TẠP CHÍ PI

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 1 - SỐ 4 THÁNG 4 . 2017

WWW.TOANKHO.COM

Đời sống toán học

Ở NƯỚC VIỆT NAM DÂN CHỦ CỘNG HÒA



ISSN 2525-2437

TRONG SỐ NÀY

Thư tòa soạn

Toán học từ cổ điển đến hiện đại
Hình học: từ Euclid đến Hilbert
Trần Mai Hoa

Toán học và Đời sống
Các đối xứng C, P và T đã "chui" vào toán học thể nào?
Nguyễn Ái Việt

Giải toán cùng bạn
Kẻ thêm đoạn thẳng trong chứng minh hình học
Vũ Hữu Bình

Một số bài toán Số học - Tổ hợp *(tiếp theo)*
Hà Huy Khoái

Thách thức Toán học
Nhiều tác giả

Lịch sử Toán học
Đời sống toán học ở nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa
Alexander Grothendieck

Đối thoại Toán học
Thầy của các thầy ngành toán sư phạm:
Tôi chỉ là người dạy toán
Thư Hiên (thực hiện)

Đấu trường toán học
Ba Lan và các kỳ thi toán khu vực
Nguyễn Hùng Sơn

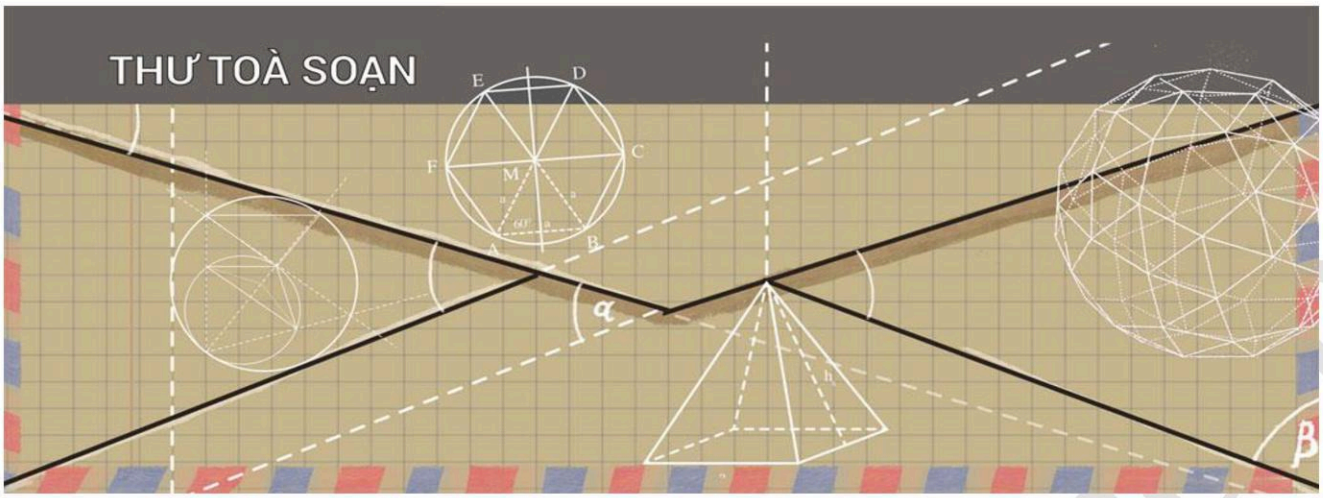
Góc STEM
Giải Đặc biệt cuộc thi Tsukuba Science Edge 2016
Đỗ Hoàng Sơn (thực hiện)

Trạm thiên văn
Thế nào là một tháng và cơ sở của âm dương lịch
Phạm Vũ Lộc

Quán Toán
Nhiều tác giả

Toán của Bi
Nhiều tác giả

www.toank



Đôi lời cùng bạn đọc

Thế là Pi đã tròn 4 tháng!

Pi không phải là tờ báo nghiên cứu, mà là báo phổ biến khoa học, với những đòi hỏi khắt khe của một tờ báo "thông thường". Vậy nên với đội ngũ những người chỉ giảng dạy và nghiên cứu Toán, chưa từng làm báo, thì việc Pi chưa được như ý là điều dễ hiểu. Còn nhiều thiếu sót ở nội dung, hình thức, và khâu phát hành báo. Trong tình hình đó, Pi rất biết ơn sự phê phán, cũng như sự cổ vũ của bạn đọc.

Có nhiều bạn đã nhiệt tình gửi bài đến Toà soạn. Một số bài đã đăng, một số bài chưa đăng, hoặc sẽ không được đăng. Để các bạn hiểu rõ hơn, Pi xin giải thích quy trình làm việc với những bài nhận được. Trước tiên, Thư ký toà soạn sẽ gửi đến uỷ viên BBT phụ trách chuyên mục gần với bài viết, hoặc gửi đến TBT trong trường hợp khó xác đinh. Uỷ viên BBT sẽ xem xét, hoặc tự xử lý, hoặc gửi cho một chuyên gia trong lĩnh vực đó nhận xét giúp. Trong trường hợp nhận thấy bài có thể đăng, sau khi sửa chữa, BBT sẽ liên hệ với tác giả để hoàn thiện bài viết. Thời gian thẩm định một bài đôi khi khá lâu, tuỳ thuộc người mà BBT nhờ thẩm định. BBT rất biết ơn sự kiên nhẫn của các tác giả.

