 2$ và $\deg H = 1$. Suy ra

$$S(x) = \prod_{i=1}^{3}(x - a_i) - 3 = (x - a)G(x),$$

trong đó, a là một số nguyên và $G(x)$ là đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Do đó, $(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3) = 3$.

Từ đó, do $a - a_1, a - a_2, a - a_3$ là các số nguyên và $a - a_1 > a - a_2 > a - a_3$ nên suy ra

$$a - a_1 = 1, a - a_2 = -1 \text{ và } a - a_3 = -3.$$

Như vậy, a_1, a_2, a_3 là một cấp số cộng với công sai 2.

Ngược lại, với $n = 3$ và a_1, a_2, a_3 là các số nguyên, theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng với công sai 2, ta có

$$\begin{aligned} S(x) &= (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - 3 \\ &= (x - a_1)(x - a_1 - 2)(x - a_1 - 4) - 3 \\ &= (x - a_1 - 1)((x - a_1)^2 - 5(x - a_1) + 3), \end{aligned}$$

thỏa mãn yêu cầu đề ra.

3. *Trường hợp 3:* $n = 2$.

Lúc này, $\deg G = \deg H = 1$. Suy ra

$$\begin{aligned} S(x) &= (x - a_1)(x - a_2) - 3 \\ &= (x - a)G(x), \end{aligned}$$

trong đó, a là một số nguyên và $G(x)$ là một nhị thức bậc nhất, với hệ số nguyên.

Do đó, $(a - a_1)(a - a_2) = 3$.

Từ đó, do $a - a_1, a - a_2$ là các số nguyên và $a - a_1 > a - a_2$ nên suy ra

$$a - a_1 = 3, a - a_2 = 1$$

hoặc

$$a - a_1 = -1, a - a_2 = -3.$$

Ở cả 2 khả năng nêu trên, ta đều có $a_2 = a_1 + 2$.

Ngược lại, với $n = 2$ và a_1, a_2 là các số nguyên thỏa mãn $a_2 = a_1 + 2$, ta có

$$\begin{aligned} S(x) &= (x - a_1)(x - a_2) - 3 \\ &= (x - a_1)(x - a_1 - 2) - 3 \\ &= (x - a_1 + 1)(x - a_1 - 3), \end{aligned}$$

thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Vậy, tóm lại, tất cả các số nguyên $n \geq 2$ và tất cả các bộ n số nguyên $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

- $n = 4$ và a_1, a_2, a_3, a_4, theo thứ tự đó, là 4 số nguyên liên tiếp;
- $n = 3$ và a_1, a_2, a_3 là các số nguyên, theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng với công sai 2;
- $n = 2$ và a_1, a_2 là các số nguyên thỏa mãn $a_2 = a_1 + 2$.

Nhận xét.

Cho tới thời điểm Tạp chí lên trang, Tòa soạn chỉ nhận được duy nhất lời giải của bạn *Trương Mạnh Tuấn* (lớp 11A1, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội). Bạn Tuấn đã chỉ ra đúng các giá trị n cần tìm, nhưng chưa tìm được tất cả các bộ số nguyên $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nguyễn Duy Thái Sơn

P49. Kí hiệu S là tập hợp gồm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện

$$(2^n + 3^n)(3^n + 5^n) \equiv 0 \pmod{n^2}.$$

a) Chứng minh rằng nếu $n \in S$ và $n > 5$ thì $n \equiv 0 \pmod{55}$ hoặc $n \equiv 0 \pmod{2105}$.

b) Chứng minh rằng S là tập vô hạn.

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

a) Giả sử $n \in S$ và $n > 5$.

Nếu n là số chẵn thì $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$. Suy ra

$$(2^n + 3^n)(3^n + 5^n) \equiv 0 \pmod{4},$$

là điều vô lí, do $3^n + 5^n \equiv 2 \pmod{8}$ (vì n chẵn) và $2^n + 3^n$ là số lẻ.

Như vậy, n là số lẻ. Gọi p là ước nguyên tố bé nhất của n. Ta có $p \geq 3$ và

$$2^n + 3^n \equiv 0 \pmod{p} \quad (1)$$

hoặc

$$3^n + 5^n \equiv 0 \pmod{p}. \quad (2)$$

• Nếu (1) xảy ra thì $p \neq 3$. Do đó, tồn tại số nguyên a sao cho

$$3a \equiv 1 (\bmod p). \quad (3)$$

Từ (1), ta có $(2a)^n + (3a)^n \equiv 0 \pmod p$. Suy ra

$$(2a)^n \equiv -(3a)^n \equiv -1 \pmod p.$$

Do đó, $(2a)^{2n} \equiv 1 \pmod p$. (4)

Gọi h là cấp của $2a$ theo modulo p (*với độc giả chưa biết khái niệm này, có thể xem định nghĩa ở phần Nhận xét dưới đây*). Từ (3), ta có $h \mid 2n$.

Hơn nữa, vì $(2a, p) = 1$ nên theo định lí Phecma nhỏ, ta có

$$(2a)^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Vì thế, $h \mid p-1$. Kết hợp với (4), suy ra $h \mid (2n, p-1) = 2$ (do p là ước nguyên tố bé nhất của n).

Do đó, $h = 1$ hoặc $h = 2$.

Nếu $h = 1$, ta có $2a \equiv 1 \pmod p$. Suy ra $(2a)^2 \equiv 1 \pmod p$.

Nếu $h = 2$, ta có $(2a)^2 \equiv 1 \pmod p$.

Như vậy, bất luận trường hợp nào xảy ra, ta luôn có $(2a)^2 \equiv 1 \pmod p$.

Suy ra $(6a)^2 \equiv 3^2 \pmod p$. Kết hợp với (3), suy ra $2^2 \equiv 3^2 \pmod p$, hay $5 \equiv 0 \pmod p$. Do đó, $p = 5$.

• Nếu (2) xảy ra thì $p \neq 3$ và $p \neq 5$. Do đó, tồn tại số nguyên a sao cho

$$5a \equiv 1 \pmod p.$$

Tiếp theo, bằng cách lập luận tương tự trên, ta sẽ được $3^2 \equiv 5^2 \pmod p$, hay $16 \equiv 0 \pmod p$, là điều vô lí, do $p > 2$. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ (2) không thể xảy ra.

Vậy, 5 là ước nguyên tố bé nhất của n và

$$2^n + 3^n \equiv 0 \pmod 5. \quad (5)$$

Tiếp theo, với m là số nguyên dương và p là số nguyên tố, ta kí hiệu $v_p(m)$ là số lớn nhất trong các số tự nhiên k mà $p^k \mid m$. Dễ thấy:

– Nếu a, b là 2 số nguyên dương mà $a \mid b$ thì $v_p(a) \leq v_p(b)$;

– $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$, với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $m = v_5(n)$. Ta có $m \geq 1$ (do (5)) và $n = 5^m \cdot q$, với q là số nguyên dương lẻ (do n lẻ) và không chia hết cho 5.

Đặt $k = 5^{m-1} \cdot q$. Ta có

$$2^n + 3^n = (2^k + 3^k) \cdot \sum_{i=0}^{4} (2^k)^i \cdot (-3^k)^{4-i}.$$

Từ đó, đặt $s = \sum_{i=0}^{4} (2^k)^i \cdot (-3^k)^{4-i}$, ta có

$$v_5(2^n + 3^n) = v_5(2^k + 3^k) + v_5(s). \quad (6)$$

Vì k là số lẻ nên $2^k \equiv -3^k \pmod 5$; suy ra

$$(2^k)^i \cdot (-3^k)^{4-i} \equiv 2^{4k} \pmod 5,$$

với mỗi $i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Do đó

$$s \equiv 5 \cdot 2^{4k} \pmod 5.$$

Suy ra, $v_5(s) = 1$. Do đó, theo (6), ta có

$$v_5(2^n + 3^n) = 1 + v_5(2^k + 3^k).$$

Vì thế, bằng suy luận qui nạp lùi, ta sẽ được

$$v_5(2^n + 3^n) = m + v_5(2^q + 3^q). \quad (7)$$

Vì q là số lẻ nên

$$2^q + 3^q = 5 \cdot \sum_{i=0}^{q-1} 2^i \cdot (-3)^{q-1-i}.$$

Suy ra

$$v_5(2^q + 3^q) = v_5(5) + v_5(t) = 1 + v_5(t),$$

trong đó, $t = \sum_{i=0}^{q-1} 2^i \cdot (-3)^{q-1-i}$.

Bằng các lập luận tương tự như đối với s, ta có

$$t \equiv q \cdot 2^{q-1} \pmod 5.$$

Từ đó, vì q không chia hết cho 5 nên $v_5(t) = 0$. Do đó

$$v_5(2^q + 3^q) = 1.$$

Vì thế, theo (7), ta có

$$v_5(2^n + 3^n) = m + 1 = v_5(n) + 1. \quad (8)$$

Vì $3^n + 5^n \neq 0 \pmod 5$ nên

$$v_5((2^n + 3^n)(3^n + 5^n)) = v_5(2^n + 3^n). \quad (9)$$

Mà $(2^n + 3^n)(3^n + 5^n) \equiv 0 \pmod{n^2}$ (theo giả thiết) nên

$$v_5((2^n + 3^n)(3^n + 5^n)) \geq v_5(n^2) = 2v_5(n). \quad (10)$$

Từ (9) và (10), suy ra

$$v_5(2^n + 3^n) \geq 2v_5(n).$$

Kết hợp với (8), ta được $v_5(n) \leq 1$. Vì vậy, $v_5(n) = 1$. Do vậy

$$n = 5q,$$

trong đó q là số nguyên dương lẻ lớn hơn 1 (do $n > 5$) và không chia hết cho 5.

Gọi u là ước nguyên tố bé nhất của q; ta có $u > 5$. Khi đó, từ giải thiết của bài toán suy ra phải có

$$(2^5)^q + (3^5)^q \equiv 0 \pmod u \quad (11)$$

hoặc $$(3^5)^q + (5^5)^q \equiv 0 \pmod u. \quad (12)$$

Áp dụng cho u các lập luận tương tự như đối với p ở phần đầu lời giải, ta sẽ được:

– Nếu (11) xảy ra thì

$$(2^5)^2 \equiv (3^5)^2 \pmod u. \quad (13)$$

– Nếu (12) xảy ra thì

$$(3^5)^2 \equiv (5^5)^2 \pmod u. \quad (14)$$

• Xét (13). Ta có

$$(13) \Leftrightarrow (3^5 - 2^5)(3^5 + 2^5) \equiv 0 \pmod u.$$

Nếu $3^5 - 2^5 \equiv 0 \pmod u$ thì

$$(2^5)^q \equiv (3^5)^q \pmod u,$$

mâu thuẫn với (11).

Vì vậy, phải có $3^5 + 2^5 \equiv 0 \pmod u$, hay $275 = 5^2 \cdot 11 \equiv 0 \pmod u$. Mà $u > 5$ nên suy ra $u = 11$. Do đó, $n = 5q \equiv 0 \pmod{55}$.

• Xét (14). Bằng các lập luận tương tự như xét (13), ta sẽ được $u = 421$. Do đó

$$n = 5q \equiv 0 \pmod{2105}.$$

Vậy, khẳng định ở phần a) của bài toán được chứng minh.

b) Giả sử $n_k > 1$ là một số thuộc S.

Theo phần a), n_k phải là một số lẻ. Do đó $(2^{n_k} + 3^{n_k})(3^{n_k} + 5^{n_k})$ chia hết cho 8, nhưng không chia hết cho 16. Kết hợp điều này với định nghĩa tập S, suy ra

$$(2^{n_k} + 3^{n_k})(3^{n_k} + 5^{n_k}) = 8n_k^2 \cdot m_k, \quad (15)$$

trong đó m_k là một số nguyên dương lẻ.

Theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$2^{n_k} > 1 + n_k, 3^{n_k} > 1 + 2n_k \text{ và } 5^{n_k} > 1 + 4n_k.$$

Do đó

$$8n_k^2 \cdot m_k = (2^{n_k} + 3^{n_k})(3^{n_k} + 5^{n_k}) > 18n_k^2.$$

Suy ra $m_k > 2$.

Gọi p là một ước nguyên tố của m_k , ta có $p > 2$ (do m_k là số lẻ).

Xét $n_{k+1} = p \cdot n_k$. Vì p là số lẻ nên

$$2^{n_{k+1}} + 3^{n_{k+1}} = (2^{n_k} + 3^{n_k})a$$

và $$3^{n_{k+1}} + 5^{n_{k+1}} = (3^{n_k} + 5^{n_k})b,$$

trong đó $a = \sum_{i=0}^{p-1} (2^{n_k})^i \cdot (-3^{n_k})^{p-1-i}$

và $$b = \sum_{i=0}^{p-1} (3^{n_k})^i \cdot (-5^{n_k})^{p-1-i}.$$

Vì $p \mid m_k$ nên từ (15), suy ra

$$(2^{n_k} + 3^{n_k})(3^{n_k} + 5^{n_k}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

– Nếu $2^{n_k} + 3^{n_k} \equiv 0 \pmod{p}$ thì

$$a \equiv p \cdot (2^{n_k})^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

– Nếu $3^{n_k} + 5^{n_k} \equiv 0 \pmod{p}$ thì

$$b \equiv p \cdot (3^{n_k})^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Như vậy, bất luận trường hợp nào xảy ra, ta luôn có $ab \equiv 0 \pmod{p}$.

Vì vậy

$$\begin{aligned}&(2^{n_{k+1}} + 3^{n_{k+1}})(3^{n_{k+1}} + 5^{n_{k+1}})\\ &= (2^{n_k} + 3^{n_k})(3^{n_k} + 5^{n_k})ab\\ &= 8n_k^2 \cdot m_k \cdot ab\\ &\equiv 0 \pmod{n_k^2 \cdot p^2} \equiv 0 \pmod{n_{k+1}^2}.\end{aligned}$$

Suy ra $n_{k+1} \in S$.

Hơn nữa, từ cách xác định n_{k+1}, hiển nhiên có $n_{k+1} > n_k$.

Như vậy, ta đã chứng minh được nếu có $n_k \in S$ và $n_k > 1$ thì tồn tại $n_{k+1} \in S$ và $n_{k+1} > n_k$.(16)

Bằng kiểm tra trực tiếp, ta thấy $n_1 = 5 \in S$. Do đó, theo (16) sẽ có vô số số thuộc S. Nói cách khác, S là tập vô hạn.

Nhận xét.

1. *Cấp của một số nguyên dương* được định nghĩa như sau:

"Giả sử m và n là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Số nhỏ nhất trong các số nguyên dương h mà $n^h \equiv 1 \pmod{m}$ được gọi là cấp của n theo modulo m."

Một tính chất rất cơ bản của khái niệm trên đã được sử dụng trong lời giải trên để tìm ra các đánh giá cho cấp của $2a$ theo modulo p. Đó là:

"Giả sử m và n là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Nếu h là cấp của n theo modulo m và s là số nguyên dương sao cho $n^s \equiv 1 \pmod{m}$ thì h là ước của s."

Tính chất trên có thể được chứng minh như sau:

"Giả sử $s = hq + r$, trong đó q, r là các số tự nhiên và $0 \le r < h$. Ta có:

$$n^s - 1 = n^{hq+r} - 1 = n^r(n^{hq} - 1) + n^r - 1. \ (*)$$

Vì $n^h - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ (theo giả thiết) nên

$$n^{hq} - 1 = (n^h)^q - 1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Mà $n^s - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ (theo giả thiết) nên từ $(*)$ suy ra

$$n^r - 1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Từ đó, vì $r < h$ và h là cấp của n theo modulo m nên suy ra $r = 0$, hay $h \mid s$."

