TẠP CHÍ PI

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 1 - SỐ 6 THÁNG 6 . 2017



Giải phương trình bậc hai và bậc ba

Đối xứng hơn hình cầu

ISSN 2525-2437

TRONG SỐ NÀY

TOÁN HỌC TỪ CỔ ĐIỂN ĐẾN HIỆN ĐẠI

Đối xứng hơn hình cầu 3
Barry Mazur

Giải phương trình bậc hai và bậc ba 8
Ngô Bảo Châu

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

13 **Bài toán Fermat và bài toán Steiner từ góc nhìn thực tiễn và lịch sử**
Lê Văn Bình, Tạ Duy Phượng, Trần Lê Thủy, Trần Đình Xuyền

19 **Vận trù học: sự trở lại của ngành toán ứng dụng bị lãng quên**
Hà Minh Hoàng

GIẢI TOÁN CÙNG BẠN

Làm toán mùa sen 21
Thầy giáo làng

THÁCH THỨC TOÁN HỌC
(nhiều tác giả)

25 **Thách thức kỳ này dành cho cấp THCS**

26 **Thách thức kỳ này dành cho cấp THPT**

26 **Giải bài kỳ trước**

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

Cardano và Ars Magna 40
Phan Thanh Hồng và Nguyễn Thị Nhung

ĐẤU TRƯỜNG TOÁN HỌC

45 **IMO: Đôi chuyện hậu trường**
Nguyễn Khắc Minh

GÓC STEM

48 **Hạ cánh an toàn – hoạt động STEM thú vị**
Đặng Văn Sơn và Nguyễn Thị Tố Khuyên

TRẠM THIÊN VĂN

52 **Thế nào là một ngày?**
Phạm Vũ Lộc

QUÁN TOÁN
(nhiều tác giả)

Chuyện bác Tôm làm toán 55

Lâu đài của nhà vua 57

Giải đáp bài "Tiết kiệm nguyên liệu" 58

TOÁN CỦA BI
(nhiều tác giả)

59 **Chiếc cân thăng bằng**

61 **Trò chơi Nim**

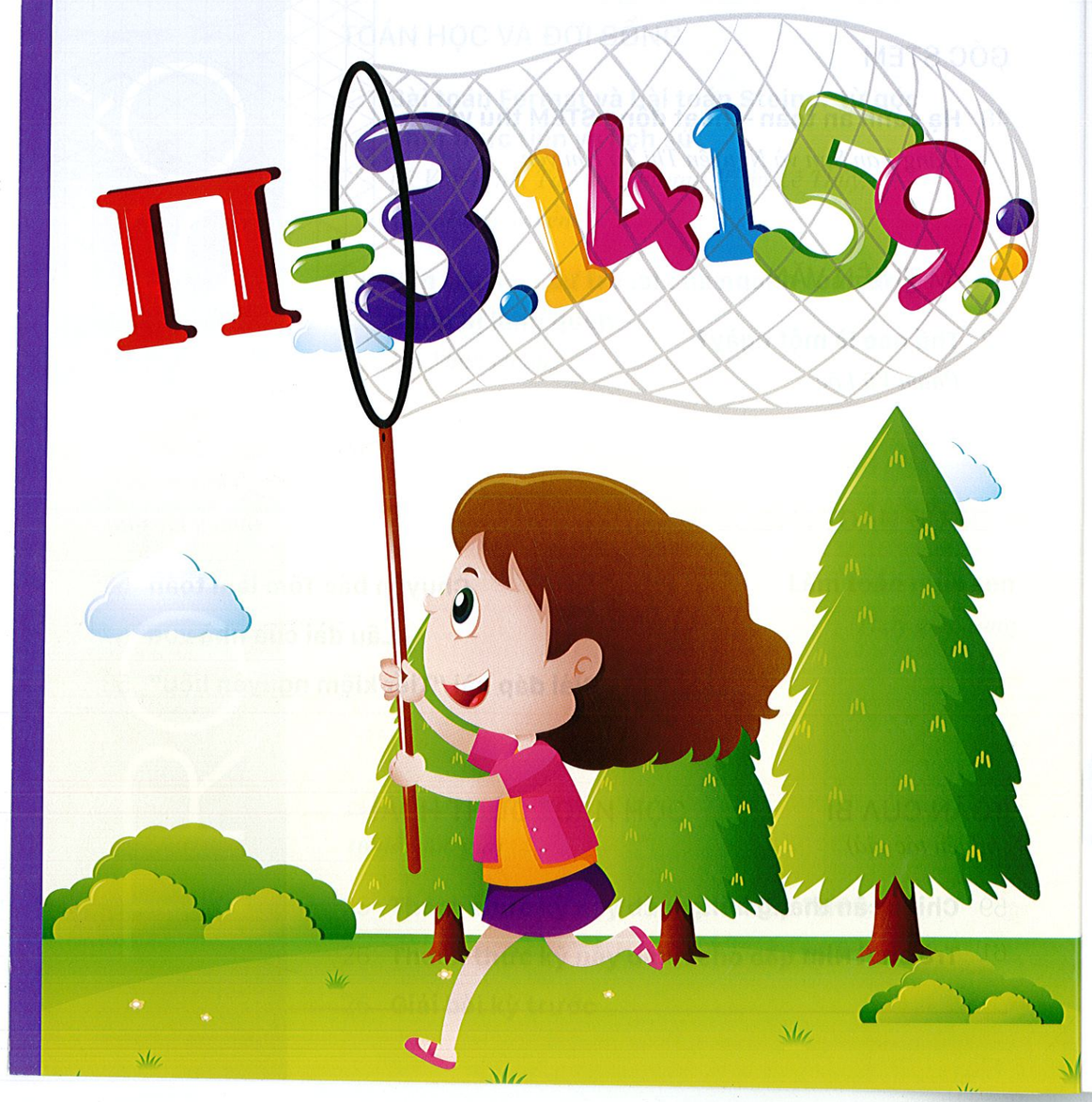
Tháng Sáu bắt đầu với ngày của Thiếu nhi.

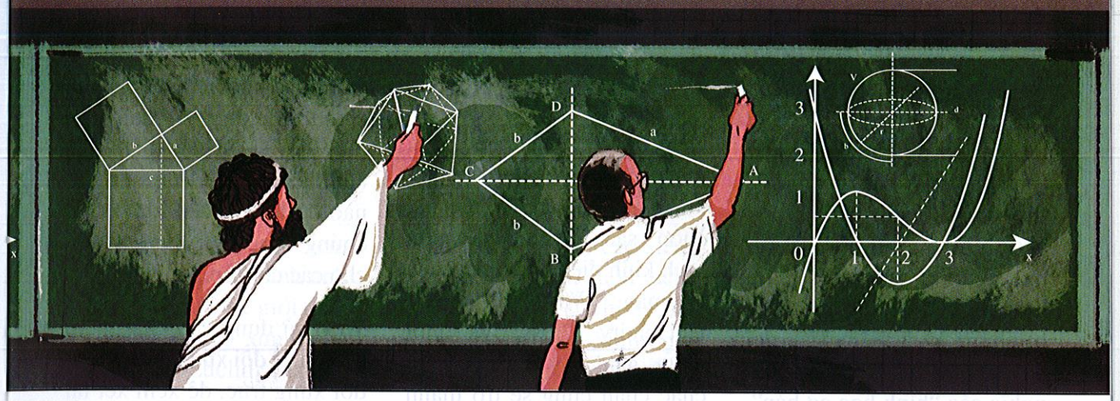
Pi xin gửi lời chúc mừng tới tất cả các bạn đọc của Pi!

Tất cả, chứ không chỉ riêng các bạn còn trong tuổi Thiếu nhi! Khi giữ cho mình tình yêu Toán học, các bạn, dù ở lứa tuổi nào, cũng vẫn như đang tuổi Thiếu nhi. Bởi vì tình yêu Toán học trước hết là lòng say mê khám phá - đặc điểm của tuổi Thiếu nhi.

Pi cũng vậy, luôn thấy mình trẻ trung, mặc dù các nhà Sử học nói rằng Pi đã có hơn 2000 năm tuổi!

Bạn đọc thân mến, hãy cùng Pi trẻ mãi!





ĐỐI XỨNG HƠN HÌNH CẦU

Barry MAZUR

(Dịch từ nguyên bản tiếng Pháp. Người dịch: Nguyễn Hoàng Thạch)

Trong khi hình cầu là vật thể đối xứng tuyệt vời, dưới góc nhìn của các phép lát đối xứng, mặt hyperbolic lại phong phú hơn hẳn. Xét về điểm này, lợi ích của hình học hyperbolic là hiển nhiên. Mặt khác, tính đối xứng của các phép lát là một công cụ mạnh để giải nhiều bài toán khác nhau, từ định lý Pythagore đơn giản đến định lý lớn của Fermat.

Bài viết này là một bài ca về đối xứng, từ những đối xứng đơn giản nhất tới những chùm đối xứng phức tạp nhất. Chẳng hạn, khi nghiên cứu những đồng nhất thức đa thức trên số phức (tức là các số dạng $a + ib$, ở đó a và b là các số thực và i là một số thỏa mãn $i^2 = -1$), một lưu ý hữu ích là đẳng thức được bảo toàn nếu thay i bởi $-i$. Phép biến đổi $i \mapsto -i$ là một đối xứng trong mặt phẳng phức. Thật vậy, đối xứng này bảo toàn nghiệm của mọi bài toán được diễn đạt chỉ bằng các số hữu tỷ hoặc các số thực.

Đôi khi, sự đối xứng không hiển hiện, nhưng một thay đổi nhỏ về góc nhìn có thể làm lộ ra một cách diễn giải được ẩn giấu, như trong cuộc cách mạng Copernicus. Những trường hợp có vô hạn các đối xứng là rất lý thú nếu chúng ta biết tận dụng. Thí dụ, xét một phép lát vô hạn cùng với mô-típ cơ sở trong hình (xem *Hình vẽ trang 5*). Sắp xếp lại các mảnh trong mô-típ cơ sở, chúng ta thu được chứng minh cổ điển của định lý Pythagore.

Thú vị hơn: làm sao sử dụng sự lặp lại vô hạn của mô-típ cơ sở để có một chứng minh khác cho định lý? Bạn đọc hãy thử tự tìm cách chứng minh trước khi đọc câu trả lời được đưa ra trong hình vẽ!

Điều làm tác giả băn khoăn về cách chứng minh thứ hai này là việc một suy luận trên một phần mặt phẳng hữu hạn lại có thể sử dụng một cách gần gũi đến như vậy toàn bộ mặt phẳng Euclid, thông qua sự lặp lại của các mô-típ và các đối xứng tịnh tiến.

Các đối xứng tịnh tiến đơn giản này rất mạnh. Chúng có lẽ không phải "sự đối xứng đáng sợ" như lời nhà thơ William Blake, và chắc chắn không phải "những sự kỳ dị chán ngắt" như nhà văn James Joyce ám chỉ.

Đã thấy qua sức mạnh của các đối xứng, bây giờ chúng ta sẽ tiến sâu hơn. Nhưng trước tiên, hãy dạo qua những thay đổi mạnh mẽ trong vòng 150 năm qua của cái mà người làm toán gọi là môn hình học. Được trang bị những khái niệm hiện đại này, chúng ta sẽ có thể định nghĩa các "hình học cơ bản", đặc biệt là hình học hyperbolic mà sức mạnh được đo bằng các phép lát và các đối xứng.

Hình học mới

Nếu bạn đọc không quen thuộc với toán học về đối xứng, tác giả giới thiệu hai cuốn sách sau đây: cuốn sách kinh điển *Symmetry* của Herman Weyl, Princeton University Press, và một cuốn gần đây hơn, nhưng chắc chắn cũng sẽ trở thành kinh điển, *Indra's Pearls* của D. Mumford, C. Series và D. Wright, Cambrige University Press. Những khác biệt trong các cách tiếp cận ở hai cuốn sách ra đời cách nhau một nửa thế kỷ này cho thấy các nhà toán học thay đổi cách giải thích các công trình của mình như thế nào để hướng đến một công chúng rộng hơn, thay vì chỉ cho các chuyên gia.

Weyl sử dụng các khái niệm cơ bản về đối xứng, bắt đầu từ đối xứng trục, để xem xét lại các tác phẩm nghệ thuật nổi tiếng, thí dụ các bức chạm nổi tháp Babylon, hoặc các hình dạng trong tự nhiên, như con sứa đối xứng bát giác (xem *Hình 3*).



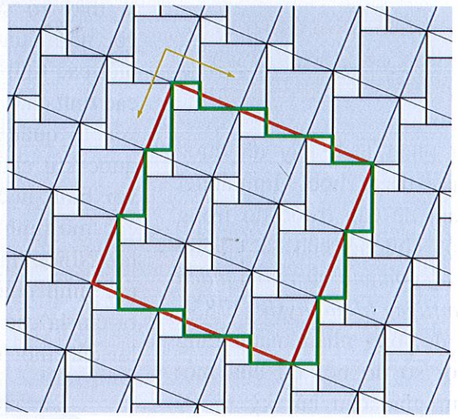
HÌNH 1. MỘT PHÉP LÁT CỦA MẶT HYPERBOLIC *đặt trên mặt cầu. Sự phong phú khó tin của các phép lát của nó khiến cho mặt hyperbolic "đối xứng hơn hình cầu".*

Mặc dù mục đích của Weyl là xem xét khái niệm toán học rộng lớn về đối xứng, các thí dụ của ông đều là các đối xứng của hình học Euclid. Trái lại, *Indra's Pearls* xem xét và cung cấp các hình ảnh trực quan về một thế giới toán học của các đối xứng của hình học phi-Euclid, của các tựa đối xứng fractal, và của các đường cong đáng kinh ngạc của Jordan, những thứ mà ngày nay chúng ta có thể tạo lại một cách chính xác với sự trợ giúp của các siêu máy tính. Đặc biệt, cuốn sách này cung cấp nhiều thí dụ về các đối xứng trong hình học hyperbolic, những đối xứng được mô tả như sau bởi Janos Bolyai, một trong những nhà toán học sáng lập ra hình học hyperbolic:

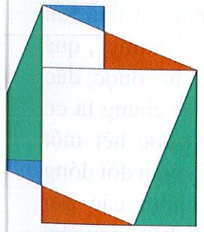
"Tôi khám phá ra những điều kỳ diệu đến ngạc nhiên ... Từ chỗ không có gì, tôi đã tạo nên một thế giới mới kỳ lạ."

CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ PYTHAGORE BẰNG PHÉP LÁT

Hình vẽ này giải thích cách chứng minh khác của định lý Pythagore. Hình dung một phép lát toàn bộ mặt phẳng với mô-típ cơ sở ở hình bên phải. Với phép lát này, chúng ta đã lát mặt phẳng hai lần: lần đầu với các hình vuông nằm nghiêng (các đường xiên, các hình vuông này giả sử có cạnh bằng 1), lần thứ hai với mô-típ một hình vuông lớn và một hình vuông nhỏ (đứng thẳng). Các phép biến đổi bảo toàn phép lát này là các phép tịnh tiến theo chiều các mũi tên (hoặc ngược lại).



Để chứng minh rằng tổng diện tích hai hình vuông thẳng bằng diện tích hình vuông nghiêng (chính là định lý Pythagore ngụy trang), một mặt xét một diện tích T gồm n^2 hình vuông xiên (phần có bao màu đỏ), mặt khác xét một diện tích U gồm n^2 hình vuông thẳng nhỏ và n^2 hình vuông thẳng lớn (phần có bao màu xanh lá cây). Diện tích U bị kẹp giữa T và diện tích một hình vuông có cạnh sai khác một khoảng c (hằng số) so với cạnh của hình vuông T. Nói cách khác, $(n-c)^2 \leq U \leq (n+c)^2$. Chia hai vế cho n^2 và cho n tiến tới dương vô cùng, ta có hiệu $|U-T|$ tiến tới 0. Nghĩa là $U = T$.



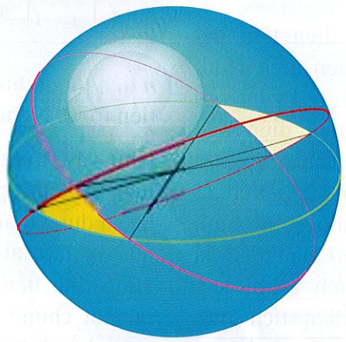
Như vậy, trong chứng minh này, một suy luận trên một phần hữu hạn của mặt phẳng lại sử dụng toàn bộ mặt phẳng Euclid thông qua sự lặp lại của các mô-típ và các đối xứng tịnh tiến. Độc giả chắc chắn sẽ tìm ra một chứng minh ngắn hơn khi chỉ xét một phần hữu hạn của mặt phẳng (chính là chứng minh cổ điển, chỉ cần sắp xếp lại các mảnh như trên hình vẽ bên trái), nhưng tác giả đưa ra chứng minh dài hơn để minh họa cho một ứng dụng lý thú của các phép lát vô hạn.

Ba ý tưởng lớn của hình học

Trong khoảng một trăm năm, từ cuối thế kỷ 18 đến đầu thế kỷ 20, quan niệm về hình học đã bị đảo lộn, đặc biệt bởi ba ý tưởng sau đây. Tác giả muốn nói qua về ba ý tưởng này vì chúng có một vai trò trong câu chuyện của chúng ta.

Sự phân biệt giữa các tính chất nội tại và các tính chất ngoại lai

Sự phân tách này đã được nhà triết học Immanuel Kant đề cập trước đó trong một chương của tác phẩm *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* (1783). Ở đó, ông nhấn mạnh rằng mọi số đo nội tại của một tam giác cầu bất kỳ sẽ có cùng giá trị so với các số đo tương ứng của tam giác nằm ở cực đối diện của hình cầu (xem *Hình 2*), thế mà không tồn tại một phép dời hình nào trong mặt phẳng Euclid biến một tam giác thành tam giác ở cực bên kia. Như vậy, nếu chúng ta tưởng tượng hai tam giác được đặt trong hình học Euclid ba chiều, có một sự phân biệt ngoại lai giữa chúng, thế nhưng mọi khía cạnh hình học thuần túy nội tại của chúng lại giống hệt nhau. Sự phân biệt này là cùng loại với sự phân biệt giữa chiếc găng tay bên phải và chiếc găng tay bên trái của cùng một đôi. Tính đối xứng gương là một tính chất ngoại lai của chiếc găng, nó không thể được nhận biết bởi các tính chất hình học nội tại của bề mặt chiếc găng. Tương tự, một con kiến bò trên một bề mặt phẳng sẽ không thấy xung quanh có gì khác so với một con kiến bò trên một hình trụ, dù chúng ta thấy rõ sự khác biệt từ góc nhìn của mình! Sự phân biệt các tính chất nội tại với các tính chất ngoại lai là một yếu tố quan trọng cần nắm được khi chúng ta làm việc với hình học hyperbolic và các mô hình khác nhau của nó. Nhiều đặc trưng của các mô hình của chúng ta thực ra chỉ là các tính chất ngoại lai của một mô hình cụ thể chứ không phải là các tính chất nội tại của hình học mà chúng ta mô hình hóa.



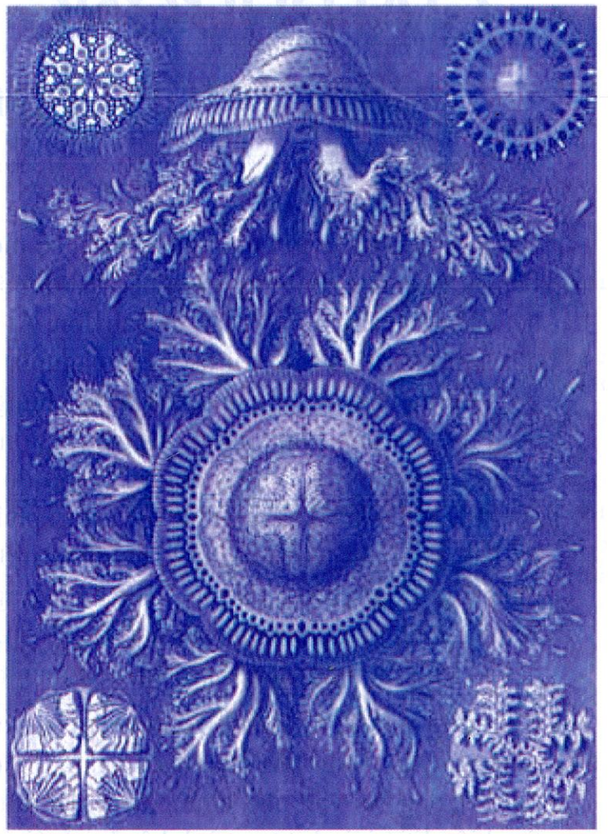
HÌNH 2. MỘT TAM GIÁC CẦU BẤT KỲ *và tam giác đối cực của nó có các số đo giống hệt nhau, mặc dù không tồn tại một phép dời hình nào trên mặt cầu (thí dụ phép quay) biến tam giác này thành tam giác kia.*

Các đối xứng của hình học rồi mới đến hình học

Suốt khoảng cuối thế kỷ 19, sự hiểu biết của chúng ta về cách thức tạo ra hình học đã được thay đổi một cách căn bản. Trước cuộc cách mạng này, quan điểm chiếm ưu thế đối với hình học là trước hết phải xây dựng một cách trực tiếp các khái niệm hình học. Để làm vậy, cần phải mô tả hoặc định nghĩa một cách chặt chẽ thế nào là "đường thẳng", thế nào là "góc", và tất cả các khái niệm hình học thích hợp khác. Chỉ sau khi đã xong việc xây dựng này, chúng ta mới có thể nghiên cứu một cách hệ thống "nhóm các đối xứng của hình học", nghĩa là các phép biến đổi bảo toàn các đặc tính hình học đã được định nghĩa công phu trước đó.

Cuộc cách mạng đã diễn ra cho chúng ta thấy rằng trong một số bối cảnh cụ thể, khi hình học "đủ đối xứng", quá trình trên có thể được đảo ngược. Như vậy, chúng ta có thể quy định trước hết một nhóm các phép biến đổi đóng vai trò một nhóm các đối xứng của hình học; sau đó, chỉ sử dụng ngôn ngữ của các phép biến đổi này, chúng ta mới xác định "hình học" như dữ liệu của nhóm các phép biến đổi được thực hiện trên một không gian. Ngày nay, cuộc cách mạng này được gọi là "chương trình Erlangen", bởi nó chủ yếu được thực hiện bởi nhà toán học người Áo Felix Klein tại trường Đại học Erlangen, xứ Bavaria, trong những năm 1870.

Cương lĩnh của chương trình này là một hình học được xác định bởi một cấu trúc đại số gần như thuần túy (tức là các phép biến đổi tạo thành các đối xứng của hình học). Hơn nữa, cấu trúc này cung cấp một phương tiện hữu hiệu để hiểu rõ về hình học tương ứng. Một trong những định nghĩa của danh từ "đối xứng" trong từ điển (tiếng Pháp) là "phép toán hoặc phép biến đổi giữ nguyên một cái gì đó". Thực ra đó chính là ý nghĩa của từ "đối xứng" mà chúng ta sử dụng từ đầu đến giờ. Sau cuộc cách mạng Erlangen, "cái gì đó" bất biến đối với mọi đối xứng mà chúng ta cho phép chính là, theo định nghĩa, hình học mà chúng ta quan tâm.



HÌNH 3. "DISCOMEDUSA", *một loài sứa mang đối xứng bát giác. Hình vẽ này, lấy từ tác phẩm Kunst der Natur (thế kỷ 19) của Ernst Haeckel, cho thấy sự quan tâm về đối xứng của các nhà bác học thế kỷ 19.*

Mọi hình học trơn đều có thể được xấp xỉ địa phương bởi hình học Euclid

Nếu có đủ thông tin để tính các độ dài cực nhỏ, sử dụng giải tích cơ bản, chúng ta có thể tính được độ dài của một cung bất kỳ. Cụ thể hơn, chúng ta có thể xây dựng và tính toán các đường trắc địa, tức là các đường đóng vai trò "đường thẳng" trong hình học. Theo định nghĩa, các đường trắc địa là các đường trơn nối một điểm với một điểm lân cận bằng một cung có độ dài cực tiểu. Dạng thông tin cần có để thực hiện việc tính toán này là "metric Riemann". Đó là một công cụ giải tích mô tả hình học nội tại của một bề mặt, độc lập với các đối xứng của nó.

Ghi nhớ ba ý tưởng này, chúng ta sẽ theo đuổi chuyến hành trình hình học, bằng cách khám phá các bề mặt cổ điển.

(Còn nữa)

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH
bậc hai và bậc ba

Ngô Bảo Châu

Bài toán tìm nghiệm phương trình đại số một ẩn xuất hiện rất sớm trong lịch sử toán học. Phương trình bậc hai được biết đến và tìm hiểu bởi hầu hết các nền văn minh cổ đại, từ Babylon, Ai Cập, Hy Lạp, Trung Hoa cho đến khi nhà toán học Ấn độ Brahmagupta tìm ra lời giải tổng quát. Sự phát triển của toán học dường như bị chững lại trong suốt thời kỳ trung cổ. Phải đợi đến Phục hưng, lời giải phương trình bậc ba mới được tìm ra bởi nhà toán học Ý Tagtaglia, rồi sau đó là phương trình bậc bốn bởi Ferrari. Lời giải của Tagtaglia và Ferrari phức tạp, có nhiều phép đổi biến lắt léo. Phải nhờ vào Lagrange người ta mới hiểu được bản chất phương pháp của Tagtaglia và Ferrari. Tiếp bước Lagrange, Galois giải quyết trọn vẹn bài toán giải phương trình đại số một ẩn, và nhờ đó đặt nền móng cho đại số trừu tượng, một nhánh mới của toán học.

Chúng ta thường biết đến Galois như người đầu tiên chứng minh được rằng phương trình tổng quát bậc từ năm trở lên không có lời giải bằng căn thức. Trong bài viết này, chúng ta sẽ đặt mình vào vị trí của Lagrange và tìm hiểu lời giải phương trình bậc ba dưới ánh sáng của lý thuyết Galois. Qua đó chúng ta sẽ hiểu tại sao phương trình bậc năm trở lên không thể giải được bằng căn thức.

Để đọc bài viết này, người đọc cần được trang bị một số khái niệm cơ sở về đại số đại cương và đại số tuyến tính. Người đọc không nhất thiết phải nắm được các định lý khó và sâu sắc, nhưng cần hiểu nghĩa của một số thuật ngữ cơ bản như nhóm, vành, trường, không gian vector ...

Ta sẽ cố định một trường k, và để loại bỏ những phiền phức không thuộc về bản chất của vấn đề, ta giả thiết k có đặc số 0. Để tránh phiền toái trong thảo luận về căn thức, ta cũng không giả thiết rằng k chứa đủ căn của đơn vị. Ta chỉ cần giả thiết k chứa căn bậc ba nguyên thuỷ của đơn vị: tồn tại $j \in k$ khác 1 sao cho $j^3 = 1$, vì bài viết này hạn chế ở phương trình bậc ba.

Công thức Vieta và đa thức đối xứng

Nếu $t^n - a_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n$ là một đa thức tổng quát bậc n với biến t và $x_1, \ldots, x_n$ là các nghiệm của nó, thì ta có đẳng thức:

$$t^n - a_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n = (t - x_1) \ldots (t - x_n)$$

Bằng cách cân bằng hệ số ở hai vế, ta có công thức Vieta

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 + \cdots + x_n \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \\ &\cdots \\ a_n &= x_1 \cdots x_n. \end{aligned}$$

Giải phương trình tổng quát

$$t^n - a_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

có nghĩa là tìm biểu thức đại số với căn thức để biểu diễn $x_1, \ldots, x_n$ qua $a_1, \ldots, a_n$.

Ký hiệu

$$R = k[x_1, \ldots, x_n]$$

là vành cách đa thức biến $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trong trường k. Ký hiệu $L = k(x_1, \ldots, x_n)$ là trường các thương của R, tức là trường các phân thức với biến $x_1, \ldots, x_n$. Nhóm $\mathfrak{S}_n$ các hoán vị tác động lên R và L bằng cách hoán vị các biến $x_1, \ldots, x_n$. Một phần tử $f \in R$ được gọi là đa thức đối xứng nếu $\sigma(f) = f$ với mọi $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. Dễ thấy $a_1, \ldots, a_n \in R$ cho bởi công thức Vieta là các đa thức đối xứng. Định lý cơ bản trong lý thuyết đa thức đối xứng khẳng định rằng, vành $R^{\mathfrak{S}_r}$ các đa thức đối xứng chính là vành

$$A = k[a_1, \ldots, a_n]$$

các đa thức với biến $a_1, \ldots, a_n$ và trường $K = L^{\mathfrak{S}_r}$ các phân thức đối xứng là trường $K = k(a_1, \ldots, a_n)$ các thương của A, tức là trường các phân thức với biến $a_1, \ldots, a_n$. Lưu ý rằng, xem như không gian vector trên K thì L có chiều bằng $n!$, tức là mở rộng trường L của K có bậc bằng $n!$.

Đa số các công thức phức tạp xuất hiện trong việc giải phương trình đại số một ẩn số có nguồn gốc từ việc biểu diễn một đa thức đối xứng với biến $x_1, \ldots, x_n$ như một đa thức với biến $a_1, \ldots, a_n$. Công đoạn này có thể thực hiện bằng thuật toán và thực ra không phải là khó khăn cốt lõi.