BBT nhận được khá nhiều bài dưới dạng: đề thi và đáp án của cuộc thi nào đó, một số bài tập kèm theo lời giải thuộc một chủ đề nào đó. Những bài như vậy thường không thích hợp với Pi. Mục đích của Pi là làm cho độc giả yêu Toán, chứ không định hướng đến việc "luyện tập" cho một kỳ thi nào. Vì thế, các bài tập cùng với lời giải chỉ được hoan nghênh nếu qua đó, tác giả trình bày rõ quan điểm, phương pháp, nhằm giúp người đọc hiểu bản chất vấn đề. Dĩ nhiên, việc giải các bài toán của Pi, hoặc đọc những bài viết của Pi cũng có thể giúp ích cho những bạn tham gia kỳ thi nào đó!

Nhiều bạn góp ý là các bài viết của Pi còn hơi khó! Pi sẽ cố gắng hơn trong việc làm cho cái khó trở thành dễ, nhưng vẫn giữ được cái hay! Mong muốn là thế, nhưng như mọi người đều biết, viết dễ thì khó, viết khó thì dễ! Hy vọng các tác giả của Pi sẽ chịu khó đầu tư để viết dễ hơn.

Có bạn khen là Pi có nhiều bài bổ ích về Lịch sử Toán, lại cũng có bạn cho là mặc dù Lịch sử là có ích, nhưng nên bớt đi, để giành nhiều trang hơn cho nội dung Toán. Ở chỗ này thì Pi hơi có chút bảo thủ: cái mà Pi hướng đến là tình yêu Toán học, mà với kinh nghiệm của những người làm Pi, hiểu biết lịch sử là một yếu tố quan trọng trong việc hình thành tình yêu.

Pi nhận được nhiều lời giải cho mục *Thách thức toán học,* nhưng hầu như không có bạn nào gửi lời giải đáp cho những câu đố trong mục *Quán Toán* và *Toán của Bi.* Toán học đâu chỉ toàn thách thức, mà còn rất nhiều niềm vui

www.toanhoc.com

trong *Quán* và *Toán của Bi*. Các bạn đừng quên nhé!



Độc giả nhỏ tuổi của Pi.

Nguồn: Tạ Thị Hoài An

Để làm kỷ niệm, Pi sẽ gửi tặng những bạn được nhắc tên vì có lời giải đúng số báo có tên bạn đó. Bạn nào có tên trong các số 1, 2, 3 mà Pi chưa kịp gửi báo tặng thì nhắc Pi nhé (vì Pi cũng . . . đãng trí như mọi nhà toán học khác).

Có nhiều thầy giáo ở bậc THCS phê bình là Pi còn ít bài cho đối tượng đó. Pi đang cải tiến dần, và cố gắng hướng đến những bài viết mà học sinh THCS có thể hiểu được, nhưng thầy giáo và những người khác khi đọc vẫn không thấy là tầm thường. Lại vẫn là điều nghe như nghịch lý: viết những bài như thế cho THCS cần sự đầu tư "chất xám" có thể là nhều hơn viết cho bậc học cao hơn!

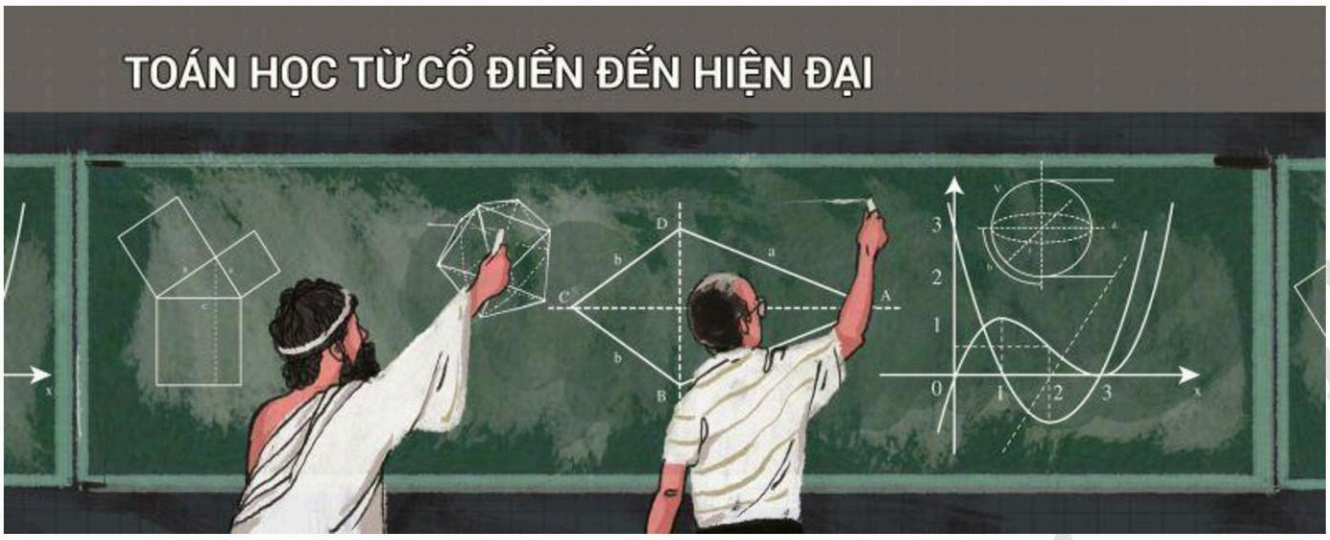
Về trình bày, Pi đang cố gắng để ngày càng đẹp hơn. Nhưng ông TBT nhìn bản pdf thì thấy rất đẹp, mà khi in lên thì ảnh màu đã trở thành đen trắng, chẳng đẹp tý nào! Mà in màu tất cả các trang thì Pi không có tiền. Bây giờ Pi mới thông cảm với các chị em: phấn son trang điểm bao giờ cũng rất tốn kém! Tuy nhiên Pi là nhà Toán học, không phải là cô gái. Bởi vậy nếu các bạn thấy xấu thì cứ chê, không cần giữ "lịch sự" đâu nhé!