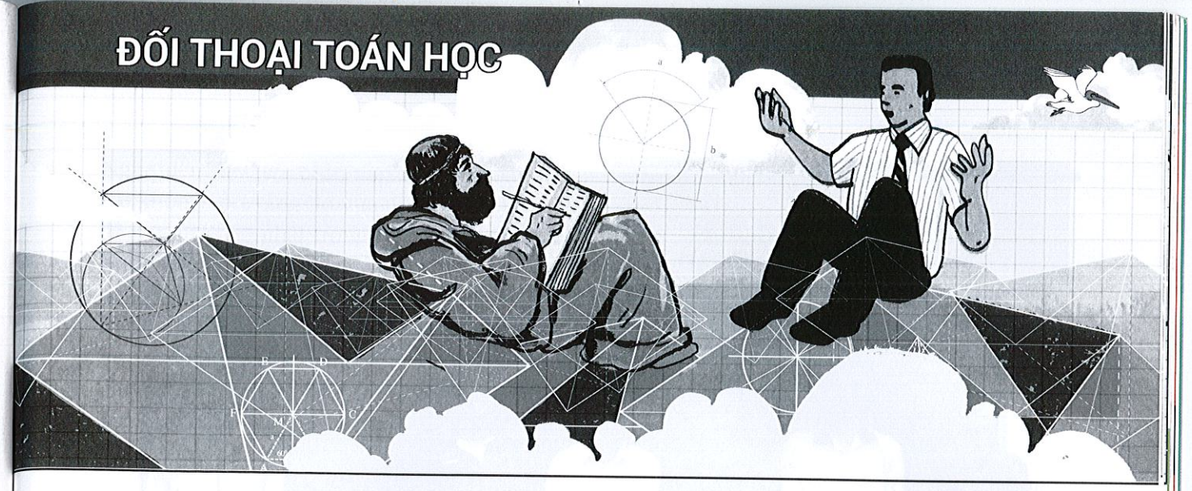
2. Bằng cách hoàn toàn tương tự như chứng minh phần b) của bài đã ra, có thể chứng minh được khẳng định mạnh hơn dưới đây:

"Có vô số số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $n^2 \mid 2^n + 3^n$."

3. Lời giải của bạn *Phùng Tiến Đạt* (lớp 10A, trường THPT Chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước) là lời giải đúng duy nhất, trong số các lời giải mà Tòa soạn đã nhận được cho tới thời điểm Tạp chí lên trang. Một số bạn khác hoặc chỉ giải đúng phần a) hoặc chỉ giải đúng phần b) của bài đã ra.

Hà Duy Hưng

• *Lời giải bài* **P50** *sẽ được công bố trong một bài viết ở Chuyên mục "Giải toán cùng bạn", trong một số tới đây của Tạp chí Pi.*



Đội tuyển IMO 2017:

Toán không chỉ là những bài tập, ***Toán là cuộc đời***

Mi Ly thực hiện

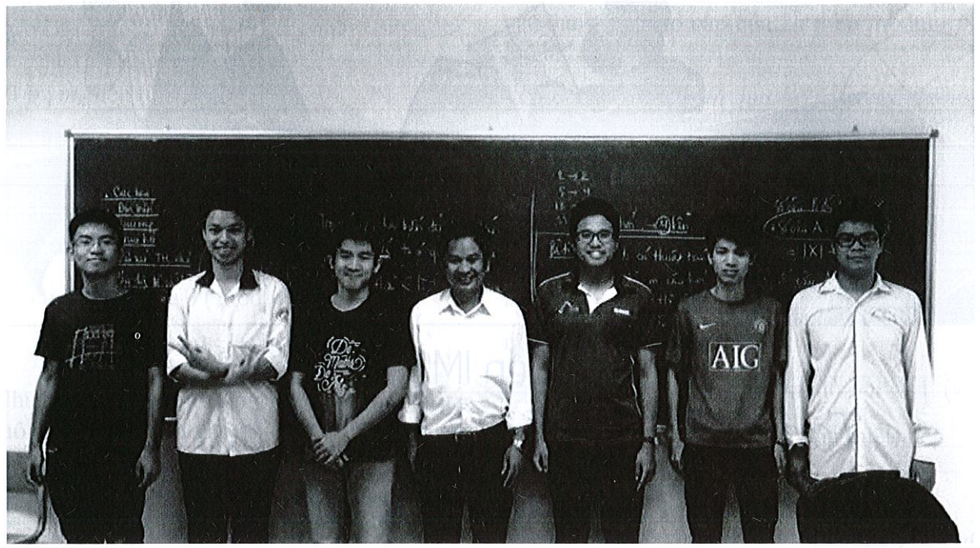
Bài viết này là một thử thách thú vị. Trước mắt tôi là 6 chàng trai yêu Toán, sắp xuất hiện trên Pi, một tờ tạp chí của những người yêu Toán. Nhìn vào sự hồ hởi lẫn rụt rè của các bạn khi trò chuyện, tôi nhận ra mình không muốn đi vào vết xe cũ mòn của những bài báo ca ngợi học sinh nghèo vượt khó.

Khó khăn, đôi khi, lại không xấu. Khó khăn có thể rèn luyện ý chí của người ta thành "sắt đá", như cách mô tả chính mình của Dũng, cậu học sinh chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa, người đạt điểm số cao nhất trong kỳ thi chọn đội tuyển hồi tháng 4 vừa qua.

Sau IMO là cuộc lựa chọn kinh điển giữa Toán ứng dụng - Toán lý thuyết

Đội tuyển Olympic Toán học Quốc tế (International Mathematical Olympiad - IMO) của Việt Nam năm nay gồm sáu học sinh: Lê Quang Dũng (THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hoá); Phạm Nam Khánh (THPT chuyên Hà Nội Amsterdam, Hà Nội); Nguyễn Cảnh Hoàng (THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An); Phan Nhật Duy (THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh); Hoàng Hữu Quốc Huy (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu) và Đỗ Văn Quyết (THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc).

Trong những ngày tháng 6 nắng đổ lửa xen lẫn mưa trắng trời ở Hà Nội, sáu thành viên của đội tuyển IMO như ở ẩn trong một chốn riêng. Đó là ký túc xá trường chuyên Hà Nội Amsterdam. Đều là dân chuyên Toán với nhau, lại đều xuất sắc và thường xuyên cùng góp mặt



Đội tuyển toán Quốc tế 2017

Nguồn ảnh: Facebook Trần Nam Dũng

trong các kỳ thi lớn, họ đã là bạn, là đối thủ, trước khi trở thành đồng đội trong IMO.

Tại đây, họ trải qua lịch ôn luyện căng thẳng trải dài từ thứ Hai đến sáng thứ Bảy hàng tuần. Cuối tuần, Khánh, thành viên duy nhất người Hà Nội và cũng nhỏ tuổi nhất nhóm, ra ngoài gặp gỡ bạn bè hoặc về nhà. Còn Dũng (Thanh Hóa) và Quyết (Vĩnh Phúc) tranh thủ bắt xe về thăm gia đình. Vậy nên cuộc gặp với tôi vào chiều muộn thứ Bảy khiến khoảng thời gian của họ thêm thu hẹp. Còn lại Hoàng (Nghệ An, được bầu làm lớp trưởng), Duy (Hà Tĩnh) và Huy (Bà Rịa - Vũng Tàu) xa quê nên ở lại trường.

Trong cuộc gặp, tôi hỏi ở Hà Nội mùa hè có nhiều sự kiện văn hóa giáo dục hay, nhóm có tranh thủ tham gia không. Duy lắc đầu, nói: "Bọn em ít khi ra ngoài lắm chị". Riêng Dũng còn dừng dùng Facebook từ tháng 5 để tập trung ôn luyện. Còn với Huy, học sinh đầu tiên của Vũng Tàu góp mặt trong đội tuyển sau nhiều năm, IMO là mục tiêu tối thượng trong tương lai gần.

"Sau khi em được vào đội tuyển, tự dưng cũng trở nên nổi tiếng với bạn bè. Nhưng với em, điều đó không quan trọng. Quan trọng với em là suy nghĩ của bản thân em" - Huy thẳng thắn nói. Cậu thừa nhận chưa tính chuyện đi đường dài với Toán học, song trước mắt kỳ thi IMO là ưu tiên lớn nhất của bản thân.

Các thành viên còn lại có suy tính lâu dài hơn. Như Duy, Quyết và Dũng định vào Đại học Khoa học Tự nhiên, còn Hoàng định vào Đại học Bách khoa để trải nghiệm một năm làm sinh viên ở Việt Nam trước khi chọn được ngành để đi du học liên quan đến Toán; còn riêng Khánh lại định đi du học ngay sau khi tốt nghiệp. Băn khoăn lớn nhất của các cậu là chọn Toán ứng dụng hay Toán lý thuyết, hai hướng mà các cậu chưa tìm hiểu đủ kỹ để đưa ra quyết định.

Nghe đến đây, tôi nhìn vào mắt các bạn trẻ. Họ không biết rằng họ vừa động đến một chủ đề nảy lửa bậc nhất trong ngành Toán ở Việt Nam những năm gần đây, với sự tham gia thảo luận của các nhà toán học hàng đầu như Ngô Bảo Châu, Vũ Hà Văn, Nguyễn Tiến Dũng... Sự lựa chọn giữa Toán ứng dụng và Toán lý thuyết luôn là chủ đề tranh cãi giữa nội bộ giới Toán học, lẫn giữa giới Toán học và các giới khác trong xã hội.

Thậm chí, có giai đoạn được ví von là trường phái "Toán học vị Toán học" hay "Toán học vị nhân sinh", tương tự một cuộc tranh cãi lừng danh trong văn chương.

Chỉ một hai năm nữa thôi, khi tìm hiểu sâu hơn về đời sống Toán học, thì Quyết, Dũng, Hoàng, Khánh, Duy và Huy đều sẽ đưa ra được lựa chọn của mình. Điều hay nhất là các cậu đã nghĩ đến, và có chút băn khoăn về lựa chọn đó. Băn khoăn, đôi lúc là động lực lớn nhất dẫn người ta bước vào khoa học.

Vẻ đẹp của Toán: Khi đích đến không quan trọng bằng con đường

Ngày 22/6, khi bạn bè rầm rộ tham dự kỳ thi THPT quốc gia, đội tuyển IMO vẫn đang ôn luyện trong lớp học 6 người ở trường Ams. Họ đã có suất vào thẳng đại học, nhưng đang đối mặt với một thử thách lớn hơn: Năm ngoái, Việt Nam lần đầu ra khỏi top 10 IMO, đứng thứ 11 - thành thích thấp nhất trong vòng 5 năm qua, trong khi được dự báo là đứng thứ 5. Áp lực đặt lên đội tuyển năm nay là có thật.

Đều khá thân thiết nên sáu thành viên không ngừng đùa nghịch với nhau khi trả lời phỏng vấn. Khi Quyết tâm sự Toán là "chỗ dựa tinh thần duy nhất của em", các thành viên khác châm chọc cậu. Nhưng dường như đó là cách làm dịu không khí bởi họ đã quá hiểu nhau.

> *Hy vọng các em hiểu được tình yêu Toán học và Khoa học mới là quan trọng, còn IMO là niềm vui, kỷ niệm đẹp của tuổi học trò.*
>
> ***GS Hà Huy Khoái, Tổng biên tập Tạp chí Pi.***

"Em đặt mục tiêu vào đội tuyển thi Toán quốc tế từ năm lớp 11" - Quyết kể - "Thất bại trong kỳ thi chọn năm ngoái khiến bầu trời như sụp đổ. Từ đó, em quyết tâm thay đổi, giao tiếp nhiều hơn và đi chơi với bạn bè nhiều hơn. Năm nay, em tiếp tục thử sức với kỳ thi và vượt qua".

Còn với Khánh, người có dáng vẻ tự tin nhất trong nhóm, Toán không có khái niệm "khó". "Khi mình yêu thích thì sẽ không thấy khó, mọi bài toán đều là thử thách mình hào hứng muốn vượt qua". Khánh học Ams, ngôi trường thường gắn với những từ "giỏi giang, năng động, khác biệt", nhưng cậu rất tỉnh táo. Cậu nói: "Trường là hỗn hợp của rất nhiều kiểu người nên không thể nói ai cũng năng động mà còn có những màu sắc khác".

"Việc vào đội tuyển IMO có thể là khác thường trong mắt nhiều người, nhưng với em, một đứa yêu thích và tham dự nhiều kỳ thi Toán, điều đó lại bình thường".

Khác với bạn bè coi Toán là một môn học như bao môn khác, những học sinh giỏi Toán phần nào đã cảm nhận được vẻ đẹp của môn học này. Nhờ đọc tạp chí Pi, Khánh nhận ra Toán học có lịch sử hấp dẫn, có những kinh nghiệm ứng dụng vào thực tế rất gần gũi, dễ hiểu.

Có cùng ý kiến, Hoàng nhận xét: "Thời nhỏ em đọc tạp chí Toán tuổi thơ với việc giải bài tập Toán là chính. Nay đọc tạp chí Pi, mới nhận ra rằng Toán không chỉ là những bài tập. Toán còn có các câu chuyện". Tạp chí Pi mở ra một không gian rộng lớn hơn, trong đó Toán có đời sống và vận động không ngừng, thay vì những bài giải nằm yên trên giấy.

Nhờ niềm say mê sẵn có, các thành viên đã có cơ hội gặp nhau từ trước khi tham gia các khóa học Toán vào mùa đông và mùa hè của Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán. Không chỉ là bạn học, họ trở thành "những người cùng chí hướng" - mối quan hệ mà càng lớn lên người ta càng thấy quý giá. Với Duy, việc theo học ở Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán còn cho cậu cơ hội gặp gỡ Giáo sư Hà Huy Khoái, một người thầy lớn đã truyền cho cậu cảm hứng để thêm yêu Toán.