Bài toán giải phương trình một ẩn số bằng căn thức có thể quy về nghiên cứu mở rộng trường L/K. Thay vì việc nghiên cứu trường hợp tổng quát, trong bài viết này chúng ta sẽ hạn chế vào các trường hợp cụ thể $n = 2$ và $n = 3$. Hiểu rõ trường hợp bậc hai và ba, bạn đọc sẽ có thể tự nghiên cứu tìm cách giải phương trình bậc bốn và trả lời câu hỏi tại sao phương trình tổng quát bậc năm và bậc cao hơn thì không thể giải được bằng căn thức.

Phương trình bậc hai

Vào thế kỷ thứ bảy trước công nguyên, nghiệm của phương trình bậc hai tổng quát

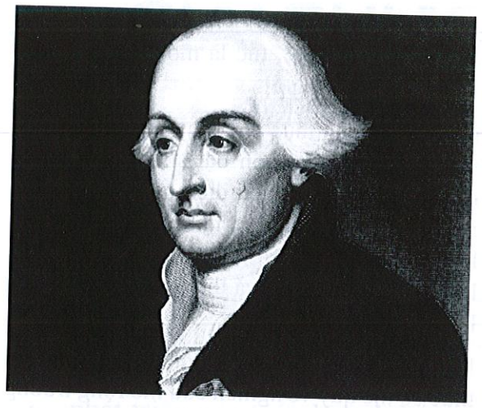
$$x^2 - a_1 x + a_2 = 0 \qquad (1)$$

đã được Brahmagupta tìm ra ở dạng

$$\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \qquad (2)$$

với $\Delta = a_1^2 - 4a_2$ là biệt thức của phương trình bậc hai. Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của (1), ta có $\Delta = (x_1 - x_2)^2$.

Chúng ta sẽ xem xét công thức này từ góc độ mở rộng trường. Trong trường hợp $n = 2$, trường $L = k(x_1, x_2)$ là không gian vector trên trường $K = k(a_1, a_2)$ với số chiều bằng hai. Nhóm hoán vị $\mathfrak{S}_2$ có hai phần tử bao gồm phẩn tử đơn vị và hoán vị σ tác động lên L theo công thức $\sigma(x_1) = x_2$ và $\sigma(x_2) = x_1$.



Nhà toán học Lagrange

Ta có thể coi σ như một biến đổi K-tuyến tính của không gian vector L thoả mãn $\sigma^2 = 1$. Ta phân tích L thành tổng trực tiếp của hai không gian con

$$L = L^+ \oplus L^-$$

với L^+ là không gian con các vector $v \in L$ thoả mãn $\sigma(v) = v$ và L^- là không gian con các vector $v \in L$ thoả mãn $\sigma(v) = -v$. Ta biết $L^+ = K$ và L^- là không gian K-vector một chiều sinh bởi phần tử $\delta = x_1 - x_2$. Vì $\delta \in L^-$, ta có $\delta^2 \in L^+$ và vì thế $\Delta = \delta^2$ là một phần tử của K. Tính toán cụ thể cho ta công thức $\Delta = a_1^2 - 4a_2$ nhưng nên lưu ý rằng điểm quan trọng là, Δ là một phần tử của K, còn công thức tường minh biểu diễn Δ như đa thức với biến a_1, a_2 thực ra không quan trọng lắm.

Công thức (2) có thể xem như cách phân tích $x_1 \in L$ thành tổng

$$x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{a_1}{2} + \frac{\delta}{2}$$

với $(x_1 + x_2)/2 \in L^+ = K$ và $(x_1 - x_2)/2 \in L^- = K\delta$. Nghiệm x_1 viết được thành tổng của một phần tử thuộc K và một phần tử có bình phương trong K. Như vậy ta biểu diễn được nghiệm x_1 như biểu thức đại số với căn bậc hai với các biến a_1, a_2.

Phương trình bậc ba

Trong trường hợp $n = 3$, $L = k(x_1, x_2, x_3)$ là mở rộng bậc 6 của $K = k(a_1, a_2, a_3)$ với x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình

$$t^3 - a_1 t^2 + a_2 t - a_3 = 0. \tag{3}$$

Nhóm $\mathfrak{S}_3$ có 6 phần tử tác động lên L bằng cách hoán vị các biến x_1, x_2, x_3.

Để giải phương trình bậc ba tổng quát, ta sẽ khảo sát nhóm đối xứng $\mathfrak{S}_3$. Ta sẽ thể hiện một hoán vị cấp ba như ở ví dụ sau: $(2,3,1)$ là hoán vị $x_1 \mapsto x_2, x_2 \mapsto x_3, x_3 \mapsto x_1$. Nếu biểu diễn hoán vị như một đồ thị có hướng với đỉnh là x_1, x_2, x_3, đồ thị này sẽ là hợp của một số chu trình. Ví dụ đồ thị của hoán vị $(2,3,1)$ là một chu trình có độ dài bằng 3, trong khi đồ thị $(2,1,3)$ bao gồm chu trình $(1,2)$ có độ dài bằng 2, và một chu trình có độ dài bằng 1. Sử dụng mô tả bằng chu trình, các phần tử của $\mathfrak{S}_3$ có thể được phân loại như sau:

- phần tử đơn vị $(1,2,3)$ có 3 chu trình độ dài bằng 1;
- các phần tử $(2,1,3), (1,3,2), (3,2,1)$ có 1 chu trình độ dài bằng 2 và 1 chu trình có độ dài bằng 1;
- các phần tử $(2,3,1), (3,1,2)$ có 1 chu trình có độ dài bằng 3.

Đồng cấu dấu $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_3 \to \{\pm 1\}$ gán cho ba phần tử có 2-chu trình dấu -1 và gán cho ba phần tử còn lại dấu $+1$. Hạch của đồng cấu dấu $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_3 \to \{\pm 1\}$ là nhóm luân phiên $\mathfrak{A}_3$. Nhóm này có 3 phần tử:

$$\mathfrak{A}_3 = \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\}$$

và đẳng cấu với nhóm xích $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Nhờ vào nhóm luân phiên $\mathfrak{A}_3$, ta phát hiện ra một mở rộng trung gian M nằm giữa K và L:

$$K \subset M \subset L$$

với M là các phần tử $x \in L$ sao cho $\sigma(x) = x$ với mọi $x \in \mathfrak{A}_3$. Theo lý thuyết Galois, ta biết rằng M là mở rộng bậc 2 của K, và L là mở rộng bậc 3 của M. Bước cơ bản của giải phương trình (3) là mô tả tường minh mở rộng trung gian M.



Nhà toán học Galois

Vì nhóm luân phiên $\mathfrak{A}_3$ là nhóm con chuẩn tắc của $\mathfrak{S}_3$, nhóm $\mathfrak{S}_3$ tác động lên $M = L^{\mathfrak{A}_3}$ thông qua đồng cấu dấu $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_3 \to \{\pm 1\}$. Tác động của nhóm $\{\pm 1\}$ lên M cho ta phân tích M thành tổng trực tiếp

$$M = M_+ \oplus M_-$$

với M_+ bao gồm các phần tử $x \in M$ sao cho $\varepsilon(x) = x$ và M_- bao gồm các phần tử $x \in M$ sao cho $\varepsilon(x) = -x$, với ε là phần tử không tầm thường của $\{\pm 1\}$. Ta biết $M_+ = K$ và vì thế M_- là không gian vector một chiều trên K.

Như trong trường hợp phương trình bậc hai, ta muốn xây dựng một phần tử cụ thể của không gian một chiều M_-. Phần tử của M_- là các đa thức phản đối xứng, theo nghĩa với mọi $x \in M_-$ ta có $\sigma(x) = \operatorname{sgn}(\sigma)x$. Cách thông thường để xây dựng một đa thức phản đối xứng là bắt đầu từ một phần tử $x \in L$ bất kỳ và xét tổng đan dấu

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(x) \in M_-.$$

Đây hiển nhiên là một đa thức phản đối xứng. Đa thức phản đối xứng đơn giản nhất xây dựng bằng phương pháp này tương ứng với $x = x_1 x_2^2$. Ứng với nó ta có

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(x) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$
$$= \delta$$

là phần tử sinh của M_- như không gian vector một chiều trên trường K. Bình phương của $\delta \in M_-$ là một phần tử

$$\Delta = \delta^2 \in K \tag{4}$$

gọi là biệt thức. Nếu tính toán cụ thể ta sẽ có được một công thức khá phức tạp biểu diễn Δ như một đa thức với biến a_1, a_2, a_3. Như đã nhận xét, việc $\Delta = \delta^2$ là một phần tử của K quan trọng hơn việc biểu diễn nó tường minh như đa thức của a_1, a_2, a_3.

Ta có thể làm tương tự như thế với mở rộng bậc ba L/M. Ký hiệu $\sigma = (2,3,1)$ là phần tử sinh của nhóm luân phiên $\mathfrak{A}_3$. Vì $M = L^{\mathfrak{A}_3}$, ta có thể coi tác động của σ lên L như một biến đổi M-tuyến tính của L xem như không gian vector có ba chiều trên M. Vì $\sigma^3 = 1$, ta có phân tích L thành tổng trực tiếp

$$L = L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$$

với L_r là không gian các vector $x \in L$ sao cho $\sigma(x) = j^r x$ với mọi $r \in \{0,1,2\}$ và $j \in k$ là căn bậc ba nguyên thuỷ của đơn vị đã cho từ đầu. Ta biết L_0, L_1 và L_2 là các không gian vector một chiều trên M. Hiển nhiên $L_0 = M$. Ta xây dựng phần tử sinh của L_1 và L_2 bằng giải thức Lagrange

$$\xi_1 = j^2 x_1 + j x_2 + x_3 \text{ và } \xi_2 = x_1 + j x_2 + j^2 x_3.$$

RÉFLEXIONS

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS(*).

[*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, années 1770 et 1771 (**).]

La théorie des équations est de toutes les parties de l'Analyse celle qu'on eût cru devoir acquérir les plus grands degrés de perfection et par son importance et par la rapidité des progrès que les premiers inventeurs y ont faits; mais quoique les Géomètres qui sont venus depuis n'aient cessé de s'y appliquer, il s'en faut beaucoup que leurs efforts aient eu le succès qu'on pouvait désirer. On a à la vérité épuisé presque tout ce qui concerne la nature des équations, leur transformation, les conditions nécessaires pour que deux ou plusieurs racines deviennent égales, ou aient entre elles un relation donnée, et la manière de trouver ces racines, la forme des racines imaginaires, et la méthode de trouver la valeur de celles qui, quoique réelles, se présentent sous une forme imaginaire, etc. On a aussi découvert des règles générales pour reconnaître si toutes les racines d'une équation sont réelles ou non, et pour savoir dans le premier cas combien il doit y en avoir de positives et de négatives; mais on n'a jusqu'à présent aucune règle générale pour connaître

(*) Ce Mémoire a été lu à l'Académie dans le courant de l'année 1771.

(**) Les deux premières Sections de ce Mémoire ont été insérées dans le volume de 1770, les suivantes dans le volume de 1771. [*Note de l'Éditeur.*]

Tác phẩm Réflexion sur lar resolution algébrique des équations của Lagrange

Vì $\xi_1 \in L_1$ và $\xi_2 \in L_2$ ta có $\xi_1^3, \xi_2^3 \in M$. Vì $M = K \oplus M_-$ ta có thể biểu diễn một cách duy nhất

$$\xi_1^3 = \alpha_1 + \beta_1\delta \text{ và } \xi_2^3 = \alpha_2 + \beta_2\delta \quad (5)$$

với $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in K$ là các đa thức với biến a_1, a_2, a_3 có thể làm tường minh.

Đến đây bài toán giải phương trình bậc ba đã được giải quyết về cơ bản. Ta phân tích x_1 như tổ hợp tuyết tính của 1, ξ_1 và ξ_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1+x_2+x_3}{3} + \frac{x_1+j^2x_2+jx_3}{3} \\ &\quad + \frac{x_1+jx_2+j^2x_3}{3} \\ &= \frac{a_1}{3} + \frac{j\xi_1}{3} + \frac{\xi_2}{3} \end{aligned}$$

sau đó sử dụng công thức (5) cho luỹ thừa bậc ba của ξ_1 và ξ_2, và sử dụng công thức (4) cho bình phương của δ. Để có lời giải đầy đủ, cần biểu đạt các đại lượng $\Delta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ thành đa thức với biến a_1, a_2, a_3.

Phương trình bậc bốn

Điểm mấu chốt của lời giải tổng quát của phương trình bậc ba không nằm trong những tính toán tương đối phức tạp với đa thức đối xứng, mà ở cấu trúc của nhóm hoán vị $\mathfrak{S}_3$. Nhóm hoán vị $\mathfrak{S}_3$ có nhóm con chuẩn tắc là nhóm luân phiên $\mathfrak{A}_3 \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ với nhóm thương là $\{\pm 1\}$.

Trong trường hợp phương trình bậc bốn, L/K là một mở rộng trường bậc 24. Nhóm tác động lên L là nhóm $\mathfrak{S}_4$ có 24 phần tử. Để giải phương trình bậc 4 bằng căn thức ta cần nghiên cứu cấu trúc của $\mathfrak{S}_4$. Ta có thể xây dựng các nhóm con chuẩn tắc của $\mathfrak{S}_4$

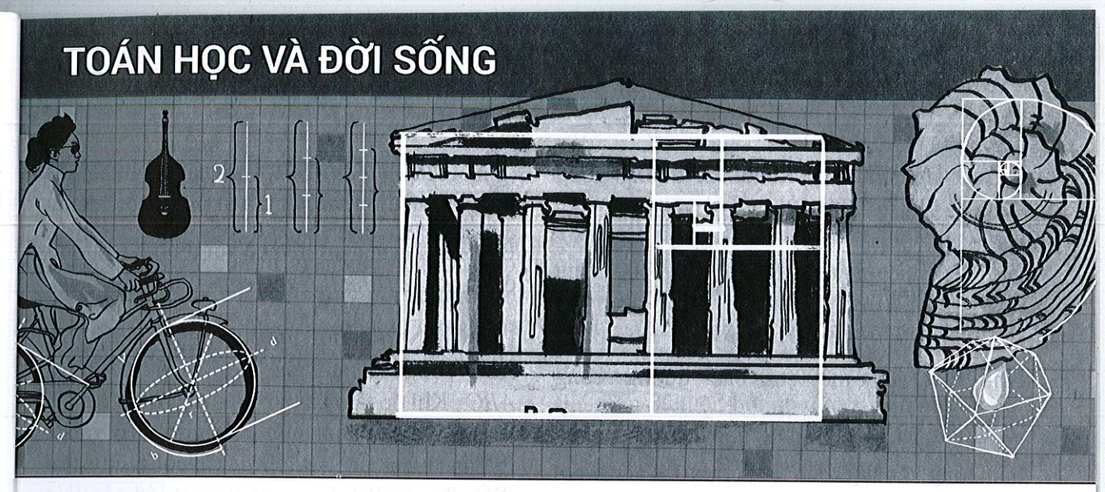
$$0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \mathfrak{S}_4$$

với $G_1 = \mathbf{Z}/2Z \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $G_2/G_1 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ và $\mathfrak{S}_4/G_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Từ đó ta xây dựng được các mở rộng trung gian giữa L/K

$$K \subset K_1 \subset K_2 \subset L$$

với $K_1 = L^{G_2}$ và $K_2 = L^{G_1}$. Các mở rộng trung gian này đều ổn định dưới tác động của $\mathfrak{S}_4$, có bậc $[K_1 : K] = 2$, $[K_2 : K_1] = 3$ và $[L : K_2] = 4$. Sau đó, ta có thể suy luận hoàn toàn tương tự như trong trường hợp phương trình bậc ba.

Phương pháp này không thực hiện được với phương trình bậc năm trở lên vì nhóm luân phiên $\mathfrak{A}_n$ của $\mathfrak{S}_n$ là nhóm đơn với mọi $n \geq 5$. Nhờ vào lý thuyết Galois, chúng ta biết rằng không chỉ phương pháp trình bày ở trên không thực hiện được mà việc giải bằng căn thức phương trình tổng quát bậc năm và bậc cao hơn là không.



BÀI TOÁN FERMAT VÀ BÀI TOÁN STEINER

TỪ GÓC NHÌN THỰC TIỄN VÀ LỊCH SỬ

Lê Văn Bình,[1] Tạ Duy Phượng[2]
Trần Lê Thủy[3] , Trần Đình Xuyền[4]

Bài viết giới thiệu sơ lược một số hướng phát triển mới, hiện đại của bài toán Fermat – Torricelli.

1. Lịch sử bài toán Fermat và bài toán Steiner

Trong Tập 1 (năm 1810) trang 196 của tạp chí *Annales de mathematiques pure et appliques (Tập san toán học lý thuyết và ứng dụng*, do nhà toán học Pháp Joseph Diaz Gergonne, (1771 – 1859), thành lập và xây dựng, nên thường được gọi là Annales de Gergonne) có bài toán sau đây.

Bài toán 1. *Một kĩ sư muốn thiết lập một mạng giao thông giữa ba thành phố (không nằm trên một đường thẳng), tạo thành từ ba nhánh xuất phát từ một điểm và đi tới ba thành phố đó. Câu hỏi là, hãy tìm điểm sao cho tổng độ dài của ba nhánh là nhỏ nhất có thể.*

Đây chính là phát biểu dưới dạng một bài toán thực tế của bài toán do Pierre de Fermat (1601 – 1665) nêu ra vào năm 1643 trong cuốn sách *Method for Determining Maxima and Minima and Tangents to Curved Lines* (và do đó sau này được gọi là bài toán Fermat): *Cho trước ba điểm A, B, C trên mặt phẳng, hãy tìm điểm thứ tư sao cho tổng khoảng cách đến ba điểm đã cho là nhỏ nhất.*

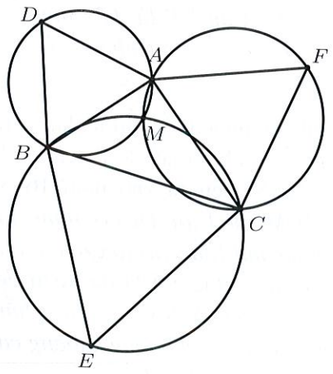
Bài toán Fermat liên quan đến vấn đề được Rene Descartes (vào năm 1638) đề nghị

[1] *Trường THPT Tĩnh Gia 4, Thanh Hóa*
[2] *Viện Toán học*
[3] *Đại học Thủ Dầu Một*
[4] *Trường THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình*

Fermat nghiên cứu: Khảo sát đường cong $\sum_{i=1}^{4} \|p_i - x\| = c$, với p_i là các điểm đã cho trên mặt phẳng và c là hằng số, trong đó $\|p_i - x\| = \sqrt{(p_{i1}-x_1)^2 + (p_{i2}-x_2)^2}$ với $p_i = (p_{i1}, p_{i2}), i = 1, 2, 3, 4$ và $x = (x_1, x_2)$.

Như vậy, có thể coi các đường cong $\sum_{i=1}^{4} \|p_i - x\| = c$ như là các *đường mức* của hàm tổng khoảng cách từ điểm x đến các điểm p_i cho trước.

Nhà toán học Ý Evangelista Torricelli (1608 – 1647) là người đầu tiên đưa ra lời giải bài toán Fermat trong trường hợp tam giác ABC có cả ba góc nhỏ hơn $120°$ (điểm cần tìm là giao điểm của ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác đều dựng trên ba cạnh ở phía ngoài tam giác, Hình 1). Điểm là lời giải của bài toán Fermat sau này thường được gọi là *điểm Fermat* hoặc *điểm Torricelli* và bài toán Fermat cũng thường được gọi là *bài toán Fermat - Torricelli*.



Hình 1: *Phương pháp Torricelli*

Thomas Simpson (1710 - 1761) năm 1750 đã đưa ra một phương pháp mới tìm điểm Torricelli: Ông kẻ các đường nối đỉnh của các tam giác đều nói trên với đỉnh của tam giác ABC đối diện với đỉnh ấy. Ba đường nhận được (gọi là *đường thẳng Simpson*) cắt nhau tại một điểm M và điểm này chính là điểm Torricelli.

Bài toán Fermat có liên hệ với định lí (thường được gọi là *Định lí Napoleon*) dưới đây.

Định lí Napoleon. Về phía ngoài tam giác ABC dựng ba tam giác đều BCA', CAB' và ABC'. Khi đó tâm ba tam giác đều BCA', CAB' và ABC' tạo thành một tam giác đều và ba đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy (tại điểm Torricelli).

Phải đến năm 1834 nhà toán học Franz Heinen mới giải trọn vẹn bài toán Fermat:

i) Nếu một trong các góc trong của tam giác được tạo thành từ ba điểm A, B, C không nhỏ hơn $120°$ thì điểm là lời giải bài toán Fermat trùng với đỉnh của góc lớn nhất.

ii) Nếu các góc trong của tam giác ABC nhỏ hơn $120°$ thì điểm là lời giải bài toán Fermat là giao điểm của các đường Simpson (điểm Torricelli) và là điểm cùng với các đỉnh A, B, C tạo thành ba góc cùng bằng $120°$.

Franz Heinen cũng chỉ ra rằng tổng khoảng cách từ điểm Torricelli đến ba đỉnh của tam giác bằng độ dài của các đường Simpson.

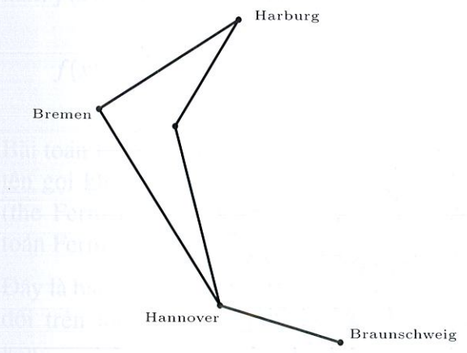
Dưới đây là lời ghi chú ở cuối trang 196 của tạp chí *Annales de Gergonne*, để tiện trình bày, ta gọi là Bài toán 2.

Bài toán 2 (*Bài toán Fermat tổng quát*)**.** *Hãy xác định một điểm trên mặt phẳng (trong không gian) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến các điểm cho trước trên mặt phẳng (trong không gian) ấy là tối thiểu.*

Trong bức thư gửi cho Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) đề ngày 19 tháng 3 năm 1836, nhà thiên văn học Đức - Đan Mạch Heinrich Christian Friedrich Schumacher (1780 – 1850) đã trình bày nghịch lí hiển nhiên liên quan đến bài toán Fermat – Torricelli cho bốn điểm: Điểm Fermat O cho bốn đỉnh A, B, C, D của tứ giác lồi chính là giao điểm của hai đường chéo. Tuy nhiên, khi cho điểm D tiến tới điểm C thì điểm O cũng tiến tới điểm C không phải là điểm Fermat cho ba điểm A, B, C.

Trong bức thư trả lời đề ngày 21 tháng 3 năm 1836, Gauss đã giải thích nghịch lí trên: Lời giải của bài toán Fermat - Torricelli cho bốn điểm về thực chất không trùng với lời giải bài toán nối bốn điểm đó bởi các đoạn thẳng sao cho tổng độ dài của các đoạn thẳng đó nhỏ nhất (như trong trường hợp ba điểm). Sau đó Gauss đã có nhận xét thú vị:

Nếu phải thiết kế một mạng giao thông có độ dài ngắn nhất nối các đỉnh một tứ giác, thì ta gặp bài toán toán học thật sự thú vị, mà nó không xa lạ với tôi. Tôi đã biết tới nó khi xem xét tuyến đường sắt nối các thành phố Harburg, Bremen, Hannover và Braunschweig, ...



Hình 2: *Bài toán Steiner*

Bài toán mà Gauss nói tới đã được Karl Bopp (1856 – 1905) giải quyết một cách triệt để năm 1879 trong luận án Tiến sĩ của ông với tên *Über das kürzeste Verbindungssystem zwischen vier Punkten* (Về hệ mạng ngắn nhất cho bốn điểm). Hệ thống đường sắt tối ưu được bổ sung thêm một điểm, chính là điểm Torricelli của tam giác với ba đỉnh là ba thành phố Harburg, Bremen, Hannover, và Braunschweig được nối với Hannover bởi một tuyến đường sắt chạy thẳng (Hình 2, xem [**tham1**]).

Bài toán này thường được biết đến dưới tên Bài toán Steiner, bởi nó được trình bày và gọi như vậy trong cuốn sách *What is Mathematics* của Courant và Robbins [**tham5**].

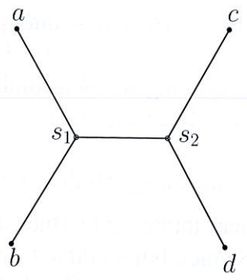
Bài toán 3 (Bài toán Steiner)**.** *Cho trước n điểm trên mặt phẳng, hãy nối các điểm này với nhau bởi các đoạn thẳng có tổng độ dài nhỏ nhất.*

Khác với bài toán Fermat (tìm *chỉ một điểm*), bài toán Steiner cho phép có thể *bổ sung thêm một số điểm mới*, miễn là tổng độ dài các đoạn thẳng nối tất cả các điểm đã cho là nhỏ nhất. Các điểm thêm vào được gọi là *điểm Steiner* (Steiner's points).

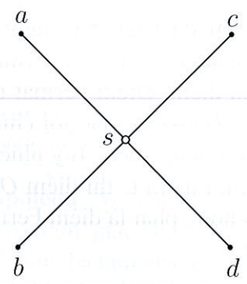
Bài toán Steiner cho tập hợp gồm ba điểm cho trước chính là bài toán Fermat. Nhưng với tập hợp có bốn điểm trở lên, lời giải của bài toán Steiner không còn trùng với lời giải bài toán Fermat nữa. Hình 3 dưới đây cho lời giải của bài toán Steiner với bốn điểm là đỉnh của hình vuông (thêm hai điểm s_1 và s_2) với tổng độ dài bằng $1 + \sqrt{3} \approx 2.732$, còn Hình 4 cho lời giải của bài toán Fermat với tổng độ dài bằng $2\sqrt{2} \approx 2.828$.

Thực ra, bài toán Steiner đã được Joseph Diaz Gergonne nghiên cứu từ những năm 1810–1811. Bài toán sau đã được phát biểu tại trang 292 Tập 1 (1810) của *Annales de Gergonne*:

Một số thành phố được định vị tại các vị trí đã biết trên mặt phẳng. Bài toán đặt ra là hãy nối chúng với nhau bởi một hệ thống kênh đào sao cho tổng độ dài các kênh là nhỏ nhất có thể.



Hình 3: *Bài toán Steiner cho bốn điểm*



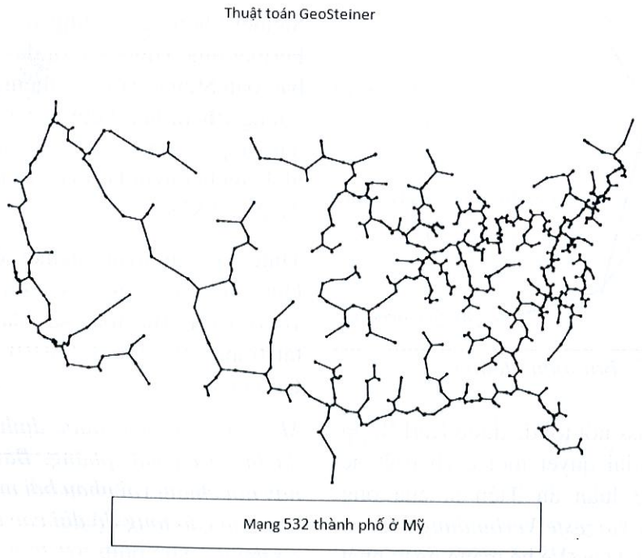
Hình 4: *Bài toán Fermat cho bốn điểm*

Đây là phát biểu đầu tiên được biết cho tới nay của bài toán Steiner. Ở trang 375, Gergonne đã phát biểu lại bài toán dưới dạng bài toán hình học tổng quát:

Cho một số điểm bất kì trên mặt phẳng. Hãy nối các điểm đã cho bởi một hệ các đoạn thẳng sao cho tổng độ dài là nhỏ nhất có thể.

Lời giải bài toán Steiner được Gergonne chia làm hai phần: phần Phân tích (Analysis) và Thiết kế (Construction).

Lời giải của Gergonne sau này được rất nhiều nhà nghiên cứu khác phát triển (xem [**tham4**]). Đặc biệt, Z. A. Melzak [**tham7**] và những người tiếp theo (xem [**tham4**]) đã xây dựng chương trình *GeoSteiner* tính toán hữu hiệu trong thời gian hợp lí cho mạng gồm hàng nghìn điểm. Hình dưới đây là sơ đồ mạng giao thông kết nối 532 thành phố ở Mỹ được chương trình *GeoSteiner* thiết kế dựa trên lời giải bài toán Steiner và thuật toán Melzak.



Bài toán Steiner có nhiều ứng dụng quan trọng trong thực tế: trong thiết kế mạng giao thông, thiết kế đường ống dẫn dầu, mạng cáp quang, mạng internet, đường đi của máy hàn trên bảng nối các vi mạch,... Thí dụ, năm 1967, Edgar Gilbert (tại phòng thì nghiệm của hãng Bell) đã nghiên cứu bài toán Steiner có trọng số và ứng dụng vào mạng truyền thông (xem [**tham4**]).

2. Một số bài toán mở rộng khác

Vào đầu thế kỉ 20, xuất phát từ nhu cầu thực tiễn, nhà kinh tế học người Đức Alfred Weber đã đưa thêm các trọng số (weights) vào bài toán Fermat. Ta có

Bài toán 4 (Bài toán Fermat – Weber)**.** Cho trước một tập hợp hữu hạn các điểm a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ trong không gian Euclide hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$ và các trọng số tương ứng $\omega_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Hãy tìm cực tiểu của hàm $f(x)$ trên $\mathbb{R}^n$, trong đó

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \|x - a_i\| \quad \text{với } x \in \mathbb{R}^n.$$

Bài toán Fermat – Weber (FW) còn có một số tên gọi khác: bài toán định vị Fermat-Weber (the Fermat - Weber location problem), bài toán Fermat, bài toán Weber,...