Pi còn nhiều điều đáng trách, không thể kể hết! Nhưng Pi luôn hy vọng là các bạn sẽ ngày càng thân thiết hơn, yêu mến Pi hơn, vì các bạn sẽ ngày càng yêu Toán hơn, như Pi hằng mong đợi.

TẠP CHÍ PI



www.toanhoc.com



HÌNH HỌC: TỪ EUCLID ĐẾN HILBERT

Trần Mai Hoa[1]

David Hilbert, một trong những nhà toán học vĩ đại nhất mọi thời đại, có nói đại ý rằng, Toán học cũng giống như nhạc cổ điển: vừa đơn giản vừa đẹp. Cũng như trong âm nhạc, vẻ đẹp của toán học cổ điển còn mãi với thời gian. Ngày nay, đọc lại những trang "Cơ sở" của Euclid, ta vẫn ngạc nhiên thán phục trước sự chặt chẽ của lập luận, sự trong sáng của tư duy trong một công trình được viết đã hai ngàn năm.

Tìm hiểu về đối tượng và phương pháp của Toán học cổ điển là sự trở về với cội nguồn của những ý tưởng, những phương pháp toán học mà ta được học trong nhà trường. Hiểu được cội nguồn của nó, ta sẽ hiểu rõ hơn, sâu hơn, và sẽ có thể đi xa hơn. Sự hiểu biết đó cũng sẽ giúp ích rất nhiều cho những người làm công tác giảng dạy Toán học trong nhà trường.

Bài viết sau đây lấy tư liệu từ cuốn "Mathematics - the Music of Reason" của J. Dieudonné và là một phần của Luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Toán của tác giả bài viết, được hoàn thành và bảo vệ tại trường Đại học Thăng Long dưới sự hướng dẫn của Giáo sư Hà Huy Khoái.

Bằng cách chọn lọc, phân biệt các loại kiến thức hình học đã có, bổ sung, khái quát và sắp xếp chúng lại thành một hệ thống chặt chẽ, dùng các tính chất trước để suy ra tính chất sau, bộ sách *Cơ sở đồ sộ* của Euclid đã đặt nền móng cho môn hình học cũng như toàn bộ Toán học cổ đại. Bộ sách gồm 13 cuốn: sáu cuốn đầu gồm các kiến thức về hình học phẳng, ba cuốn tiếp theo có nội dung số học được trình bày dưới dạng hình học, cuốn thứ mười gồm các phép dựng hình có liên quan đến đại số, ba cuốn cuối cùng nói về hình học

không gian. Trong cuốn thứ nhất, Euclid đưa ra 5 định đề:

1. Qua hai điểm bất kì luôn vẽ được một đường thẳng.
2. Đường thẳng có thể kéo dài vô hạn.
3. Với tâm bất kì và bán kính bất kì, luôn vẽ được một đường tròn.
4. Mọi góc vuông đều bằng nhau.
5. Nếu hai đường thẳng tạo thành với một đường thẳng thứ ba hai góc trong cùng phía có tổng nhỏ hơn 180 độ thì chúng sẽ cắt nhau về phía đó.

và 5 tiên đề:

1. Hai cái cùng bằng cái thứ ba thì bằng nhau.
2. Thêm những cái bằng nhau vào những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.
3. Bớt đi những cái bằng nhau từ những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.
4. Trùng nhau thì bằng nhau.
5. Toàn thể lớn hơn một phần.

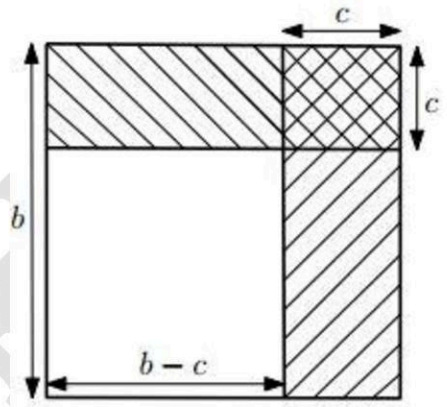
Với các định đề và tiên đề đó, Euclid chứng minh các tính chất hình học.

Nổi bật bởi sự suy diễn hệ thống và chặt chẽ, tập sách được chép tay và truyền đi khắp thế giới. Tuy nhiên, các định đề và tiên đề của Euclid còn quá ít, đặc biệt là không có các tiên đề về liên tục, nên trong nhiều chứng minh, ông phải dựa vào trực giác, hoặc thừa nhận những điều mà ông không nêu thành tiên đề.