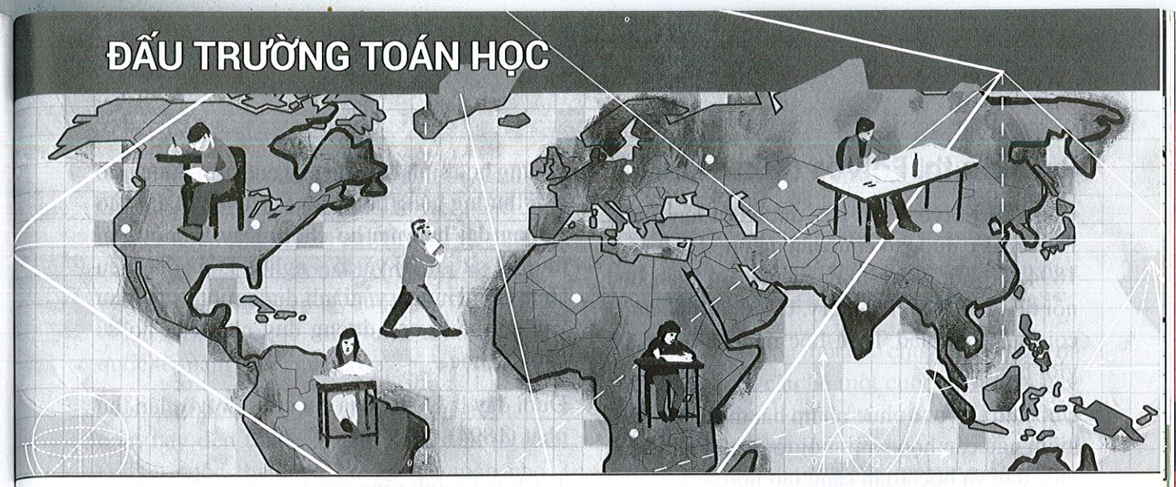
Còn Dũng, thành viên chững chạc nhất nhóm, nhận ra rằng Toán chứa đựng sự khái quát và trừu tượng vượt lên ngoài khuôn khổ những bài giải, tương đồng với những quy luật của cuộc sống, dù cậu chưa suy nghĩ sâu về mối liên hệ giữa Toán học và Triết học. "Đứng trước một bài Toán, việc quan trọng nhất không phải là tìm ra kết quả, mà là trải nghiệm trên con đường đi từ điểm đầu tiên đến điểm kết thúc" -cậu chia sẻ. Có lẽ, các chàng trai IMO đang trên đường tìm kiếm và nắm bắt được vẻ đẹp của Toán học, giống như lời của người thầy Quách Văn Giang mà họ ghi nhớ:

> *Đứng trước một bài Toán,*
> *việc quan trọng nhất*
> *không phải là tìm ra kết quả,*
> *mà là trải nghiệm trên con*
> *đường đi từ điểm đầu tiên*
> *đến điểm kết thúc.*
>
> ***Lê Quang Dũng,***
> ***thành viên đội tuyển IMO 2017.***

Đích đến không quan trọng bằng con đường

Kỳ thi IMO 2017 sẽ diễn ra tại thành phố ven biển Rio de Janeiro, Brazil từ 12 đến 23/17. Trong đó, hai ngày thi chính là 18 và 19/7. Đây là kỳ thi lần thứ 58, quy tụ hơn 1.000 học sinh giỏi Toán từ hơn 100 quốc gia trên thế giới.

Năm ngoái, Việt Nam đạt thứ 11 trên tổng số 109 quốc gia dự thi. Dù không phải thứ hạng thấp song đây là lần đầu tiên sau 5 năm, Việt Nam không có mặt trong Top 10.



CÁC CUỘC THI GIẢI TOÁN CỦA HUNGARY

Trần Nam Dũng

Bằng cách nào, Hungary, một đất nước có dân số hiện nay chưa đầy mười triệu người, lại có thể sản sinh ra những người khổng lồ trí tuệ, với mười ba người đoạt giải Nobel, ba người đoạt giải thưởng Wolf và hai giải thưởng Abel (được coi là giải thưởng Nobel cho toán học)? Chắc chắn có nhiều yếu tố tạo nên kỳ tích ấy và một trong số đó chính là nền văn hoá giải toán, được hình thành từ cách đây hàng trăm năm.

1. Thi giải toán trên Tạp chí

Kömal là tạp chí Toán học đầu tiên của Hungary được thành lập dành cho việc thi giải toán của học sinh trung học. Tạp chí do Dániel Arany sáng lập vào năm 1894; ba năm sau, việc điều hành Tạp chí được chuyển giao cho László Rátz, giáo viên của trường Eugene Wigner, và sau đó là cho John von Neumann, khi đó mới 11 tuổi. Sau này, John von Neumann trở thành nhà bác học toàn năng với những đóng góp nền tảng cho Vật lý, Toán học và Khoa học Máy tính.

Tham gia thi giải toán trên Kömal là những bước đi ban đầu trên đường vào khoa học của rất nhiều nhà toán học và khoa học nổi tiếng của Hungary. Công bố khoa học đầu tiên của Paul Erdös, một trong những nhà toán học có năng suất làm việc cao nhất trong lịch sử, với hơn 1500 bài báo, là lời giải cho một bài toán ở Kömal. George Pólya, nhà toán học của ĐH Stanford với những đóng góp nền tảng ở nhiều lĩnh vực, cho rằng ông trở thành một nhà toán học nhờ vào ba yếu tố: Kömal, Kürschák và người thầy Lipót Fejér của ông.

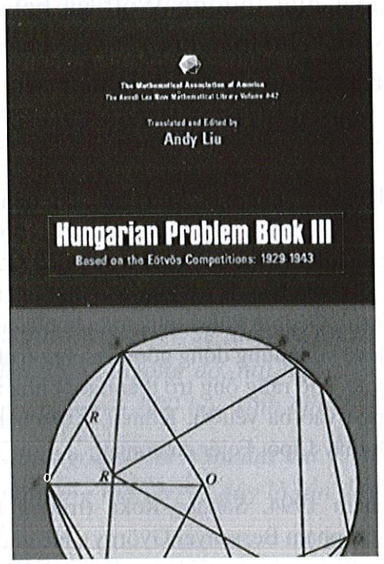
Vào năm 1994, Sándor Róka (trường Cao đẳng Sư phạm Bessenyei György), tác giả của nhiều cuốn sách về giải toán, đã thành lập tạp chí Abacus Mathematics Challenge, một tạp chí tương tự như Kömal, dành cho các học sinh nhỏ tuổi.

2. Cuộc thi Eötvös (Kürschák)

Cuộc thi Eötvös (sau này được đổi tên thành Kürschák), được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1894, là một trong những cuộc thi toán học nổi tiếng nhất tại Hungary. Cuộc thi này được coi là "Olympiad Toán học đầu tiên của thế giới hiện đại".

Cuộc thi được tổ chức nhằm hai mục đích: tìm kiếm các các học sinh giỏi toán và kích thích việc dạy và học Toán sáng tạo hơn.

Đề thi của cuộc thi được biên soạn theo tiêu chí "kiểm tra khả năng giải quyết vấn đề và tính sáng tạo toán học nhiều hơn là nhớ bài". Như một học sinh đã đoạt giải cuộc thi giải thích, "các bài toán được lựa chọn theo cách mà những kiến thức có sẵn trong đầu mình có khi chẳng giúp ích được gì... Giải thưởng không dành cho những cậu bé chăm học, nó được dành cho những nhà toán học đầy sáng tạo tương lai".



Cuốn các bài toán Hungary được soạn thảo dựa trên đề thi của cuộc thi toán Eötvös từ 1929-1943

Những học sinh đạt giải của cuộc thi được trao giải thưởng bằng tiền và được tuyển thẳng vào trường đại học mà họ chọn. Đây là một giải thưởng rất giá trị và có ý nghĩa. Đối với nhiều sinh viên Hungary, giành được một vị trí như vậy có thể là con đường duy nhất của họ để vào đại học.

Dưới đây là Đề thi của cuộc thi Eötvös lần thứ nhất (1894).

1. Chứng minh rằng các biểu thức $2x+3y$ và $9x+5y$ chia hết cho 17 đối với cùng tập các giá trị nguyên của x và y.

(Bằng thuật ngữ của Toán học hiện đại, bài toán trên có thể được phát biểu như sau:

Chứng minh rằng các phương trình đồng dư $2x+3y \equiv 0 (\mod 17)$ và $9x+5y \equiv 0 (\mod 17)$ có cùng tập nghiệm nguyên).

2. Cho đường tròn và hai điểm P và Q. Hãy dựng một tam giác vuông nội tiếp đường tròn đó sao cho một cạnh của nó đi qua P và một cạnh khác đi qua Q. Với những vị trí nào của P và Q thì không thể dựng được tam giác như vậy?

3. Độ dài các cạnh của một tam giác lập thành một cấp số cộng với công sai d. Diện tích của tam giác bằng t. Tìm chu vi của tam giác đó. Giải bài toán cho trường hợp $d = 1$ và $t = 6$.

3. Cuộc thi Thách thức Toán học quốc tế mang tên Paul Erdös

Sự phát triển của Internet và e-mail làm cho các cuộc thi có thể tiếp cận với một đối tượng rộng lớn hơn.

Vào năm 1997, với sự khích lệ của Alex Szalay, Tivadar Divéki, thầy giáo dạy môn khoa học ở trường Grace Church, đã sáng lập Cuộc thi toán học quốc tế Abacus dành cho học sinh các trường tiểu học và trung học cơ sở.

Tới năm 2015, được sự khích lệ của các Giáo sư Vera Sós và László Lovász, các đồng nghiệp thân thiết của Paul Erdös, và được sự cho phép của GS. Ronald Graham, người bạn thân và cộng sự của ông, cuộc thi Abacus được đổi tên thành cuộc thi Thách thức toán học quốc tế mang tên Paul Erdös.

Mỗi năm học, vào đầu mỗi tháng, từ tháng 9 năm nay đến tháng 3 năm sau, Ban tổ chức (BTC) cuộc thi đăng tải 24 bài toán cho 3 nhóm lớp, 3-4, 5-6 và 7-8, mỗi nhóm lớp 8 bài. Các học sinh giải bài và gửi bài giải về cho BTC qua đường e-mail. Kết quả chấm bài được công bố công khai trên mạng và những học sinh có kết quả cao sẽ được ghi danh vào Bảng danh dự.

Kể từ ngày cuộc thi ra đời đến nay, đã có hơn 3.000 bài toán được đăng tải. Hầu hết các bài toán đều thú vị, thách thức (thường không quá khó về mặt kỹ thuật), chứa nhiều ý tưởng hay. Ban đề thi của APMOPS (được giới thiệu ở Tạp chí Pi tập 1 số 3, tháng 3.2017) thường tham khảo đề thi của cuộc thi này.



Paul Erdös (trái) và Terence Tao

Dưới đây là một số bài toán trích từ Đề thi của tháng 3 năm học 2016-2017.

1 (*Lớp 3-4*)**.** Bà nội của Sam muốn bảo quản 24 kg anh đào để dành cho mùa đông. Đầu tiên, bà xử lý 1/3 số anh đào và sau đó xử lý số anh đào còn lại. Trong mẻ đầu bà cho 100g đường vào mỗi nửa kg anh đào, nhưng trong mẻ sau bà cho 300g đường vào mỗi 2kg anh đào. Hỏi bà cần bao nhiêu lọ để đựng nếu mỗi lọ đựng được 700g anh đào đã tẩm đường?

2 (*Lớp 3-4*)**.** Trong một câu chuyện, con cáo đã thoả thuận với cậu bé một cuộc chơi như sau: Mỗi lần cậu bé đi qua cầu, con cáo sẽ tăng gấp đôi số tiền mà cậu bé đang có; với điều kiện, cậu bé phải trả một khoản phí là 24 đô la cho mỗi lần qua cầu. Cậu bé đồng ý với lời đề nghị này, bởi vì cậu nghĩ mình có thể kiếm được rất nhiều tiền theo cách này. Tuy nhiên, cậu đã rất thất vọng khi đi qua cây cầu lần thứ ba, vì sau khi trả tiền cho con cáo, cậu hết sạch tiền! Hỏi cậu bé có bao nhiêu tiền, khi cậu bắt đầu thực hiện cuộc chơi với con cáo?

3 (*Lớp 3-4*)**.** Chú Harry đưa trứng đến chợ ở làng kế bên bằng xe đạp. Trên đường đến chợ, do phải cẩn thận nên chú chỉ có thể đi với tốc độ bằng một nửa tốc độ lúc về. Chú rời khỏi nhà vào lúc 6 giờ và trở về nhà vào lúc 2 giờ 45 chiều. Hỏi chú đã ở chợ bao nhiêu lâu, nếu thời gian đi đến chợ là 84 phút?

4 (*Lớp 5-6*)**.** Sau khi tiết kiệm tiền trong một thời gian dài, Peter và Polly cùng đi đến một cửa hàng đồ chơi và đã cùng thích một món đồ chơi. Peter không thể mua nó, vì cậu thiếu 470 đô la. Polly cũng không thể mua nó, vì cô ấy thiếu 30 đô la. Nếu cả hai gom tiền lại thì vẫn không đủ tiền để mua món đồ chơi đó. Hỏi giá đồ chơi có thể là bao nhiêu, nếu ta biết giá của nó tính bằng đô la là một số chẵn chục?

5 (*Lớp 5-6*)**.** Trong một trò chơi, bạn phải thu thập các báu vật. Có 8 loại báu vật, mỗi loại có 3 phiên bản. Nếu bạn chỉ có 1 phiên bản của một loại báu vật, phiên bản đó sẽ có giá trị 1 điểm. Nếu bạn có 2 phiên bản của một loại báu vật, 2 phiên bản đó sẽ có tổng giá trị là 3 điểm, nhưng nếu bạn có tất cả 3 phiên bản của một loại báu vật, 3 phiên bản đó sẽ có

tổng giá trị là 6 điểm. Pete có tất cả 9 báu vật. Hỏi tổng giá trị các báu vật của cậu ấy ít nhất và nhiều nhất là bao nhiêu (điểm)?

6 (*Lớp 5-6*)**.** Ở vương quốc Neverland, những tên cướp biển sử dụng những khẩu pháo nhỏ để chiếm lâu đài trên một hòn đảo. Cướp biển là những tay súng tuyệt vời, vì vậy chúng có thể bắn trúng nơi chúng muốn. Trong lâu đài chỉ có một khẩu pháo lớn nằm ẩn trên đỉnh của bức tường phía trước; do đó, các khẩu pháo nhỏ của cướp biển không thể bắn thẳng vào. Điểm yếu của lâu đài là nếu bức tường phía trước bị bắn trúng 280 phát, nó sẽ sụp đổ, khẩu pháo sẽ rơi theo và trở nên vô dụng. Bằng cách này, lâu đài có thể rơi vào tay của cướp biển. Những tên cướp biển sẽ lần lượt bắn và sau khi tất cả bọn họ bắn xong, khẩu pháo lớn trong lâu đài sẽ khai hoả và phá huỷ một trong các khẩu pháo nhỏ của bọn cướp biển. Hỏi bọn cướp biển cần mang theo ít nhất bao nhiêu khẩu pháo nhỏ, nếu chúng muốn chiếm lâu đài? Và sau khi thành công, bao nhiêu khẩu pháo nhỏ chưa bị phá huỷ?

7 (*Lớp 5-6*)**.** Hai người chạy với tốc độ không đổi, bắt đầu chạy cùng lúc từ hai đầu của một đường phố thẳng dài. Họ gặp nhau hai lần, một lần ở cách một đầu của đường phố 800 mét, và lần hai ở cách đầu kia của đường phố cũng 800m. Hỏi đường phố dài bao nhiêu mét?

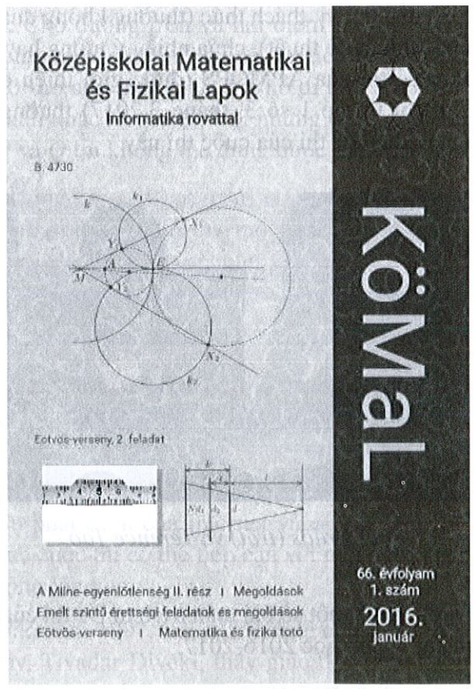
8 (*Lớp 7-8*)**.** Tám kình ngư tham gia một cuộc thi. Hồ bơi có tám làn. Chúng ta có thông tin sau về kết quả của cuộc thi:

- Không ai về đích ở vị trí giống số làn của mình và cũng không có hai người về đích cùng lúc.
- Các kình ngư ở làn chẵn về đích ở vị trí chẵn, các kình ngư ở làn lẻ về đích ở vị trí lẻ.