Đây là bài toán *tối ưu không ràng buộc* (x thay đổi trên toàn không gian $\mathbb{R}^n$) nhưng chuẩn $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ với $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là một hàm không khả vi tại $x = 0$ nên là bài toán *tối ưu không khả vi*.

Bài toán tổng quát này khó có thể giải được chính xác. Năm 1937, Endre Weiszfeld (người Hungary, lúc ấy mới 16 tuổi) đã đưa ra một thuật toán giải gần đúng bài toán Fermat – Weber (xem [**tham9**]). Sau này phương pháp của Weiszfeld đã được nhiều nhà nghiên cứu toán tối ưu và kinh tế bổ sung, phát triển và ứng dụng (xem, thí dụ, [**tham3**; **tham10**]).

Bài toán 5 (Bài toán Fermat trong không gian metric)**.** Trong thực tế (tối ưu đường đi trên bảng vi mạch điện tử, mạng internet, v.v,...), có thể ta không có khoảng cách Euclid thông thường, mà chỉ có các metric (khoảng cách) được xây dựng phù hợp, thí dụ, metric chữ nhật trong bài toán thiết kế đường đi trên bảng vi mạch. Vì vậy, phải giải bài toán Fermat không phải với khoảng cách thông thường trên mặt phẳng hay trong không gian, mà phải giải với metric tổng quát.

Bài toán 6 (Bài toán Fermat-Weber suy rộng)**.** Nhu cầu giải quyết các bài toán thực tế dẫn đến đòi hỏi phải mở rộng bài toán Fermat – Weber theo hướng: Thay các điểm bằng các tập lồi đóng và thay khoảng cách giữa các điểm bằng khoảng cách từ điểm đến tập lồi đóng. Để giải bài toán này ta phải thay khái niệm đạo hàm bằng khái niệm đạo hàm suy rộng, ... (xem [**tham2**]).

3. Thay lời kết

Một bài toán hình học tưởng chừng là *đơn giản* và *cổ điển* là bài toán Fermat: *Tìm điểm có tổng khoảng cách ngắn nhất tới ba điểm đã cho trong mặt phẳng*, nhưng đằng sau nó ẩn tàng nhiều khả năng *khái quát và mở rộng* để có thể áp dụng được vào việc giải các bài toán thực tế: bài toán tối ưu hóa, khái niệm khoảng cách, lí thuyết đồ thị, tính gần đúng, ... Bài toán này đã được *hiện đại hóa và tổng quát* theo nhiều hướng khác nhau (Bài toán Steiner, bài toán Fermat - Weber, bài toán phân cụm, bài toán Fermat - Weber suy rộng, ...), nhằm đáp ứng nhu cầu của *phát triển trí tuệ* và nhu cầu của *thực tiễn đa dạng*: từ mở rộng thuần túy hình học, đến các bài toán của kinh tế và kĩ thuật. Để giải quyết những bài toán mở rộng,

nhằm áp dụng được vào các bài toán thực tiễn, đòi hỏi các *công cụ toán học mới*, vượt ra ngoài tầm của toán học phổ thông: khái niệm metric (mở rộng của khái niệm khoảng cách), khoảng cách từ điểm đến tập, đạo hàm suy rộng (mở rộng của đạo hàm thông thường) và các phương pháp mới (thuật toán tìm gần đúng nghiệm của phương trình, tìm gần đúng nghiệm của bài toán tối ưu, . . .), sử dụng các lí thuyết mới của toán học (lí thuyết đồ thị, công cụ của giải tích và giải tích hàm, . . .), sử dụng sức mạnh của công nghệ thông tin và tính toán khoa học, . . .

Lời cám ơn

Các tác giả chân thành cám ơn PGS TSKH Phạm Huy Điển đã góp ý "tái cấu trúc" bản thảo để bài viết có dạng như hiện nay.

Tài liệu tham khảo

[1] Vũ Đình Hòa, Bài toán Steiner, http://vie.math.ac.vn/~mathclub/vdhoa.pdf.

[2] Nguyen Thai An, *Variational analysis and some special optimization problems (Giải tích biến phân và một số bài toán tối ưu đặc biệt)*, Luận án Tiến sỹ Toán học, Viện Toán học, 2016.

[3] Amir Beck, Shoham Sabach (2013), *Weiszfeld method: Old and New Results*, JOTA, 2015, Vol. 164, No 1, pp. 1 – 40.

[4] Marcus Brazil, Ronald L. Graham, Doreen A. Thomas, Martin Zachariasen, *On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem*, http://www.math.ucsd.edu/~ronspubs/14_02_{Steiner.pdf}.

[5] Richard Courant, Herbert Robbins, *What is Mathematics, An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Second Edition (Revised by Ian Stewart), Oxford University Press, New York, Oxford, 1996. Bản dịch tiếng Việt: Richard Courant, Herbert Robbins, *Toán học là gì* (Người dịch: Hàn Liên Hải), Nhà xuất bản Khoa học Kĩ thuật, 1984.

[6] M. Hanan, *On Steiner's Problem with Rectilinear Distance*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol 14, No 2, 1966, pp. 255 – 265.

[7] Z.A. Melzak, *On the problem of Steiner*, Canad.Math.Bull, 1961.

[8] Germander Soothill, *The Euclidean Steiner Problem*, 2010, http://www.maths.dur.ac.uk/Ug/projects/highlights/CM3/Soothill_{Steiner}_{report}.pdf.

[9] E. Weiszfeld, *Sur le point pour lequel la somme des distances de point donnes minimum*, Tohoku Math. J., 43 (1937), pp. 355–386.

[10] E. Weiszfeld and F. Plastria, *On the point for which the sum of the distances to n given points is minimum, Annals of Operations Research*, Vol. 167 (2009), No 1, pp. 7–41.

VẬN TRÙ HỌC: SỰ TRỞ LẠI CỦA NGÀNH TOÁN ỨNG DỤNG BỊ LÃNG QUÊN

Hà Minh Hoàng[1]

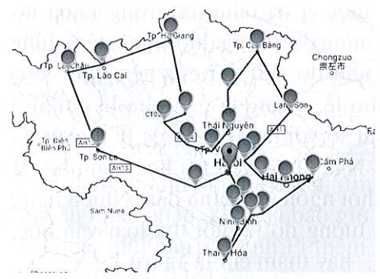
1. Vận trù học là gì?

Các quyết định liên quan đến tối ưu xảy ra mọi lúc, mọi nơi, trong mọi lĩnh vực, ngành nghề. Bạn cần tìm đường đi ngắn nhất giữa hai địa điểm? Cần xếp thời khóa biểu đáp ứng tốt nhất nguyện vọng của thầy cô và học sinh nhằm nâng cao chất lượng dạy và học? Cần lập kế hoạch sản xuất để giảm tối đa chi phí nhân công và nguyên vật liệu? Cần lập kế hoạch đầu tư để tối đa hóa lợi nhuận? Tất cả những bài toán liên quan đến quyết định như vậy đều có thể giải được bằng cách áp dụng các kĩ thuật của Vận trù học – ngành khoa học sử dụng rất nhiều kiến thức của toán tối ưu.

Vận trù học (Operations Research trong tiếng Anh-Mỹ hay Operational Research trong tiếng Anh - Anh) là ngành khoa học áp dụng các phương pháp phân tích để đưa ra các quyết định tốt hơn. Các thuật ngữ Khoa học Quản trị (Management Science) và Các phép phân tích (Analytics) đôi khi cũng được sử dụng thay thế cho Vận trù học. Sử dụng các kỹ thuật của toán học, chẳng hạn như mô hình hóa, phân tích thống kê, và đặc biệt là toán tối ưu, Vận trù học đưa ra lời giải tối ưu hoặc gần tối ưu cho các vấn đề ra quyết định phức tạp. Nó thường liên quan đến việc xác định giá trị cực đại (như lợi nhuận, hiệu quả, năng suất) hay cực tiểu (chi phí, rủi ro, hao tổn).

Các bài toán của Vận trù học thường là các bài toán khó giải – hiểu theo nghĩa không tồn tại thuật toán tối ưu chạy trong thời gian đa thức. Để minh họa cho điều này, chúng ta cùng lấy ví dụ một trong những bài toán được nghiên cứu sâu nhất của Vận trù học: bài toán người bán hàng (Traveling Salesman Problem – TSP). Bài toán được phát biểu đơn giản như sau: Cho trước một danh sách N thành phố và khoảng cách giữa chúng, tìm chu trình ngắn nhất đi qua mỗi thành phố duy nhất một lần.

Để giải chính xác TSP, một cách dễ thấy nhất là tính tất cả các đường đi có thể và chọn đường đi ngắn nhất. Với N khách hàng, chúng ta có N! đường đi. Giả sử máy tính các bạn đang sử dụng có thể tính được MỘT TRIỆU đường đi trong một giây, thì với N = 10 chúng ta mất chưa đầy nửa giây để tìm ra kết quả, N = 11 mất 4 giây, N = 12 mất 40 giây, N = 15 mất khoảng một ngày, và N = 20 chúng ta mất hơn MỘT TRIỆU NĂM. Nhưng nhờ các kĩ thuật của toán tối ưu, ngày nay chúng ta có thể giải được các trường hợp với dữ liệu lớn hàng chục nghìn thành phố. Hình 1 minh họa lời giải bài toán TSP đi qua bưu điện trung tâm của 25 tỉnh, thành phố miền Bắc Việt Nam.



Lời giải bài toán người đưa thư cho 25 tỉnh thành miền Bắc Việt Nam

Bài toán Người bán hàng có nhiều ứng dụng trong thực tế: tìm đường đi ngắn nhất cho tuyến xe bus đưa đón học sinh tới trường, lập

[1] *Đại học FPT Hà Nội*

hành trình cho tour du lịch, hay tìm đường đi tối ưu cho nhân viên bưu điện v.v... Ngoài ra nó cũng có nhiều ứng dụng khác trong lập kế hoạch, hậu cần, cũng như thiết kế vi mạch.

2. Ngành toán ứng dụng bị lãng quên?

Việt Nam có một lịch sử lâu đời về Vận trù học với một số tên tuổi tầm cỡ thế giới mà nổi bật nhất là Giáo sư Hoàng Tụy, cha đẻ của tối ưu toàn cục. Trong quá khứ, dù là một quốc gia nghèo, gặp nhiều khó khăn trong chiến tranh, nhưng chúng ta là một trong những nước đã ứng dụng vận trù học (chủ yếu là các phương pháp tối ưu) sớm nhất. Những năm 60 đã có thời ngành khoa học này được phổ biến khá rộng rãi ở Miền Bắc, khiến các từ vận trù, tối ưu, hệ thống, đã đi vào ngôn ngữ hằng ngày của người dân lúc bấy giờ. Sau đó, những năm 70, vượt qua nhiều khó khăn trở ngại, các phương pháp tối ưu bắt đầu được nghiên cứu vận dụng vào kế hoạch hóa và quản lý kinh tế vĩ mô [**1**].

Mặc dù ngành tối ưu của Việt Nam đã chiếm được một vị trí đáng nể trong khoa học thế giới nhưng do không được quan tâm đúng mức cũng như do đặc thù của nền kinh tế có qui mô nhỏ lẻ, chúng ta gần như bị chững lại và lạc hậu so với thế giới về cả lý thuyết lẫn ứng dụng. Ngày nay, vận trù học gần như đã biến mất khỏi ngôn ngữ bình dân. Nhiều người còn nhầm tưởng đó là một thể loại văn học, triết học... hay thậm chí là ca trù.

3. Làm vận trù học vĩ đại trở lại (Make OR great again)

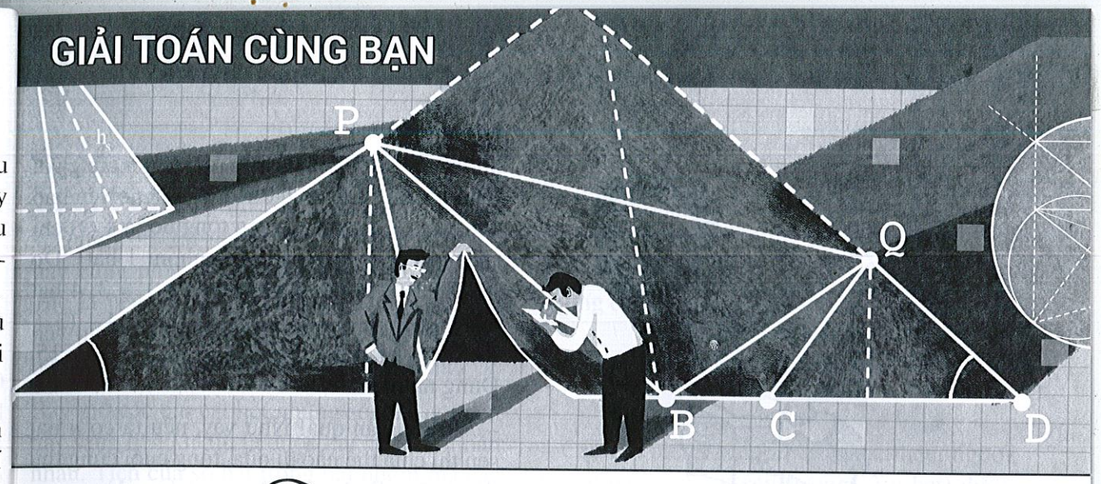
Nền kinh tế của nước ta hiện đang có sự chuyển biến rõ rệt, sản xuất với qui mô tập trung hơn, hình thành nhiều tổ chức, tập đoàn, chuỗi cung ứng lớn với nhiều bài toán tối ưu phức tạp cần được giải quyết. Nhiều công ty lớn đã và đang sử dụng vận trù học để tối ưu hóa hoạt động, tăng hiệu quả sản xuất như Viettel, Vinamilk, FPT, Vietnam Airline v.v... (Tham khảo thêm nhiều ứng dụng của Vận trù học trong thực tiễn sản xuất của Việt Nam tại http://vantruhoc.com/).

Tuy vậy, nước ta vẫn còn tồn tại rất nhiều lĩnh vực hoạt động chưa hiệu quả, gây lãng phí và thất thoát tài nguyên thiên nhiên lẫn sức lao động khiến nền kinh tế vận hành khá xa trạng thái tối ưu. Việc áp dụng các kĩ thuật và nguyên lý của tối ưu hóa, vận trù học là điều kiện tiên quyết để tăng năng suất lao động và năng lực cạnh tranh cho nền kinh tế. Như một hệ quả, nhân lực về vận trù học sẽ thiếu hụt và nhu cầu được dự đoán sẽ tăng nhanh trong các năm tới.

Về đào tạo, tối ưu hóa và vận trù học đã được đưa vào giảng dạy tại các ngành Khoa học máy tính, Toán – Tin ứng dụng, hay Kỹ thuật Công nghiệp của các đại học lớn như Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội, Đại học Bách khoa Hà Nội, Đại học Quốc tế Thành phố Hồ Chí Minh, Đại học FPT, Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh v.v... Bạn đọc có thể tham khảo thêm trang http://www.hsor.org/ để làm thêm các bài tập, ví dụ thực tế của Vận trù học, hay trang http://www.orchallenge.org/ để tham gia cuộc thi về Vận trù học dành cho học sinh bậc trung học Phổ thông.

Tài liệu tham khảo

[1] Tối ưu trong khoa học kỹ thuật kinh tế và đời sống (2007), GS Hoàng Tụy, Tạp chí Tia sáng. http://tiasang.com.vn/-giao-duc/toi-uu-trong-khoa-hoc-ky-thuat-kinh-te-va-doi-song-1557.



Làm toán mùa sen

Thầy giáo làng

Mùa sen đã đến rồi. Khi số Tạp chí này đến tay bạn, cũng là lúc hoa sen đua nhau nở rộ, từ Bắc chí Nam. Chúng ta thử làm vài bài toán với hạt sen để xem phát hiện ra điều gì nhé.

Anh Pi lấy ra 12 hạt sen. Anh chia cho hai bạn Hoa và Hồ, mỗi bạn 6 hạt và nói:

– Mỗi em hãy chia số hạt sen anh cho thành hai nhóm tuỳ ý. Viết lên giấy số sen của từng nhóm rồi nhân hai số đó với nhau và ghi lại tích số. Nếu trong hai nhóm mà có nhóm nào nhiều hơn một hạt thì các em lại làm tương tự như trên với nhóm đó (tức là lại chia thành hai nhóm, rồi nhân số hạt của hai nhóm và ghi lại tích số). Nếu cả hai nhóm đều có hơn một hạt thì làm như vậy cho từng nhóm, chọn nhóm nào để chia trước cũng được. Cứ làm như vậy cho đến khi mỗi nhóm chỉ có đúng một hạt. Cuối cùng, các em hãy cộng các tích số đã ghi được, xem bằng bao nhiêu nhé.

Bạn Hoa chia lần lượt như sau: Chia 6 hạt thành hai nhóm, mỗi nhóm 3 hạt; rồi chia mỗi nhóm 3 hạt thành hai nhóm, một nhóm 2 hạt và một nhóm 1 hạt; sau đó, chia mỗi nhóm 2 hạt thành hai nhóm, mỗi nhóm 1 hạt. Lấy tổng kết quả của các phép nhân, Hoa thu được:

$$3\times 3+2\times 1+2\times 1+1\times 1+1\times 1$$
$$=9+2+2+1+1=15.$$

Bạn Hồ chia khác: lần một, bạn ấy chia thành hai nhóm, nhóm 2 hạt và nhóm 4 hạt, được tích bằng 8. Lần hai, chia nhóm 4 hạt thành 1 hạt và 3 hạt, được tích là 3. Lần ba, chia nhóm 3 hạt thành 1 hạt và 2 hạt, được tích là 2. Tất nhiên, hai lần còn lại là chia hai nhóm 2 hạt thành bốn nhóm 1 hạt, được tích mỗi lần là 1. Như vậy, tổng cuối cùng sẽ là: $8+3+2+1+1$, vẫn là 15!

Hoa và Hồ làm đi làm lại nhiều lần, tìm cách chia đủ kiểu khác nhau, kết quả bao giờ cũng là 15. Lạ quá, mỗi bạn xin anh Pi thêm 3 hạt nữa; chia đi chia lại 9 hạt sen suốt cả buổi mà kết quả bao giờ cũng như nhau, đều là là 36.

Anh Pi định cho thêm mỗi bạn mấy hạt sen nữa để thử tiếp, nhưng các bạn bảo:

– Chắc vẫn thế thôi anh ạ! Dù chia cách gì thì tổng cuối cùng cũng chỉ phụ thuộc số hạt ban đầu, chứ chẳng phụ thuộc gì cách tụi em chia đâu!



Minh họa: Linh Rab

Anh Pi khen:

– Giỏi lắm! Làm Toán là phải thế đấy! Phải từ quan sát những trường hợp riêng lẻ mà rút ra kết luận. Thế gọi là "tìm ra định lý" đấy!

Được khen, Hoa và Hồ vui lắm, nhưng vẫn không sao giải thích nổi, tại sao chia khác nhau như vậy mà kết quả vẫn không thay đổi.

Anh Pi bảo:

– Bây giờ ta tạm xem kết luận của các em là đúng nhé, tức là tổng cuối cùng chỉ phụ thuộc số hạt ban đầu mà không phụ thuộc cách phân chia. Vậy thì nếu anh cho 7 hạt sen, các em sẽ làm thế nào cho đơn giản nhất để tìm được tổng cuối cùng?

– Dễ thôi ạ, ta chia thành 2 nhóm, gồm 1 hạt và 6 hạt, được tích là 6. Nhóm 6 hạt thì chia kiểu gì cũng được kết quả cuối cùng là 15 rồi, nên tổng cho trường hợp 7 hạt là: $6+15=21$.

– Giỏi quá, thế trường hợp 9 hạt thì sao?

– Cũng dễ thôi ạ! Nếu 8 hạt thì ta chia thành nhóm 1 hạt và nhóm 7 hạt. Tổng cuối cùng sẽ là $7+21=28$. Sau đó, nhóm 9 hạt ta lại chia thành 1 hạt và 8 hạt, tổng cuối cùng sẽ là $8+28=36$, đúng như lúc nãy làm!

– Các em thấy chưa, nếu số hạt ban đầu là $n+1$ thì bằng cách chia thành nhóm 1 hạt và nhóm n hạt, tổng cuối cùng sẽ bằng n cộng với tổng có được khi số hạt ban đầu là n. Nếu ban đầu ta có 2 hạt thì rõ ràng tổng đó là 1 (vì chỉ có một cách chia thành hai nhóm 1 hạt). Do vậy, nếu có 3 hạt thì tổng là $2+1=3$, 4 hạt thì tổng là $3+(2+1)=6$, 5 hạt là $4+(3+2+1)=10$, 6 hạt là $5+(4+3+2+1)=15$. Đúng như ta đã làm nhỉ!

– A, đơn giản quá! Như vậy, nếu ta có n hạt sen thì chia thế nào đi nữa, tổng cuối cùng thu được cũng là: $1+2+3+\cdots+(n-1)$.

Mà cũng không cần chứng minh gì nữa anh nhỉ, vì ta đã thấy nếu có n hạt thì chỉ cần cộng $(n-1)$ vào kết quả lần trước, mà trường hợp $n=2$ thì ta đã biết chắc kết quả là 1 rồi!

– Đúng đấy, nhưng không phải là không cần chứng minh, mà nói như em tức là ta đã chứng minh bằng phương pháp quy nạp đấy! Tức là, chỉ ra kết luận đúng cho $n=2$, rồi lập luận chứng tỏ nếu đúng cho số tự nhiên n bất kì thì cũng đúng cho $n+1$. Thế thì, vì đúng cho 2 nên nó phải đúng cho $3,4,5,6,\ldots$; tóm lại là đúng cho mọi số tự nhiên n bất kỳ lớn hơn 1!

- Anh Pi nói hay quá, vậy là chúng em biết chứng minh quy nạp rồi! Nhưng anh vẫn chưa giải thích tại sao tổng cuối cùng chỉ phụ thuộc số hạt ban đầu mà không phụ thuộc cách chia. Với lại, còn cách nào biết tổng mà không cần dùng quy nạp không ạ, vì chữ "quy nạp" nghe nó cứ . . . phức tạp làm sao ấy!

Anh Pi vò đầu một lúc, cuối cùng cũng nghĩ ra cách:

– A, để cho dễ, ta vẫn lấy lại 6 hạt nhé. Bây giờ các em lấy chỉ xâu từng cặp hai hạt lại. Mà hai hạt nào cũng phải xâu với nhau đấy, tức là mỗi hạt sẽ được xâu với 5 hạt khác. Cũng tốn kha khá chỉ đấy, vì phải xâu sợi dài một chút, để khi xếp thành nhóm thì chỉ không bị đứt. Bây giờ, nếu các em xếp 6 hạt thành 2 nhóm thì số sợi chỉ chạy từ nhóm này sang nhóm kia bằng bao nhiêu nào?

– A, đúng bằng tích của hai số, mỗi số là số hạt có trong một nhóm ạ!

– Đúng rồi! Tất nhiên là thế, vì hạt nào bên này cũng phải nối với hạt khác bên kia mà. Tức là nếu bên kia có k hạt thì mỗi hạt bên này phải nối sang bên kia k sợi chỉ, nên nếu bên này có s hạt thì số sợi chỉ nối sang là $s\cdot k$.

Bây giờ các em cắt hết những sợi chỉ nối bên này sang bên kia đi, ta được hai nhóm rời hẳn nhau. Tích của số hạt trong hai nhóm mà các em ghi lên giấy đúng bằng số sợi chỉ vừa cắt. Lại tiếp tục cắt chỉ mỗi khi nhóm con được chia thành hai nhóm nhỏ hơn. Làm như thế cho đến khi mỗi nhóm có một hạt, tức là mọi sợi chỉ đã bị cắt. Vậy thì tổng các tích mà các em tính trên kia đúng bằng số sợi chỉ phải dùng! Thế là các em đã biết vì sao tổng cuối cùng không phụ thuộc vào cách chia rồi nhé.

Hồ reo lên:

– Đơn giản quá! Như vậy chỉ cần tính xem nếu có n hạt sen thì cần bao nhiêu sợi chỉ để nối từng cặp hai hạt lại anh nhỉ! Mà số đó thì cũng dễ: với hạt đầu tiên phải dùng $n-1$ sợi để nối, hạt thứ hai thì đã nối với hạt thứ nhất rồi, nên chỉ cần $n-2$ sợi nữa, cứ tiếp tục suy luận như thế thì số sợi chỉ cần dùng để nối từng cặp hai hạt là: $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$.

– Em có cách tính khác: với mỗi hạt, cần dùng $(n-1)$ sợi để nối nó với $(n-1)$ hạt còn lại; vì thế, với n hạt cần phải dùng $n(n-1)$ sợi!

– Nghĩ lại cẩn thận nào, xem có sai không?

Một lúc sau, Hoa reo lên:

– A, không phải $n(n-1)$, mà là $n(n-1)/2$, vì mỗi sợi nối hai hạt nên lúc nãy em quên, đã tính nó hai lần!

Anh Pi khen:

– Cả hai em tính đều đúng cả và nhờ hai cách ấy mà các em biết thêm cách tính tổng $1+2+\cdots+n$, đúng không nào.

– Ôi hay quá. Để tính tổng trên, chỉ cần lấy $n+1$ hạt sen rồi tính số sợi chỉ cần dùng để xâu từng cặp hai hạt lại, theo hai cách mà chúng em vừa làm. Thế là ta có

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

– Các em biết không, trong Toán học, người ta gọi mỗi cặp hạt sen (trong số n hạt) được xâu với nhau là một tổ hợp chập 2 của n hạt sen đấy.

– A, hai hạt sen được xâu với nhau là một tổ hợp chập 2, thế nên . . . mỗi sợi chỉ tạo ra đúng một tổ hợp chập 2 và do đó mà số sợi chỉ đúng bằng số tổ hợp chập 2 anh nhỉ?

– Giỏi lắm, nhưng để chính xác, em phải nói thêm là tổ hợp chập 2 nào cũng được tạo ra nhờ một sợi chỉ thì mới kết luận là số sợi chỉ bằng số tổ hợp chập 2 được, nhớ chưa nào.

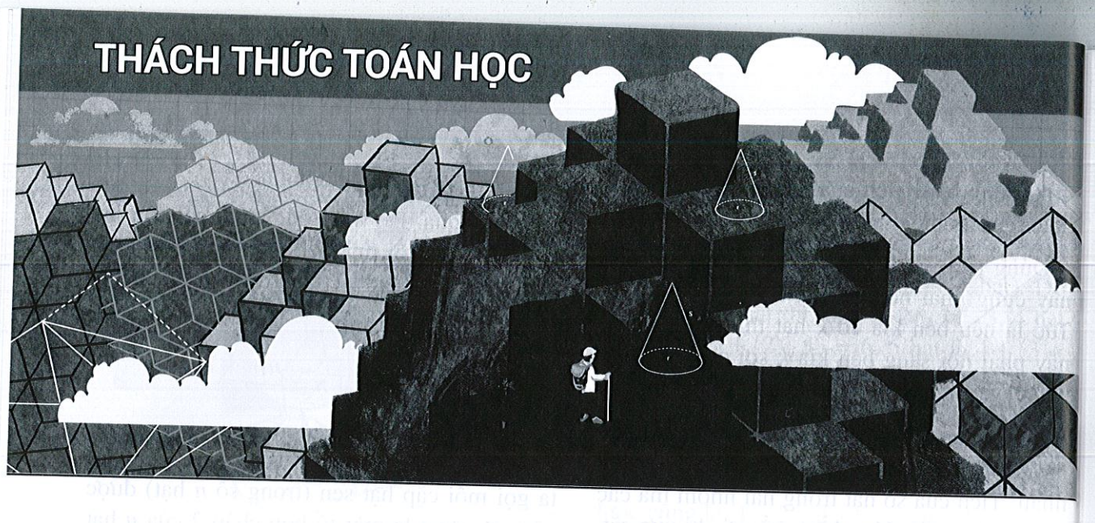
– Chúng em hiểu rồi ạ.

– Thế là các em đã biết cách tính số tổ hợp chập 2 của n hạt sen rồi đấy! Mở rộng ra, người ta còn có khái niệm tổ hợp chập k của n hạt sen, với k là số tự nhiên tùy ý nhé. Các em có muốn anh dạy cho cách tính số tổ hợp chập k của n hạt sen không?

– Dạ thôi, để khi khác anh ạ! Hôm nay học nhiều rồi, giờ ra hồ sen chơi thôi!



Nguồn ảnh: Internet



ĐÍNH CHÍNH

1. Tạp chí Pi tập 1 số 2, tháng 2.2017:

- Trang 22, cột bên trái, dòng 11, 12 ↓:

  – Đã in:

$$P_m(x,y,z) = \frac{ab+bc+ca+m(a+b+c)+3m^2}{abc+m(ab+bc+ca)+m^2(a+b+c)+m^3}.$$

  – Nay sửa thành:

$$P_m(x,y,z) = \frac{ab+bc+ca+2m(a+b+c)+3m^2}{abc+m(ab+bc+ca)+m^2(a+b+c)+m^3}.$$

- Trang 22, cột bên trái, dòng 13, 14 ↓:

  – Đã in:

Lại có

$$abc = (x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz \geq \frac{8}{27},$$

  – Nay: Bỏ hai dòng đã in vừa nêu trên.