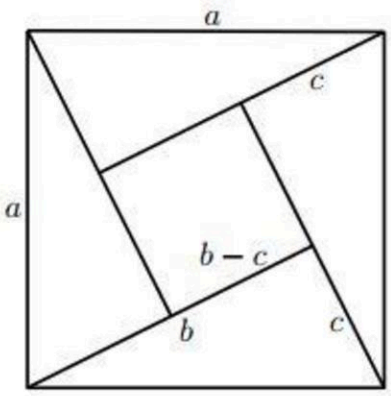
Những "định nghĩa" của Euclid trong các quyển từ I đến VI đã liệt kê các đối tượng của hình học phẳng: điểm, đường thẳng, góc, hình tròn, hình đa giác.

Từ những khái niệm, tiên đề và định đề, Euclid chứng minh một chuỗi các định lý, và thường có những hình vẽ hoặc sơ đồ kèm theo, để giúp người đọc dễ hình dung. Điều này cũng có thể tìm thấy ở hình học của Ấn Độ, Trung Quốc khi họ vẽ biểu đồ và sau đó nói đơn giản là "nhìn" vào ta thấy điều cần chứng minh.

Ví dụ, để chứng minh định lý Pythagore, họ nói rằng nhìn vào Hình 1, có thể thấy rằng $(b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$ và nhìn vào Hình 2, ta thấy $a^2 = (b-c)^2 + 2bc$ (diện tích hình vuông lớn bằng diện tích hình vuông nhỏ cộng với 4 lần diện tích của tam giác vuông có cạnh huyền a và hai cạnh góc vuông b, c); từ đó, ta có chứng minh của định lý Pythagore.



Hình 1

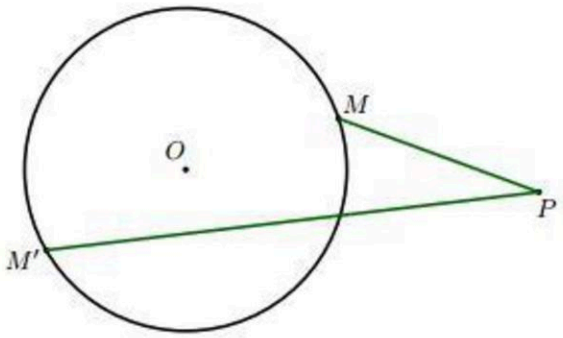


Hình 2

Trong quyển III, 17; quyển VI, 13 Euclid cho là hiển nhiên rằng đường thẳng đi qua một điểm nằm bên trong một đường tròn thì cắt đường tròn này; theo cách thức tương tự, nếu đường tròn C có một điểm nằm bên trong và một điểm nằm bên ngoài đường tròn C' thì C và C' giao nhau (quyển I, 1 và 22). Việc dựa vào các đối tượng "có thể nhìn thấy" thậm chí còn được thể hiện rõ ràng hơn trong Cuốn III, 8, khi Euclid nghiên cứu các đoạn thẳng nối một

www.toanhi.com

điểm nằm ngoài đường tròn với một điểm trên đường tròn (xem Hình 3). Có thể tìm được rất nhiều những ví dụ loại này. Chúng cho thấy những khó khăn ông phải khắc phục để tạo ra một bảng từ vựng phù hợp với bản chất của các đối tượng chỉ "có thể thấy được trong trí tưởng", rồi cắt nghĩa các tính chất phù hợp với bản chất của chúng, nghĩa là *không dùng sơ đồ.*



Hình 3

Hơn nữa, Euclid chỉ nhờ cậy vào sự "hiển nhiên" trong rất ít trường hợp, và chính ông chỉ cho phép mình dùng rất hạn chế các "sơ đồ". Những người nối tiếp ông thời cổ đại đã làm phong phú thêm lĩnh vực hình học bằng việc khám phá và nghiên cứu những đường và mặt mới, và như vậy, đã chuẩn bị nền tảng cho bước nhảy vọt trong lĩnh vực Toán học sau thời kỳ Phục hưng. Nhưng khi xem xét kỹ càng, chúng ta thấy rằng tiến bộ này, khác với trường hợp của Euclid, có được nhờ việc sử dụng một số lớn tính chất không được phát biểu, mà chỉ được gợi ý bởi những hình vẽ ít nhiều chính xác hơn.