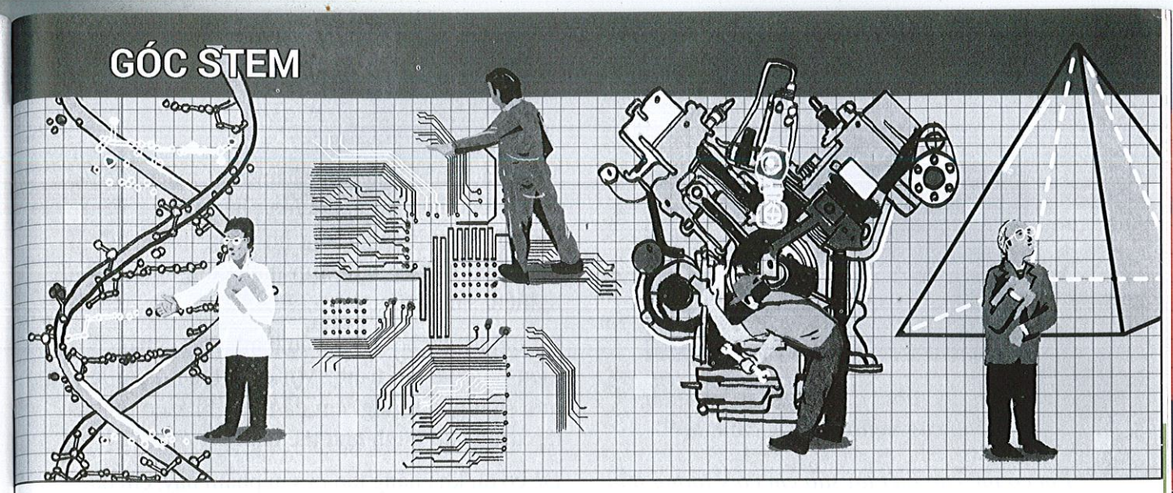
Có bao nhiêu khả năng phân bố vị trí về đích có thể của các kình ngư?

9 (*Lớp 7-8*)**.** Một chủ cửa hàng giày đã mua 100 đôi giày với giá 20 đô la mỗi đôi. Ông đã bán 75 đôi với giá 25 đô la một đôi; sau đó, ông giảm giá để bán nốt phần còn lại. Biết rằng, sau khi bán hết giày, ông đạt được lợi nhuận 20%. Hỏi 25 đôi giày cuối được bán với giá bao nhiêu?

10 (*Lớp 7-8*)**.** Trong cùng một khoảng thời gian, nếu một chiếc xe chạy với tốc độ 90 km/h, nó sẽ tạo ra khí độc hại ít hơn 20% so với khi nó chạy với tốc độ 120 km/h. Hỏi với tốc độ nào thì tổng sản lượng khí gây hại cho môi trường sẽ ít hơn, nếu quãng đường mà xe chạy là 210 km? Và ít hơn bao nhiêu phần trăm?



Tạp chí KöMal 2016



GIẢI STEM QUỐC TẾ
của vùng đất nắng lửa Quảng Trị

Nguyễn Đình Thành Công[1] thực hiện

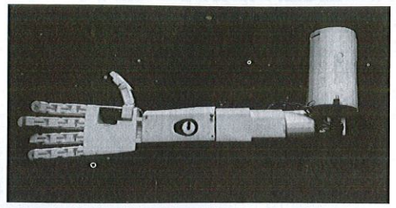
Cuộc thi Intel ISEF là cuộc thi STEM quốc tế lớn nhất và lâu đời nhất dành cho học sinh trung học hằng năm diễn ra ở Mỹ. Thành tích của đoàn Việt Nam ở Intel ISEF 2017 cuối tháng 5/2017 vừa qua thật ấn tượng với 5 năm giải chính thức và 3 giải đặc biệt, đạt số lượng giải nhiều nhất trong 10 năm kể từ khi Việt Nam tham gia cuộc thi. Ly kỳ và ấn tượng nhất là "cú đúp", đạt liền hai giải Ba (1 giải chính thức trị giá 1000$ và 1 giải Ba đặc biệt trị giá 400$) của bạn Phạm Huy, học sinh THPT Quảng Trị, thành tích cao nhất của đội Việt Nam ở Intel ISEF 2017. Bằng sự đam mê và tích cực học thông qua THỰC LÀM, Phạm Huy đã sáng chế ra cánh tay robot độc đáo điều khiển bằng chân dùng cho những người khuyết mất cánh tay, rất cần cho một vùng đất từng hứng nhiều bom mìn nhất thế giới như tỉnh Quảng Trị. Sản phẩm độc đáo của Phạm Huy đã thuyết phục được các chuyên gia vì giải pháp đơn giản, chi phí sản xuất thấp và dựa trên nền tảng công nghệ tiên tiến, tính mở của cộng đồng Arduino.vn để tiến hành nghiên cứu điều khiển tự động hoá và lập trình. Đây chính là kinh nghiệm quý báu để học sinh có thể dùng Arduino và phần mềm SCRATCH để lập trình cho robot và các hệ thống tự động hoá.

Trên đường đi tới Mỹ để đạt giải quốc tế, Phạm Huy đã vượt qua muôn vàn khó khăn của một học sinh tỉnh lẻ còn nhiều khó khăn như Quảng Trị, đặc biệt, Phạm Huy còn "rất nổi tiếng" khi phỏng vấn VISA đi Mỹ tới 3 lần mới đạt.

Chiến thắng của Phạm Huy đã cho thấy những học sinh tỉnh nghèo hoàn toàn có thể dùng Internet để tự học công nghệ cao với chi phí thấp nếu như đam mê và có sự động viên của gia đình và các thầy cô.

Dưới đây là bài trả lời phỏng vấn của bạn Phạm Huy.

[1] *Cựu học sinh Quảng Trị từng đạt giải nhì học sinh giỏi Toán quốc gia*



Cánh tay robot điều khiển bằng chân dành cho người khuyết cánh tay

Em có thể cho biết tại sao em có ý tưởng thực hiện cánh tay Robot này?

Địa phương em là Quảng Trị, mảnh đất chiến tranh, có rất nhiều người khuyết tật, người ta gặp rất nhiều khó khăn khi thiếu đôi tay, nhưng lại rất khó tiếp cận với các sản phẩm hỗ trợ vì chúng vẫn còn nhiều hạn chế.

Vì vậy em muốn tạo ra một sản phẩm hỗ trợ cho người khuyết tật với khả năng ứng dụng cao, có thể sử dụng cho nhiều loại khuyết tật của tay, phù hợp với điều kiện kinh tế của đa phần người khuyết tật.

Được biết đã có nhiều cá nhân đơn vị đã có ý tưởng này, cánh tay của em có điểm gì mới so với các sản phẩm khác?

Sản phẩm của em tuy công nghệ sản xuất đơn giản, nhưng lại sử dụng một nguyên lí điều khiển hoàn toàn mới (sử dụng chân để điều khiển tay) và sử dụng được cho người cụt cả 2 cánh tay, giải quyết được các hạn chế của các cánh tay khác của nước ngoài, như giá thành cao, chỉ sử dụng được cho người khuyết tật mất 1 cánh tay, hoặc chỉ phần bàn tay. Sản phẩm của em có giá thành rất rẻ, nhỏ hơn 150$.

Để thực hiện nghiên cứu em đã gặp những khó khăn gì cả về mặt lý thuyết lẫn thực hành?

Em mất khoảng 1 năm để hoàn thiện sản phẩm hiện tại, những khó khăn thì rất nhiều, khi bắt đầu đề tài, em chưa biết gì về đồ họa máy tính cũng như rất khó khăn trong việc tiếp cận các tài liệu tham khảo khác.

Việc các phần của sản phẩm như mạch điều khiển, các bản thi công của phần khung liên tục gặp vấn đề cũng như hư hỏng trong suốt quá trình nghiên cứu, tìm hiểu cũng như thử nghiệm sản phẩm.

Để lập trình cho robot vận hành được phải có kiến thức về lập trình. Với điều kiện đang là học sinh phổ thông, em đã trang bị kiến thức lập trình cho mình như thế nào?

Để có đủ khả năng tạo ra sản phẩm này, em đã tự tìm hiểu và học tập qua mạng, về lập trình và điện tử, đa phần kiến thức em học được từ các diễn đàn chia sẻ kinh nghiệm trên internet (ví dụ như: Arduino.vn) và với kinh nghiệm từ sự mày mò khi làm một số dự án nhỏ khác.

Nếu có điều kiện để phát triển sản phẩm, em sẽ cải tiến gì?

Sản phẩm của em vẫn đang trong quá trình tiếp tục phát triển, cải thiện: giảm khối lượng, tăng độ linh hoạt, giảm giá thành để có thể giúp đỡ người khuyết tật tốt hơn, để có thể đưa được sản phẩm của mình vào cuộc sống.

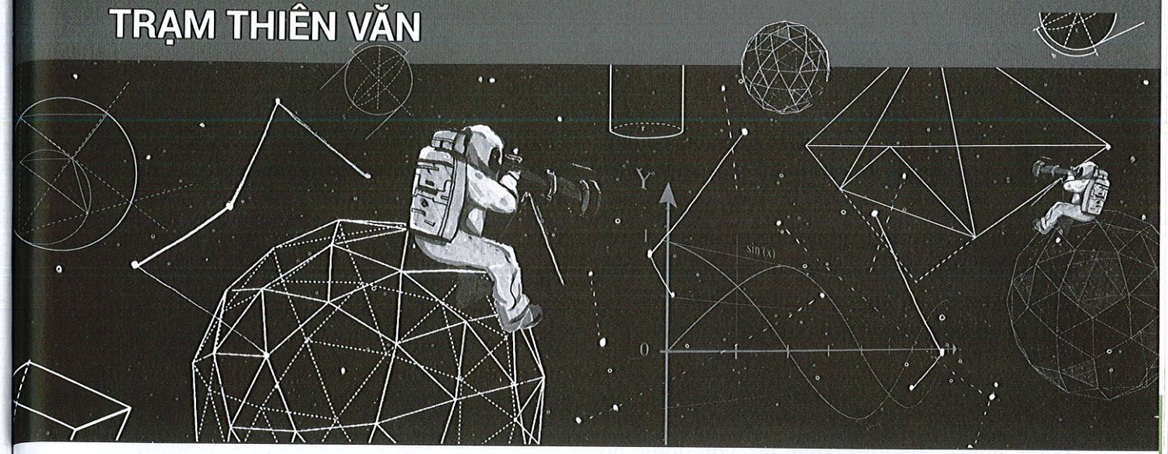
Trong quá trình nghiên cứu khoa học, nhà trường và thầy cô giáo đã giúp đỡ em như thế nào?

Để có thể có được thành quả hôm nay, em đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ động viên từ thầy cô, bạn bè, ban giám hiệu, sự chăm lo tận tình và góp sức của thầy giáo hướng dẫn của em.

Cô giáo Đoàn Thị Ái Phương, phó trưởng phòng Trung học Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Trị, người đã trực tiếp tham gia gây dựng phong trào nghiên cứu khoa học và kỹ thuật trong tỉnh từ gần 10 năm nay, cho biết:

Trong nhiều năm qua, học sinh THCS Và THPT tỉnh Quảng Trị đã có gần 500 dự án khoa học tham gia các cuộc thi STEM với nhiều thành tích đáng nể:

- Cấp tỉnh:có 260 dự án đạt giải.
- Cấp quốc gia: có 23 giải (có 3 năm không tham gia dự thi cấp Quốc gia)
- Quốc tế: có 1 giải chính thức và 1 giải đặc biệt ở Intel ISEF 2017.



THẾ NÀO LÀ MỘT NGÀY

(tiếp theo)

Phạm Vũ Lộc

Như đã biết ở kỳ trước, khái niệm "ngày" chính là để chỉ ngày mặt trời trung bình (NMTTB). Ngày này được chia làm 24 giờ và tiếp đó là phút và giây. Theo quy ước của hệ SI, giây là một trong bảy đơn vị cơ bản, vốn được định nghĩa dựa vào ngày như vậy. Nhưng vì sự biến động trong tốc độ tự quay của Trái Đất, giây được định nghĩa chặt chẽ lại bằng chu kỳ bức xạ của nguyên tử[1], nên *ngày SI* được định nghĩa ngược lại là khoảng thời gian dài 86.400 giây = 24 giờ. Từ đó, người ta đặt ra *giờ phối hợp quốc tế (UTC)* được xác định bằng hệ thống đồng hồ nguyên tử quốc tế (TAI) làm cơ sở cho tất cả đồng hồ trên thế giới.

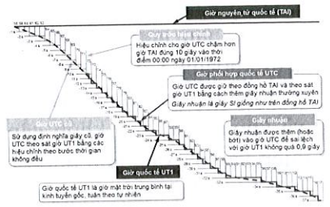
Do tác động của lực hấp dẫn của Mặt Trăng, hiệu ứng thủy triều dần giảm tốc độ quay của Trái Đất, làm NMTTB dài hơn 2,3 *ms* sau mỗi thế kỷ. Vào thời đại của khủng long, một ngày chỉ dài khoảng 23 giờ. Ngoài ra, các biến động địa vật lý bất thường như núi lửa động đất mà đáng kể nhất là hiện tượng tan băng, lại có tác dụng ngược lại[2]. Nó làm cho NMTTB hiện nay dài thêm khoảng 1,4 *ms* sau mỗi thế kỷ (giá trị này thay đổi tùy theo biến động của Trái Đất và khoảng số liệu khớp gần đúng). Các nhà thiên văn đã xác định được vào năm 1820 thì NMTTB dài đúng bằng ngày SI là 86.400 giây và hiện nay thì dài hơn khoảng 2 *ms* (giá trị này cũng biến động từng năm). NMTTB tại kinh tuyến gốc được định nghĩa là *giờ quốc tế UT1*. Nó được theo dõi để duy trì độ chính xác rất cao bằng các phương pháp trắc đạc phức tạp như quan sát các quasar ở rất xa bằng giao thoa kế đường dài, đo laser khoảng cách tới Mặt Trăng hay các vệ tinh nhân tạo.