- Trang 22, cột bên trái, dòng 15 ↓:

  – Đã in: do

  – Nay sửa thành: Do

- Trang 22, cột bên trái, dòng 19, 20 ↓:

  – Đã in: Suy ra $mP_m(x,y,z) < 1$ (vì với $0 < m < \frac{1}{3}$ thì $2m^3 < \frac{8}{27}$), hay

  – Nay sửa thành:

Nên

$$\begin{aligned} abc - m^2(a+b+c) - 2m^3 &= (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \\ &\quad - 2m^2(x+y+z) - 2m^3 \\ &\geq (x+y+z)\left(\frac{1}{3}-2m^2\right) - \left(\frac{1}{27}+2m^3\right) \\ &> \frac{1}{9}(x+y+z) - \frac{1}{9} \geq 0 \end{aligned}$$

(vì với $0 < m < \frac{1}{3}$ thì $\frac{1}{3} - 2m^2 > \frac{1}{9}$ và $\frac{1}{27} + 2m^3 < \frac{1}{9}$).

Suy ra $mP_m(x,y,z) < 1$, hay

2. Tạp chí Pi tập 1 số 3, tháng 3.2017:

- Trang 28, cột bên phải, dòng 10 ↑:

  – Đã in: $\max\limits_{0\leq i\leq 1} |a^i P(i)| \geq \left(\frac{a-1}{2}\right)^n$.

  – Nay sửa thành:

$$\max_{0\leq i\leq n+1} |a^i - P(i)| \geq \left(\frac{a-1}{2}\right)^n.$$

- Trang 28, cột bên phải, dòng 4 ↑:

  – Đã in:

$$\max_{0\leq i\leq 1} |a^i P(i)| = \max\{|1-c|, |a-c|\}$$

  – Nay sửa thành:

$$\max_{0\leq i\leq 1} |a^i - P(i)| = \max\{|1-c|, |a-c|\}$$

- Trang 29, cột bên trái, dòng 11 ↓:

  – Đã in:

$$(*) \Leftrightarrow \left|a^k \frac{P(k-1)-P(k)}{a-1}\right| \geq \left(\frac{a-1}{2}\right)^{n-1}$$

  – Nay sửa thành:

$$(*) \Leftrightarrow \left|a^k - \frac{P(k+1)-P(k)}{a-1}\right| \geq \left(\frac{a-1}{2}\right)^{n-1}$$

3. Tạp chí Pi tập 1 số 4, tháng 4.2017:

- Trang 26, cột bên trái, dòng 9 ↑:

  – Đã in: $\geq \sqrt[6]{\frac{(a+b+c)^5}{5^5} \cdot \frac{729}{5(a+b+c)^5}}$

  – Nay sửa thành:

$$\geq 6\sqrt[6]{\frac{(a+b+c)^5}{5^5} \cdot \frac{729}{5(a+b+c)^5}}$$

4. Tạp chí Pi tập 1 số 5, tháng 5.2017:

- Trang 21, cột bên trái, dòng 9 ↑:

  – Đã in: lại cắt mỗi phần bánh thành 14 hoặc 20 phần.

  – Nay sửa thành: cắt một phần bánh tùy ý thành 14 hoặc 20 phần.

- Trang 24, cột bên phải, dòng 1 ↑:

  – Đã in: $\Leftrightarrow 2(a^2+a+1) \vdots (a+b+1)$.

  – Nay sửa thành:

$$\Leftrightarrow 2(a^2+a+1) \vdots (a+b+1). \quad (1)$$

Thách thức kì này

Dành cho cấp THCS

P61. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{7}{2}.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi nào?

Nguyễn Tất Thu (Đồng Nai)

P62. Cho tam giác nhọn, không cân ABC, có AD, BE, CF là các đường cao; gọi H là trực tâm của tam giác đó. Đường thẳng qua H và song song với EF cắt các đoạn thẳng DE, DF lần lượt tại Q, P. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn bàng tiếp góc D của tam giác DPQ.

Lê Phúc Lữ (Tp. Hồ Chí Minh)

P63. Cho $p_1, p_2, \ldots, p_{2017}$ là 2017 số nguyên tố lẻ, đôi một phân biệt. Đặt $n = p_1 p_2 \cdots p_{2017}$. Một tam giác được gọi là *tam giác đẹp* nếu nó là một tam giác vuông, có độ dài các cạnh là các số nguyên và có bán kính đường tròn nội tiếp bằng n. Hãy tìm số các tam giác đẹp.

Hà Duy Hưng (Hà Nội)

P64. Cho một đa giác lồi, có 20 đỉnh. Ghi tất cả các số nguyên từ 1 đến 20 vào các đỉnh của đa giác đó sao cho mỗi số chỉ được ghi ở một đỉnh và ở mỗi đỉnh chỉ có một số được ghi.

a) Hỏi có thể ghi sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số được ghi ở hai đỉnh kề nhau tùy ý lớn hơn 4 và đồng thời nhỏ hơn 11 hay không?

b) Hỏi có thể ghi sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số được ghi ở hai đỉnh kề nhau tùy ý lớn hơn 5 và đồng thời nhỏ hơn 11 hay không?

Nguyễn Văn Quý (Hà Nội)

Dành cho cấp THPT

P65. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;\,1]$, có đạo hàm bậc nhất và bậc hai tại mọi điểm thuộc đoạn này (ở hai đầu mút là các đạo hàm một phía). Biết rằng $f(0)=f(1)=0$ và $|f''(x)|\le 1$ với mọi x thuộc $[0;\,1]$. Chứng minh rằng $f(x)\le\dfrac{1}{8}$ với mọi x thuộc $[0;\,1]$.

Trần Nam Dũng (Tp. Hồ Chí Minh) st.

P66. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của góc $\angle BAC$ cắt (O) tại điểm thứ hai D khác A. Trên đoạn thẳng AD lấy điểm P sao cho $\angle BPC=180^\circ-\angle BAC$. PB, PC theo thứ tự cắt CA, AB tại E, F. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên EF. M, Q, R và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AO, KM và AD. QR và trung trực của DM cắt nhau tại J. Chứng minh rằng $IJ\perp EF$.

Trần Quang Hùng (Hà Nội)

P67. Hỏi có tồn tại hay không một đa thức với hệ số thực, khác hằng và nhận giá trị hữu tỉ tại mọi điểm vô tỉ?

Vũ Tiến Việt (Hà Nội)

P68. Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho với mọi số thực dương x, y, z mà $\min\{xy, yz, zx\}\ge 1$, ta luôn có

$$\sqrt[3]{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2+k.$$

Nguyễn Thanh Giang (Tp. Hồ Chí Minh) st.

P69. Giả sử n, m, k, l là các số nguyên dương, với $n\ne 1$ và k không chia hết l, cũng như l không chia hết k. Chứng minh rằng n^k+mn^l+1 không chia hết $n^{k+l}-1$.

Nhóm TTTH st.

P70. Cho số nguyên dương lẻ n. Người ta dùng 3 màu để tô tất cả các đỉnh của một n-giác đều sao cho mỗi đỉnh được tô bởi một màu và mỗi màu được dùng để tô một số lẻ đỉnh. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác cân có 3 đỉnh được tô bởi cả 3 màu.

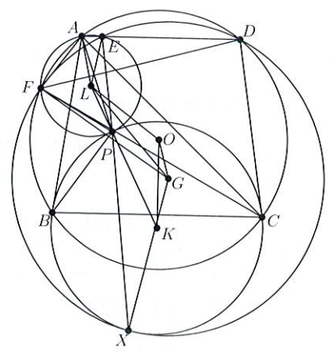
(Một tam giác đều được coi là một tam giác cân).

Hà Thanh (Cần Thơ) st.

Giải bài kì trước

P31. Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PAB=\angle PAC$. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC. PK cắt trung trực của đoạn thẳng AP tại L. Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D khác A. Trên đường thẳng AD, lấy E khác A, sao cho $LE=LA$. Gọi F là điểm đối xứng với A qua OL. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác FED tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Sỹ Tú, lớp 10 A1 Toán, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*).



Do A và F đối xứng nhau qua trục OL (giả thiết) nên A, E, P, F cùng nằm trên đường tròn tâm L. Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Từ các tính chất quen thuộc của tâm đường tròn ngoại tiếp và các giả thiết $\angle PAB=\angle PAC$, $AD\parallel BC$, ta có:

$$\begin{aligned}2\angle LEP&=180^\circ-\angle PLE=180^\circ-2\angle PAE\\&=180^\circ-2(\angle PAC+\angle CAD)\\&=180^\circ-\angle BAC-\angle CAD-\angle BCA\\&=\angle BCD-\angle BCA=\angle ACD\\&=\angle AFD=\angle AFE+\angle EFD\\&=90^\circ-\angle LEA+90^\circ-\angle GED\\&=\angle LEG.\end{aligned}\qquad(1)$$

Từ (1), do tam giác LEP cân tại L, suy ra

$$\angle PEG=\angle PEL=\angle EPL;$$

dẫn tới $LP\parallel EG$. (2)

Do BC là dây cung chung của (O) và (K) nên $OK\perp BC$; do DF là dây cung chung của (O) và (G) nên $OG\perp DF$. Suy ra

$$\angle KOG=\angle ADF\qquad(3)$$

Do EF là dây cung chung của (L) và (G) nên

$$\angle LGE=\frac{1}{2}\angle EGF=\angle ADF.\qquad(4)$$

Từ (2), suy ra $\angle KLG=\angle LGE$; kết hợp với (3) và (4), ta được

$$\angle KOG=\angle LGE=\angle KLG.$$

Do đó, tứ giác $LOGK$ là tứ giác nội tiếp. Vì vậy, $\angle GKL=180^\circ-\angle LOG$. (5)

Do AF là dây cung chung của (L) và (O) nên $OL\perp AF$; do DF là dây cung chung của (O) và (G) nên $OG\perp DF$. Từ đó, do $\angle AFD$ là góc nhọn và $\angle LOG$ là góc tù nên suy ra

$$\angle AFD=180^\circ-\angle LOG.\qquad(6)$$

Từ (5) và (6), suy ra $\angle GKL=\angle AFD$.
Mà $\angle AFD=\angle LEG$ (theo (1)) nên

$$\angle GKL=\angle LEG.$$

Kết hợp với (2) suy ra $LE\parallel KG$. (7)

Gọi X là giao điểm của PE và KG. Vì tam giác LPE cân tại L nên từ (7) ta được

$$\angle KPX=\angle LPE=\angle LEP=\angle KXP.$$

Do đó $KP=KX$. Suy ra X thuộc (K). (8)

Từ (2), do tam giác KPX cân tại K, suy ra tam giác GEX cân tại G. Suy ra X thuộc (G). (9)

Từ (8) và (9), suy ra X là điểm chung của (G) và (K). Mà G, K, X thẳng hàng nên (G) và (K) tiếp xúc nhau tại X, hay (DEF) và (PBC) tiếp xúc với nhau.

Nhận xét.

1. Tất cả các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn đều giải bài toán bằng cách "chỉ ra một điểm chung của (DEF) và (PBC), rồi chứng minh điểm chung đó là tiếp điểm". Đây là một phương pháp thông dụng để chứng minh hai đường tròn tiếp xúc với nhau.

2. Các bạn *Cao Hoàng Đức* (lớp 10 CT1 THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh), *Trần Vũ Duy* (Tp. Hồ Chí Minh) và *Trương Mạnh Tuấn* (lớp 11 Toán, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN) cũng có lời giải đúng. Lời giải của các bạn vừa nêu có điểm giống nhau là đều sử dụng phương pháp tính góc để chứng minh điểm chung của (DEF) và (PBC) là tiếp điểm.

Trần Quang Hùng

P32. Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên dương n có tính chất: $n!$ chia hết cho n^3-1.

Lời giải (*phỏng theo cách giải của bạn Catherine Đoàn, lớp 6, trường Bessborough, Moncton, NB, Canada*).

Ta có $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$.

Xét $n=a^4$, với a là số nguyên lớn hơn 1.

Khi đó

$$\begin{aligned}&n^3-1\\&=(a^4-1)(a^8+a^4+1)\\&=(a^4-1)((a^8+2a^4+1)-a^4)\\&=(a^4-1)(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)\\&=(a^4-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1).\end{aligned}$$

Dễ thấy, với $a > 1$, các số $a^4 - 1$, $a^2 + a + 1$, $a^2 - a + 1$ và $a^4 - a^2 + 1$ đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn $a^4 = n$.

Suy ra, với $n = a^4$, $a \in \mathbb{N}$ và $a > 1$, $n!$ chia hết cho $n^3 - 1$.

Do đó, có vô số số nguyên dương n sao cho $n!$ chia hết cho $n^3 - 1$.

Nhận xét.

1. Vì $n!$ là tích của n số nguyên dương đầu tiên nên ý định giải quyết bài toán bằng cách chỉ ra các các số nguyên dương n sao cho $n^3 - 1$ phân tích được thành tích của các số nguyên dương nhỏ hơn n là một hướng đi tự nhiên. Với các học sinh có kĩ năng phân tích đa thức thành nhân tử tương đối thành thạo, việc chọn $n = a^4$ để phân tích được $n^2 + n + 1$ thành tích của các số nguyên dương đôi một khác nhau và nhỏ hơn $n - 1$ là điều không khó thấy. Vì thế, bài đã ra là một bài toán hoàn toàn phù hợp với tư duy và kĩ năng số học, đại số của học sinh khá, giỏi Toán cấp THCS. Thế nhưng, rất tiếc, Tòa soạn chỉ nhận được lời giải của đúng một bạn học sinh cấp THCS (bạn Catherine Đoàn).

2. Tác giả bài toán đã chỉ ra rằng, với $n = (3k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}^*$ ta cũng phân tích được $n^3 - 1$ thành tích của các số nguyên dương đôi một khác nhau và nhỏ hơn n.

3. Các bạn sau đây cũng có lời giải đúng: *Trần Hoàng Phi* (10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh), *Trương Mạnh Tuấn* (11A1, trường chuyên KHTN, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội) và một bạn khuyết danh. Ý tưởng giải quyết bài toán của các bạn Phi và Tuấn khác ý tưởng của lời giải nêu trên. Hai bạn đã giải bài toán bằng cách chỉ ra vô hạn số nguyên dương n thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $(n-1, n^2+n+1) = 1$ và $n^2 + n + 1 \mid n!$. Theo hướng này, bạn Tuấn đã chỉ ra rằng các số hạng của dãy số nguyên dương sau thỏa mãn các điều kiện vừa nêu:

$$a_1 = 16 \text{ và } a_n = a_{n-1}^2 \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Lưu Thanh Hà

P33. Hỏi, trên mặt phẳng, có thể vẽ được nhiều nhất bao nhiêu tam giác mà hai tam giác bất kì (trong số đó) đều có đúng một đỉnh chung và không có điểm nào là đỉnh chung của tất cả các tam giác được vẽ?

Lời giải.

Cách 1 (*của tác giả bài toán*).

Xét n tam giác thỏa mãn điều kiện đề bài ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$).

Trong phần dưới đây, $\lceil x \rceil$ kí hiệu số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn số thực x.

Xét một tam giác tùy ý trong số n tam giác nêu trên, gọi là T_0.

Theo giả thiết của bài ra, T_0 phải có chung đúng một đỉnh với mỗi tam giác trong số $n-1$ tam giác còn lại. Do đó, theo nguyên lý Dirichlet, trong số 3 đỉnh của T_0 phải có một đỉnh, gọi là A, là đỉnh chung của T_0 với ít nhất $k = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ tam giác, gọi là $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

Vì không có đỉnh nào là đỉnh chung của tất cả các tam giác nên tồn tại một tam giác, gọi là T, không nhận A làm đỉnh. Theo giả thiết của bài ra, T có một đỉnh chung, khác A, với mỗi tam giác trong các tam giác T_0, T_1, T_2, $\ldots, T_k$, và với $i \neq j$, đỉnh chung của T với T_i khác đỉnh chung của T với T_j (vì T_i và T_j đã có chung đỉnh A). Do đó, T phải có ít nhất $k+1$ đỉnh. Suy ra, phải có $k+1 \leq 3$, hay $k = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil \leq 2$. Dẫn tới $n \leq 7$.

Với $n = 7$, dễ thấy, 7 tam giác sau thỏa mãn các điều kiện của đề bài: ABC, ADE, AMN, BDM, BEN, CDN và CME.

Vậy, chỉ có thể vẽ được tối đa 7 tam giác thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2 (*phỏng theo cách giải của bạn Chu Thị Thanh, lớp 9E1, trường THCS Vĩnh Tường, huyện Vĩnh Tường, tỉnh Vĩnh Phúc*).

Xét n tam giác thỏa mãn điều kiện đề bài ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$).

Trước hết, ta có Nhận xét sau:

Nhận xét: Không có điểm nào là đỉnh chung của quá 3 tam giác.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, tồn tại điểm A là đỉnh chung của 4 tam giác, gọi là T_1, T_2, T_3, T_4.

Do A không thể là đỉnh chung của tất cả các tam giác (theo giả thiết của bài ra) nên phải tồn tại một tam giác, gọi là T_0, không nhận A làm đỉnh.

Theo giả thiết của bài ra, T_0 phải có chung đúng một đỉnh với mỗi tam giác trong số 4 tam giác nói trên và với $i \neq j$, đỉnh chung của T_0 với T_i khác đỉnh chung của T_0 với T_j. Do đó, T_0 phải có ít nhất 4 đỉnh. Điều vô lý này chứng tỏ giả sử ban đầu là sai.

Nhận xét được chứng minh.

Từ Nhận xét trên, nhận thấy ta phải có $n \leq 7$.

Thật vậy, giả sử ngược lại, $n \geq 8$. Xét một tam giác bất kì, gọi là T.

Theo giả thiết của bài ra, T có một đỉnh chung với mỗi tam giác trong số $n - 1 \geq 7$ tam giác còn lại.

Từ đó, do T chỉ có 3 đỉnh nên theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất một đỉnh là đỉnh chung của T với ít nhất 3 tam giác khác. Như vậy, tồn tại một điểm là đỉnh chung của ít nhất 4 tam giác; mâu thuẫn với Nhận xét nêu trên. Điều này cho thấy phải có $n \leq 7$.

Với $n = 7$, ta có 7 tam giác ABC, ADE, AFG, BDF, CDG, BEG, CEF thỏa mãn các điều kiện đề bài. Vậy, số tối đa các tam giác có thể vẽ là 7.

Nhận xét.

1. Trong lời giải của mình, bạn Chu Thị Thanh đã phát biểu Nhận xét (ở Cách 2) dưới dạng: "Nếu có một điểm là đỉnh chung của 4 tam giác thì điểm ấy sẽ là đỉnh chung của tất cả các tam giác".

Trong phần chứng minh $n \leq 7$ bằng phản chứng, bạn Thanh đã chỉ ra rằng nếu $n \geq 8$ thì sẽ có một điểm là đỉnh chung của ít nhất 4 tam giác và vì thế theo Nhận xét, điểm này phải là đỉnh chung của tất cả các tam giác; mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của đề bài.

Cách trình bày lời giải theo mạch trên không hay và không đẹp, bởi nó tạo cho người đọc cảm giác người giải bài không ý thức rõ về giả thiết của bài toán hoặc không có ý thức khai thác triệt để các giả thiết của bài toán trong quá trình giải bài.

2. Hai lời giải nêu trên thể hiện hai ý tưởng giải khác nhau đối với bài đã ra. Ý tưởng giải ở Cách 1 là tìm cách phân tích, khai thác các giả thiết của bài ra theo hướng "dẫn trực tiếp đến đánh giá cho n (số tam giác có thể vẽ được, thỏa mãn điều kiện đề bài)". Ý tưởng giải ở Cách 2 là tìm cách phân tích, khai thác giả thiết của bài ra để tìm ra một tính chất đặc trưng của hệ các tam giác có thể vẽ, rồi dựa vào tính chất đó để suy đoán ra đánh giá cho n và sau đó tìm cách chứng minh suy đoán ấy.

3. Trong số các lời giải Tòa soạn nhận được từ độc giả, chỉ có lời giải của bạn Chu Thị Thanh là lời giải đúng. Một số bạn khác cũng có ý tưởng giải như ở Cách 2, nhưng đã không thành công trên con đường thực hiện ý tưởng đó; có những bạn, sau khi có được Nhận xét (ở Cách 2), đã không dùng suy luận "lí thuyết", mà dùng quan sát trực giác, hình ảnh minh họa để lí giải về giá trị lớn nhất có thể của n. Các bạn có thể dùng quan sát trực giác, hình ảnh minh họa để suy đoán về một điều nào đó; tuy nhiên, sau đó, các bạn cần chứng minh (tức lí giải) tính đúng của suy đoán ấy bằng các lập luận logic chặt chẽ.

Nguyễn Khắc Minh

P34. Cho a,b,c,d là các số thực dương, có tổng bằng 4. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\geq\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Lời giải.

Cách 1 (*dựa theo lời giải của bạn Phạm Thọ Hải Minh, sinh viên năm thứ 2, lớp K65TN, khoa Toán-Tin, trường ĐHSP Hà Nội*)**.**

Do các cặp (a,b) và (c,d) có vai trò như nhau nên không mất tổng quát, có thể giả sử $a+b\leq c+d$.

Khi đó, $a+b\leq\dfrac{a+b+c+d}{2}=2$. Từ đó, do $a,b>0$ nên $2\sqrt{ab}\leq a+b\leq 2$. Suy ra $ab\leq 1$.

Kí hiệu (1) là bất đẳng thức cần chứng minh của đề bài, ta có

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\geq\frac{(a+b+c+d)^2-2(a+b)(c+d)-2(ab+cd)}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\geq 8-(a+b)(c+d)-(ab+cd)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}+(a+b)(4-a-b)+ab+cd\geq 8. \qquad (2)$$

Do $c,d>0$ nên $\dfrac{1}{cd}+cd\geq 2$. Do đó, để chứng minh (2), ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{ab}+(a+b)(4-a-b)+ab\geq 6. \qquad (3)$$

Ta có Nhận xét đơn giản sau:

Nhận xét.

Nếu $0<y\leq x\leq 1$ thì $y+\dfrac{1}{y}\geq x+\dfrac{1}{x}$. (4)

Thật vậy, ta có (4) $\Leftrightarrow\dfrac{(xy-1)(y-x)}{xy}\geq 0$ và bất đẳng thức sau là một bất đẳng thức đúng.

Do $0<ab\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leq 1$ nên áp dụng (4) ta được

$$ab+\frac{1}{ab}\geq\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{4}{(a+b)^2}.$$

Do vậy, để chứng minh (3), ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{4}{(a+b)^2}+(a+b)(4-a-b)\geq 6. \qquad (5)$$

Đặt $a+b=2t$, $0<t\leq 1$. Khi đó, (5) được viết lại thành

$$t^2+\frac{1}{t^2}+2t(4-2t)\geq 6. \qquad (6)$$

Ta có (6) $\Leftrightarrow(t-1)^3(3t+1)\leq 0$. (7)

(7) là bất đẳng thức đúng, do $0<t\leq 1$. Vì thế, (6) được chứng minh. Do đó, bất đẳng thức của đề bài được chứng minh.

Theo dõi các đánh giá trong chứng minh trên, ta thấy dấu bằng ở (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$cd=1, a=b, \text{ và } 1=t=\frac{a+b}{2}.$$

Từ đó, kết hợp với điều kiện $a+b+c+d=4$, dễ dàng giải ra $a=b=c=d=1$.

Cách 2 (*của người chấm bài*).

Không mất tổng quát, giả sử $a+b\leq c+d$. Khi đó, $a+b\leq 2$ và $ab\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leq 1$.

Viết lại bất đẳng thức của đề bài dưới dạng

$$\frac{1}{ab}+ab+\frac{1}{cd}+cd\geq\frac{(a+b)^2+(c+d)^2}{2}. \qquad (1)$$

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+ab-2+\frac{1}{cd}+cd-2\geq\frac{(4-a-b)^2+(a+b)^2}{2}-4$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{cd}}-\sqrt{cd}\right)^2\geq(2-a-b)^2. \qquad (2)$$

Vì $\left(\dfrac{1}{\sqrt{cd}}-\sqrt{cd}\right)^2\geq 0$ nên để chứng minh (2), ta sẽ chứng minh

$$\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}\right)^2\geq(2-a-b)^2. \qquad (3)$$

Vì $a+b\leq 2$ và $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\geq\sqrt{ab}$ nên

$$(3)\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}\geq 2-a-b$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}\geq 2-(a+b).$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên do

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{ab}\geq 2 \text{ và } -2\sqrt{ab}\geq-(a+b).$$

Vì vậy, (3) được chứng minh và do đó (1) được chứng minh.

Dấu bằng ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $ab=1$, $a=b$ và $cd=1$. Kết hợp với $a+b+c+d=4$, ta được $a=b=c=d=1$.

Nhận xét.

1. Đây là một bài toán khó so với mức độ tư duy bất đẳng thức ở cấp THCS. Điều này lý giải tại sao trong các lời giải được gửi về Toà soạn, không có lời giải nào của học sinh cấp THCS.

2. Hướng tiếp cận trong Cách 1 (gần tương tự với cách giải của tác giả bài toán) là tìm cách giảm dần số biến số để quy bất đẳng thức của đề bài về bất đẳng thức một biến. Đây là một phương pháp quan trọng trong chứng minh bất đẳng thức. Ở Cách 2, về thực chất, ta cũng đi theo hướng tiếp cận này, chỉ là phép chứng minh được trình bày dưới dạng ẩn, ở đoạn cuối.

3. Trong lời giải của mình, bạn Phạm Thọ Hải Minh đã qui việc chứng minh bất đẳng thức (3) (xem Cách 1) về việc chứng minh bất đẳng thức

$$(a+b)^2-4(a+b)+\left(6-\frac{1}{ab}-ab\right)\leq 0$$

và bạn đã chứng minh bất đẳng thức này bằng cách chứng minh nửa đoạn $(0;2]$ chứa trong tập nghiệm của bất phương trình (ẩn t): $t^2-4t+\left(6-\dfrac{1}{ab}-ab\right)\leq 0$. Cách làm này đã gặp phải các tính toán khá rườm rà, đặc biệt là phần tìm điều kiện để dấu bằng xảy ra.

4. Ngoài lời giải của bạn Phạm Thọ Hải Minh, trong số các lời giải Toà soạn nhận được, chỉ có thêm lời giải của bạn *Trần Tiến Mạnh* (lớp 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh) là lời giải đúng. Bạn Mạnh, sau khi biến đổi bất đẳng thức của đề bài về dạng

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}+ab+cd+(a+b)(c+d)\geq 8,$$

đã chứng minh bất đẳng thức đó bằng cách chứng minh bất đẳng thức trung gian

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}+ab+cd\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{(a+b)(c+d)},$$

rồi vận dụng bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân để hoàn tất chứng minh.

5. Dưới đây là một số sai lầm cơ bản trong các lời giải sai mà Tòa soạn nhận được:

– Không mất tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c\geq d$. (Điều nêu trên là sai vì ở bài toán này chỉ a, b có vai trò như nhau, c, d có vai trò như nhau và các cặp (a,b), (c,d) có vai trò như nhau).

– Xét cực trị của vế trái mà không để ý rằng về phải cũng thay đổi khi các biến thay đổi.

Trần Nam Dũng

P35. Tìm tất cả các hàm số f xác định, liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+f(y+z+t))+f(y+f(z+t+x))+f(z+f(t+x+y))+f(t+f(x+y+z))=0$$

với mọi x, y, z, t thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

Kí hiệu (1) là hệ thức hàm đã cho trong đề bài.

Giả sử f là hàm số thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Trong (1), thay $x=y=z=t=\dfrac{r}{3}$, ta được:

$$f\left(\frac{r}{3}+f(r)\right)=0 \qquad (2)$$

với mọi r thuộc $\mathbb{R}$.

Giả sử, với n là số nguyên dương nào đó, ta có

$$f\left(\frac{r}{3^n}+\frac{f(r)}{3^{n-1}}\right)=0 \qquad (3)$$

với mọi r thuộc $\mathbb{R}$.

Khi đó, do (2) nên trong (3), thay r bởi $\dfrac{r}{3}+f(r)$, ta được:

$$f\left(\frac{r}{3^{n+1}}+\frac{f(r)}{3^n}\right)=0$$

với mọi r thuộc $\mathbb{R}$.

Vì vậy, theo nguyên lý quy nạp, với mọi r thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$f\left(\frac{r}{3^n}+\frac{f(r)}{3^{n-1}}\right)=0$$

với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Từ đó, do f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(0)=0$.

Dễ thấy, hàm số $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Tiếp theo, giả sử tồn tại $r_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(r_0)\neq 0$.

Trong (1), thay $x=-2r$ và $y=z=t=r$, ta được

$$f(3f(r)-2r)=-3f(r) \qquad (4)$$

với mọi r thuộc $\mathbb{R}$.

Xét dãy số $(x_n)_{n\geq 1}$, xác định bởi: $x_1=r_0$ và

$$x_n=3f(x_{n-1})-2x_n \text{ với mọi } n\geq 2.$$

Dựa vào (4), bằng quy nạp theo n, dễ dàng chứng minh được:

$$f(x_n)=(-3)^{n-1}\cdot f(r_0)$$

với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra:

+ Nếu $f(r_0)>0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{2n})=$ -∞ và $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{2n+1})=+\infty$.
+ Nếu $f(r_0)<0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{2n})=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{2n+1})=$ -∞.

Vì thế, do f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tập giá trị của f là $\mathbb{R}$.