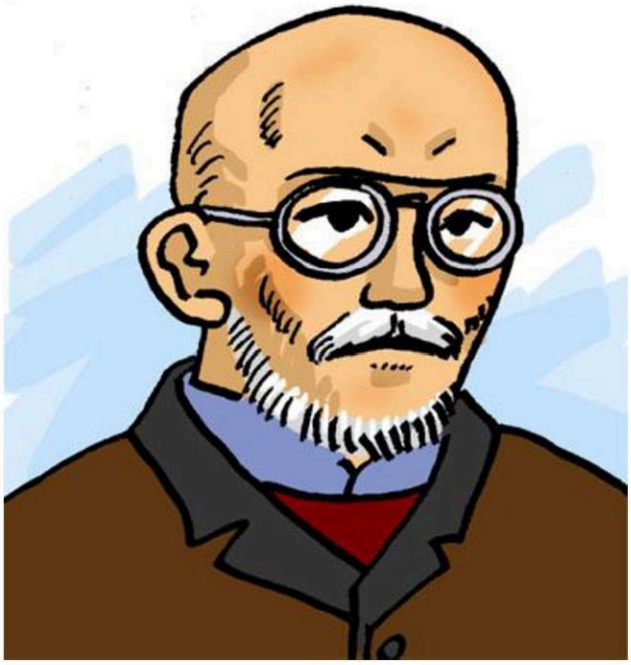


Nhà toán học Euclid. Minh họa: Linh Rab

Tuy nhiên, chỉ có sự hiểu biết về tính chặt chẽ của các hệ tiên đề hiện đại mới làm chúng ta nhận ra những khiếm khuyết nói trên. Ngoài sự nghi ngờ định đề đường thẳng song song (định đề thứ năm của Euclid) là không thật sự hiển nhiên, cho đến trước thế kỉ 16 chưa có nhiều phản biện về các công trình của Euclid. Điều này có thể là dễ hiểu khi nhắc đến Plato và Aristotle, nhưng thật đáng ngạc nhiên khi những nhà tư tưởng sâu sắc như Descartes và Pascal – những người không hề do dự tấn công trực diện vào triết học kinh viện – cũng tuyên bố mạnh mẽ về "chân lý hiển nhiên" của các tiên đề hình học! Hơn thế nữa, họ bày tỏ quan điểm chung của các nhà toán học cùng thời, quan điểm mà trong thế kỷ tiếp theo chỉ đơn giản là được nhấn mạnh thêm, khi Gauss và Cauchy cổ động cho "tính chặt chẽ hình học", coi đó như mô hình cho các lĩnh vực khác của toán học. Có thể sự tin tưởng không hợp lý này vào sự hài hòa hoàn hảo giữa các đối tượng hình học với hình ảnh thấy được của chúng là cần thiết cho những mô hình toán học của các quá trình cơ học và vật lý. Cho đến tận ba mươi năm cuối của thế kỷ 19, với những nghiên cứu sâu sắc về số thực, người ta mới có thể tách biệt "trực giác hình học" khỏi những tiên đề.

Những chỉ trích các cấu trúc của Euclid ngày càng nhiều, đặc biệt, suốt thế kỷ XIX, trong phong trào tiến đến sự "chặt chẽ" trong toán học. Tuy nhiên, những chỉ trích đó không nhằm mục đích sửa những suy luận của Euclid trong quá trình chứng minh của ông, mà chủ yếu nhằm phê phán các chứng minh không dựa đầy đủ vào các định nghĩa và tiên đề đã được phát biểu tường minh. Cảm nhận chung là nếu hoàn thiện được một cách thích hợp cơ sở lý luận, thì ta có thể đạt đến một tình trạng hoàn toàn thỏa mãn.

Đó là sứ mệnh được Pascal và Hilbert thực hiện vào cuối thế kỷ 19, khi họ liệt kê ra hệ thống tiên đề hoàn toàn tường minh (23 tiên đề, trong trường hợp của Hilbert); nhờ đó, tất cả các định lý của Euclid có thể được chứng minh mà *không cần tới sơ đồ.*



Nhà toán học Hilbert. Minh họa: Linh Rab

Giống như Euclid, Hilbert bắt đầu với những khái niệm *không định nghĩa được*, nhưng danh sách của ông là vét cạn. Có ba loại "đối tượng nguyên thủy": điểm, đường thẳng và mặt phẳng, và ba "quan hệ nguyên thủy": thuộc vào (ví dụ, điểm thuộc một đường thẳng hay một mặt phẳng), "nằm giữa" (như quan hệ của một điểm đối với hai điểm khác, khi cả ba điểm nằm trên cùng một đường thẳng), và "bằng nhau" (như hai đoạn thẳng hay hai góc).

Một câu hỏi ngay lập tức nảy sinh là làm thế nào có thể suy luận một cách chính xác, khi ta từ chối định nghĩa những cái được xem xét, và như vậy tránh được một phép hồi quy vô hạn các định nghĩa. Câu trả lời rất đơn giản: chỉ cần *không bao giờ* đưa ra bất cứ mệnh đề nào về các đối tượng hình học và những quan hệ của chúng, nếu đó không phải là hệ quả logic của hệ tiên đề kiểm soát chúng (cũng có nghĩa là các định nghĩa đã được liệt kê một cách *vét cạn*). Poincaré đã viết, có thể nói rằng những tiên đề này làm nên những "định nghĩa trá hình" về các đối tượng và quan hệ của chúng: những quan hệ này, theo một nghĩa nào đó, không xuất hiện và được thay thế bởi các bản chất "tiên đề" của chúng.

Hilbert, tiếp theo Pascal, đã chỉ ra phương pháp loại bỏ những kết luận có thể được gợi ý bằng trực giác hình học, mà không suy ra từ các tiên đề: đó là thay đổi tên gọi thông thường của các đối tượng hình học và các quan hệ của chúng. Hilbert đề nghị nói "cái bàn", "cái ghế" và "cái cốc" thay vì "điểm", "đường thẳng" và "mặt phẳng". Ví dụ, hai tiên đề đầu tiên trong danh mục của Hilbert:

1. "Hai điểm phân biệt thuộc một và chỉ một đường thẳng",
2. "Có ít nhất hai điểm phân biệt thuộc cùng một đường thẳng"

có thể đổi thành:

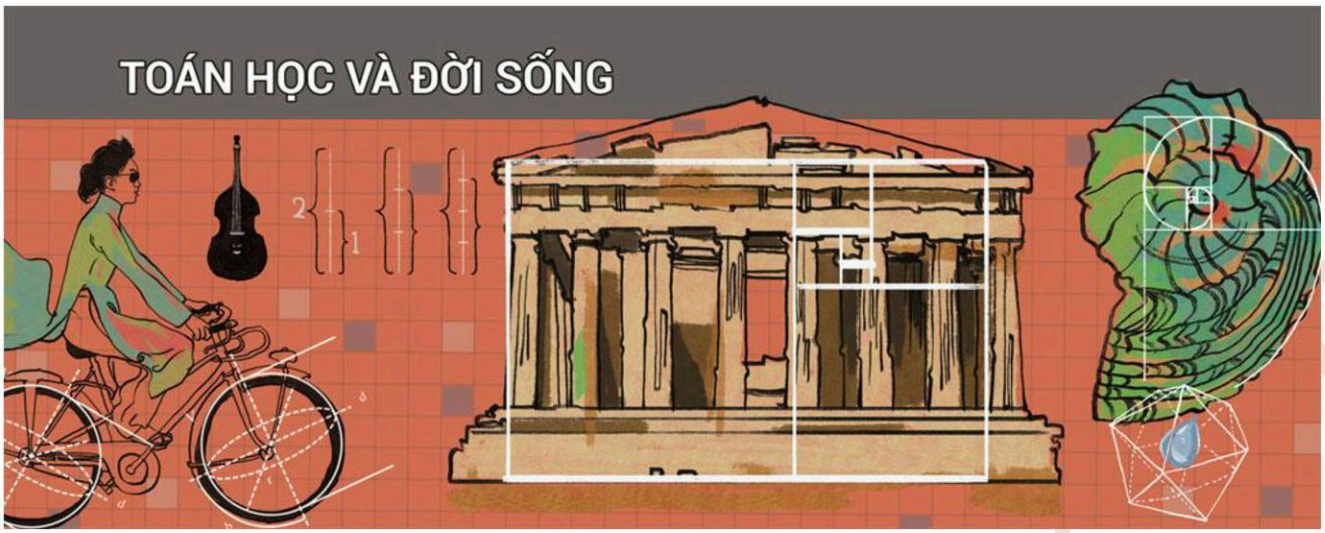
1. "Hai cái bàn phân biệt thuộc một và chỉ một cái ghế",
2. "Có ít nhất hai cái bàn phân biệt thuộc cùng một cái ghế".

Rõ ràng không có nguy cơ gặp sai sót khoa học trong các mệnh đề như vậy, vì chúng không có nghĩa trong ngôn ngữ đời thường.

Điều này có vẻ giống như trò đùa, nhưng thực ra việc tách biệt giữa ý nghĩa và tên gọi của sự vật, đối với hình học sơ cấp, là một quá trình cơ bản, nó giải phóng Toán học khỏi việc gắn quá gần với thực tiễn.

Điều này làm nên những thắng lợi không ngờ trong thế kỷ XIX, và đưa đến những ứng dụng đáng kinh ngạc trong vật lý.

www.toanhoc.com



CÁC ĐỐI XỨNG C, P VÀ T ĐÃ "CHUI" VÀO TOÁN HỌC THẾ NÀO?

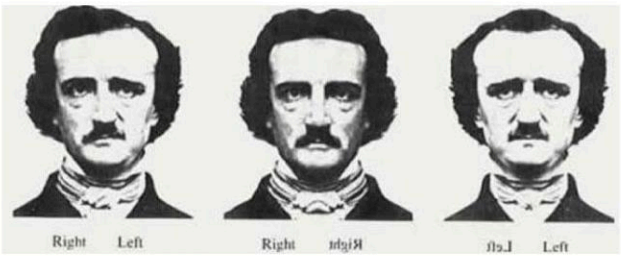
Nguyễn Ái Việt

Đối xứng *P* (còn gọi là đối xứng gương) mà chúng ta đã quen thuộc trong trường phổ thông gắn liền với bảo toàn tính chẵn lẽ trong vật lý hạt sơ cấp. Bên cạnh đối xứng *P*, còn có đối xứng *C* và *T*, gắn liền với việc tổng quát hóa các phép biến đổi Lorentz của lý thuyết tương đối hẹp thành nhóm $SO(3,1)$, đem lại những phát hiện rất lý thú về tự nhiên. Trong ứng dụng Toán học, những vấn đề đơn giản nhất cũng chứa đựng những chân lý sâu xa, mà mỗi bước suy luận đều phải phân tích ý nghĩa một cách cẩn thận dựa trên hiểu biết các khái niệm toán học một cách tinh tế.

Đối xứng gương

Đối xứng gương có thể hiểu một cách đơn giản là khi bạn quan sát thế giới qua một cái gương. Nếu mọi hiện tượng quan sát được trong gương đều có thể dùng để suy ra các hiện tượng trong thế giới thực, thậm chí tồn tại trong thế giới thực, chúng ta sẽ có đối xứng gương hoàn hảo. Một cô gái có nốt ruồi trên má bên trái trong gương, trong thực tế sẽ có nốt ruồi trên má bên phải. Trong gương cầu thủ Hà Lan Robben sẽ thuận chân phải.

Trong Hình 1 có 3 bộ mặt. Bộ mặt thứ nhất là của một người thực không có đối xứng gương. Hai bộ mặt sau có đối xứng gương sinh từ hai nửa của bộ mặt thứ nhất. Như vậy, để thấy rằng đối xứng là vẻ đẹp toán học, nhưng cũng đem lại sự nhàm chán trong thực tế.