Như vậy cứ sau khoảng $\frac{1\,s}{2\,ms/\text{ ngày}} =$ 500 ngày thì giờ UT1 chậm hơn giờ UTC trên đồng hồ là 1 giây. Vì thế, tùy thực tế mà người ta sẽ thông báo trước việc thêm 1 giây nhuận vào thời điểm cuối ngày 30/6 hoặc 31/12 (giờ UTC) để giờ UTC lệch so

[1] *Định nghĩa chuẩn mới nhất của Viện đo lường quốc tế vào năm 1998 cho đơn vị giây là: "Khoảng thời gian bằng 9.192.631.770 lần chu kỳ của bức xạ phát ra ứng với sự chuyển giữa hai mức siêu vi tế của trạng thái cơ bản ở nguyên tử ^{133}Cs", tức là không còn liên quan tới độ dài ngày.*

[2] *Vì tảng băng lớn tan chảy xuống làm trọng tâm gần với địa trục hơn, khiến Trái Đất quay nhanh hơn theo định luật bảo toàn momen động lượng.*

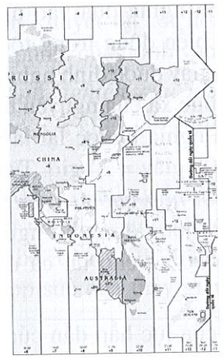
với giờ UT1 không quá 0,9 giây, ngày dân sự hôm đó sẽ dài 86.401 giây. Từ năm 1972 đến nay, có 27 giây nhuận đã được công bố. Cần lưu ý rằng, giây nhuận là để chỉnh giờ UTC theo sát chu kỳ quay thực tế của Trái Đất chứ không có nghĩa là NMTTB tự dài thêm như vậy. Giả sử giữ nguyên tốc độ trên, phải sau $\frac{1\,s/\text{ ngày}}{1{,}4\,ms/\text{ ngày}\,/\,\text{thế kỷ}} = 71.429$ năm, NMTTB mới tự dài thêm 1 giây (xem hình). Từ khi đồng bộ với đồng hồ nguyên tử quốc tế TAI vào 01/01/1958, tới năm 1972, giờ UT1 đã chậm hơn giờ TAI 10 giây. Nên hiện nay, giờ UTC theo sát giờ UT1 nên chậm hơn giờ TAI 37 giây (Hình 1).



Hình 1

Trong một ngày, các điểm trên cùng kinh tuyến có cùng giờ trên đồng hồ nhưng khác giờ với điểm nằm trên kinh tuyến khác. Cụ thể Mặt Trời mọc lặn một vòng đúng 24 giờ thì hai điểm lệch nhau 1 kinh độ sẽ có giờ lệch nhau $\frac{24h \times 60\text{ phút}}{360^\circ} = 4$ phút. Khi giao thông và viễn thông phát triển, sự chênh lệch này gây ra bất tiện khi mà về lý thuyết, hai điểm chỉ lệch nhau theo phương Đông Tây là đã có giờ khác nhau. Do đó, người ta đặt ra *múi giờ* bằng cách quy ước lấy kinh tuyến đi qua đài thiên văn Greenwich (London, Anh) làm kinh tuyến gốc 0° và giờ địa phương ở đây là giờ GMT làm chuẩn, hai bên đường này mỗi bên nửa kinh độ cùng thuộc múi giờ 0. Như vậy cứ cách kinh tuyến gốc 15° thì lại là kinh tuyến trung tâm của một múi giờ mới, tạo thành 24 múi giờ trên mặt đất. Tất các các điểm nằm trong một múi giờ đều theo một giờ chung của kinh tuyến trung tâm.

Vì các lý do chính trị, kinh tế, văn hóa, lịch sử mà các quốc gia và vùng lãnh thổ có múi giờ pháp định cho toàn quốc hay tùy theo địa phương chứ không hẳn theo múi giờ tự nhiên như trên (Hình 2). Trước năm 1967, cả hai miền Việt Nam theo múi giờ GMT+8. Vào năm đó, Việt Nam Dân chủ Cộng hòa đổi sang múi giờ GMT+7, khiến điểm sóc[1] của tháng Giêng tết Mậu Thân 1968 là 16:31 ngày 29/1/1968 (GMT) tương ứng với 23:31 ngày 29/1/1968 (GMT+7 – giờ Hà Nội) và 00:31 ngày 30/1/1968 (GMT+8 – giờ Sài Gòn). Nên thời điểm nổ súng trong cuộc Tổng tấn công và nổi dậy Tết Mậu Thân là đêm Giao thừa miền Nam nhưng lại là rạng sáng Mùng Một Tết của miền Bắc (đêm 29/01 – rạng ngày 30/01).



Hình 2

Nếu theo quy ước trên thì kinh tuyến 180° sẽ nằm giữa múi giờ GMT-12 hay múi giờ GMT+12? Vì thế người ta quy ước phía Đông kinh tuyến này là múi giờ GMT-12 còn phía Tây là múi giờ GMT+12. Như vậy những vùng nằm trong hai múi giờ này có cùng số giờ nhưng lệch nhau một ngày. Do đó, người ta đặt ra quy ước về *Đường đổi ngày quốc tế*, đi từ Đông sang Tây đường này thì phải tăng 1 ngày và ngược lại. Đường này không hoàn toàn trùng khớp với kinh tuyến 180° cũng vì lý do chính trị, để các phần lãnh thổ dù nằm hai bên đường này nhưng thuộc cùng một quốc gia thì vẫn theo một giờ chung do quốc gia đó quy định (Hình 2).

Ở các nơi có vĩ độ cao, mùa hè có ngày dài hơn đêm đáng kể, người ta áp dụng chế độ *giờ mùa hè* để tiết kiệm năng lượng chiếu sáng và sưởi ấm do ngày làm việc có thể bắt đầu sớm hơn (khi trời đã sáng) và giảm chiếu sáng ban đêm vì đi ngủ sớm hơn. Cụ thể, đồng hồ được vặn thêm 1 giờ vào mùa xuân và trả lại như cũ vào mùa thu.

[1] *thời điểm trăng non đầu tháng.*

Ngày hội Toán học mở 2017 (Math Open Day – MOD 2017)

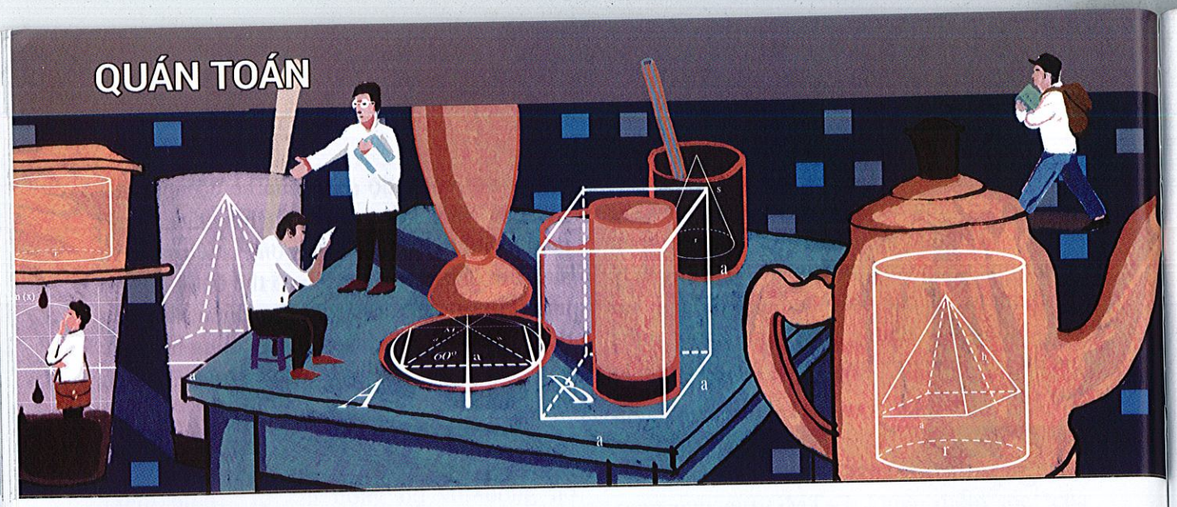
"Mùa Toán – Từ những chiều ẩn giấu"

Ngày hội Toán học mở là một chuỗi các hoạt động mở về toán nhằm tạo cơ hội cho đông đảo học sinh, sinh viên, giáo viên, phụ huynh, các nhà toán học và những nhà giáo dục có dịp cùng nhau trải nghiệm vẻ đẹp của toán học và giao lưu văn hóa toán học từ những góc độ mới, gợi mở, vui vẻ, thú vị, hấp dẫn, có tính thực tiễn, tính chuyên sâu, và truyền cảm hứng. Chuỗi Ngày hội Toán học mở đã được **Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán** tổ chức lần đầu tiên vào tháng 12/2015 với chủ đề **"Toán học trong vỏ hạt dẻ"** và lần thứ hai vào tháng 8/2016 với chủ đề **"Bản giao hưởng số Pi"**. Các chương trình này đã thu hút được sự tham gia của hàng ngàn học sinh, phụ huynh, các nhà toán học và nhà giáo dục đến từ hơn 20 tỉnh thành trên cả nước.

Năm nay, Ngày hội Toán học mở lần thứ ba sẽ được tổ chức vào ngày 13/8/2017 tại Hội trường C2 Đại học Bách khoa Hà Nội với chủ đề **"Mùa Toán – Từ những chiều ẩn giấu"**. Nhìn theo một cách nào đó, có thể thấy rằng bên cạnh bốn mùa quen thuộc trong tự nhiên thì toán học dường như cũng có tư cách giống như một MÙA đặc biệt khác của thế giới, của đời sống xã hội; hơn nữa, bởi toán học cũng là một biểu hiện đặc trưng nguyên thủy của trí tuệ và tư duy của con người, "Mùa Toán" đặc biệt ở chỗ là một khi đã bắt đầu, nó sẽ ngày càng trở nên phong phú hơn mà không bao giờ kết thúc. Được gợi ý từ khái niệm "số chiều" rất căn bản trong toán học nói riêng và khoa học nói chung, chủ đề của ngày hội mở năm nay, thông qua việc tổ chức thực hiện các hoạt động, trò chơi tương tác, trải nghiệm, các dự án, các bài giảng đại chúng, sẽ khơi gợi trí tò mò và cảm hứng của các đối tượng tham gia, từ đó gửi gắm những điều thú vị, những điều có thể có hình hài giản dị nhưng không hề tầm thường, những điều thường được ẩn giấu trong những chiều kích nhiều lúc dễ bị bỏ quên, nhưng lại có sức sống bền bỉ và nguồn năng lượng dồi dào, tồn tại và phát triển xuyên suốt trong toàn bộ tiến trình lịch sử phát triển của toán học từ cổ đại cho tới ngày nay.

Ngày hội Toán học mở năm nay có sự đồng hành của *Quán Toán Tạp chí Pi* với chủ đề "Compete with Euclide", Học viện Sáng tạo S3 với chủ đề "Đo thế giới", và Trung tâm Toán tư duy POMATH với chủ đề "Chạm vạn vật"; hội thảo giáo dục "Toán học không xa cách", chuỗi bài giảng đại chúng "Từ những chiều ẩn giấu", triển lãm "Những lá thư toán học", cùng sự phối hợp nội dung của một số cá nhân, đơn vị về toán học và khoa học, kĩ thuật.

Ban Tổ chức hy vọng chương trình Ngày hội năm nay sẽ phong phú và thu hút nhiều bạn trẻ cùng phụ huynh, giáo viên, các nhà toán học và giáo dục tham dự.



Giả thuyết Thời gian Ma

Nguyễn Ái Việt

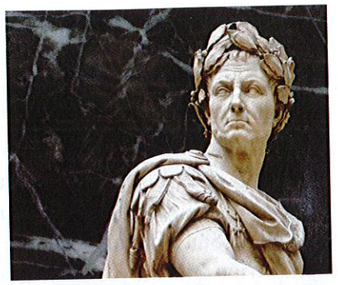
Trong lịch sử loài người, "Đêm trường Trung cổ" là một thời đại tối tăm đầy những ý tưởng nô dịch con người hắc ám và tín điều ngụy tạo. Người ta đã chứng minh được trong khoảng thời gian này, Nhà thờ Công giáo và đế quốc La Mã thần thánh, đã ngụy tạo ra hàng ngàn tư liệu giả nhằm kìm hãm tự do tư duy. Năm 1991, nhà sử học Đức Heribert Illig đưa ra các bằng chứng cho giả thuyết việc có đến 297 năm, gọi là Thời gian Ma, trong lịch sử Trung cổ đã được ngụy tạo và thêm vào lịch sử. Nếu giả thiết này đúng, Hoàng đế Charlemagne cũng là sản phẩm ngụy tạo. Cho đến nay mặc dù có nhiều người phản đối, cũng như không ít người ủng hộ, việc bác bỏ cũng như kiểm chứng giả thuyết này đều chưa được khẳng định. Trong vấn đề này, lý luận bênh vực và phản bác giả thuyết này đều dựa trên những điểm tinh tế về ứng dụng toán học trong việc làm lịch.

Ngày xuân phân và hiệu chỉnh lịch

Hiện chúng ta đang dùng Dương lịch, dựa trên chu kỳ liên quan đến Mặt Trời và Âm lịch, dựa trên chu kỳ liên quan tới Mặt Trăng . Tuy vậy, các chu kỳ này đều không tính tròn theo ngày, là chu kỳ Trái Đất tự quay một vòng quanh trục của chính mình. Âm lịch xây dựng không được khoa học nên khá luộm thuộm, chúng ta sẽ bàn đến ở một dịp khác.

Trái đất đi trọn một vòng quanh Mặt Trời trong thời gian là 365,2424 ngày. Dương lịch Julius được Nhà độc tài Lã Mã cổ đại, Julius Ceasar lập vào thế kỷ 1 trước Công nguyên lập ra tính tròn một năm có 365,25 ngày. Do mỗi năm Dương lịch có 365 ngày, nên lịch Julius điều chỉnh phần số dư bằng cách cứ 4 năm một lần sẽ có một năm nhuận có 366 ngày.

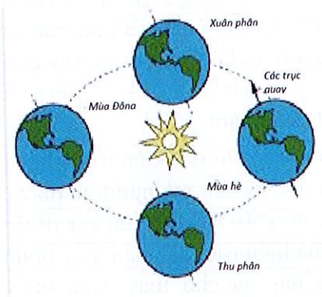
Tuy nhiên, mỗi năm lịch Julius đã tính dôi ra so với thời gian thực một khoản là 0.0076 ngày, tức là chỉ có 11 phút thôi. Số thời gian này tuy nhỏ, nhưng sau hàng ngàn năm, con số tích lũy có thể lên tới nhiều ngày, làm sai lệch việc tính ra các tiết khí mùa màng có tính tuần hoàn theo Mặt Trời. Cụ thể là đến thời của Giáo hoàng Gregory XIII, người ta bắt đầu nhận thấy ngày Xuân phân (Vernal Equinox)



Hình 1: *Julius Ceasar, người đưa ra lịch Julius*

đã lệch đi khá nhiều so với ngày 20/3 khi bắt đầu dùng lịch Julius.

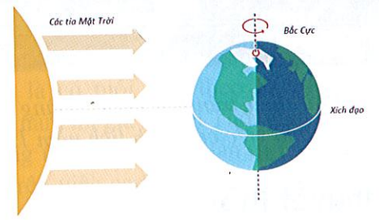
Tại sao ngày Xuân phân lại quan trọng với việc làm lịch? Chúng ta hãy tìm hiểu rõ hơn về ngày Xuân phân và ý nghĩa của nó để hiểu cơ sở của lịch Gregory: Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời vừa tự quay quanh trục của mình như trong Hình 2.