Do đó, f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$. (5)

Trong (1), thay $y=z=t=0$, ta được

$$f(x)+3f(f(x))=0, \text{ hay } f(f(x))=-\frac{f(x)}{3},$$

với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Từ đó, do (5), ta có $f(x)=-\dfrac{x}{3}$, với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số vừa tìm được ở trên thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Vậy, tóm lại, $f(x)\equiv 0$ và $f(x)=-\dfrac{x}{3}$ là tất cả các hàm số cần tìm theo yêu cầu của đề bài.

Nhận xét.

Trong số tất cả lời giải Tòa soạn nhận được, chỉ có lời giải của bạn *Trương Mạnh Tuấn* (11A1, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội) là lời giải đúng (tuy chưa thực sự ngắn gọn).

Võ Quốc Bá Cẩn

P36. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng tồn tại các số tự nhiên a,b sao cho $0<b\leq\sqrt{n}+1$ và $\sqrt{n}\leq\dfrac{a}{b}\leq\sqrt{n+1}$.

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

Gọi m là số nguyên dương sao cho $m^2\leq n<(m+1)^2$.

Dễ thấy, có duy nhất số m như vậy.

Đặt $s=n-m^2$; ta có s là số tự nhiên và $0\leq s\leq 2m$.

Xét hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1: s là số chẵn.*

Ta có: $n=m^2+s\leq m^2+s+\dfrac{s^2}{(2m)^2}$
$\leq m^2+s+1=n+1$.

Suy ra $\sqrt{n}\leq m+\dfrac{s}{2m}\leq\sqrt{n+1}$.

Do đó, các số tự nhiên $a=m^2+\dfrac{s}{2}$ và $b=m$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

• *Trường hợp 2: s là số lẻ.*

Ta có
$n=m^2+s=(m+1)^2-(2m+1-s)$
$\leq(m+1)^2-(2m+1-s)+\left(\dfrac{2m+1-s}{2(m+1)}\right)^2$
$\leq(m+1)^2-(2m+1-s)+1=n+1$.

Suy ra $\sqrt{n}\leq m+1-\dfrac{2m+1-s}{2(m+1)}\leq\sqrt{n+1}$.

Do đó, các số tự nhiên $a=(m+1)^2-m+\dfrac{s-1}{2}$ và $b=m+1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét.

1. Lời giải của bạn *Phạm Quang Toàn* (lớp 12, Indoopilly State High School, Queensland, Australia) là lời giải duy nhất đúng mà Tòa soạn nhận được từ độc giả.

2. Cũng như ở lời giải trên, bạn Phạm Quang Toàn đã giải bài toán bằng cách chỉ ra cụ thể các số a,b thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tuy nhiên, do đã làm gồ ghề bài toán lên bằng cách thay thế điều kiện 2 bởi điều kiện tương đương "$a^2=b^2n+k$, với k là số tự nhiên mà $0\leq k\leq b^2$" nên việc chọn các số a,b của bạn Toàn cũng trở nên "vất vả" hơn và thiếu tự nhiên hơn so với cách chọn trong lời giải trên.

3. Có thể chứng minh được rằng, có *vô số số nguyên dương n sao cho không tồn tại các số tự nhiên a,b mà $0<b\leq\sqrt{n}$ và $\sqrt{n}\leq\dfrac{a}{b}\leq\sqrt{n+1}$*. Bạn đọc hãy thử chứng minh!

Nguyễn Khắc Minh

P37. Cho dãy số thực $(x_n)_{n\geq 1}$ được xác định như sau: $x_1=1$ và

$$x_n=x_{n-1}+\frac{1}{2x_{n-1}} \text{ với mọi } n\geq 2.$$

Tính $[x_{2017}]$.

($[x]$ kí hiệu phần nguyên của số thực x).

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Hữu Thắng, lớp 11A1, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An*).

Với mọi $k\geq 2$, từ công thức xác định dãy số đã cho, ta thấy

$$x_k^2-x_{k-1}^2=\left(x_{k-1}+\frac{1}{2x_{k-1}}\right)^2-x_{k-1}^2$$
$$=1+\frac{1}{4x_{k-1}^2}. \qquad (1)$$

Vì thế

$$x_n^2=x_1^2+\sum_{k=2}^{n}(x_k^2-x_{k-1}^2)\geq x_1^2+\sum_{k=2}^{n}1=n \qquad (2)$$

với mọi $n\geq 2$.

Với mỗi $n\geq 1$, đặt $H_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}$; từ (1) và (2) suy ra

$$x_n^2=x_1^2+\sum_{k=2}^{n}(x_k^2-x_{k-1}^2)$$
$$\leq x_1^2+\sum_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{4(k-1)}\right)=n+\frac{1}{4}H_{n-1} \qquad (3)$$

với mọi $n\geq 2$.

Tiếp theo, ta chứng minh Bổ đề sau.

Bổ đề. $H_n \le 1+\ln n$ với mọi $n \ge 1$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} \text{ trên } (0;+\infty).$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in (0;+\infty).$$

Do đó, f nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Mà

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \ln 1 = 0.$$

nên suy ra $f(x) > 0 \ \forall x \in (0;+\infty)$; tức là

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x \ \forall x \in (0;+\infty). \quad (4)$$

Bất đẳng thức trong Bổ đề hiển nhiên đúng khi $n = 1$.

Với $n \ge 2$, theo (4), ta có

$$H_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} < 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\ln(i+1) - \ln i) = 1 + \ln n.$$

Bổ đề được chứng minh.

Theo Bổ đề, từ (3) ta có

$$x_n^2 \le n + \frac{1}{4}(1 + \ln(n-1)) \quad (5)$$

với mọi $n \ge 2$. Dễ thấy $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, từ (2) và (5) suy ra

$$\sqrt{n} \le x_n \le \frac{1}{2}\sqrt{4n+1+\ln(n-1)} \ \forall n \ge 2.$$

Vì thế,

$$\sqrt{2017} \le x_{2017} \le \frac{1}{2}\sqrt{8069+\ln 2016}. \quad (6)$$

Do $44^2 = 1936 < 2017$ nên $44 < \sqrt{2017}$. (7)

Do $e^{31} > 2^{31} > 2016$ nên $\ln 2016 < 31$, hay $8069 + \ln 2016 < 90^2$.

Do đó, $\frac{1}{2}\sqrt{8069+\ln 2016} < 45$. (8)

Từ (6), (7) và (8), suy ra $[x_{2017}] = 44$.

Nhận xét.

1. Ngoài bạn Nguyễn Hữu Thắng, các bạn *Lê Tuấn Anh* (lớp 10 Toán 1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định) và *Phạm Thọ Hải Minh* (sinh viên lớp K65TN, Khoa Toán-Tin, ĐHSP Hà Nội) cũng có lời giải tốt.

2. Lời giải của nhóm bạn *Nguyễn Hoàng Đức, Trịnh Hoàng Hiệp, Nguyễn Tấn Tài* (lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước) có thể được coi là đúng, nếu bỏ qua một số lỗi "đánh máy".

Nguyễn Duy Thái Sơn

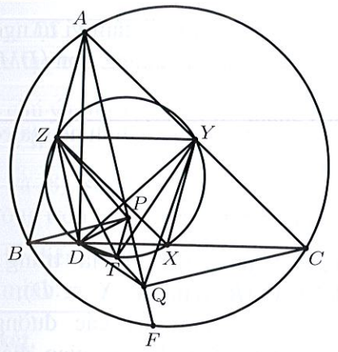
P38. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Các điểm E, F di động trên (O) sao cho $EF \parallel BC$. M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, C trên AE. P, Q theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, C trên AF. Chứng minh rằng tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của các đường tròn (DMQ) và (DNP) là các điểm cố định.

Lời giải (*của tác giả bài toán*)**.**

Trước hết, ta chứng minh Bổ đề sau:

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). F là một điểm bất kì trên (O). D là hình chiếu vuông góc của A trên BC. P, Q theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, C trên AF. Khi đó tâm đường tròn (DPQ) thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC.

Chứng minh. Gọi T là tâm đường tròn (DPQ); X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB.



Dễ thấy $TD = TQ, YD = YQ$ và $TD = TP$, $ZD = ZP$.

Do đó $TY \perp DQ$ và $TZ \perp DP$.

Từ đó, chú ý rằng mỗi bộ bốn điểm (A, C, D, Q), (A, B, D, P) đều là bộ 4 điểm cùng thuộc một đường tròn, $XY \parallel AB$ và $XZ \parallel AC$, ta có

$$(TY,TZ) \equiv (DQ,DP) \equiv (DQ,AQ) + (AP,DP) \equiv (DC,AC) + (AB,DB) \equiv (AB,AC) \equiv (XY,XZ) \pmod{\pi}.$$

Do đó, T thuộc đường tròn (XYZ) - đường tròn Euler của tam giác ABC.

Bổ đề được chứng minh.

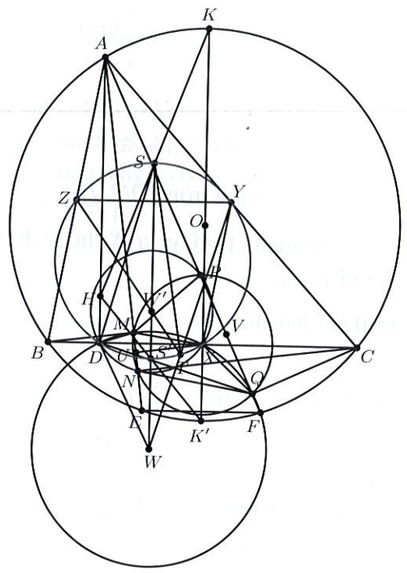
Trở lại bài toán.

Có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1: $AB \ne AC$.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của A trên BC; X, Y, Z, U, V theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB, MN, PQ; W, W' và R, R' theo thứ tự là tâm và bán kính của các đường tròn (DMQ), (DNP); K, K' là các giao điểm của OX và (O); H là trực tâm của tam giác ABC; S, S' theo thứ tự là giao điểm của WW' và HK, HK'; T là tâm của đường tròn (DPQ).

Dễ thấy, mỗi bộ năm điểm (A, B, M, P, D), (A, C, N, Q, D) đều là bộ 5 điểm cùng thuộc một đường tròn và các tam giác ABM, ACQ đồng dạng ngược hướng. (1)



Suy ra

$$(PM,PQ) \equiv (PM,PA) \equiv (BM,BA) \equiv (CA,CQ) \equiv (NA,NQ) \equiv (NM,NQ) \pmod{\pi}.$$

Do đó, bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Vì $BM \perp AE$, $CN \perp AE$ và X, U theo thứ tự là trung điểm của BC, MN nên $BM \parallel CN$ và

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = -1 = \frac{\overline{UM}}{\overline{UN}}.$$

Do đó, theo định lí Thales đảo,

$$XU \parallel BM \parallel CN.$$

Mà $CN \perp MN$ nên $XU \perp MN$. Do đó, XU là trung trực của MN.

Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được XV là trung trực của PQ.

Vì vậy, X là tâm của đường tròn $(MNPQ)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$(XM,XQ) \equiv (\overrightarrow{XM},\overrightarrow{XQ}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{XM},\overrightarrow{XQ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{XM},\overrightarrow{XQ})$$

$$\equiv (PM,PQ)+(NM,NQ)$$
$$\equiv (PM,PA)+(NA,NQ)$$
$$\equiv (DM,DA)+(DA,DQ)$$
$$\equiv (DM,DQ) \pmod{\pi}.$$

Do đó, X thuộc đường tròn (DMQ).

Bằng cách tương tự, ta cũng có X thuộc đường tròn (DNP).

Suy ra WW' là trung trực của DX. (3)

Từ (3), chú ý rằng $WW' \parallel KK'$, suy ra S,S' theo thứ tự là trung điểm của HK, HK'. (4)

Do H là trực tâm của tam giác ABC và đường tròn (XYZ) là đường tròn Euler của tam giác đó nên (XYZ) là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$. Vì thế, từ (4) suy ra S,S' thuộc đường tròn (XYZ). (5)

Từ (3) và (5) suy ra SS' là đường kính của đường tròn (XYZ).

Theo Bổ đề, T thuộc đường tròn (XYZ).

Dễ thấy, D thuộc đường tròn (XYZ).

Do vậy TS, TS' là phân giác của các góc tạo bởi TY và TZ; $DS \perp DS'$. (6)

Dễ thấy, Y là tâm của đường tròn $(DQAC)$.

Từ đó, chú ý rằng T, W' theo thứ tự là tâm của các đường tròn (DQP) và (DQM), suy ra Y, T, W' thẳng hàng.

Tương tự, Z, T, W thẳng hàng.

Vì vậy, chú ý tới (6), ta có

$$D(SS'WW') = (SS'WW') = T(SS'WW')$$
$$= T(SS'XY) = -1.$$

Từ đó, lại chú ý tới (6), suy ra DS, DS' là phân giác của các góc tạo bởi DW và DW'.

Do đó, theo tính chất đường phân giác, ta có

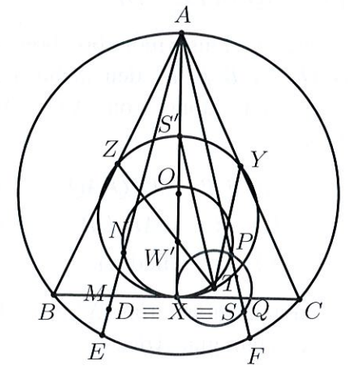
$$\frac{\overline{SW}}{\overline{SW'}} = \frac{DW}{DW'} = \frac{R}{R'} \text{ và } \frac{\overline{S'W}}{\overline{S'W'}} = -\frac{DW}{DW'} = -\frac{R}{R'}.$$

Suy ra, S,S' theo thứ tự là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của các đường tròn (DMQ) và (DNP).

Mà S và S' là các điểm cố định nên ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: $AB = AC$.

Gọi X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB (chú ý $X \equiv D$); W, W' theo thứ tự là tâm của các đường tròn $(DMQ), (DNP)$; S, S' là các giao điểm của AD và đường tròn (XYZ) (chú ý $S' \equiv D \equiv X$); T là tâm của đường tròn (DPQ).



Dễ thấy, các đường tròn (DMQ) và (DNP) tiếp xúc trong với nhau tại S'.

Do đó, tâm vị trong của các đường tròn (DMQ) và (DNP) là điểm cố định S'. (7)

Hiển nhiên, SS' là đường kính của đường tròn (XYZ).

Vì vậy, TS, TS' là các đường phân giác của các góc tạo bởi các đường thẳng TY và TZ.

Tương tự như trường hợp 1, T thuộc đường tròn (XYZ) và mỗi bộ ba điểm (Y,T,W'), (Z,T,W) là một bộ 3 điểm thẳng hàng.

Do vậy, TS, TS' là các đường phân giác của các góc tạo bởi các đường thẳng TW' và TW.

Từ đó, chú ý rằng S, S', W, W' thẳng hàng, suy ra $(SS'WW') = -1$. (8)

Từ (7) và (8), suy ra S là tâm vị tự ngoài của các đường tròn (DMQ) và (DNP).

Mà S là điểm cố định nên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét.

1. Bài đã ra là một bài toán khó.

2. Tòa soạn chỉ nhận được một lời giải từ độc giả và lời giải này có hai yếu điểm sau:

– Cách xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của các đường tròn (DMQ) và (DNP) không đẹp và có những điểm thiếu chính xác; chẳng hạn, tâm vị tự ngoài S được xác định là giao điểm của trung trực của DX và cung chứa góc $\frac{\angle CAD - \angle BAD}{2}$ vẽ trên đoạn DX.

(Có hai cung chứa góc như vậy và hơn thế, $\frac{\angle CAD - \angle BAD}{2}$ có thể là số âm!).

– Một số lập luận không mang tính khái quát, chỉ đúng cho một số thế hình nhất định.

Nguyễn Minh Hà

P39. Kí hiệu S là tập hợp gồm 2017 số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu phần tử của S là những số hạng của cùng một cấp số nhân tăng, có các số hạng là số thực và công bội lớn hơn 1?

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Trịnh Khánh Hiệp, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Trần Phú, Tp. Hải Phòng*)**.**

Với n là số nguyên dương và p là số nguyên tố, ta kí hiệu $v_p(n)$ là số lớn nhất trong các số tự nhiên k mà $p^k \mid n$. Dễ thấy

$$v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n),$$

với mọi số nguyên dương m,n và với mọi số nguyên tố p.

Giả sử $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ là các số nguyên dương vừa thuộc S vừa là các số hạng của một cấp số nhân tăng, có công bội $q > 1$.

Vì $1, 2, 4, 8, 16 \in S$ và 1, 2, 4, 8, 16 cũng là các số hạng của một cấp số nhân tăng có công bội lớn hơn 1 nên có thể giả sử $n \geq 5$.

Vì $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ là các số hạng của một cấp số nhân tăng với công bội q nên tồn tại các số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho

$$x_{i+1} = x_i \cdot q^{a_i}$$

với mọi $i = \overline{1,n-1}$ hay $\frac{x_{i+1}}{x_i} = q^{a_i}$ với mọi $i = \overline{1,n-1}$. Suy ra, với mỗi $i = 1,2,\ldots,n-2$, ta có

$$\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^{a_{i+1}} = q^{a_i \cdot a_{i+1}} = \left(\frac{x_{i+2}}{x_{i+1}}\right)^{a_i}.$$

Do đó,

$$x_i^{a_{i+1}} \cdot x_{i+2}^{a_i} = x_{i+1}^{a_i + a_{i+1}}$$

với mỗi $i = 1,2,\ldots,n-2$.

Vì vậy, với p là số nguyên tố tùy ý, ta có

$$(a_i + a_{i+1}) v_p(x_{i+1}) = a_{i+1} v_p(x_i) + a_i v_p(x_{i+2})$$

với mỗi $i = 1,2,\ldots,n-2$.

Suy ra, với p là số nguyên tố tùy ý, ta có

$$v_p(x_i) < v_p(x_{i+1}) \Leftrightarrow v_p(x_{i+1}) < v_p(x_{i+2})$$

với mọi $i = \overline{1,n-2}$.

Dễ thấy, tồn tại số nguyên tố p sao cho $v_p(x_1) < v_p(x_2)$ (vì nếu ngược lại, $v_p(x_1) > v_p(x_2)$ với mọi p nguyên tố thì $x_2 \mid x_1$, trái với giả thiết $x_1 < x_2$).

Từ đó, suy ra tồn tại số nguyên tố p sao cho

$$v_p(x_1) < v_p(x_2) < \cdots < v_p(x_n).$$

Do đó, $v_p(x_n) \geq n-1$. Suy ra $p^{n-1} \mid x_n$.

Mà $x_n \leq 2017$ nên $p^{n-1} \leq 2017$.

Vì thế, $2^{n-1} \leq 2017$. Suy ra, $n \leq 11$.

Dễ thấy, $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10} \in S$ và các số đó lập thành một cấp số nhân tăng, có công bội lớn hơn 1. Vậy, có tối đa 11 phần tử thuộc S là các số hạng của một cấp số nhân tăng, có công bội lớn hơn 1.

Nhận xét.

1. Lời giải nêu trên của bạn Trịnh Khánh Hiệp là một lời giải đẹp cho bài toán. Ngoài bạn Hiệp, bạn *Nguyễn Nguyễn* (lớp 10 Toán, trường Phổ thông năng khiếu, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh) cũng có lời giải đúng và tương đối tốt. Ý tưởng giải của bạn Nguyễn Nguyễn khác ý tưởng giải của lời giải nêu trên. Bạn Nguyễn Nguyễn có nhận xét đúng rằng bài toán vẫn giải được khi thay 2017 bởi số nguyên dương $n > 2$ tùy ý.

2. Dễ thấy, lời giải trên hoàn toàn có thể sử dụng làm lời giải cho bài toán khái quát, khi thay 2017 bởi $n > 2$. Theo đó, số phần tử tối đa của tập gồm n số nguyên dương đầu tiên là những số hạng của cùng một cấp số nhân tăng, có công bội lớn hơn 1 bằng $[\log_2 n] + 1$.

3. Ngoại trừ lời giải của bạn Hiệp và bạn Nguyễn Nguyễn, tất cả các lời giải còn lại, trong số các lời giải mà Tòa soạn nhận được từ độc giả, đều không đúng; do ngộ nhận nếu các phần tử thuộc S là những số hạng của cùng một cấp số nhân thì chúng phải là những số hạng liên tiếp hoặc do lập luận không chặt chẽ, thiếu chính xác về tính hữu tỉ - vô tỉ của những số được xem xét trong lời giải.

Hà Duy Hưng

P40. Chuẩn bị cho buổi giao lưu của Pi với các bạn học sinh Tiểu học yêu Toán, cô Lê Hương được giao nhiệm vụ chia 500 thanh chocolate (sô-cô-la) thành các gói sao cho mỗi gói đều có một số lẻ thanh; cô Cẩm Thơ được giao nhiệm vụ chia 500 cái kẹo mút thành các gói sao cho không có 2 gói nào có số kẹo bằng nhau. Kí hiệu s và t tương ứng là số cách chia mà cô Lê Hương và cô Cẩm Thơ có thể thực hiện. Hãy so sánh s và t.

Lời giải (*dựa theo cách giải của bạn Trịnh Khánh Hiệp, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Trần Phú, Tp. Hải Phòng*)**.**

Nhận thấy:

– Mỗi cách chia chocolate của cô Lê Hương là một cách phân tích 500 thành tổng của các số nguyên dương lẻ. Hai cách chia khác nhau của cô Lê Hương là hai cách phân tích khác nhau theo nghĩa: tồn tại một số nguyên dương lẻ có mặt trong phân tích này nhưng không có mặt trong phân tích kia, hoặc tồn tại một số nguyên dương lẻ mà số lần có mặt của nó trong phân tích này khác số lần có mặt của nó trong phân tích kia.

– Mỗi cách chia kẹo mút của cô Cẩm Thơ là một cách phân tích 500 thành tổng của các số nguyên dương đôi một khác nhau. Hai cách chia khác nhau của cô Cẩm Thơ là hai cách phân tích khác nhau theo nghĩa: tồn tại một số nguyên dương có mặt trong phân tích này nhưng không có mặt trong phân tích kia.

Như vậy:

– s chính là số phần tử của tập S gồm tất cả các cách phân tích 500 thành tổng của các số nguyên dương lẻ;

– t chính là số phần tử của tập T gồm tất cả các cách phân tích 500 thành tổng của các số nguyên dương đôi một khác nhau.

Ta sẽ so sánh s và t nhờ việc xây dựng một ánh xạ thích hợp từ T đến S.

Xét a tùy ý thuộc T và giả sử a là cách phân tích 500 thành tổng của $m \geq 1$ số nguyên dương đôi một khác nhau $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Với mỗi $i = \overline{1,m}$, a_i có duy nhất biểu diễn dạng $a_i = 2^{n_i} \cdot b_i$ $(*)$ trong đó b_i là một số nguyên dương lẻ và n_i là một số tự nhiên. Vì thế, trong cách phân tích a, khi thay mỗi a_i bởi tổng của 2^{n_i} số nguyên dương lẻ b_i, ta sẽ có một cách phân tích (gọi là b) 500 thành tổng của các số nguyên dương lẻ; nói cách khác, ta sẽ có một cách phân tích b thuộc tập S.

Hơn nữa, do tính duy nhất của biểu diễn $(*)$ nên cách phân tích b được xác định như trên là duy nhất.

Do đó, phép đặt ứng mỗi cách phân tích a thuộc T với cách phân tích b được xác định như trên xác lập một ánh xạ, gọi là f, từ T đến S.

Xét $b = f(a)$ với $a \in T$ (nghĩa là, b là ảnh của $a \in T$ qua f). Giả sử b là cách phân tích 500 thành tổng của m_1 số nguyên dương lẻ b_1, m_2 số nguyên dương lẻ b_2, …, m_k số nguyên dương lẻ b_k. Khi đó, từ cách xác định b, dễ thấy, mỗi m_i, $i = \overline{1,k}$, là một tổng các lũy thừa của 2.

Từ đó, do tính duy nhất của biểu diễn dạng $(*)$ và tính duy nhất của biểu diễn trong hệ nhị phân của các số nguyên dương, dễ dàng suy ra, nếu a và a' là hai phần tử khác nhau thuộc T thì $f(a)$ và $f(a')$ là hai phần tử khác nhau thuộc S. Điều này cho thấy f là đơn ánh. (1)

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh f là toàn ánh.

Xét phần tử b tùy ý thuộc S và giả sử b là cách phân tích 500 thành tổng của m_1 số nguyên dương lẻ b_1, m_2 số nguyên dương lẻ b_2, …, m_k số nguyên dương lẻ b_k. Khi đó, ta có

$$500 = m_1 b_1 + m_2 b_2 + \cdots + m_k b_k. \quad (2)$$

Biểu diễn m_1 trong hệ nhị phân:

$$m_1 = 2^{s_1} + 2^{s_2} + \cdots + 2^{s_j},$$

trong đó, $s_1, s_2, \ldots, s_j$ là các số tự nhiên đôi một khác nhau.

Trong tổng (2), thay $m_1 b_1$ bởi tổng của các số $2^{s_1} \cdot b_1, 2^{s_2} \cdot b_1, \ldots, 2^{s_j} \cdot b_1$.

Làm tương tự như vậy đối với $m_2 b_2, \ldots, m_k b_k$.

Khi đó, dễ thấy, ta sẽ có một phân tích của 500 thành tổng của các số nguyên dương đôi một khác nhau; nghĩa là, ta sẽ có một phần tử của T. Hiển nhiên, b là ảnh của phần tử này qua f.

Như vậy, với mỗi phần tử $b \in S$, luôn tồn tại phần tử $a \in T$ sao cho $f(a) = b$. Do đó, f là toàn ánh. (3)

Từ (1) và (3), suy ra f là song ánh. Vì thế, $s = t$.

Nhận xét.

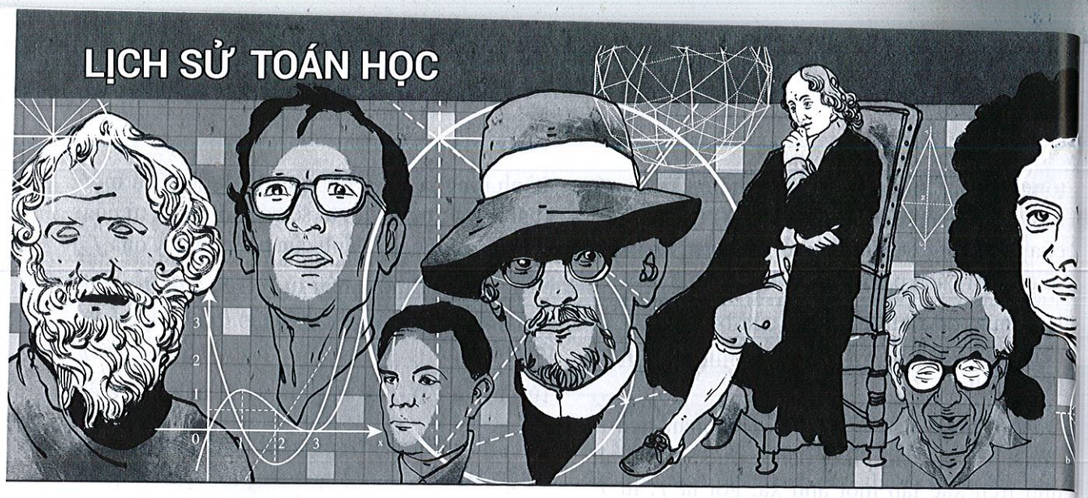
1. Từ lời giải nêu trên, hiển nhiên thấy, kết quả của bài ra không thay đổi khi thay 500 bởi số nguyên dương n tùy ý.

2. Trong Toán học, mỗi cách phân tích số nguyên dương n thành tổng của các số nguyên dương khác được gọi là một *phân hoạch của số nguyên dương n*. Một phân hoạch của số nguyên dương n được gọi là *phân hoạch lẻ*, nếu tất cả các số trong phân hoạch đều là số lẻ; được gọi là *phân hoạch chẵn*, nếu tất cả các số trong phân hoạch đều là số chẵn; được gọi là *phân hoạch chặt*, nếu tất cả các số trong phân hoạch đôi một khác nhau. Như thế, bài đã ra đề cập tới sự so sánh giữa số phân hoạch lẻ và số phân hoạch chặt của một số nguyên dương. Bạn đọc có thể tự tìm hiểu về so sánh giữa số phân hoạch chẵn và số phân hoạch lẻ của một số nguyên dương. Chúng tôi sẽ trở lại trao đổi với bạn đọc về một số vấn đề liên quan tới phân hoạch của một số nguyên dương trong một số tới đây của Tạp chí Pi.

3. Trong lời giải của mình, bạn Trịnh Khánh Hiệp chưa chứng minh được f là song ánh từ T đến S.

4. Các bạn *Nguyễn Nguyễn* (lớp 10 Toán, trường Phổ thông năng khiếu, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh), *Trịnh Hoàng Hiệp* (lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước) cũng có lời giải đúng. Hai bạn vừa nêu đã dùng hàm sinh để giải bài đã ra.