Hình 1: Bộ mặt đối xứng gương

Hồi học phổ thông, suýt nữa thì tôi mất hết hứng thú học môn toán vì một lý do có liên quan đến đối xứng gương. Hồi đó học tới trường hợp bằng nhau cạnh cạnh cạnh của tam giác. Tôi bèn cắt hai hình tam giác bằng giấy có cạnh bằng nhau và thử chồng khít chúng lên nhau. Thật không may là giấy thời bấy giờ hai mặt không giống nhau như bây giờ, một mặt trơn và một mặt sần sùi sẫm màu. Tôi không thể nào "chồng khít" được hai

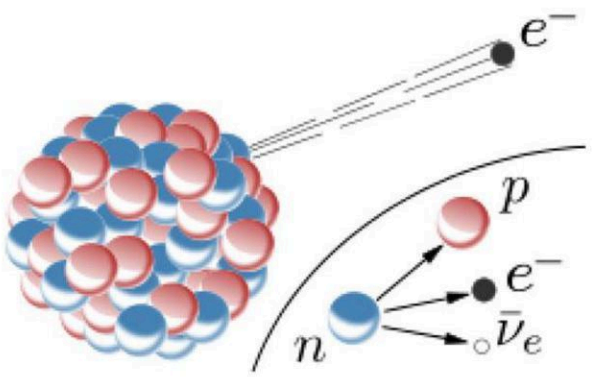
tam giác lên nhau. Vì vậy, tôi kết luận là Toán học trong sách không đúng với thực tiễn, không phải là chặt chẽ về logic.

Bây giờ thì tôi hiểu, là hai tam giác đối xứng gương có ba cạnh bằng nhau chỉ có thể chồng khít lên nhau trong không gian 3 chiều và phải giả thiết mặt phía bên kia cũng vẫn là tam giác đó. Nếu như vậy một vật thể ba chiều thì không thể chồng khít lên ảnh đối xứng gương của nó trong không gian 3 chiều được. Vì vậy, việc dùng giấy có hai mặt khác nhau quyết định hai hình tam giác có thể chồng khít lên nhau hay không.

Tại Disney Land, có một trò chơi rất thú vị là "Đoàn tàu ma". Bạn ngồi trên một đoàn tàu chạy bên cạnh một bức tường bằng gương và quan sát chính mình. Bỗng nhiên bạn sẽ thấy trong gương có một con ma gớm ghiếc xuất hiện, ngồi trên vai bạn nhăn nhở cười. Bất giác, bạn sẽ hoảng sợ nhìn lên vai mình. Cố nhiên là không có gì. Như vậy ảnh trong gương không nhất thiết phải giống hệt sự vật ngoài đời trong mọi hoàn cảnh.

Câu hỏi đặt ra là liệu trong gương có thể có những việc không hề có trong thực tế hay không. Cố nhiên trong thực tế, sẽ có các cầu thủ thuận chân phải và các cô gái có nốt ruồi trên má trái. Tuy nhiên một cô gái hoặc một cầu thủ giống hệt như trong gương chưa chắc đã có trong đời thật. Thế giới thực của chúng ta không đối xứng gương hoàn toàn mà người ta chỉ có cảm giác như vậy vì đối xứng gương chỉ gần đúng thôi. Chúng bị vi phạm chút ít. Cũng giống như các hợp âm "chói" trong âm nhạc, tự thân chúng là chói tai nhưng phối hợp với các hợp âm chính, làm bài nhạc nghe đỡ nhàm chán. Thế giới đẹp đẽ không phải bởi vì nó hoàn toàn đối xứng, mà bởi nó gần đối xứng với một chút ít vi phạm. Nếu mọi cô gái và mọi cầu thủ đều giống nhau, thế giới này sẽ buồn tẻ đến mức nào cho dù mỗi cô gái đều là một trang tuyệt sắc, mỗi cầu thủ đều là một Lionel Messi.

Trong thế giới vi mô của vật chất, vi phạm đối xứng gương còn trở nên quan trọng hơn. Từ năm 1899, Ernest Rutherford đã phát hiện ra rã bê-ta: mọi hạt nhân nguyên tử đều phát ra electron. Do hạt nhân nguyên tử trước và sau khi phát xạ có năng lượng xác định, năng lượng của hạt electron phát ra cũng phải xác định. Nhưng trong thực tế người ta quan sát được năng lượng của hạt electron trong rã bê-ta là liên tục. Điều đó suy ra là trong rã này phải có thêm một hạt thứ ba, không có khối lượng, không có điện tích là neutrino. Người phát hiện ra điều này năm 1930 là Wolfgang Pauli. Đến năm 1956, sự tồn tại của neutrino mới được chứng minh bằng thực nghiệm.



Hình 2: Phân rã bê-ta

Các hạt cơ bản có một tính chất là phân cực phải hoặc phân cực trái, tương tự như người thuận tay trái hoặc thuận tay phải. Ảnh trong gương của hạt phân cực phải sẽ có phân cực trái và ngược lại. Người ta quan sát được trong rã bê-ta, neutrino luôn có phân cực trái. Điều đó có nghĩa là hiện tượng rã bê-ta với neutrino "thuận tay phải" chỉ có trong gương chứ không có trong thực tế.

Đó chính là nội dung định luật vi phạm bảo toàn tính chẵn lẻ do Chen Ning Yang và Tsung Dao Lee tìm ra năm 1956. Các ông đã nhận giải thưởng Nobel do phát hiện này. Đó là một phát kiến lớn, nhưng dựa trên một khái niệm sơ cấp là đối xứng gương. Trong mọi khái niệm đơn giản nhất, đều chứa đựng những điều đáng suy nghĩ sâu xa, và đều có thể dẫn tới những phát kiến lớn. Thậm chí các tư tưởng triết học sâu sắc thay đổi cách nhìn, cách nghĩ của một thời đại.