Hình 2: *Chuyển động quay của Trái Đất quanh Mặt Trời và thời tiết trong năm*

Điều đó có nghĩa là Trái Đất chuyển động giống như một con quay, trục quay của nó cũng đổi hướng tương đối so với Mặt Trời. Khi trục quay của Trái Đất hướng về phía Mặt Trời, Bắc Bán Cầu sẽ có nhiều ánh nắng hơn, thời tiết chuyển sang mùa hè. Khi trục quay của Trái Đất hướng xa Mặt Trời, thời tiết sẽ chuyển sang mùa Đông. Như vậy một năm sẽ có hai điểm cân bằng ở giữa điểm giữa mùa hè và mùa đông. Tại điểm này, Mặt Trời sẽ nằm trên mặt phẳng chứa đường xích đạo của Trái Đất. Vào ngày đó, thời gian ban ngày và ban đêm bằng nhau. Trên Bắc Bán Cầu, sẽ có một ngày Xuân phân 20/3 và một ngày Thu phân 22/9. Ở Nam Bán Cầu, các mùa sẽ đổi chỗ, Hè thành Đông, Thu thành Xuân, vì thế tiết Xuân phân trên Bắc Bán Cầu sẽ là Thu phân ở Nam Bán Cầu và ngược lại.

Các ngày Xuân phân và Thu phân có thể quan sát dễ dàng và khách quan, do đó các nhà làm lịch từ thời thượng cổ cả Âu và Á đều đã biết xác định các ngày này bằng cách quan sát thời điểm Mặt Trời mọc và lặn. Như vậy, các tiết trong năm, có đặc trưng thời tiết tuần hoàn cũng được phân bố theo khoảng cách tới các ngày này.



Hình 3: *Ngày Xuân phân, ngày dài bằng đêm do Mặt Trời nằm trên mặt phẳng có chứa xích đạo và các tia mặt trời chiếu song song với mặt phẳng này*

Đến thời Giáo hoàng Gregory XIII, người ta nhận thấy điểm Xuân phân đã dịch xa ngày 20/3 làm việc dự báo các tiết trời, mùa màng trở nên sai lệch với lịch. Giáo hoàng Gregory XIII, tuy là một nhà lãnh đạo nhưng có ý thức cải cách và thiết thực, nhận thấy vấn đề cải cách lịch không phải chỉ đơn thuần là việc viển vông như đổi các ngày lễ Tết, đã ra lệnh cải cách lịch và ban hành lịch Gregory vào năm 1582. Lịch Gregory về cơ bản giống lịch Julius, chỉ khác ở chỗ lấy 365,2425 ngày làm một năm. Điều đó có nghĩa là cứ 400 năm sau

khi tính năm nhuận theo lịch Julius lại phải điều chỉnh bớt đi 1 ngày. Như vậy các năm 1600 và 2000 không có nhuận theo lịch Gregory, trong khi chúng là năm nhuận theo cách tính của lịch Julius.

Với cách tính của lịch Gregory thì số thời gian dôi dư trong một năm so với thực tế (giữa lịch và thiên văn) còn lại sẽ là 0,0001 tức là cứ mỗi một vạn năm mới tích lũy đủ một ngày cần hiệu chỉnh. Chúng ta còn lâu mới phải lo đến điều đó. Vì vậy trước mắt, trong 8000 năm tới, lịch Gregory vẫn có thể coi là hoàn hảo.



Hình 4: *Phù điêu trên mộ Giáo hoàng Gregory XIII mô tả việc cải cách lịch năm 1582*

Giả thuyết Thời gian Ma

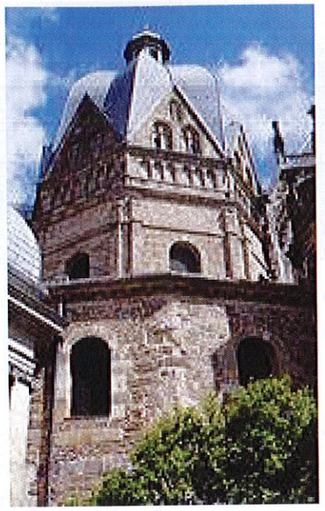
Điều đáng nói là chênh lệch giữa các mốc tính của lịch Julius và lịch Gregory là khoảng 1700 năm, nếu theo nguyên tắc của lịch Gregory sẽ phải điều chỉnh $0,75 \times 17 = 12,75 \approx 13$ ngày. Tuy nhiên, lịch Gregory chỉ điều chỉnh có 10 ngày khi công bố và vẫn để ngày Xuân phân vào ngày 20/3. Vậy 3 ngày còn lại đi đâu mất? Heribert Illig là người đặt câu hỏi "Tại sao chỉ điều chỉnh 10 ngày mà điểm Xuân phân vẫn trở lại được đúng vào ngày 20/3 như thời Ceasar?" Ông đã tính lại và thấy rằng có 297 năm bị thiếu đi. Ông đã đặt vấn đề là số thời gian đó đã bị thêm vào lịch sử. Vì vậy theo giả thuyết Thời gian Ma, năm 1582 thực tế chỉ là năm 1285. Năm nay 2017, nếu giả thuyết Thời gian Ma là đúng, đúng ra phải là 1720.

Vậy ai và tại sao đã ngụy tạo và thêm 297 năm vào lịch sử. Heribert Illig cho rằng đây là mưu đồ của Giáo hoàng Silvestre II (trị vì từ 999 đến 1003) đã thông đồng với Hoàng đế Otto III (trị vì từ 996-1002) của đế quốc La Mã thần thánh sửa đổi thời gian, vì muốn năm 1000 rơi vào thời gian cầm quyền của mình. Heribert Illig đã đưa ra nhiều bằng chứng để chứng tỏ khoảng thời gian 614-911 chưa từng có trong lịch sử. Sau này có rất nhiều người tiếp tục phát triển giả thuyết Thời gian Ma, đặc biệt là Hans-Ulrich Niemitz đã đưa thêm nhiều luận cứ và bằng chứng khác khá lý thú. [1].

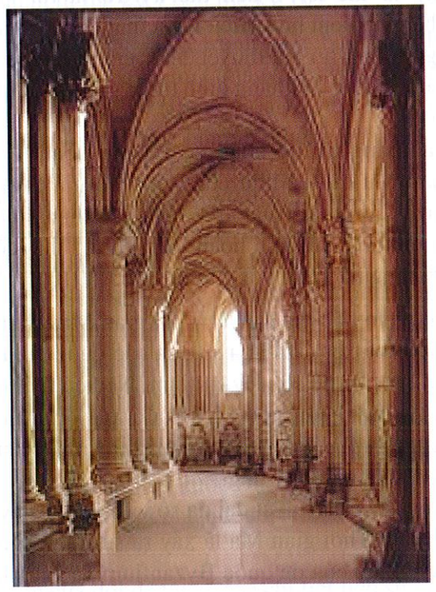
Chẳng hạn, có nhiều bằng chứng về kiến trúc, chứng tỏ rằng một số công trình kiến trúc có phong cách vượt thời gian 250-300 năm. Chúng ta có thể xem xét trường hợp của Tiểu giáo đường Aechen (Hình 5) được cho là xây dựng năm 800. Tiểu giáo đường này có phong cách rất gần với Đại giáo đường Speyer (Hình 7) được xây dựng năm 1053 dưới thời Hoàng đế Konrad II. Các lối đi có cổng vòm của hai giáo đường có phong cách rất gần nhau (Hình 6 và Hình 8). Điều này rất khó giải thích nếu không giả thiết là chúng được xây dựng ở các thời điểm rất gần nhau, chứ không phải cách nhau hơn 250 năm.

Còn nhiều các chi tiết kiến trúc khác tại Tiểu giáo đường Aechen mà người ta thấy chỉ xuất hiện sau đó 250-300 năm tại các di tích khác. Nhiều nhà kiến trúc đã nhận thấy những điểm đặc biệt này và cho thấy Tiểu giáo đường Aechen phải được xây dựng vào nửa sau của thế kỷ 11.

Ngoài Tiểu giáo đường Aechen còn có những bằng chứng về kiến trúc khác tương tự. Các bước nhảy vọt về kiến trúc được tìm thấy rất khó giải thích, trừ phi chúng ta giả thiết khoảng thời gian gần 300 năm giữa chúng là không có. Nói một cách tổng quát có rất nhiều ví dụ về phong cách kiến trúc La Mã tại các công trình xây dựng trong thế kỷ 10-11 ở Âu châu, làm người ta khó tin rằng thời điểm này cách xa thời La Mã như chúng ta vẫn nghĩ.



Hình 5: *Tiểu giáo đường Aachen được cho là xây dựng năm 800, có các di vật được cho là của Hoàng đế Charlemagne*



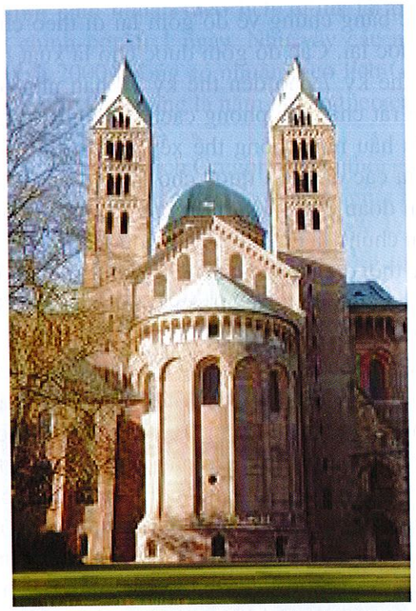
Hình 6: *Lối đi mái vòm tại Tiểu giáo đường Aachen có phong cách được cho là vượt thời đại 200 năm*

Các bằng chứng về đồ gốm lại đi theo chiều ngược lại. Các đồ gốm được cho là xuất hiện từ thế kỷ 7 cho đến thế kỷ 10 hầu như thay đổi rất chậm về phong cách. Các nhà nghiên cứu hầu như không thể xếp trật tự thời gian giữa các đồ gốm được cho là sản xuất trong giai đoạn này. Điều này cũng trở nên dễ hiểu nếu chúng ta giả thiết chúng được sản xuất tại các thời điểm gần nhau. Chính điều đó lại ủng hộ sự biến mất của khoảng thời gian gần 300 năm.

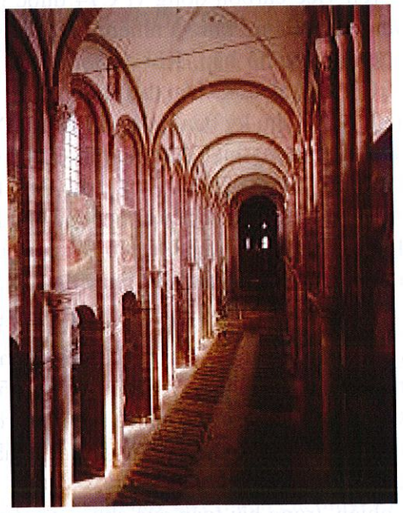
Các tài liệu và di vật đáng tin cậy về giai đoạn 614-911 cũng rất hiếm hoi một cách đáng kinh ngạc. Tuy vậy, người ta có thể nhờ cậy đến việc xác định niên đại bằng các phương pháp khoa học như phương pháp đồng vị carbon 14 (RC14) hoặc phương pháp đếm vòng từ thớ gỗ thân cây (dendrology). Nếu năm nay 2017, chúng ta xác định được tuổi của một số vật có niên đại khoảng năm 600 và chứng minh là có tuổi tính theo RC14 là khoảng 1417 năm thì giả thuyết Thời gian Ma đi tong. Nhưng thực tế không giản dị như vậy. RC14 dựa trên việc carbon đồng vị C14 được hình thành trong không khí và nhiễm vào các sinh vật qua đường hô hấp. Khi các sinh vật này chết, C14 ngừng được hấp thụ thêm và bắt đầu phân hủy với chu kỳ bán rã là 5730 năm. Như vậy, nếu chúng ta biết được lượng C14 trong sinh vật đó khi mới chết thì việc xác định thời gian hết sức dễ dàng. Chúng ta có thể giả thiết số lượng C14 trong sinh vật đó khi mới chết gần giống như trong sinh vật ngày nay.

Thực sự điều đó chỉ đúng với các thời điểm gần đây. Ở các thời đại xa hơn, việc hình thành C14 trong khí quyển có thể có nhiều thay đổi. Đối với các thế đại rất xa như trong khảo cổ, người ta có thể chấp nhận sai số hàng trăm năm.

Tuy nhiên, trong bài toán của chúng ta, sai số này khó chấp nhận. Vì vậy người ta phải hiệu chỉnh lại phương pháp RC14 bằng phương pháp đếm vòng gỗ trong thân cây. Cơ sở của



Hình 7: *Đại giáo đường Speyer được xây dựng vào thế kỷ 11 bởi Hoàng đế Konrad II*



Hình 8: *Lối đi mái vòm tại Đại giáo đường Speyer là tiên phong về phong cách này tại Âu châu*



Hình 9: *Các vòng cây, tại một cây ở Vườn Bách Thú Britol (Anh), mỗi năm ứng với một vòng cây. Vòng cuối cùng gần vỏ là năm gần nhất*

phương pháp này là do mỗi năm cây có thêm một vòng. Nếu có các mẫu gỗ được xác định niên đại chính xác trong một thời kỳ, người ta có thể xác định lượng C14 trong các mẫu này để tìm ra quy luật thay đổi của lượng C14 tích trong cơ thể sống theo thời gian.

Tuy nhiên, việc tìm ra các mẫu gỗ đáng tin cậy từ thế kỷ 7 đến thế kỷ 10 là rất khó khăn và hiếm hoi. Điều này cũng được những người ủng hộ giả thuyết Thời gian Ma cho là bằng chứng để khẳng định thêm giả thuyết của mình.

Các bằng chứng khảo cổ về giai đoạn Thời gian Ma dường như cũng ủng hộ giả thuyết này. Các khai quật địa tầng tại thành phố Frankfurt am Main hoàn toàn không thấy lớp địa tầng nào ứng với giai đoạn 650-910.

Để phản bác giả thuyết Thời gian Ma, chúng ta có thể xem xét lịch sử của các quốc gia Islam và của đế chế Byzantium. Nếu có thể tìm ra những điểm mốc để qua đó xác định thời gian 614-911 là có thật thì giả thuyết này xem như không đứng vững.

Theo sử sách (tuyệt đại đa số viết về sau này), khoảng Thời gian Ma là xảy ra sự tranh chấp quyền lực của đế quốc Byzantium và các nhà nước Islam mới nổi lên. Người ta biết rằng có một chương trình cải cách xã hội tại Byzantium sau khi đế quốc này tách khỏi đế quốc La Mã.

Các nhà sử học cũng rất đau đầu vì thấy rằng giai đoạn thế kỷ 7-10, hầu như không có một vết tích gì và dường như xã hội không có thay đổi đáng kể so với các thay đổi trước và sau đó. Trước khi có giả thuyết Thời gian Ma, các nhà sử học đã tranh cãi về tính chính xác về số liệu cho thời gian này và không có kết luận nào thuyết phục.

Lịch sử của Islam cũng có sự trùng hợp kỳ lạ về sự tồn tại của khoảng Thời gian Ma, mà nguyên nhân chưa được tìm ra. Thiên sử thi vĩ đại Shahnameh hoàn tác năm 1010 bởi Firdowsi, viết về lịch sử cổ đại của Iran cũng dừng lại vào năm 650, bỏ qua gần 300 năm dưới ảnh hưởng của Islam, như nó không hề tồn tại.

Thời điểm của những người Iran tràn vào Ấn Độ có rất nhiều mâu thuẫn cho đến nay vẫn chưa ai giải quyết được. Các tù điển bách khoa khác nhau vẫn đưa ra các thời điểm khá mâu thuẫn từ thế kỷ 7 đến thế kỷ 10.