Nguyễn Khắc Minh



CARDANO VÀ ARS MAGNA

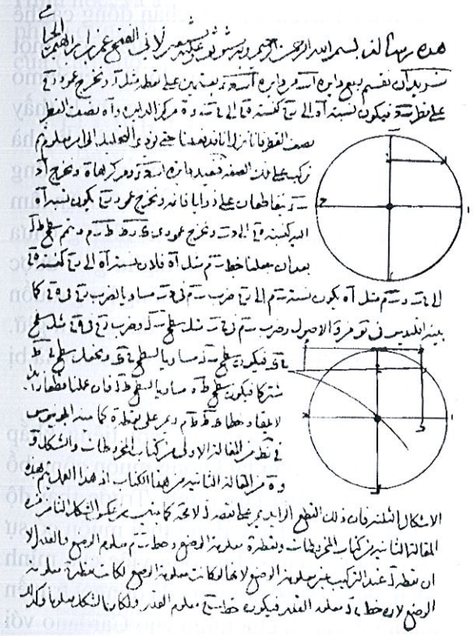
Phan Thanh Hồng và Nguyễn Thị Nhung

Lời giới thiệu (Hà Huy Khoái). Trong chuyên mục "Từ cổ điển đến hiện đại", chúng ta có bài của GS. Ngô Bảo Châu, cho thấy bản chất của công thức nghiệm phương trình bậc 2, bậc 3, bậc 4, và con đường tự nhiên để từ đó tiếp cận lý thuyết Galois. Bài viết sau đây kể về sự xuất hiện của những công thức nghiệm phương trình bậc 3 trong lịch sử. Như chúng ta sẽ thấy, ban đầu người ta chỉ mới tìm được cách giải một số phương trình bậc 3 dạng đặc biệt, và việc đi đến nghiệm của phương trình tổng quát là cả một chặng đường gian nan. Hai bài viết giúp ta nhìn thấy con đường nhọc nhằn mà nhân loại trải qua để đến với chân lý Toán học, và khi đến đỉnh cao Toán học, mọi thành tựu cổ xưa được nhìn thấy dưới một ánh sáng mới.

Ars Magna (Nghệ thuật vĩ đại) được xuất bản vào năm 1545, trình bày cách giải phương trình đại số bậc 3 và bậc 4, mà nói như Felix Klein, đó là "Tác phẩm quý giá chứa đựng mầm mống của đại số hiện đại, vượt ra ngoài giới hạn của toán học cổ đại". Cuốn sách còn là cột mốc đánh dấu sự thức tỉnh của toán học châu Âu sau "Đêm dài trung cổ".

Phương trình bậc 3 và cuộc thách đố chấn động giới toán học

Phương trình bậc 3 được biết đến từ rất lâu bởi người Babylon, Hy Lạp, Trung Quốc, Ấn Độ và Ai Cập cổ đại. Trong những viên gạch Babylon được tìm thấy, có ghi các giá trị của n^3+n^2 với $n=1$ đến $n=30$, và như vậy người Babylon đã tìm được nghiệm của 30 phương trình bậc 3 đặc biệt. Một số nhà toán học tin rằng, người Babylon có thể đã biết quy một phương trình bậc 3 tổng quát về dạng "chuẩn" $x^3+x^2=c$. Những cố gắng giải phương trình bậc 3 còn được ghi nhận trong bộ sách "Chức cố toán kinh" của Vương Hiển Chương vào khoảng thế kỷ thứ 7 ở Trung Quốc, hay trong một tài liệu của nhà toán học người Ba Tư Omar Khayyám (1048–1131) bằng phương pháp hình học độc đáo. Tuy vậy, đây vẫn chỉ là những cách giải cho những trường hợp đơn lẻ và cá biệt.



Cách giải phương trình bậc 3 bằng hình học của Omar Khayyám

Vấn đề tìm nghiệm phương trình bậc 3 tiếp tục làm đau đầu các nhà toán học Arab và châu Âu nhiều thế kỷ. Bước tiến lớn theo hướng này thuộc về Leonardo Pisano Bigollo (1170–1250, còn được gọi là Fibonacci), người chứng minh rằng nghiệm phương trình $x^3+2x^2+10=20$ không thể biểu diễn dưới dạng "số vô tỷ Euclid" $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

Điều đáng ngạc nhiên là ý tưởng xét việc biểu diễn nghiệm phương trình đại số bằng căn thức đã được nghiên cứu từ thế kỷ 13! Tuy nhiên, vẫn chưa có ánh sáng nào trên con đường tìm kiếm nghiệm phương trình bậc 3.

Luca Pacioli (1445-1517), trong cuốn *Tổng số học* (1494) (cuốn sách toán đầu tiên viết bằng tiếng Italia, mà không phải bằng tiếng latinh) cho rằng: "*Các phương pháp đại số không đủ để cho cách giải phương trình bậc 3, cũng như để cầu phương hình tròn*". Sự so sánh này cùng với uy tín của Pacioli đã làm cho nhiều nhà toán học xem phương trình bậc 3 nói chung là không giải được.

Mặc dù vậy, nỗ lực tìm kiếm cách giải cho những phương trình bậc 3 vẫn chưa bao giờ bị dập tắt. Nhiều nhà toán học, theo cách riêng của mình, vẫn kiên trì trên con đường đó. Giáo sư toán Scipio del Ferro (1465–1526) người Bologna là một trong những người vẫn ngày đêm miệt mài tìm nghiệm phương trình bậc 3. Năm 1515, ông tìm ra cách giải phương trình $x^3+mx=n$, với m và n là các số thực dương. Như nhiều người khác vào thời đó, Ferro giữ kín "bảo bối" của mình, và mãi đến khi sắp qua đời ông mới nói bí mật này cho học trò của mình là Antonio Fiore.

Câu chuyện giải phương trình bậc 3 càng được quan tâm hơn khi vào năm 1530, Niccolò Tartaglia (1500-1557) nhận được hai bài toán đố từ Zuanne da Coi về phương trình bậc 3, và nhanh chóng tìm ra nghiệm của chúng.

Các môn sinh của Ferro từ lâu cũng đã tuyên bố là có trong tay bí mật về giải phương trình bậc 3. Do không ai chịu ai nên cuối cùng các nhà toán học Italia đã quyết định mở một cuộc thách đố giữa hai bên, mỗi bên đưa ra 30 đề toán làm trong 2 giờ. Tartaglia đã suy nghĩ rất nhiều và đưa ra nhiều phương án khác nhau. Trước khi thi một tuần, ông đã tìm ra được cách mới để giải phương trình bậc 3. Ông học



Scipione del Ferro



Niccolò Tartaglia

thuộc cách giải mới và nghĩ ra 30 bài toán mà chỉ có cách giải này mới thực hiện được.

Vào ngày 22 tháng 2 năm 1535, các nhà toán học và những người hâm mộ của Italia và nhiều nước Châu Âu đã kéo về thành phố Milan để dự cuộc thi tài. Cả hội trường đã vô cùng náo nhiệt, mọi người nóng lòng chờ đợi giờ phút thi đấu. Ba chục đề toán mà mỗi bên đưa ra đều là về giải phương trình bậc 3. Tartaglia đã rất bình tĩnh, tự tin giải xong 30 đề toán của đối phương trước giờ quy định. Ngược lại, nhóm môn sinh của Ferro đã không giải được bài nào trong số 30 bài toán mà Tartaglia đưa ra. Như vậy cuộc thi kết thúc với tỉ số 30:0, và phần thắng tuyệt đối thuộc về Tartaglia.

Quyết định bước ngoặt

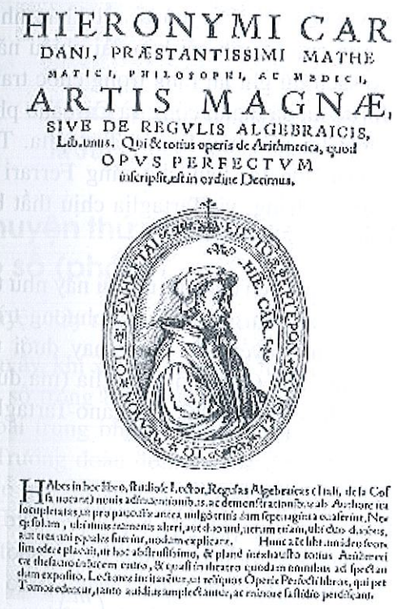
Tin tức được truyền đi, làm chấn động cả thế giới toán học. Ở thành phố Milan, có một người đứng ngồi không yên, đó là Gerolamo Cardano (1501-1576). Ông không chỉ là thầy thuốc nổi tiếng khắp Châu Âu, mà còn là nhà toán học tài ba, dạy toán và có nhiều công trình nghiên cứu về toán học. Ông chuyên tâm nghiên cứu phương trình bậc 3 nhưng chưa có kết quả. Khi nghe tin Tartaglia giải được phương trình bậc 3 thì ông rất nóng lòng muốn biết phương pháp mà Tartaglia đang nắm giữ. Tuy nhiên mong muốn này của Cardano đã bị Tartaglia từ chối.

Thời điểm này, Tartaglia đã nổi tiếng khắp Châu Âu, nhưng ông lại không muốn công bố rộng rãi công trình của mình. Trước thái độ chân tình của Cardano, đồng thời muốn có sự ủng hộ của Cardano cho công việc của mình ở Milan, năm 1539 Tartaglia đã đồng ý truyền lại những bí quyết của mình cho Cardano với điều kiện phải giữ kín lời giải này. Tuy nhiên, sau đó Cardano tìm thấy những tài liệu viết tay của Ferro, cho thấy Ferro đã tìm ra lời giải trước Tartaglia khoảng 20 năm. Cùng với những kết quả nghiên cứu riêng, Cardano hiểu rằng mình đang nắm trong tay "vũ khí" có thể làm rung chuyển cả Châu Âu. Ông đưa ra quyết định quan trọng: công bố lời giải trọn vẹn cho câu hỏi lớn đã được đặt ra từ lâu "*Có hay không công thức tương tự như công thức nghiệm của phương trình bậc 2 để giải mọi phương trình bậc 3?*"

Sau 5 năm mệt mài làm việc, cuốn Ars Magna ra đời.

Ars Magna (Nghệ thuật vĩ đại)

Cardano viết về rất nhiều chủ đề: y học, thiên văn học, chiêm tinh học, triết học, toán học và nhiều lĩnh vực khác. *Ars Magna* là quyển thứ 10 trong chuỗi các dự án sách mà ông định viết về các lĩnh vực Số học, Đại số và Hình học, và không nghi ngờ gì nữa, đó là tác phẩm đứng đầu trong toàn bộ những tác phẩm của Cardano.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Liber unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

The title page of the Ars Magna

Trên trang bìa của *Ars Magna* chỉ có tên của Cardano, nhưng về thực chất thì tác phẩm là công sức của bốn người. Hai cái tên không thể thiếu là Scipione del Ferro và Niccolò Tartaglia, những người đã có những phát hiện cơ bản cho việc giải một, hoặc có thể là hai, trong số mười ba dạng của phương trình bậc 3. Một người khác là Lodovico Ferrari (1522–1565), một học trò tài năng và cũng là cộng sự của Cardano, người đã có công trong việc phát hiện ra cách giải phương trình bậc 4, vẫn đang được sử dụng đến ngày nay. Người thứ tư, đương nhiên là tác giả của cuốn sách. Ông chính là người phát triển lời giải mà ông nhận được từ Ferro và Tartaglia, để từ đó sáng tạo ra lý thuyết tổng quát bao gồm mọi trường hợp riêng. Lời giải cho các trường hợp này được Cardano trình bày suốt từ chương 11 đến chương 23 của *Ars Magna*. Cụ thể, ông đã đưa ra một danh sách tỉ mỉ gồm mười ba dạng phương trình với hệ số dương như

$$x^3 + mx = n,$$
$$x^3 + mx^2 = n,$$
$$x^3 = mx^2 + n, \ldots$$

do thiếu những ký hiệu đại số hiệu quả và sự cần thiết phải tách riêng lập luận cho số âm và số dương. Từ cách giải những trường hợp riêng, và biến đổi để đưa phương trình bậc 3 tổng quát về những trường hợp này, Cardano đã thu được phương pháp giải phương trình bậc 3 tổng quát. Những chương cuối của cuốn sách được dành để trình bày cách giải phương trình bậc 4 của Ferrari. Theo đó phương trình bậc 4 được giải thông qua phương trình bậc 3. Như vậy, *Ars Magna* là cuốn sách đầu tiên công bố những nguyên lý giải phương trình bậc 3 và phương trình bậc 4, mà nghiệm được biểu diễn dưới dạng căn thức theo cách tương tự như phương trình bậc 2 đã biết từ lâu.

Cardano còn trình bày các tính chất của phương trình tổng quát, chẳng hạn, mối quan hệ giữa nghiệm và hệ số, quy tắc về dấu hay vị trí của nghiệm. Cardano là người đầu tiên đưa ra khái niệm nghiệm bội và cũng là người phát triển một cách có ý thức về tầm quan trọng của nghiệm âm. Đặc biệt, Cardano nhận thấy rõ ràng sự tồn tại của nghiệm phức mà lúc đó

ông gọi là "sự phức tạp tự nhiên", xuất hiện như một hệ quả cần thiết của những công thức. Ông đã không lẳng tránh chúng, hay gạt chúng sang bên như các tác giả trước đó thường làm, mà trái lại, đã xây dựng những ví dụ để giải quyết những bài toán với nghiệm ảo. Những ý tưởng này sau đó được các nhà toán học kế thừa để sáng tạo ra ngôn ngữ đại số tổng quát và hiệu quả hơn.



Gerolamo Cardano

Cuộc tranh cãi lớn trong lịch sử toán học

Ngay sau khi ra đời, cuốn *Ars Magna* được các nhà toán học cùng thời với Cardano hết sức ca ngợi và coi là một đột phá trong lĩnh vực toán học. Bên cạnh đó, cuốn sách còn trở nên nổi tiếng vì là nguyên nhân trực tiếp của một cuộc tranh cãi nẩy lửa giữa Cardano và Tartaglia. Tartaglia đã buộc tội Cardano không tôn trọng lời hứa khi công bố trong *Ars Magna* cách giải của phương trình dạng

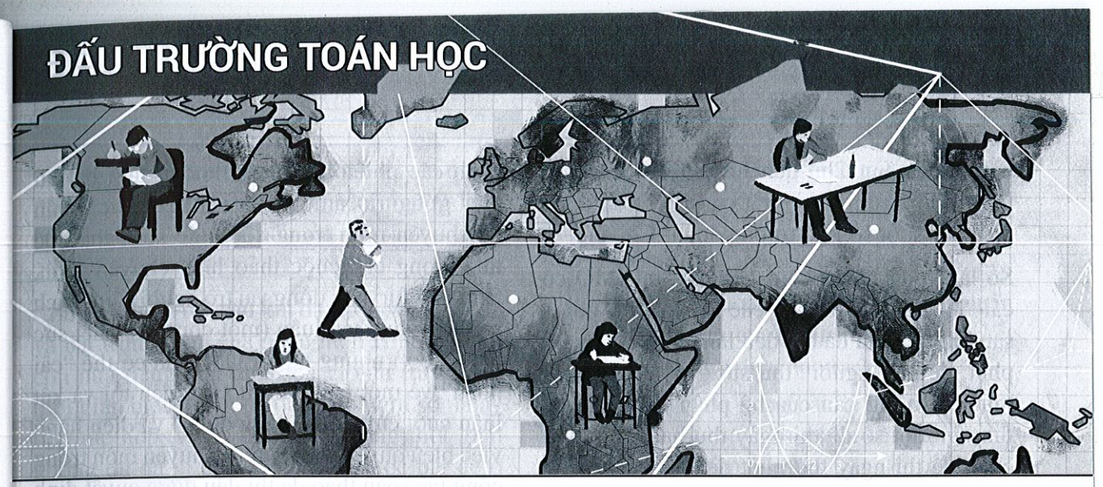
$$x^3 + mx = n \qquad (1)$$

mà ông đã chỉ cho Cardano. Mặc dù Cardano khẳng định rằng phát hiện của Ferro được sao chép lại, và nhấn mạnh khá nhiều lần rằng Tartaglia là người đồng phát hiện ra cách giải phương trình (1), nhưng khi cuốn sách được xuất bản, Tartaglia đã vô cùng giận dữ. Ông chỉ trích Cardano như một kẻ phản bội. Đáp trả lại, Ferrari thay mặt thầy của mình thách thức Tartalia tranh luận về bất cứ chủ đề khoa học nào. Có nhiều tài liệu mô tả rất khác nhau về kết quả cuộc tranh cãi kéo dài nhiều năm này. Có sách thì ghi lại rằng trong cuộc tranh luận Tartaglia đã thành công và Cardano phải thừa nhận lời giải này là của Tartaglia. Tuy nhiên phần lớn tài liệu cho rằng Ferrari là người chiến thắng, và Tartaglia chịu thất bại cay đắng.

Cho dù kết quả của cuộc tranh cãi này như thế nào chăng nữa, thì lời giải cho phương trình (1) được lưu truyền đến ngày nay dưới tên gọi là công thức Cardano-Tartaglia (mà đúng hơn nữa phải là công thức Cardano-Tartaglia-Ferro):

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^3}}$$

Ars Magna trở thành cuốn sách kinh điển về phương trình đại số và luôn được xem là một cột mốc trong lịch sử Toán học. Cùng với *Copernicus, De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543) và *Vesalius, De Fabrica Humani Corporis* (1543), nó được đánh giá là một trong ba kiệt tác khoa học được tạo ra trong thời Phục hưng.



IMO – ĐÔI CHUYỆN HẬU TRƯỜNG

Nguyễn Khắc Minh

Trong phần viết dưới đây, Hội đồng quốc tế được viết tắt bằng tiếng Anh là Jury.

Chuyện thứ nhất: Bài toán cũng có số (phận)?

Chuyện xảy ra tại IMO 2015.

Năm ấy, khi xem xét các bài toán ở phân môn Đại số trong Short List để bình chọn bài dễ và bài trung bình, có một bài toán "bị" một số Trưởng đoàn đề nghị loại khỏi Short List vì dễ quá, lại chẳng có ý gì hay ho. Thế rồi, qua biểu quyết, bài ấy được giữ lại. Tiếp theo, bài toán ấy lại thắng cử ở vòng chọn bài dễ. Nói cách khác, "hắn" được bình chọn là bài dễ của phân môn Đại số. Tưởng "hắn" được thế là oách lắm rồi; nào ngờ, "hắn" lại được tái đề xuất khi bầu chọn bài trung bình của phân môn. Và rồi, "hắn" … lại thắng cử; mà ở hiệp (round) chung kết "hắn" còn thắng "đối thủ" với tỉ số cách biệt nữa chứ (55/36). Thắng lợi vẻ vang này đã đưa "hắn" sớm chính thức trở thành một bài toán trong đề thi, vì trong 4 bài dễ và trung bình của đề thi phải có một bài đại số (xem phần một của bài viết này – NKM). Lạ hơn nữa, khi bầu chọn cặp bài dễ từ $C_4^2 = 6$ cặp có thể, 3 cặp có chứa "hắn" lần lượt bị out ở 3 hiệp đầu. Thế là, chẳng những "hắn" "chui" được vào đề thi, mà còn vào với tư cách bài trung bình.

Trong cuộc sống, khi gặp những chuyện khó lý giải, người ta thường nói "nó là cái số giời". Theo cái logic này thì cứ như "giời" sinh ra "hắn" để làm bài toán thi, tầm quốc tế! "Hắn" ung dung đợi ngày ra mắt sĩ tử khắp năm Châu.

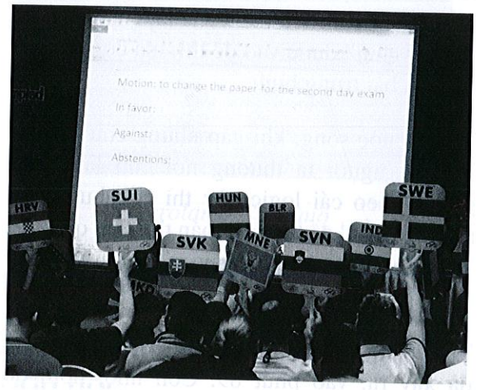
Thì đoàng một cái, một điều vô cùng hy hữu đã xảy ra, vào phút 89. Còn nhớ, hôm đó là ngày thi thứ nhất. Sau khi các thí sinh đã yên vị trong phòng thi khoảng 2 tiếng, tất cả những người tham gia soạn thảo đề thi được Ban tổ chức (BTC) chở đi xem voi; khoảng 5h chiều (giờ địa phương) thì về. Vừa bước xuống xe ô tô, mọi người nhận được "lệnh" vào ngay phòng họp để họp Jury gấp. Ai nấy ngơ ngác, chẳng hiểu có chuyện gì. Cuộc họp

bắt đầu và ông Chủ tịch Jury tuyên bố đề thi ngày hôm sau, do sơ suất của BTC, đã được phát cho một số Phó trưởng đoàn! Choáng!

Số là, trong nhiều năm gần đây, tại IMO có cái "lệ" phát đề thi cho các Phó trưởng đoàn, sau khi thí sinh đã bắt đầu làm bài khoảng 30 phút, để mọi người "thử sức" với đề thi, nếu muốn. Do bất cẩn của bộ phận đóng gói đề thi nên một số đề thi ngày thứ hai lạc vào bì chứa đề thi ngày thứ nhất dành cho các Phó trưởng đoàn.

Dù thời gian để khắc phục sự cố rất eo hẹp, Jury vẫn cứ phải điểm qua các giải pháp, rồi dùng biểu quyết để chọn giải pháp được đa số tán thành (do trong Quy chế IMO không hề có điều khoản về phương án xử lý sự cố kiểu này). Và giải pháp được lựa chọn là thay đề thi của ngày thứ hai bằng một đề thi mới. "Hắn" nằm trong cái đề thi ngày thứ hai "định mệnh" ấy.

Bài toán cũng có số (phận)?



Biểu quyết thay đề thi ngày thứ hai tại IMO 2015

Chuyện thứ hai: Đặc sản IMO.

Một trong các nguyên tắc cứng của các phiên họp Jury là đảm bảo tính khách quan, dân chủ. Bởi thế, Chủ tịch Jury, trong công tác điều hành các phiên họp, luôn không làm bất cứ điều gì tạo ra cảm giác can thiệp vào các vấn đề chuyên môn trong công tác soạn thảo đề thi. Trong các cuộc thảo luận chuyên môn, Chủ tịch Jury chỉ đóng vai trò người cầm chịch về thời gian thảo luận (một công việc hết sức nặng nề vì những người làm toán có thể "cãi nhau" về một bài toán từ sáng đến tối và kết luận cuối cùng là ai cũng đúng) và điều hành việc biểu quyết. Mọi vấn đề chuyên môn trong công tác soạn thảo đề thi đều được quyết định thông qua biểu quyết. Gi gỉ gì gi, cái gì cũng biểu quyết. Biểu quyết việc dừng thảo luận hay thảo luận tiếp về một bài toán hoặc một cặp bài toán nào đó. Biểu quyết chốt danh sách các bài toán hoặc các cặp bài toán sẽ được biểu quyết để chọn ra một bài toán hoặc một cặp bài toán. Biểu quyết số lượng bài toán hoặc cặp bài toán sẽ bị loại ra sau mỗi vòng biểu quyết,... Thậm chí, biểu quyết để quyết định vấn đề nào đó có cần biểu quyết hay không, hay chỉ cần vỗ tay. Mỗi phiên họp có tới hơn chục lần biểu quyết là "chuyện thường ngày ở huyện" tại các IMO. Vì thế, không ít người nói vui rằng "biểu quyết là một đặc sản của IMO"!

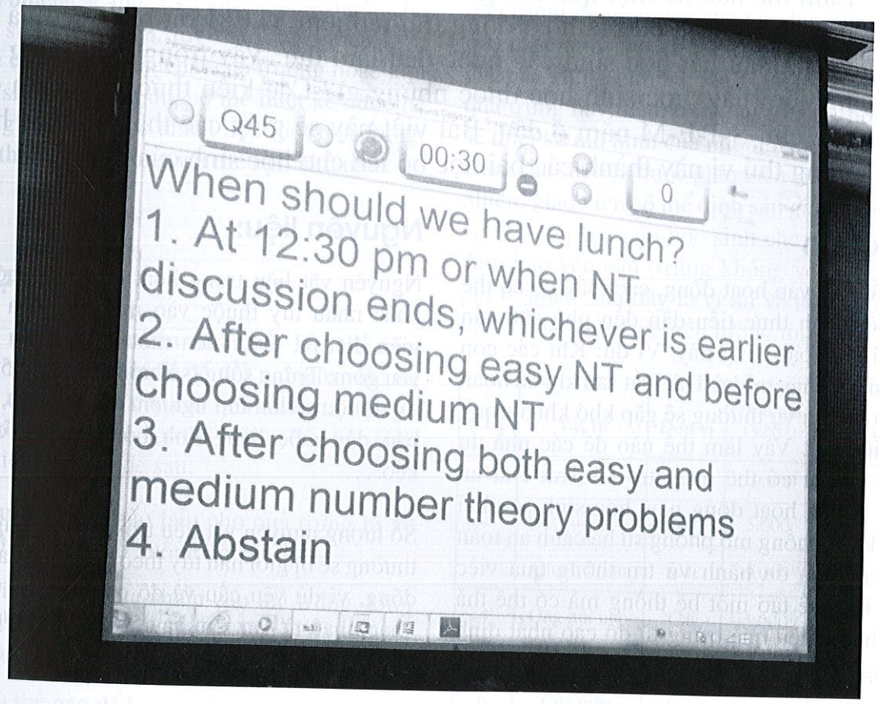
Tại IMO 2016, tổ chức ở Hong Kong, Chủ tịch Jury là một giáo sư Toán, người đã từng giữ cương vị Chủ tịch Jury của IMO 1994, cũng tổ chức tại Hong Kong. Nhiều người hiểu rằng việc đề nghị ông đảm trách vị trí Chủ tịch Jury IMO 2016 là một việc làm nhằm thể hiện sự tôn vinh đối với ông. Bởi ông tuổi đã cao, sức khỏe không thật tốt (ông cần người đỡ mỗi khi lên xuống các bậc thang). Vì thế, để công tác điều hành các phiên họp Jury được thực hiện suôn sẻ, Ban tổ chức IMO 2016 bố trí cho ông một trợ lý, một chàng sinh viên đại học năm thứ hai, người đã từng tham gia IMO với tư cách thí sinh của Đoàn Hong Kong. Việc điều hành các phiên họp Jury tại IMO 2016 gần như do bạn sinh viên này thực hiện. Do vậy, có những vấn đề phi chuyên môn, mà thông thường Chủ tịch Jury có thể toàn quyền quyết định, cũng được biểu quyết. Mọi người được "thưởng thức" quá no nê món đặc sản tại IMO 2016.

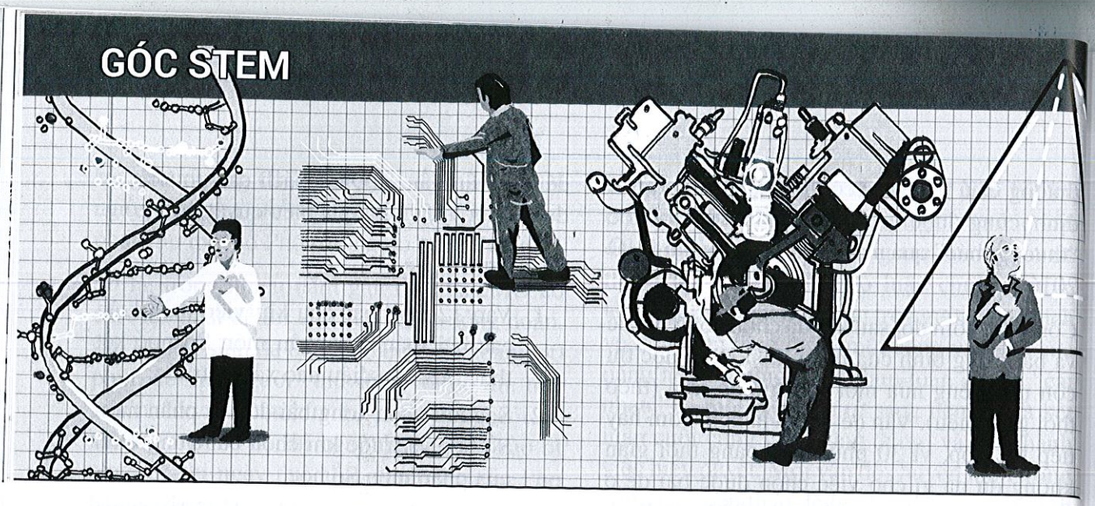
Còn nhớ, hôm đó, sau khi đã chọn xong bài dễ và bài trung bình của phân môn Hình học thì còn nửa tiếng nữa mới đến giờ ăn trưa (theo thời gian biểu). Vấn đề đặt ra là nghỉ sớm hay tiếp tục họp, vì 30 phút là khoảng thời gian không dư dả gì cho việc chọn được bài dễ ở phân môn tiếp theo (phân môn Số học). Bình thường, vấn đề này hoàn toàn do Chủ tịch Jury cân nhắc và quyết định. Tuy nhiên, anh bạn sinh viên điều hành phiên họp không đủ tự tin để đưa ra quyết định. Thế là phải biểu quyết. Biểu quyết chốt danh sách các phương án sẽ biểu quyết để chọn ra một. Biểu quyết việc chọn ngay một phương án sau lần biểu quyết đầu tiên hay phải qua nhiều vòng biểu quyết để loại dần dần,... Danh sách các phương án được chốt lại, thông qua biểu quyết, bao gồm:

Sẽ ăn trưa:

1. Vào 12h30 hoặc sau khi việc thảo luận các bài toán của phân môn Số học kết thúc, tùy vào điều nào xảy ra trước.
2. Sau khi chọn xong bài dễ của phân môn Số học và trước khi chọn bài trung bình của phân môn Số học.
3. Sau khi chọn xong cả bài dễ và bài trung bình của phân môn Số học.
4. Vào lúc nào cũng được.

Sau khi biểu quyết chọn được một phương án thì đồng hồ chỉ 12h25. Và thế là mọi người vỗ tay quyết định đi ăn trưa mà không tuân thủ phương án đã được chọn thông qua biểu quyết!