Một điều kỳ lạ là trong một bức bích họa thời nhà nước Islam Omayyades có tả lại cảnh nhà vua Ba Tư (Iran cổ đại) Khosrow II quy phục Omayyades. Nhưng thực ra nhà vua này chết từ trước khi có Omayyades hơn 100 năm. Đồng tiền của nhà nước Islam Oyayades phát hành năm 695 in hình vua Persic Khosrow II. Điều đó chứng tỏ rằng nhà nước Ba Tư và Islam đã cùng tồn tại song song một thời gian dài. Nhưng có thể do các lý do ý thức hệ mà các sử gia lại chép chúng thành hai lịch sử riêng biệt tiếp nối nhau. Trong Hình 10 là hình của một đồng tiền Ả Rập, đúc vào năm 695 lại có hình vua Khosrow II đã mất năm 628. Theo sử Islam, thì nhà nước Ba Tư cũng không còn tồn tại, lý do gì nhà nước Islam lại in hình vua Ba Tư lên tiền.

Nếu sửa đổi để tất cả các chi tiết lịch sử tương tự như vậy trở nên hợp lý, chỉ cần đưa vào lịch sử của Islam những thời gian ma. Nếu xóa đi các giai đoạn 583-661 và 750-968, tổng cộng



Hình 10: *Đồng tiền do nhà nước Islam ban hành năm 695 có in hình vua Ba Tư Khostow II mất năm 628. Đế quốc Ba Tư bị tiêu diệt năm 651*

Thời gian Ma là 296 năm, phù hợp với thời gian ma ở Âu Châu.

Lịch sử của người Do Thái ở Âu Châu cũng có rất nhiều khoảng trống. Sau khi đế chế La Mã cổ đại bị vỡ năm 476, sự tồn tại của người Do Thái ở Âu Châu không còn được ghi nhận cho đến tận thế kỷ 10. Do đó các nguồn sử liệu Do Thái cũng không hề mâu thuẫn với giả thuyết Thời gian Ma. Ngược lại, Thời gian Ma cho phép giải thích phần nào việc thiếu hụt sử liệu trong thời gian 5 thế kỷ.

Các ý tưởng liên quan

Việc ngụy tạo lịch sử là việc thường xảy ra, nhưng luôn để lại dấu vết. Trong lịch sử Ai Cập, cũng có việc nữ hoàng (Pharaoh) Hatshepsut bị xóa tên, nhằm vào việc hạ địa vị nữ hoàng này thành nữ nhiếp chính vương. Việc tách các nhà nước có tôn giáo khác nhau vào các thời kỳ khác nhau như trường hợp nhà nước Ba Tư và Islam cũng có thể tạo những sai lệch về thời điểm lịch sử.

Giả thuyết Thời gian Ma không phải là thuyết duy nhất về khoảng thời gian không có thật trong lịch sử. Dựa trên các bằng chứng thiên văn có tới 3 giả thuyết với mức độ nặng nhẹ khác nhau. Giải thuyết Trật tự thời gian Mới của nhà toán học, Viện sĩ A.Fomenko [2], cho rằng có tới hơn 1100 năm đã được ngụy tạo

trong lịch sử Châu Âu. Tuy nhiên, quan điểm này có phần quá khích, buộc ông phải phủ nhận sự tồn tại của phần lớn lịch sử Trung Quốc trước thời nhà Tống, như Tùy-Đường. Đó là những điểm yếu trong giả thuyết này.
Giả thuyết Trật tự thời gian thấp nhất của nhà vật lý V. Gurzadyan, dựa trên tính toán lại ngày Nhật thực được ghi nhận, cho rằng vua Murshilis I của người Hitti đã chiếm Babylon vào năm 1499 trước Công nguyên, chứ không phải vào năm 1531 như lịch sử ghi chép. Giả thuyết này cũng cho rằng có tới 96 năm trong lịch sử cổ đại bị ngụy tạo.



Hình 11: *Trận chiếm thành Babylon xảy ra năm nào? (tranh của danh họa Thomas Cole, 1828)*

Nếu giả thuyết Thời gian Ma là đúng thì Hoàng đế Charlemagne sẽ là ngụy tạo và toàn bộ triều đại Carolinger của đế quốc La Mã thần thánh cũng là ngụy tạo.

Theo B.Lukács [3] các bằng chứng về văn hóa, khảo cổ mà Heribert Illig đưa ra đều có thể tìm lý do để giải thích, tuy có phần gượng ép. Nhưng theo ông, bằng chứng về thiên văn sẽ là quyết định. Nếu quả thật thời Ceasar, ngày Xuân phân là vào ngày 20/3, như Heribert Illig nói thì đây sẽ là một vấn đề nghiêm trọng có thể ủng hộ cho giả thuyết Thời gian Ma. Tuy nhiên, có một số công trình nghiên cứu khác lại tìm bằng chứng cho rằng vào thời Ceasar ngày Xuân phân rơi vào ngày 25/3.

Mặt khác, việc so sánh lịch sử Âu Châu, Trung Đông và lịch sử Trung Quốc sẽ có những vấn đề cần phải làm rõ.



Hình 12: *Charlemagn Hoàng đế sáng lập đế quốc La Mã thần thánh, có thể là nhân vật lịch sử ngụy tạo?*

Giả thuyết Thời gian Ma và các giả thuyết liên quan là những cách nhìn mới mang tính phê phán về lịch sử Âu châu thời kỳ Trung Đại. Trong đó cách tư duy toán học đã kết nối các tri thức liên ngành. Dù đúng dù sai, việc đưa ra các giả thuyết và phản biện chúng cũng góp phần đưa khoa học tiến lên. Việc tìm hiểu giả thuyết này cho thấy, trong khoa học không có bất cứ một chân lý nào, dù là hiển nhiên, là bất di bất dịch. Việc có những trường phái khoa học với các quan điểm trái ngược, tranh luận một cách minh bạch và sòng phẳng sẽ đem lại một bầu không khí khoa học chân chính hơn.

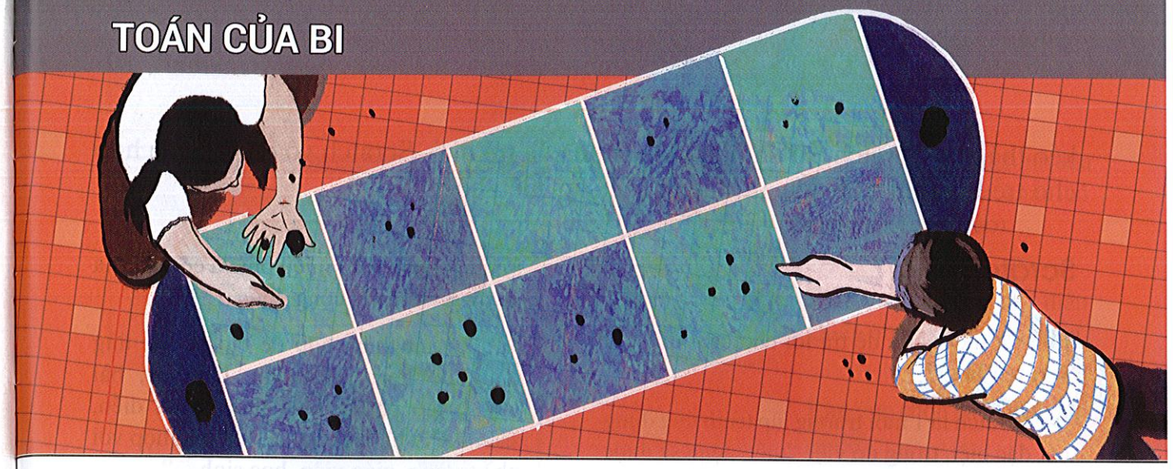
Tài liệu tham khảo

[1] H. Niemitz, *Did the Early Middle Ages Really Exist?*, (1997) http://www.cl.cam.ac.uk/ mgk25/volatile/Niemitz-1997.pdf

[2] A.Fomenko, *History: Fiction or Science, Chronology 1*, Delamere Publishing (2007)

[3] B.Lukács, *Phantom times? Is the lowermost chronology of babylon more probable than the excision of Charlemagne?*, http://www.rmki.kfki.hu/ lukacs/FOMENKO4.html

TOÁN CỦA BI



LTS. Giáo dục Tin học cho học sinh ngay từ bậc tiểu học đang là xu thế mới của giáo dục, đặc biệt ở các nước tiên tiến. Lập trình Scratch là bước khởi đầu rất thích hợp, như bạn đọc sẽ thấy sau khi đọc loạt 12 giảng của TS Bùi Việt Hà, bắt đầu từ Pi Tập 1 số 7, tháng 7.2017.

HỌC LẬP TRÌNH SCRATCH

Bùi Việt Hà





Lời nói đầu. Môi trường và ngôn ngữ lập trình Scratch do nhóm nghiên cứu Lifelong Kindegarden Group thuộc đại học MIT (Massachusetts Institute of Technology) thiết lập đầu năm 2008. Ý tưởng ban đầu của nhóm chỉ là thiết lập một ngôn ngữ lập trình mới, đơn giản, không cần nhớ, lập trình chỉ dùng kéo thả, dành cho trẻ con để thiết lập trò chơi, phim hoạt hình, ứng dụng đơn giản, kích thích sự sáng tạo trong môi trường làm việc nhóm của trẻ.

Tuy nhiên Scratch chỉ thực sự bùng nổ từ năm 2014 khi một số quốc gia như Anh, Mỹ đã đổi mới đột phá chương trình giảng dạy môn Tin học trong nhà trường, đưa nội dung kiến thức Khoa học máy tính vào nhà trường ngay từ cấp Tiểu học. Một trong những đề nghị quan trọng nhất của các chương trình này là cần đưa các ngôn ngữ lập trình đơn giản, dạng kéo thả như Scratch vào giảng dạy trong nhà trường ở bậc Tiểu học. Việc điều chỉnh chương trình môn Tin học này đã kéo theo sự gia tăng bùng nổ của Scratch trên phạm vi toàn thế giới. Số lượng học sinh đăng ký tham gia trang Scratch tăng đột biến cả về số lượng và chất lượng. Thực tế đã chứng minh tính hấp dẫn của các môi trường lập trình

kéo thả như Scratch, sự đam mê lập trình của trẻ nhỏ. Scratch vô cùng thích hợp cho trẻ lứa tuổi từ 6 đến 14, tức là các cấp Tiểu học, THCS.

Scratch là gì?

Tóm tắt một vài ý để trả lời cho câu hỏi: **vậy Scratch là gì?**

- Scratch là 1 môi trường lập trình ứng dụng đặc biệt, trong đó việc "viết" lệnh sẽ được thực hiện bằng thao tác "kéo thả".
- Đầu ra của Scratch hỗ trợ các công nghệ mới nhất của CNTT như âm thanh, hình ảnh, do vậy các ứng dụng của Scratch rất phong phú, hấp dẫn đối với trẻ nhỏ.
- Scratch có sự phát triển bùng nổ vài năm trở lại đây. Đặc biệt là sau khi một số quốc gia có tiềm lực khoa học kỹ thuật mạnh trên thế giới đã quyết định đưa Scratch vào giảng dạy trong nhà trường cho học sinh từ cấp Tiểu học.
- Scratch hoàn toàn miễn phí và có thể chia sẻ rộng rãi trong cộng đồng.
- Scratch rất thích hợp để tạo ra các ứng dụng đồ họa, animation, bài học, bài giảng, mô phỏng kiến thức, trình diễn, sách điệnu tử, trò chơi,... rất phù hợp với nhà trường, giáo viên, học sinh.
- Scratch là môi trường tốt nhất để dạy học sinh làm quen với tư duy máy tính, khoa học máy tính từ lứa tuổi tiểu học.

Chuyên mục Học lập trình Scratch dành cho ai?

Chúng tôi dự kiến sẽ viết một serie các bài học đơn giản lập trình Scratch dành cho học sinh Tiểu học, đặc biệt là từ các lớp 1, 2, 3. Mỗi bài học sẽ là một chủ đề và một chương trình ứng dụng hoàn chỉnh.

BÀI 1. CON VẬT BIẾT NÓI CHUYỆN

Mục tiêu

Học xong bài này em sẽ biết:

- Nhân vật là gì?
- Con vật cũng có thể nói chuyện được như người.
- Chương trình máy tính = 1 dãy có thứ tự các lệnh.
- Lập trình thật là đơn giản.



Biểu tượng Scratch

Nội dung bài học

1. Làm quen với Scratch

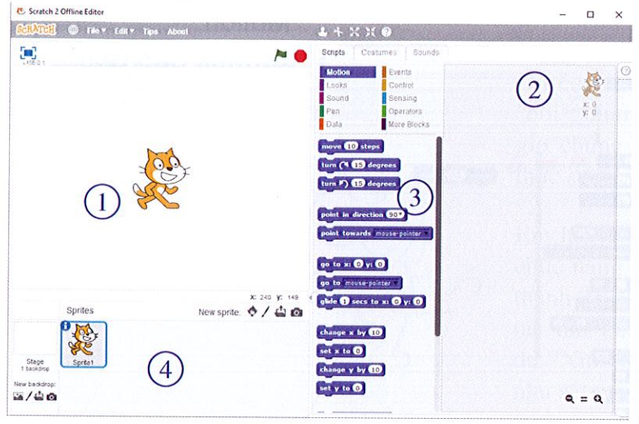
Scratch là một phần mềm trò chơi? Đúng, nhưng Scratch còn là một cái gì hay hơn thế nữa cơ.

Chúng ta cùng tìm hiểu các bạn nhé.

Để khởi động Scratch em hãy nháy đúp lên biểu tượng Scratch (hình con mèo) trên màn hình máy tính hoặc vào trực tiếp trang mạng

https://scratch.mit.edu/projects/editor/

để quan sát giao diện Scratch.



① Khu vực sân khấu chính của Scratch. Trên sân khấu có nhân vật (con mèo).

② Khu vực "lập trình" điều khiển nhân vật và sân khấu.

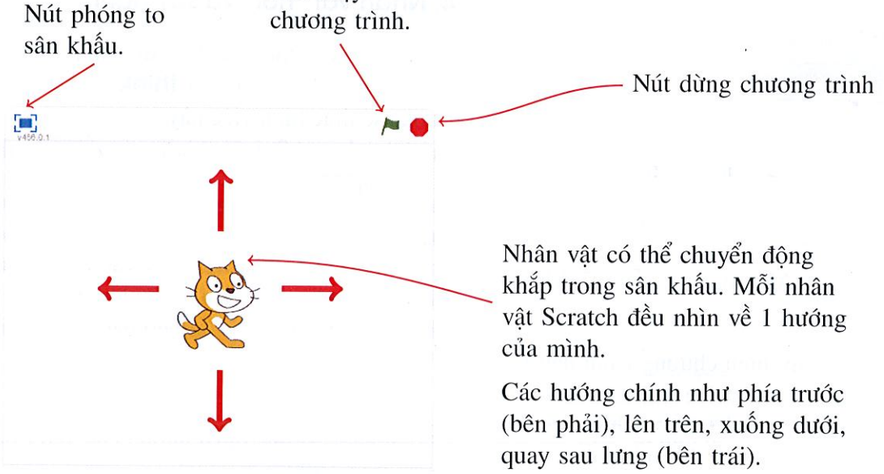
③ Khu vực chọn các "lệnh lập trình".

④ Khu vực lựa chọn, bổ sung nhân vật, nền sâu khấu.

2. Nhân vật Scratch là ai?

Chúng ta nhìn thấy gì trên sân khấu? Đó là con Mèo. Đó cũng chính là nhân vật mà em sẽ phải "lập trình" để điều khiển chú Mèo đó. Em sẽ được học ngay sau đây cách tạo thêm nhiều nhân vật nữa trên sân khấu và cách điều khiển chúng như thế nào.

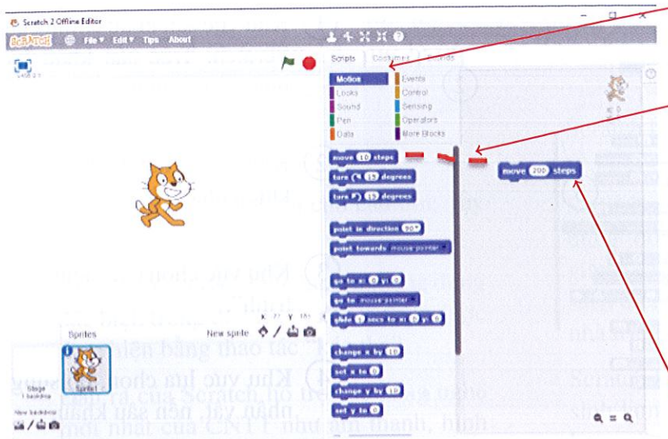
Em cần nhớ: em chính là Tổng Đạo Diễn của chương trình Scratch điều khiển các nhân vật trên sân khấu.



3. Điều khiển nhân vật bằng gì?

Vậy chúng ta sẽ điều khiển nhân vật như thế nào, bằng gì? Em hãy quan sát khu vực ① là nơi em cần đưa ra các "lệnh" để điều khiển nhân vật. Các lệnh điều khiển này đều nằm trong khu vực ②.

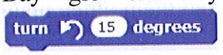
Em hãy thực hiện theo các bước như sau:



1. Nháy chọn nhóm lệnh **Motion**.

2. Kéo thả lệnh **Move .. steps** sang cửa sổ lệnh.

3. Sửa giá trị 10 thành 200.

Bây giờ em hãy kéo thả tiếp lệnh  ra cửa sổ lệnh, sửa giá trị số thành 45, sau đó kéo vào sát phía dưới của lệnh đang có, em sẽ thấy 2 lệnh này bị hút dính vào nhau:

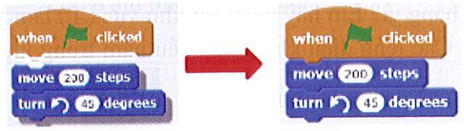
Lệnh tiến về phía trước 200 bước.

Lệnh quay sang trái một góc 45°.

Bây giờ chúng ta có thể thử thực hiện chạy 2 lệnh trên bằng cách nháy đúp chuột lên một trong 2 lệnh này.

Em có thấy con Mèo đã thực hiện 2 thao tác trên không?

Bây giờ em hoàn thiện chương trình đầu tiên bằng cách nháy chọn nhóm lệnh Event, sau đó kéo thả lệnh **when <lá cờ> clicked** sang cửa sổ lệnh. Em sẽ thấy lệnh này nằm ở phía trên và cũng tự động hút vào 2 lệnh đã có.

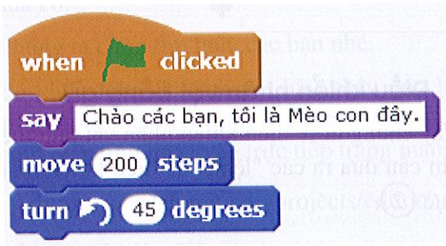


Bây giờ em đã có 1 chương trình hoàn chỉnh. Em có thể phóng to màn hình, nháy vào nút có hình lá cờ để chạy chương trình mà em đã thực hiện.

4. Nhân vật "nói" và suy nghĩ

Nhân vật có thể "nói", "suy nghĩ" được không? Các lệnh **say** và **think** trong nhóm Looks sẽ thực hiện việc này.

Em hãy nháy lên nhóm Looks, sau đó kéo thả lệnh ra cửa sổ lệnh. Em sửa dòng chữ Hello thành "Chào các bạn, tôi là Mèo con đây", sau đó đưa lệnh này vào nhóm lệnh đã có ngay phía dưới lệnh điều khiển when ... Chạy thử em sẽ thấy con mèo bây giờ đã biết nói, thật là tuyệt vời.

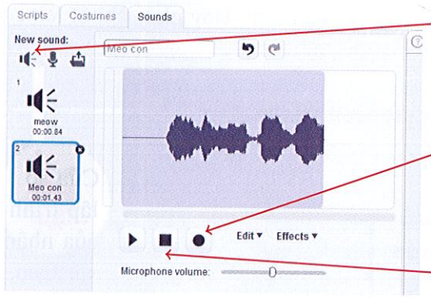




5. Nhân vật có nói được không?

Ở trên em đã biết cách làm cho nhân vật biết "nói", nhưng chỉ hiện chữ trên màn hình. Bây giờ chúng ta sẽ làm cho con Mèo biết nói thực sự.

Em hãy nháy lên nút (TAB) Sounds, đây là chức năng điều khiển nhân vật thêm bớt âm thanh để có thể nói được. Em thực hiện thao tác thu âm trực tiếp trên máy tính câu, ví dụ "Xin chào các bạn, tôi là Mèo con đây" như sau:

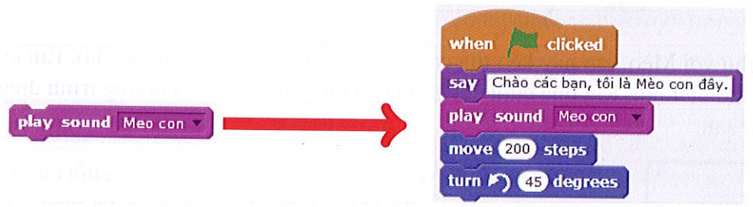


1. Nháy vào nút này để bổ sung âm thanh sẽ thu âm.

2. Nháy vào nút này và đọc lời thoại để thu âm trực tiếp.

3. Thu âm xong nháy nút này, sau đó đặt tên cho âm thanh là Meo con tại dòng phía trên.

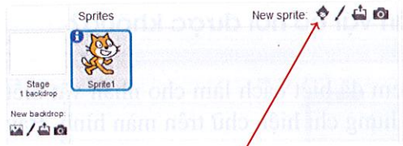
Bây giờ em vào nhóm lệnh **Sounds** và kéo thả lệnh **play sound ...** (chọn âm thanh là Meo con vào giữa các dòng lệnh như hình dưới.



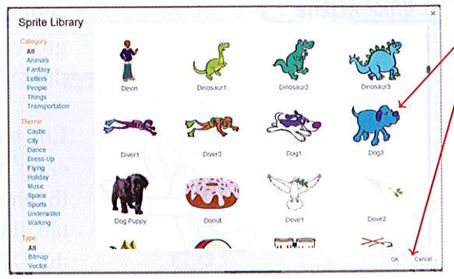
Hãy chạy lại chương trình, em sẽ nghe được Mèo con nói thực sự như thế nào.

6. Các con vật của em

Chúng ta sẽ hoàn thiện bước cuối cùng của bài học hôm nay bằng cách bổ sung thêm nhân vật vào chương trình và học cách "lập trình" điều khiển các nhân vật khác nhau trên sân khấu. Khu vực (4) phía dưới sân khấu là nơi điều khiển nhân vật và sân khấu. Bây giờ em hãy thực hiện các bước sau nhé để thêm nhân vật của em.



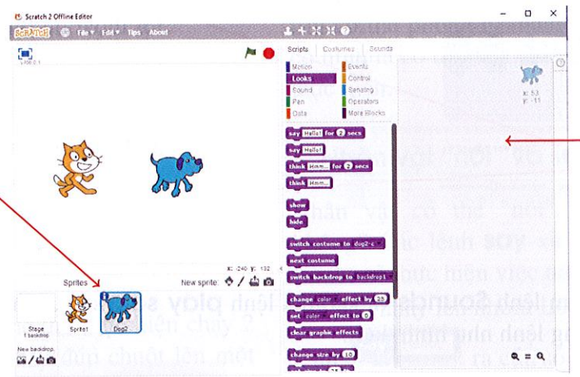
1. Nháy nút này để vào cửa sổ bổ sung nhân vật.



2. Tìm, nháy chọn con Chó và nháy nút OK phía dưới.

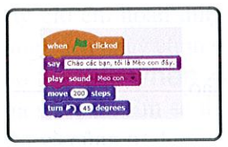
Sau bước trên em sẽ thấy con Chó xuất hiện trên sân khấu. Như vậy em đã có 2 nhân vật của em là Mèo và Chó. Mỗi con vật có 1 cửa sổ điều khiển riêng của mình. Hãy nháy chuột lên con Chó để vào cửa sổ lập trình riêng của Chó.

Nháy lên nhân vật để vào cửa sổ lập trình của nhân vật đó.



Cửa sổ lập trình của nhân vật Chó.

Tương tự như với Mèo, em hãy kéo thả các lệnh để lập trình điều khiển Chó. Em có thể thu âm riêng cho Chó biết nói. Kết quả cuối cùng em cần thực hiện là viết chương trình điều khiển Mèo và Chó như sau:



Chương trình điều khiển Mèo

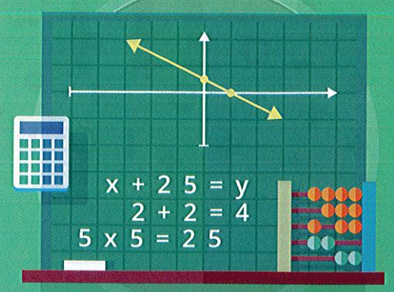


Chương trình điều khiển Chó

Bây giờ em đã đi đến thời gian cuối cùng của bài học rồi. Hãy phóng to màn hình và chạy chương trình đầu tiên của em.

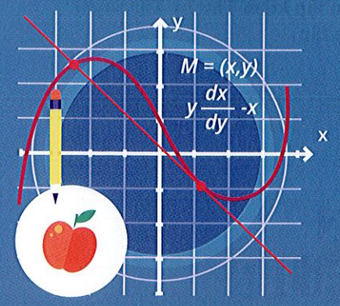
Cuối cùng em cần ghi chương trình này với tên "Con vật biết nói chuyện" để sau này có thể mở ra dùng lại. Thực hiện lệnh ghi tệp từ thực đơn **File → Save**. Chú ý cần ghi rõ phần mở rộng của tệp là sb2.

Hẹn gặp lại trong các bài tiếp theo.



THỂ LỆ GỬI BÀI:

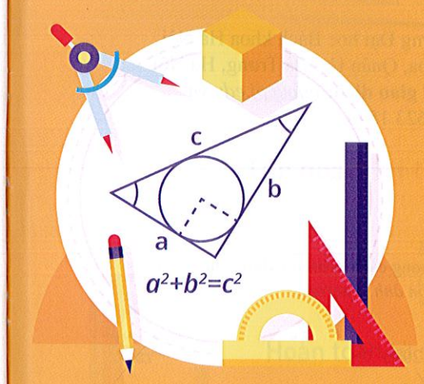
- Bài gửi email đến ***bbt@pi.edu.vn*** cần ghi rõ ở Chủ đề (Subject) của email: Lời giải của bài toán nào; Bài toán đề xuất; Bài viết cho chuyên mục gì; hoặc Bài viết không theo chuyên mục nào.
- Trên trang đầu bản thảo từng bài toán, bài viết cần ghi rõ họ tên tác giả, địa chỉ thư tín, e-mail và số điện thoại để tiện liên hệ.
- Các bài toán đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về khối lớp. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn.
- Bản thảo gửi theo email với định dạng latex hoặc word, cùng với file định dạng pdf.
- Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.



ĐỊA CHỈ GỬI BÀI:

- Qua email: ***bbt@pi.edu.vn***
- Qua bưu điện:

Tòa soạn Tạp chí Pi
Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu,
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,
Đường Đại Cồ Việt, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.



THỂ LỆ ĐẶT BÁO:

Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- **Đặt tại các bưu cục trong cả nước.** Mã của Tạp chí Pi là C057.

  Bạn đọc gặp vướng mắc trong đặt và nhận báo qua bưu điện xin gọi đường dây nóng 1900 545481 để được hỗ trợ.
- **Đặt tại website *www.pi.edu.vn*:** chọn nút Đặt tạp chí và làm theo hướng dẫn.
- **Đặt với Tòa soạn:** điền vào biểu mẫu tại đường dẫn ***http://gg.gg/DatTapChiPi***

  Thanh toán vào tài khoản của Tạp chí Pi:
  Tài khoản số: 0851000012293
  Ngân hàng Vietcombank chi nhánh Hà Thành.
  (trong nội dung chuyển tiền cần ghi rõ họ tên, điện thoại người chuyển)

  Sau khi thanh toán xong gửi email đến ***info@pi.edu.vn*** để được xác nhận.
- **Đặt mua bản điện tử tại *Alezaa.com***.

JOURNAL

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái **(Tổng Biên tập)**
Ngô Bảo Châu **(Phó Tổng Biên tập)**
Trần Nam Dũng **(Phó Tổng Biên tập)**
Nguyễn Thị Lê Hương **(Phó Tổng Biên tập kiêm Thư ký Tòa soạn)**
Nguyễn Khắc Minh **(Trưởng ban Biên tập)**

Phạm Huy Điển, Nguyễn Thành Nam,
Trần Văn Nhung, Nguyễn Duy Thái Sơn, Chu Cẩm Thơ,
Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn, Nguyễn Ái Việt, Lê Anh Vinh.

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYÊN

Hạ Vũ Anh, Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Ngọc Điệp, Nguyễn Minh Hà,
Lưu Thị Thanh Hà, Trần Minh Hiền, Phan Thanh Hồng, Trần Quang Hùng,
Hà Duy Hưng, Đậu Hoàng Hưng, Nguyễn Văn Huyện, Vũ Thế Khôi,
Nguyễn Duy Liên, Phạm Vũ Lộc, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh,
Nguyễn Thị Nhung, Đặng Văn Sơn, Đỗ Hoàng Sơn, Lê Xuân Sơn,
Lưu Bá Thắng, Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thu.

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Đường Đại Cồ Việt, Phường Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Email gửi bài: *bbt@pi.edu.vn*. **Email giao dịch:** *info@pi.edu.vn*
Điện thoại: 04.3215.1407 Fax: 04.3623.1543
Website: *www.pi.edu.vn*

Chế bản: Lê Quốc Tuấn
Đồ họa: Nguyên Trần, Đoàn Xuân Trường
Ảnh bìa 1: Tiểu giáo đường Aachen có phong cách kiến trúc được cho là vượt thời đại 200 năm *(xem bài trang 50). Nguồn ảnh: Internet.*

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty Cổ phần In Hà Nội
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 25.000 đồng

TH



TH SCHOOL MILK
XÁC NHẬN HIỆU QUẢ
NGHIÊN CỨU LÂM SÀNG

Tập đoàn TH tiên phong đồng hành cùng chương trình
Sữa Học Đường Quốc Gia



Thật sự thiên nhiên
Hoàn toàn từ sữa tươi sạch nguyên chất của trang trại TH
- Xác Lập Kỉ Lục Lớn Nhất Châu Á

Website: **www.thmilk.vn** | Hotline: **1800 54 54 40**