Hạ cánh an toàn hoạt động STEM thú vị

Đặng Văn Sơn – Nguyễn Thị Tố Khuyên[1]

Làm thế nào để một quả trứng có thể hạ cánh an toàn khi được thả rơi từ một độ cao nào đó là hoạt động trải nghiệm STEM rất phổ biến và thú vị mà hầu hết học sinh các nước đều làm thử. Vậy trong hoạt động trải nghiệm này, học sinh học được những gì? Các kiến thức liên quan đến các chữ S-T-E-M nằm ở đâu. Bài viết này sẽ giúp các thầy cô biến hoạt động thú vị này thành các bài học bổ ích cho học sinh của mình.

Bối cảnh

Để dẫn dắt vào hoạt động, các thầy cô có thể tạo bối cảnh thực tiễn dẫn đến nhu cầu cần thực hiện hoạt động này. Ví dụ: Khi các con tàu vũ trụ quay trở lại Trái Đất sau khi đã hoàn thành nhiệm vụ thường sẽ gặp khó khăn trong khi tiếp đất. Vậy làm thế nào để các nhà du hành vũ trụ có thể quay trở về Trái Đất an toàn. Trong hoạt động này, học sinh sẽ phải thiết kế hệ thống mô phỏng sự hạ cánh an toàn của các nhà du hành vũ trụ thông qua việc thiết kế, chế tạo một hệ thống mà có thể thả một hay nhiều quả trứng từ độ cao nhất định xuống mặt đất mà vẫn an toàn.

Nguyên liệu:

Nguyên vật liệu trong hoạt động này có thể khác nhau tùy thuộc vào mục tiêu mà giáo viên đưa ra, tuy nhiên một số vật liệu thiết yếu gồm: Trứng sống (số lượng từ 1 đến 5 quả, tùy thuộc số lần thử nghiệm được phép), giấy báo, dây buộc, băng dính, bóng bay, bìa cứng, kéo....

Số lượng nguyên vật liệu trong hoạt động này thường sẽ bị giới hạn tùy theo yêu cầu của hoạt động, ví dụ yêu cầu về độ cao khi thả trứng khác nhau từ 1m, 2m hay 5m thì số lượng và chủng loại nguyên vật liệu cũng sẽ khác nhau.

[1] *Học viện Sáng tạo S*[3]

Mục tiêu:

Trong hoạt động này, có rất nhiều mục tiêu mà giáo viên hay người hướng dẫn có thể đặt ra cho học sinh, ví dụ:

Mục tiêu cao nhất: Với mục tiêu này, học sinh được yêu cầu thiết kế hệ thống đỡ quả trứng sao cho khi thả trên độ cao cao nhất mà trứng không vỡ. Độ cao cao nhất có thể căn cứ vào tầng cao nhất của tòa nhà.

Mục tiêu tiết kiệm nhất: Với mục tiêu này, học sinh sẽ phải thực hiện nhiệm vụ thiết kế một hệ thống đỡ trứng để thả từ độ cao nhất định mà không vỡ với một chi phí thấp nhất.

Mục tiêu đẹp nhất: Mục tiêu này mang tính tương đối vì rất khó đánh giá, tuy nhiên đây có thể là mục tiêu mở rộng của hai mục tiêu trên.

Còn nhiều các mục tiêu khác có thể đặt ra cho học sinh thực hiện, tùy thuộc vào điều kiện thực tế về cơ sở vật chất của trường hoặc khu vực sinh sống. Ví dụ, có thể thiết kế được hệ thống bảo vệ được nhiều hơn một quả trứng, hay thiết kế hệ thống với thể tích nhỏ nhất....

Hoạt động:

Xuất phát từ yêu cầu cần thiết kế, chế tạo, khảo sát một mô hình để thử nghiệm việc hạ cánh an toàn cho các các quả trứng từ độ cao nhất định, giáo viên có thể hướng dẫn học sinh tìm hiểu các vấn đề sau:

– Nguyên nhân nào làm cho quả trứng bị vỡ khi rơi từ trên cao xuống đất?

– Mối liên hệ giữa chiều cao thả trứng, khối lượng trứng và độ lớn lực do Mặt Đất tác dụng lên quả trứng khi chạm đất như thế nào?

– Làm thế nào để bảo vệ được các quả trứng?

Thiết kế:

Từ các vấn đề nêu trên, giáo viên có thể thiết kế các hoạt động như sau:

– Tìm hiểu cấu tạo quả trứng và phân tích sự thay đổi bên trong của quả trứng trong quá trình rơi. Từ đó dự đoán các nguyên nhân tại sao quả trứng sẽ vỡ khi chạm đất.

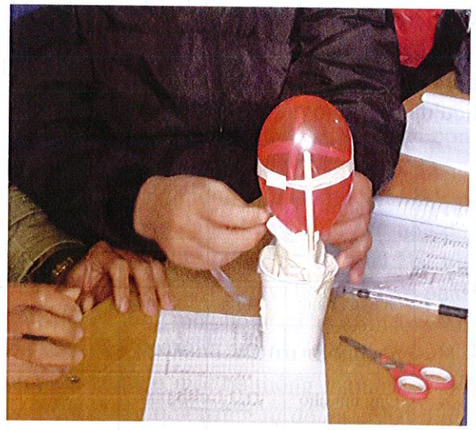
– Tìm cách xác định độ lớn của lực mà mặt đất tác dụng lên quả trứng khi quả trứng chạm đất sau khi rơi từ các độ cao khác nhau và vẽ đồ thị (Có thể sử dụng quả bóng có khối lượng, cấu tạo, hình dáng tương tự quả trứng để tránh lãng phí).

– Sau khi đã dự đoán được nguyên nhân và đưa ra ý tưởng bảo vệ quả trứng như chế tạo thiết bị mang trứng để giảm được tốc độ rơi của quả trứng hay sử dụng thêm các vật liệu bọc quả trứng hoặc các cấu trúc đựng được quả trứng để giảm bớt lực tác dụng lên chính quả trứng khi tiếp đất. Sau khi quyết định nhu cầu của nhóm mình, đó là giảm tốc độ rơi của quả trứng hay thêm dụng cụ bảo vệ, học sinh sẽ thiết kế mô hình của nhóm. Học sinh sẽ lựa chọn các vật liệu được giáo viên cung cấp. Tuy nhiên, giáo viên có thể định sẵn giá trị các loại vật liệu và yêu cầu học sinh chế tạo dụng cụ đảm bảo yêu cầu (trứng không vỡ) và có chi phí rẻ nhất. Sau đây là ví dụ về một bảng vật liệu đã bao gồm giá tiền tương ứng.

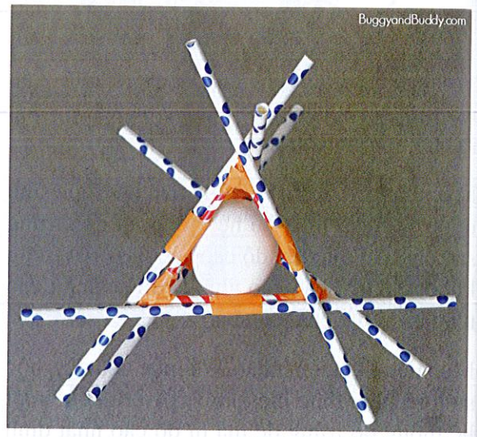
STT	Vật tư	Đơn vị	Đơn giá (VNĐ)	Ghi chú
1	Bóng bay	Quả	20.000	
2	Giấy đa năng	Tờ	5.000	
3	Ống hút lớn	Cái	9.000	
4	Ống hút nhỏ	Cái	5.000	
5	Dây chun	Cái	2.000	
6	Cốc giấy	Cái	15.000	

STT	Vật tư	Đơn vị	Đơn giá (VNĐ)	Ghi chú
7	Giấy A4	Tờ	15.000	
8	Giấy bìa A4	Tờ	55.000	
9	Giấy báo	Tờ	30.000	
10	Bìa các-tông	Tấm	40.000	Kích thước: gần bằng A3
11	Đũa	Chiếc	10.000	
12	Dây	Đoạn	10.000	Chiều dài 50cm
13	Băng dính	Đoạn	10.000	Chiều dài 50cm
	Kéo		Ok	Được mượn
	Trứng		Ok	Được cung cấp 2 quả

Thử nghiệm



Một thiết kế thử nghiệm cho mô hình thả trứng của giáo viên



Một số thiết kế do học sinh Việt Nam và học sinh nước ngoài làm.

Phân tích các kiến thức liên quan:

– Khoa học

Tùy theo đối tượng học sinh, giáo viên có thể phân tích các khái niệm mô men, lực cản, áp suất, khối lượng, thế năng, động năng theo các mức độ khác nhau.

Ví dụ: Học sinh khảo sát ảnh hưởng của khối lượng hoặc độ cao tới lực va chạm để tìm ra khoảng cách cao nhất mà quả trứng không bị vỡ.

Ví dụ: Tìm hiểu về cấu tạo và cách sử dụng sensor đo lực để thu giá trị của lực khi thả rơi trứng. Ở mức độ thấp, học sinh có thể thu được kết quả khi thả càng nhiều quả trứng hoặc từ độ cao càng lớn thì lực do Trái Đất tác dụng lên quả trứng càng lớn. Ở mức độ cao hơn, học sinh có thể tìm được mối liên hệ theo biểu thức khoa học (thông qua việc fit hàm đồ thị) giữa các đại lượng đó.

– Kĩ thuật

Học sinh sẽ được làm quen với các quy trình thiết kế kĩ thuật từ xác định nhu cầu (giữ quả trứng không vỡ khi chạm đất), thiết kế hệ thống thả trứng, thử nghiệm, thiết kế lại và thử nghiệm qua nhiều lần để đi đến phương án tối ưu. Sau khi có được thiết kế tối ưu, học sinh sẽ phải viết bản báo cáo quá trình thiết kế và phân tích những điểm mạnh và yếu của từng lần thiết kế và lý do phải thiết kế lại.

– Công nghệ

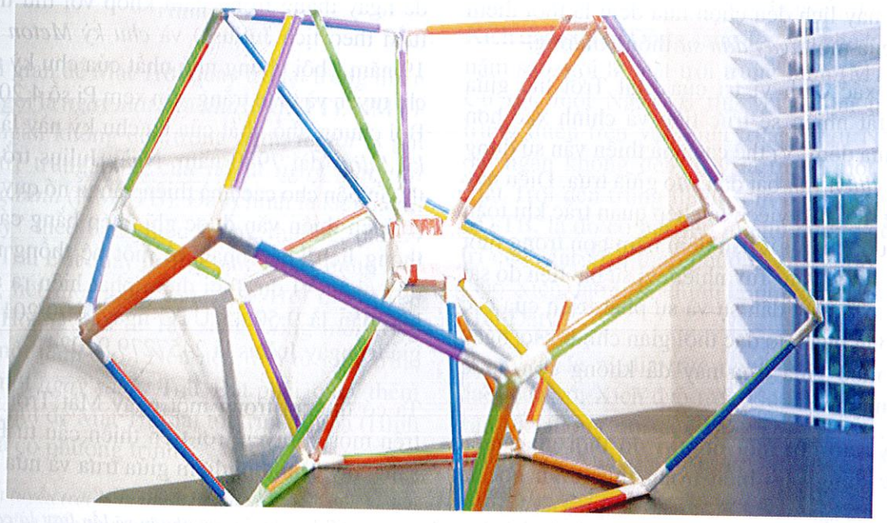
Sau toàn bộ quá trình học tập, học sinh có thể khái quát và đưa ra một quy trình hoàn chỉnh (công nghệ) sản xuất các dụng cụ có thể chứa và bảo vệ trứng từ các độ cao khác nhau. Ngoài ra, giáo viên có thể liên hệ tới công nghiệp sản xuất ô tô ngày nay như các cơ chế bảo vệ người trên xe ô tô bằng các túi khí khi gặp sự cố.

– Toán học

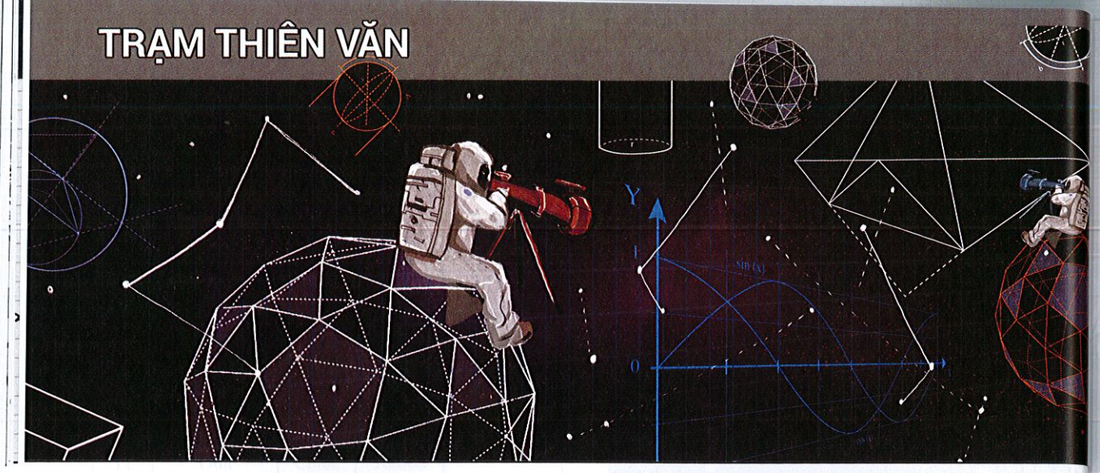
Tùy vào đối tượng học sinh, mức độ toán học được phát triển khác nhau. Đối với học sinh tiểu học, học sinh có thể trải nghiệm cách đo đạc độ cao, học về đơn vị đo chiều dài. Đối với học sinh trung học cơ sở, có thể phân tích sâu ở việc vẽ đồ thị. Đối với học sinh trung học phổ thông, sự đo đạc, tính toán để kiểm nghiệm định luật bảo toàn năng lượng hay việc tìm cách đo được lực tác dụng lên quả trứng khi rơi cũng có thể hấp dẫn khi phân tích. Ngoài ra, học sinh có thể vẽ được đồ thị hàm số giữa độ cao của vật và thời gian rơi, từ đó, suy ra các đại lượng đặc trưng của vật rơi tự do.

Kết luận:

Dựa vào bối cảnh của hoạt động STEM này, giáo viên có thể thiết kế thêm rất nhiều tiết học trải nghiệm hoặc các tiết học chuyên đề liên quan đến các hoạt động thả trứng này. Những gì viết trong bài này chỉ mang tính gợi mở cho giáo viên và học sinh, các hoạt động này nếu biến thành hoạt động học tập thì giáo viên cần đưa ra các mục tiêu cụ thể cho từng bài học rồi từ đó thiết kế các hoạt động liên quan đến bài học. Hi vọng, gợi ý này sẽ giúp ích các thầy cô giáo và những người quan tâm đến giáo dục STEM.



Thiết kế do học sinh Việt Nam và học sinh nước ngoài làm



THẾ NÀO LÀ MỘT NGÀY?

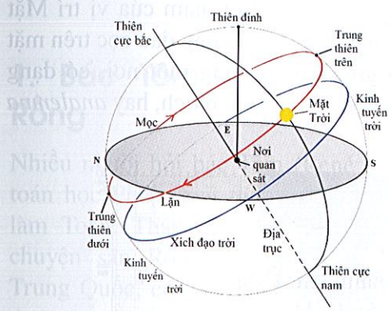
Phạm Vũ Lộc

Ngày và đêm là hiện tượng tự nhiên quen thuộc có nguyên nhân từ chuyển động tự quay của Trái Đất. Thời điểm bắt đầu của một ngày là khác nhau tùy theo các nền văn hóa. Theo nhận thức thường thì ngày tính từ lúc Mặt Trời mọc. Tuy nhiên, thời điểm này lại khác nhau tùy theo vị trí trên Trái Đất và thời gian trong năm, dẫn đến thời điểm giữa ngày không nhất định là vào ban ngày hoặc ban đêm. Vì thế, ngày nay lịch đều chọn nửa đêm là thời điểm đầu của mỗi *ngày dân sự* thông thường.

Việc xác định vị trí của Mặt Trời lúc giữa trưa tất nhiên sẽ trực tiếp và chính xác hơn lúc nửa đêm. Vì thế các nhà thiên văn sử dụng *ngày thiên văn* bắt đầu vào giữa trưa. Điều này cũng tiện cho việc ghi chép quan trắc khi toàn bộ buổi quan sát ban đêm nằm gọn trong một ngày thiên văn. Tuy nhiên, vì sự bất tiện do sai lệch với ngày dân sự và sự phát triển của các phương pháp đo đạc thời gian chính xác, ngày nay mốc giữa trưa này đã không còn được sử dụng.

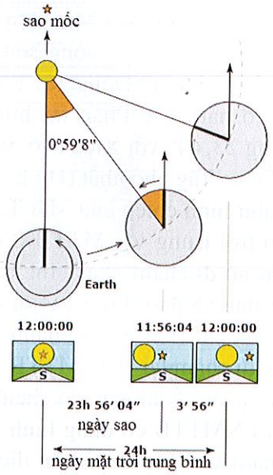
Thay vào đó, một đơn vị đo thời gian hiện được dùng phổ biến trong thiên văn học là *ngày Julius* đã được xây dựng trên tập quán này. Nó được định nghĩa là số ngày (kèm giờ phút giây dưới dạng thập phân) kể từ thời điểm giữa trưa ngày 1/1 năm 4731 TCN. Thời điểm này được chọn vì nó xưa hơn bất kể sự kiện lịch sử nào của nhân loại và là điểm bắt đầu của cả ba chu kỳ: *chu kỳ Thập ngũ* (indiction - dài 15 năm, chu kỳ ghi chép dùng ở La Mã cổ đại), *chu kỳ Mặt Trời* (dài 28 năm - chu kỳ để ngày tháng trong năm khớp với thứ trong tuần theo lịch Julius[1]) và *chu kỳ Meton* (dài 19 năm - bội chung nhỏ nhất của chu kỳ năm chí tuyến và tuần trăng, xin xem Pi số 4.2017). Bội chung nhỏ nhất của ba chu kỳ này là *chu kỳ Julius* dài 7980 năm. Ngày Julius trở nên thuận tiện cho các nhà thiên văn vì nó quy mọi sự kiện thiên văn được ghi chép bằng các hệ thống lịch khác nhau về một hệ thống ngày duy nhất. Ví dụ, thời điểm phát hiện ra sóng hấp dẫn là 9:50:45 UTC ngày 14/9/2015 có giá trị ngày Julius là 2457279,91024.

Ta có thể coi trong một ngày Mặt Trời quay trên một vĩ tuyến trời trên thiên cầu từ Đông sang Tây. Hai thời điểm giữa trưa và nửa đêm là hai lần Mặt Trời đi qua *kinh tuyến trời*[1] tại hai điểm gọi là *trung thiên*. Mặt Trời tại điểm có cao độ (độ cao so với mặt đất) cao hơn thì là giữa trưa – gọi là *trung thiên trên*, tại điểm có cao độ thấp hơn thì là nửa đêm – gọi là *trung thiên dưới*. Để dễ hình dung, trung thiên trên có cao độ dương thì Mặt Trời giữa trưa ở trên chân trời, trung thiên dưới có cao độ âm thì Mặt Trời lúc nửa đêm lặn dưới chân trời (Hình 1). Tuy nhiên, ở những vĩ độ cao, cả hai trung thiên có thể có cao độ cùng dương hay âm, tức là hiện tượng ngày trắng và đêm trắng ở các vùng cực (xem lại bài toán ở Pi số 1.2017).



Hình 1

Thời gian để Mặt Trời quay trở lại trung thiên trên gọi là *ngày mặt trời thực* (NMTT). NMTT dài ngắn không đều trong năm, người ta gọi giá trị trung bình của nó là *ngày mặt trời trung bình* (NMTTB). Đây chính là khái niệm "ngày" theo cách hiểu thông thường, dài 24 giờ. Trái Đất quay từ Tây sang Đông đúng một vòng hết một ngày sao. Mặt Trời di chuyển trên Hoàng đạo từ Tây sang Đông mỗi vòng hết một năm sao . Nên nếu tính từ giữa trưa, sau một *ngày sao*[2], Trái Đất phải quay thêm một chút để Mặt Trời lại tới trung thiên (Hình 2). Ta có phương trình:



Hình 2

$$\frac{1}{\text{ngày sao}} - \frac{1}{\text{năm sao}} = \frac{1}{\text{NMTTB}}$$

$$\Rightarrow \text{ngày sao} = \left(\frac{1}{365,24219} + \frac{1}{1}\right)^{-1} \times 24h$$

$$= 23h56m4,09s.$$

Giả sử có một mặt trời ảo di chuyển đều trên Xích đạo trời từ Đông sang Tây với chu kỳ một năm sao, gọi là mặt trời trung bình (MTTB). Cứ sau một NMTTB thì MTTB lại trở lại trung thiên trên vào giữa trưa. Sở dĩ NMTT dài ngắn không đều, hay là trong một ngày Mặt Trời đến trung thiên sớm hay muộn hơn MTTB, là do có hai yếu tố ảnh hưởng đến vị trí của Mặt Trời theo phương Đông Tây (dọc theo Xích đạo trời, chính là phương quay của Trái Đất).

Thứ nhất là vì địa trục nghiêng nên Hoàng đạo lệch với Xích đạo trời góc $23,44°$, khiến vận tốc tương đối của Mặt Trời trên Hoàng đạo so với Xích đạo trời, sẽ có dạng hình sin

[1] *Xem Pi số 4.2017. Theo lịch Julius, 4 năm lại nhuận 1 ngày, sau 7 lần thì 7 ngày nhuận sẽ lần lượt là các thứ trong tuần.*

[1] *Kinh tuyến trời là hình chiếu lên thiên cầu của kinh tuyến Trái Đất tại nơi quan sát. Do đó, nhìn từ mặt đất, nó đi từ hướng Bắc qua thiên đỉnh xuống hướng Nam, còn gọi là đường Tý Ngọ, hay trung tuyến trời.*

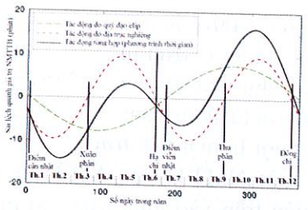
[2] *vì dựa vào một sao làm mốc trên nền trời.*

với chu kỳ nửa năm. Khi Mặt Trời ở hai ngày Chí thì hướng đi của nó song song với Xích đạo, vận theo phương Đông Tây lớn nhất. Khi Mặt Trời ở hai ngày Phân thì hướng đi của nó nghiêng $23,44°$ với Xích đạo, vận tốc theo phương Đông Tây nhỏ nhất (Hình 3). Như vậy nếu coi như hình chiếu của Mặt Trời thực lên Xích đạo trời trùng với MTTB ở điểm Xuân phân (khi nó đi chậm nhất), thì sau đó nó sẽ đi nhanh dần và đuổi kịp và vượt qua MTTB tại điểm Hạ chí (khi nó đi nhanh nhất). Tiếp tục, nó sẽ đi chậm lại và bị MTTB đuổi kịp tại điểm Thu phân. Như vậy, độ chênh lệch giữa NMTT và NMTTB có dạng hình sin với chu kỳ nửa năm và bằng 0 tại bốn điểm Phân và Chí (Hình 4).



Chuyển động Mặt Trời trên Hoàng đạo trong một năm

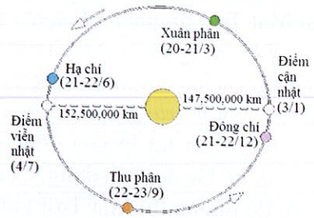
Hình 3



Hình 4

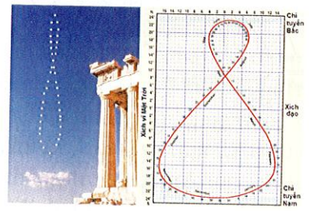
Thứ hai là vì quỹ đạo Trái Đất có độ lệch tâm khoảng 0,0167 nên vận tốc quay quanh Mặt Trời của nó (cũng là vận tốc Mặt Trời trên Hoàng đạo) cũng không đều mà biến đổi theo khoảng cách Trái Đất tới Mặt Trời (định luật Kepler II), nhanh nhất tại điểm cận nhật và chậm nhất tại điểm viễn nhật (Hình 5). Tương tự như trên, độ chênh lệch giữa NMTT và NMTTB có dạng hình sin với chu kỳ một năm và bằng 0 tại hai điểm đó (Hình 4).

Tổng hợp của cả hai yếu tố này cho ta một đồ thị gọi là *phương trình thời gian*, cho biết độ



Hình 5

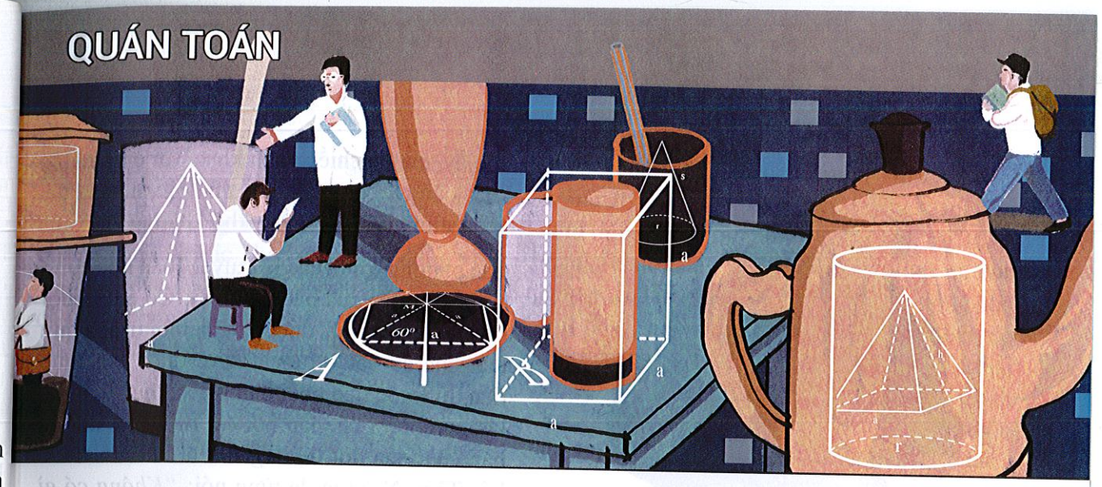
chênh lệch giữa NMTT và NMTTB trong năm (Hình 4). Trong một năm, Mặt Trời di chuyển trên Hoàng đạo nên xích vĩ lên xuống trong khoảng $\pm 23,44°$. Nếu đặt trục tung là xích vĩ, trục hoành là độ chênh lệch trên, ta sẽ được quỹ tích trong một năm của vị trí Mặt Trời trên bầu trời (hoặc bóng đầu cọc trên mặt đất) vào giữa trưa ở cùng một nơi, có dạng hình số 8, gọi là nhật hành tích, hay *analemna* (Hình 6).



Hình 6

Chu kỳ ngày trên Trái Đất là điều kiện quan trọng cho sự sống. Bức xạ Mặt Trời mạnh tạo nên dòng thăng ở xích đạo và dòng giáng ở vùng chí tuyến, là nguồn gốc của gió mậu dịch. Tốc độ tự quay không quá nhanh của Trái Đất giúp dòng khí này tiếp tục ảnh hưởng và phân bố nhiệt tới toàn cầu thay vì chỉ tập trung ở vùng nhiệt đới. Mây bốc lên cũng giúp giảm bớt cường độ bức xạ mạnh của Mặt Trời. Tốc độ này cũng không quá chậm khiến đêm không quá dài để chênh lệch nhiệt độ ngày đêm không quá lớn, đồng thời tạo ra từ trường bao quanh Trái Đất để bảo vệ sự sống khỏi các tia vũ trụ độc hại.

(còn tiếp)



Chuyện bác Tôm làm toán

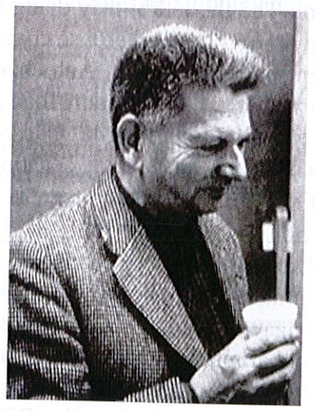
Chủ quán

1. Bác Tôm nói chuyện săn Rồng

Nhiều người hỏi bác Tôm (René Thom, nhà toán học Pháp, giải thưởng Fields) về nghề làm Toán. Thấy khó nói quá, bác bèn kể chuyện săn Rồng. Chuyện rằng, xưa bên Trung Quốc, có anh chàng học nghề đi săn. Anh chẳng chịu học săn hổ, săn lợn, mà lại học nghề săn Rồng! Nghề này khó lắm, phải thực tập nhiều. Bởi thế nên khi anh ta thạo nghề thì trên thế gian chẳng còn lấy một con Rồng nào! Có người hỏi: *Bây giờ sống bằng nghề gì?* Đáp: *đi dạy nghề săn Rồng!* Bác Tôm nói: *làm Toán tức là đi dạy nghề săn Rồng vậy!* (thảo nào chẳng có chú Rồng nào dám bén mảng đến nhà bác Tôm!).

Thế thì, làng nước đâu có cần cái anh săn Rồng ấy. Có còn Rồng nữa đâu mà học nghề săn? Ấy chết, đừng vội nói thế. Rồng thì chẳng còn, nhưng có khi vẫn phải học nghề săn Rồng đấy. Nếu anh đi học nghề săn lợn thì chắc gì đã bắn được hổ? Mà học nghề săn hổ thì chắc gì bắn được voi? Nhưng nếu đã thạo nghề săn Rồng thì hổ, báo, sư tử, voi,... chắc chắn đều săn được tuốt! Này nhé, Rồng có thân như cá sấu, móng vuốt như hổ, đầu sư tử, ẩn hiện như trăn, vậy mà còn không thoát được tay anh săn Rồng, thì chẳng nói gì đến hổ, báo, voi, trăn, mà sau này có "nhân bản" ra con nào nữa, anh ta cũng chẳng sợ! Thành ra, đã định học nghề đi săn thì hãy cứ học nghề săn Rồng!

Từ cá sấu, hổ, sư tử, trăn,... người xưa "trừu tượng hóa" thành con Rồng. Cũng như thế, từ thực tiễn, người ta trừu tượng hóa thành Toán học. Câu chuyện của bác Tôm mà thâu tóm được cả cái mạnh, cái yếu của Toán học là vậy.



René Thom (1923-2002)

Nguồn ảnh: Internet



Minh họa: Tuấn Linh

2. Bác Tôm tìm nhẫn

Lại có người hỏi khích bác Tôm: Mấy cái anh làm Toán gàn dở bịa ra những phương trình, vi phân, tích phân,... gì gì nữa nhỉ, thực tế làm gì có? Bọn họ chỉ ngồi chơi cái trò chơi trí tuệ đấy thôi! Bác Tôm hỏi lại: Này nhé, nếu anh đánh rơi cái nhẫn trong góc nhà kho bừa bộn, tối om, mà lại không có đèn, thì anh tìm nó ở đâu? Anh chàng nọ ngạc nhiên: Hỏi lạ nhỉ, thì chui vào đó mà tìm chứ ở đâu nữa! Bác Tôm cười: Thế thì có khi mấy tháng trời vẫn chưa tìm ra. Cứ như tôi thì tôi sẽ chạy ra dưới ngọn đèn sáng mà tìm vậy! Anh chàng được mẻ cười vỡ bụng: Mấy anh làm Toán gàn quá đi mất, biết tỏng tòng tong là nhẫn rơi trong góc nhà kho, mà lại ra dưới đèn tìm thì có mà suốt đời tìm cũng không thấy. Ấy vậy mà cái anh đồ (Toán) gàn dở chẳng dại lắm đâu. Này nhé, anh ta cầm lấy chiếc nhẫn, đứng dưới ngọn đèn mà thả cho nó rơi. Tất nhiên là tìm lại được ngay (ở đó sáng lắm mà). Cứ như thế mười lần, hai mươi lần, một trăm lần,... anh ta phát hiện ra quy luật: *khi rơi thì cái nhẫn nói chung chạy theo hướng nào*. Bởi thế lúc vào góc nhà kho tối om, anh ta tìm ra ngay chiếc nhẫn. Mà không chỉ chiếc nhẫn ấy, nhà kho ấy, mà dù chiếc nhẫn khác, rơi ở nhà kho khác cũng tối om như vậy, thì đối với anh làm Toán, tìm nó cũng chẳng khó khăn gì!

Các phương trình, các lý thuyết Toán học cũng như ngọn đèn của bác Tôm vậy. Có nó, người ta mới "làm Toán" được, tức là mới tìm ra quy luật của sự vật. Muốn trở về được với thực tiễn thì trước tiên phải biết rời xa thực tiễn, để không còn bị che lấp bởi cái rườm rà, không bản chất của đời thường. Ba trăm năm trước bác Tôm, Newton đã từng nói: *"Không có gì gần với thực tiễn hơn là một lí thuyết đẹp!"*

3. Bác Tôm đi về đâu?

Người ta thường hỏi nhà Toán học: Lí thuyết của anh ứng dụng vào đâu? Không phải lúc nào cũng có câu trả lời. Vào thế kỉ thứ 3 trước Công nguyên, nếu ai đó hỏi Apolonius rằng nghiên cứu các đường conic (nhận được bằng cách cắt mặt nón bởi mặt phẳng) để làm gì, thì chắc Apolonius không trả lời được. Ông ta chỉ nghiên cứu các đường conic vì thấy là chúng "đẹp". Không chỉ Apolonius không thể trả lời, mà hơn chục thế kỉ sau cũng không ai trả lời được. Phải chờ đến Kepler và Newton, tức là 20 thế kỉ sau, người ta mới biết ông già Apolonius đã từng làm trò chơi với các quỹ đạo chuyển động của các hành tinh!

Bác Tôm có lần nói: đối với những người mở đường, đừng hỏi họ đi đâu, *"quand on sait òu va, on va pas loin"*. Thật thế, nếu anh định đi đến Thành phố Hồ Chí Minh thì chắc là anh cũng chỉ đi đến Cà Mau là cùng. Ngay như cái anh Armstrong, biết mình đi đến Mặt trăng thì cũng chỉ đến đó thôi, rồi về. Còn bác Tôm chẳng biết mình đi đâu, nên bác có thể đi xa hơn, đến tận sao Hỏa, hay những miền đất mới của khoa học. Và chúng ta, dù không đi xa được như bác Tôm, nhưng muốn ngày mai có bát cơm ngon, thì đừng quá sốt ruột nếu hôm nay chưa "ra ngô, ra khoai" gì! Còn nếu muốn "ra ngô, ra khoai" ngay thì có khi cả đời chỉ biết ăn ngô, ăn khoai! Một người bạn của bác Tôm, ông F. Hirzebruch, khi trả lời phỏng vấn của các nhà báo, trên cương vị là Chủ tịch đầu tiên của Hội Toán học Châu Âu, đã nói: "Người ta thường hay nhấn mạnh vai trò của Toán học trong phát triển công nghệ, nhưng tôi nghĩ rằng, sẽ đến lúc công nghệ phát triển để giải phóng con người, cho họ thời gian quay về với thơ ca, âm nhạc và Toán học".

Phải chăng, Hirzebruch muốn ám chỉ rằng, trong Toán học có hai phần: tính và toán. Nếu như tính rất cần thiết cho công nghệ, thì Toán, ngoài chức năng phát triển phần tính ra, còn góp phần làm nên Con Người, cũng giống như âm nhạc, nghệ thuật và thơ ca. Ngày hè góp vài mẩu chuyện vui, không dám bàn đến sự sai đúng! Mà thật ra, đối với toán học thì "Chân lí là gì" vẫn là câu hỏi bất tận. Tôi rất muốn được nói về đề tài đó trong một bài viết khác.

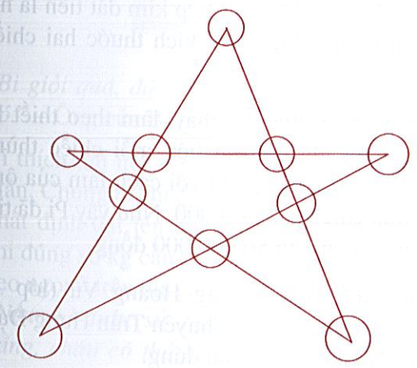
Lâu đài của nhà vua

Phan Thanh Hồng và **Nguyễn Thị Nhung**

Ngày xửa ngày xưa, tại một vương quốc nọ, nhà vua có ý tưởng xây dựng một hệ thống lâu đài và tường thành. Ông cho gọi kiến trúc sư của hoàng gia đến và bảo:

– Ta muốn xây dựng 10 lâu đài mới trong vương quốc, liên kết với nhau bởi những bức tường thành vững chắc. Các bức tường này phải tạo thành 5 đường thẳng mà trên mỗi đường phải có 4 lâu đài.

Người kiến trúc sư trình lên đức vua sơ đồ thiết kế như sau



Ngay lập tức nhà vua nói:

– Không được, khanh nhìn xem, theo sơ đồ này, lâu đài nào cũng có thể bị quân địch tiếp cận từ bên ngoài. Nơi ở của hoàng gia cần được bảo vệ nghiêm ngặt. Khanh hãy thiết kế lại một sơ đồ mới, tăng tối đa số lâu đài không thể tiếp cận từ bên ngoài, tức là quân địch chỉ có thể tấn công vào những lâu đài đó sau khi vượt qua được những bức tường vững chãi.

Kiến trúc sư cho rằng không thể nào mà xây dựng được thậm chí 1 tòa lâu đài như ý nhà vua. Các bạn có thể giúp ông ấy không, nhớ là các bức tường phải tạo thành 5 đường thẳng, trên mỗi đường có 4 tòa lâu đài nhé.

Giải đáp bài "Tiết kiệm nguyên liệu"

(Xem Tạp chí Pi Tập 1 Số 2, tháng 2.2017)

Theo cách làm của ông bố, mỗi chiếc thùng có chi phí nguyên liệu là 2.000.000 đồng, toàn bộ lô hàng tốn 200.000.000 đồng tiền nguyên liệu.

Giả sử ta thiết kế cái thùng có ba chiều là x, y, z, trong đó $x \le y \le z$. Ta có:

$$xyz = 1.$$

Có thể làm thùng sao cho hai mặt làm bằng hợp kim loại 2 kề nhau hoặc không kề nhau.

1/ Trường hợp thứ nhất: hai mặt làm bằng hợp kim loại 2 kề nhau.

Xét các khả năng có thể, ta nhận thấy rằng, trong trường hợp này, giá nguyên liệu để làm mỗi chiếc thùng, lấy đơn vị là 100.000 đồng, sẽ là:

$$\begin{aligned} S_1 &\ge 8(xy+yz)+(xy+yz+2zx) \\ &= xyz\left(\frac{9}{z}+\frac{9}{x}+\frac{2}{y}\right) \\ &= \frac{9}{z}+\frac{9}{x}+\frac{2}{y}. \end{aligned}$$

2/ Trường hợp thứ hai: hai mặt làm bằng hợp kim loại 2 không kề nhau. Tất nhiên khi đó ta chọn hai mặt có kích thước x, y.

Trong trường hợp này, giá nguyên liệu để làm mỗi chiếc thùng là:

$$\begin{aligned} S_2 &= 8.2xy+(2xz+2yz) \\ &= 2xyz\left(\frac{8}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right) \\ &= 2\left(\frac{8}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Dễ thấy, ta có: $S_1 \ge S_2$.

Như vậy, cần thiết kế thùng có hai mặt hợp kim đắt tiền không kề nhau.

Vấn đề được đưa về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\frac{8}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$$

trong đó x, y, z là những số thực dương, thoả mãn $xyz = 1$.

Tích của ba số không đổi (bằng 8) nên tổng của chúng đạt giá trị nhỏ nhất khi chúng bằng nhau:

$$\frac{8}{z} = \frac{1}{y} = \frac{1}{x}.$$

Như vậy, thùng tiết kiệm nhất là thùng có kích thước:

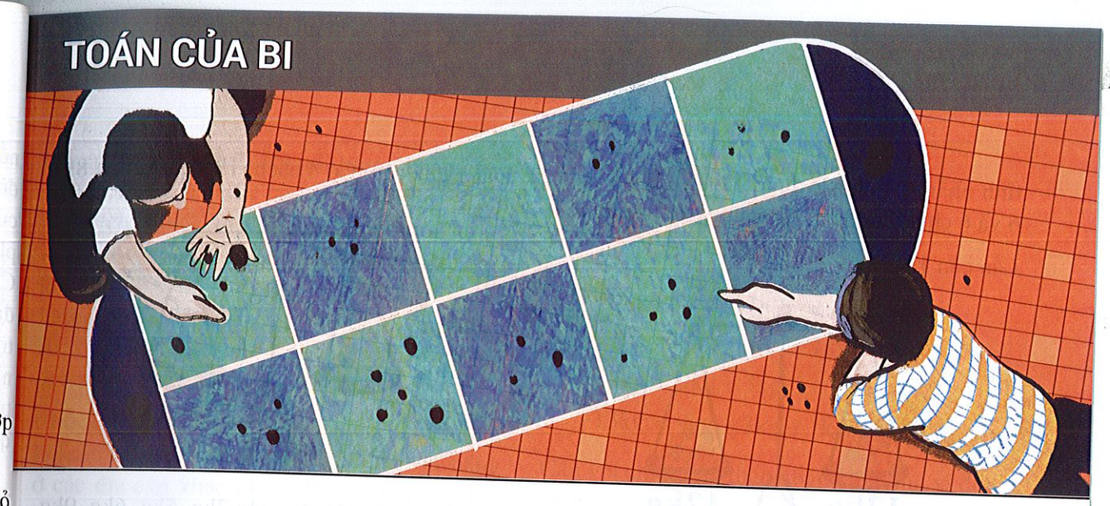
$$x = 0,5;\ y = 0,5;\ z = 4,$$

trong đó hai mặt dùng hợp kim đắt tiền là hai mắt đối diện nhau, với kích thước hai chiều là x, y.

Tính toán cụ thể cho thấy, làm theo thiết kế của Pi thì giá nguyên liệu mỗi chiếc thùng là 1.200.000, trong khi với cách làm của ông bố, mỗi chiếc là 2.000.000. Như vậy Pi đã tiết kiệm cho ông bố 80.000.000 đồng.

Nhận xét: Bạn Trương Hoàng Vũ (lớp 10 Toán, Trường THPT Chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận) có lời giải đúng.

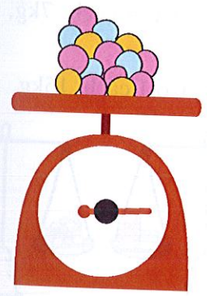
TOÁN CỦA BI



Chiếc cân thăng bằng

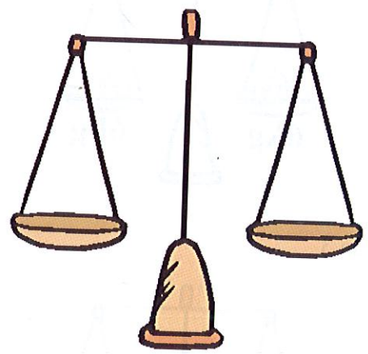
Vũ Văn Luân

Một hôm, Bi ở nhà bán hàng giúp bố mẹ. Có một khách hàng tới mua 3 kg kẹo. Bi nhanh nhẹn đặt cân và lấy ra đúng 3 kg kẹo ngọt cho vị khách.



"Bi giỏi quá, đã biết dùng cân bán hàng rồi đó." – Ông của Bi nói.

Bi thích thú nói với ông rằng cân thật là đơn giản. Chúng ta chỉ cần lấy một lượng kẹo ngọt nhất định đặt lên đĩa cân sao cho chiếc kim chỉ đúng số kg cần lấy. Như hình trên, có 3 kg kẹo ngọt ở trên đĩa cân. Tuy nhiên, ông hỏi Bi: *"Nếu chỉ được sử dụng một chiếc cân thăng bằng, cháu có thể lấy ra đúng 3kg kẹo ngọt trong một hộp 24kg kẹo ngọt?"*.



Thấy mặt Bi ngơ ngác như chưa biết chiếc cân thăng bằng như thế nào, ông liền giải thích:

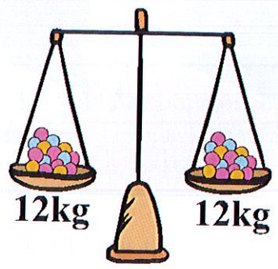
"Cân thăng bằng là một loại cân dùng để so sánh khối lượng hai vật nặng đặt ở hai bên đĩa cân. Chiếc cân chỉ cho biết vật nào nặng hơn, nhẹ hơn hoặc hai vật nặng bằng nhau, chứ không cho biết hai vật nặng bao nhiêu kg".

Bi suy nghĩ một lúc, rồi nói với ông rằng như vậy thì cháu cần một bên đĩa cân đã có một vật nặng có khối lượng đúng 3 kg.

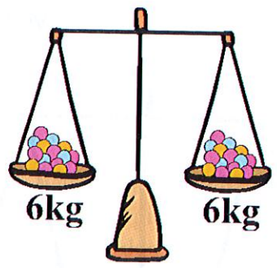
"Cháu hãy chia số kẹo trong hộp thành những phần bằng nhau", ông cho Bi lời khuyên. Bi

tính nhẩm 24 chia 2 được 12. 12 chia 2 được 6 và 6 chia 2 được 3. Mọi chuyện đã sáng tỏ.

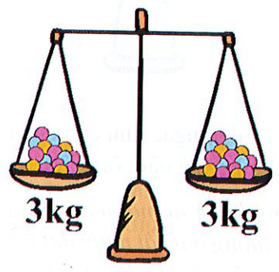
Lần cân 1:



Lần cân 2



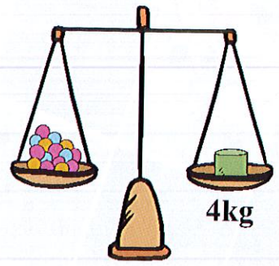
Lần cân 3



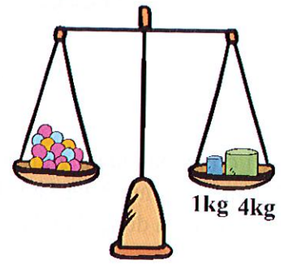
Bài toán 1. Chỉ sử dụng bốn quả cân 1kg, 2kg, 4kg và 8kg chúng ta có thể cân được những vật có khối lượng bằng bao nhiêu?

Bi thấy rằng để cân được các vật có khối lượng khác nhau, chúng ta chỉ cần xếp các quả cân lên một đĩa cân theo những cách khác nhau. Và Bi nhẩm được có: $4+6+4+1=15$ cách.

Đặt 1 quả cân: Có 4 cách: 1kg, 2kg, 4kg, 8kg.

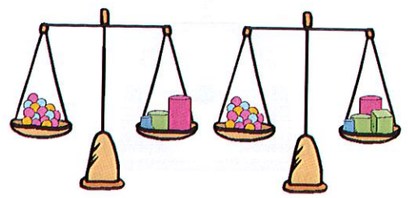


Đặt 2 quả cân: Có 6 cách: 3kg, 5kg, 6kg, 9kg, 10kg, 12kg.



Đặt 3 quả cân: Có 4 cách: 7kg, 11kg, 14kg, 13kg.

Đặt 4 quả cân: Có 1 cách: 15kg.



Bài toán 2. Sử dụng 3 vật nặng A, B, C có khối lượng nguyên là bao nhiêu để có thể cân được tất cả các vật có khối lượng nguyên từ 1kg tới 13kg?

Giả sử 3 vật nặng A, B, C có khối lượng tương ứng là a, b, c.

Bi nhẩm rằng nếu dùng 1 vật nặng chúng ta có thể cân tối đa 3 khối lượng khác nhau (a, b, c). Kết hợp 2 vật nặng, chúng ta cũng chỉ có thể cân tối đa 3 khối lượng khác nhau $(a+b, b+c, c+a)$, còn nếu dùng cả 3 vật nặng, chúng ta có thể cân được khối lượng $(a+b+c)$. Như vậy thì chỉ có thể cân tối đa 7 khối lượng khác nhau trong khi có tới 13 khối lượng khác nhau từ 1kg tới 13kg. Ông nhắc Bi: "*Cháu có thể đặt các quả cân ở cả hai đĩa cân*".

Chúng ta có thể cân được nhiều khối lượng khác nhau dựa vào cách để những vật nặng ở các đĩa cân khác nhau. Thật vậy, trong bài toán này, sử dụng các vật nặng có khối lượng 1kg, 3kg và 9kg chúng ta có thể cân được tất cả các khối lượng nguyên trong khoảng từ 1kg tới 13kg như sau:

1kg.

$2\text{kg} = 3\text{kg} - 1\text{kg}$,

3kg,

$4\text{kg} = 3\text{kg} + 1\text{kg}$,

$5\text{kg} = 9\text{kg} - 3\text{kg} - 1\text{kg}$,

$6\text{kg} = 9\text{kg} - 3\text{kg}$,

$7\text{kg} = 9\text{kg} + 1\text{kg} - 3\text{kg}$,

$8\text{kg} = 9\text{kg} - 1\text{kg}$,

9kg,

$10\text{kg} = 9\text{kg} + 1\text{kg}$,

$11\text{kg} = 9\text{kg} + 3\text{kg} - 1\text{kg}$,

$12\text{kg} = 9\text{kg} + 3\text{kg}$,

$13\text{kg} = 9\text{kg} + 3\text{kg} + 1\text{kg}$.

Cân với chiếc cân thăng bằng thật thú vị đúng không các bạn? Các bạn hãy thử sức với mấy bài toán với chiếc cân thăng bằng nhé.

Bài 1. Sử dụng 4 quả cân nào để có thể cân được tất cả các vật có khối lượng trong khoảng từ 1kg tới 40kg?

Bài 2. Trong 9 đồng xu, có 8 đồng xu thật và 1 đồng xu giả nhẹ hơn. Hãy xác định đồng xu giả với chỉ 2 lần cân bằng chiếc cân thăng bằng.

Bài 3. Sử dụng chiếc cân thăng bằng để lấy được 9kg kẹo ngọt trong gói kẹo 24kg.

Trò chơi Nim

Hoàng Quế Hường

Trò chơi số 1

Chuẩn bị: 20 que tính (hoặc hạt đậu, sỏi, . . .).

Luật chơi:

1. Hai người chơi lần lượt lấy 1, 2 hoặc 3 que tính.

2. Người chơi nào lấy được một hoặc những que tính cuối cùng, người chơi đó giành chiến thắng.

Trò chơi số 2.

Chuẩn bị: Giấy và bút.

Luật chơi:

1. Trò chơi bắt đầu với tổng bằng 0.

2. Hai người chơi lần lượt cộng thêm 1, 2, 3 hoặc 4 vào tổng đó.

3. Người chơi nào đưa tổng đến 20 trước, người chơi đó giành chiến thắng.

Trò chơi số 3.

Chuẩn bị: 12 đồng xu.

Luật chơi:

1. Xếp 12 đồng xu thành ba nhóm, với số đồng xu của mỗi nhóm lần lượt là 3, 4 và 5.

2. Hai người chơi lần lượt lấy một số đồng xu bất kì thuộc cùng một nhóm.

3. Người chơi nào lấy được đồng xu cuối cùng, người chơi đó giành chiến thắng.

Trò chơi số 4.

Chuẩn bị: 16 que diêm.

Luật chơi:

1. Xếp 16 que diêm thành 4 hàng với số que diêm ở mỗi hàng lần lượt là 1, 3, 5 và 7 que.

2. Hai người chơi lần lượt lấy một số que diêm bất kì cùng nằm trên một hàng.

3. Người chơi lấy que diêm cuối cùng là người thua cuộc.

Trò chơi số 5.

Chuẩn bị: Giấy và bút.

Luật chơi:

1. Vẽ lên giấy 12 hình tròn (xem hình minh họa).

2. Hai người chơi lần lượt loại bỏ một hoặc một số hình tròn ở cùng một hàng hoặc một cột (không nhất thiết cạnh nhau) trên mảnh giấy đó.

3. Người chơi loại bỏ hình tròn cuối cùng là người thua cuộc.

Trò chơi số 6.

Chuẩn bị: Giấy và bút.

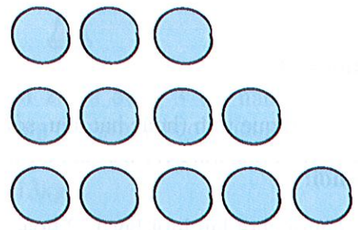
Luật chơi:

1. Vẽ lên giấy 10 hình tròn cách đều nhau và thẳng hàng. Các hình tròn được đánh số từ 1 đến 10.

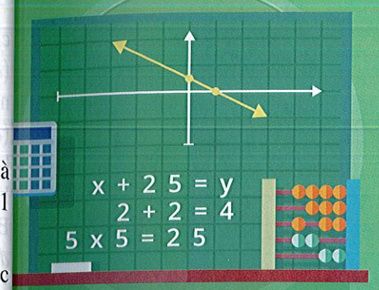
2. Hai người chơi luân phiên nhau loại bỏ các hình tròn. Mỗi người, ở lượt của mình, được quyền loại bỏ một hoặc hai hình tròn. Nếu người chơi loại bỏ hai hình tròn thì số được đánh ở hai hình tròn ấy phải là hai số tự nhiên liên tiếp.

3. Người chơi loại bỏ hình tròn cuối cùng là người giành chiến thắng.



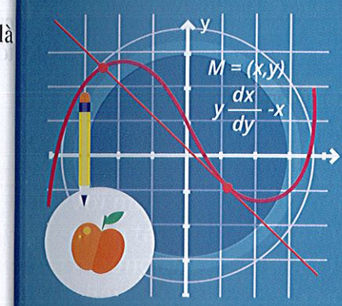






THỂ LỆ GỬI BÀI:

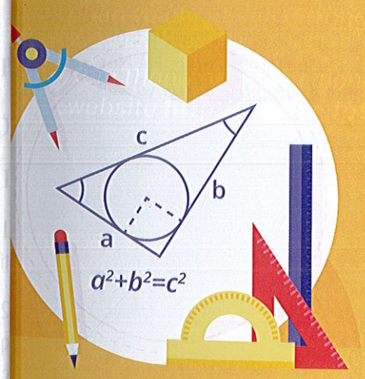
- Bài gửi email đến ***bbt@pi.edu.vn*** cần ghi rõ ở Chủ đề (Subject) của email: Lời giải của bài toán nào; Bài toán đề xuất; Bài viết cho chuyên mục gì; hoặc Bài viết không theo chuyên mục nào.
- Trên trang đầu bản thảo từng bài toán, bài viết cần ghi rõ họ tên tác giả, địa chỉ thư tín, e-mail và số điện thoại để tiện liên hệ.
- Các bài toán đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về khối lớp. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn.
- Bản thảo gửi theo email với định dạng latex hoặc word, cùng với file định dạng pdf.
- Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.



ĐỊA CHỈ GỬI BÀI:

- Qua email: ***bbt@pi.edu.vn***
- Qua bưu điện:

Tòa soạn Tạp chí Pi
Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu,
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,
Đường Đại Cồ Việt, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.



THỂ LỆ ĐẶT BÁO:

Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- **Đặt tại các bưu cục trong cả nước.** Mã của Tạp chí Pi là C057.

  Bạn đọc gặp vướng mắc trong đặt và nhận báo qua bưu điện xin gọi đường dây nóng 1900 545481 để được hỗ trợ.
- **Đặt tại website *www.pi.edu.vn*:** chọn nút Đặt tạp chí và làm theo hướng dẫn.
- **Đặt với Tòa soạn:** điền vào biểu mẫu tại đường dẫn ***http://gg.gg/DatTapChiPi.***

  Thanh toán vào tài khoản của Tạp chí Pi:
  Tài khoản số: 0851000012293
  Ngân hàng Vietcombank chi nhánh Hà Thành.
  (trong nội dung chuyển tiền cần ghi rõ họ tên, điện thoại người chuyển)

  Sau khi thanh toán xong gửi email đến ***info@pi.edu.vn*** để được xác nhận.
- **Đặt mua bản điện tử tại *Alezaa.com*.**

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái **(Tổng Biên tập)**
Ngô Bảo Châu **(Phó Tổng Biên tập)**
Trần Nam Dũng **(Phó Tổng Biên tập)**
Nguyễn Thị Lê Hương **(Phó Tổng Biên tập kiêm Thư ký Tòa soạn)**
Nguyễn Khắc Minh **(Trưởng ban Biên tập)**

Phạm Huy Điển, Nguyễn Thành Nam,
Trần Văn Nhung, Nguyễn Duy Thái Sơn, Chu Cẩm Thơ,
Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn, Nguyễn Ái Việt, Lê Anh Vinh.

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYÊN

Hạ Vũ Anh, Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Ngọc Điệp, Nguyễn Minh Hà,
Lưu Thị Thanh Hà, Trần Minh Hiền, Phan Thanh Hồng, Trần Quang Hùng,
Hà Duy Hưng, Đậu Hoàng Hưng, Nguyễn Văn Huyện, Vũ Thế Khôi,
Nguyễn Duy Liên, Phạm Vũ Lộc, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh,
Nguyễn Thị Nhung, Đặng Văn Sơn, Đỗ Hoàng Sơn, Lê Xuân Sơn,
Lưu Bá Thắng, Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thu.

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Đường Đại Cồ Việt, Phường Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Email gửi bài: *bbt@pi.edu.vn*. **Email giao dịch:** *info@pi.edu.vn*
Điện thoại: 04.3215.1407 Fax: 04.3623.1543
Website: *www.pi.edu.vn*

Chế bản: Lê Quốc Tuấn
Đồ họa: Nguyên Trần, Đoàn Xuân Trường
Ảnh bìa 1: Girolamo Cardano *(Nguồn: Internet)*

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty Cổ phần In Hà Nội
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 25.000 đồng

QS STARS RATED FOR EXCELLENCE 2012

FPT Fpt Education

TRƯỜNG ĐẠI HỌC FPT

HỌC BỔNG TOÁN HỌC NGÔ BẢO CHÂU

CHỈ DÀNH CHO HỌC SINH CHUYÊN TOÁN

Với mong muốn tìm kiếm, thu hút và bồi dưỡng nhân tài Toán học của Việt Nam, năm 2017 Trường Đại học FPT Hà Nội cấp Học bổng toàn phần Ngô Bảo Châu cho tất cả các sinh viên ngành Toán.

Để trở thành sinh viên ngành Toán của Đại học FPT các học sinh cần vượt qua bài kiểm tra năng lực của trường. Học sinh đạt Giải nhất kỳ thi Toán quốc gia hoặc tham gia đội tuyển thi Toán quốc tế được tuyển thẳng. Tất cả các sinh viên ngành Toán đều được cấp học bổng toàn phần và chi phí ăn ở trong suốt thời gian học.

Xem thông tin về học bổng Ngô Bảo Châu tại website **http://daihoc.fpt.edu.vn**