Đối xứng T và C

Về mặt toán học, đối xứng gương *P*, là phép đổi chiều của các trục tọa độ không gian. Nếu chúng ta có một lý thuyết toán học mô tả bởi các phương trình, công thức trong một hệ tọa độ 3 chiều *(x, y,z)* và nếu mọi phương trình,

công thức giữ nguyên khi chúng ta thay đổi tọa độ $(-x,-y,-z)$ thì khi đó lý thuyết có đối xứng P.

Tương tự, đối xứng T là đối xứng nghịch đảo chiều thời gian, khi chúng ta thay biến thời gian T trong lý thuyết bằng $-t$. Điều đó tương tự với việc chúng ta xem một bộ phim quay ngược. Cảnh người nhảy từ trên mái nhà xuống đất, sẽ thành cảnh nhảy giật lùi từ mặt đất lên mái nhà.

Do dòng thời gian trong thực tế không thể đảo ngược, việc nghiên cứu trực tiếp đối xứng T khó hơn đối xứng P nhiều. Do đó vi phạm đối xứng T thường được nghiên cứu gián tiếp thông qua tổ hợp của đối xứng P và một đối xứng khác gọi là đối xứng C.

Phép biến đổi đối xứng C là phép liên hợp điện tích có liên quan tới việc biến đổi giữa vật chất và phản vật chất. Để hiểu sâu sắc đối xứng này, chúng ta cần biết thêm chút ít kiến thức về toán học và vật lý hiện đại mà tôi sẽ trình bày trong một dịp khác. Ở đây tôi sẽ chỉ nêu các ý tưởng chính.

Năm 1928, Paul A.M. Dirac đã tìm được phương trình sau này mang tên ông để mô tả electron. Tuy nhiên, khi giải phương trình này, Dirac phát hiện ra có các nghiệm, mô tả một đối tượng mà khoa học chưa từng biết tới. Đây là một hạt có điện tích ngược dấu, nhưng có các tính chất khác hoàn toàn giống với electron. Sau này người ta phát hiện ra hạt này trong thực tế và gọi nó là hạt positron. Một cách tổng quát, mọi hạt vật chất đều có một phản hạt đi kèm, có điện tích ngược dấu. Nói rộng hơn nữa, thế giới của chúng ta có vật chất và phản vật chất. Về một mặt nào đó đối xứng C không liên quan tới hình học một cách trực quan như các đối xứng P và T.

Người ta kể rằng, hồi nhỏ Dirac tham gia một cuộc thi toán, có bài tính đố số cá câu được bằng một phương trình bậc hai. Phương trình này có một nghiệm âm và một nghiệm dương. Dirac lơ đễnh viết cả nghiệm âm vào đáp số và bị chế diễu. Khi tìm ra nghiệm phản vật chất của phương trình Dirac, hẳn ông vẫn còn nhớ về số âm con cá. Chắc hẳn ông vẫn chưa "tâm phục khẩu phục" và vẫn tìm ý nghĩa thực tế của số con cá âm. Tôi có quan điểm tương tự: Nếu một phương trình mô tả một quy luật thực tế, mọi nghiệm của nó đều có ý nghĩa thực tiễn nào đó.



Hình 3: Dirac tìm ra phản vật chất bằng lập luận toán học

Chúng ta cũng có thể đặt các câu hỏi: Liệu đối xứng C có bị vi phạm? Liệu có hạt nào không có phản vật chất hay không? Câu trả lời không hoàn toàn hiển nhiên.

Cho đến nay, người ta vẫn cho rằng thế giới vật lý của chúng ta đối xứng với tổ hợp của ba phép đối xứng CPT. Các định luật vật lý mô tả bằng các công thức toán học mà chúng ta biết đều bất biến với phép biến đổi CPT. Tuy nhiên, cho đến nay chúng ta đã biết rằng đối xứng P bị vi phạm, tức là tổ hợp CT cũng bị vi phạm.

Vi phạm đối xứng CP được tìm thấy trong Mô hình Chuẩn (Standard Model) và được kiểm nghiệm trong thực tiễn. Điều đó cũng có nghĩa là đối xứng T bị vi phạm.

Chúng ta chưa biết nhiều về đối xứng *C* riêng rẽ, do phản vật chất cũng có phân cực ngược với vật chất. Phản vật chất và vật chất liên hệ qua đối xứng *CP*. Thế giới của chúng ta hình thành nhờ vi phạm đối xứng *CP*. Nếu vật chất và phản vật chất là cân bằng và đối xứng *CP* là tuyệt đối, thế giới của chúng ta đã không tồn tại, do vật chất và phản vật chất sẽ hủy lẫn nhau để sinh năng lượng, như trong các lò phản ứng hiện nay.

Ý nghĩa toán học sâu xa của các đối xứng *C*, *P* và *T* từ đâu mà có? Từ đâu mà chúng lại được thừa nhận là hiển nhiên trong vật lý để rồi sau đó, người ta lại phải cố công phát hiện rằng các đối xứng này thực tế bị vi phạm.

Phép biến đổi Lorentz

Năm 1905, Einstein công bố Thuyết tương đối hẹp. Đây là công trình đỉnh cao tổng kết kết quả sáng tạo của ba nhà bác học vĩ đại Henrik Lorentz, Henri Poincaré và Albert Einstein.

Ngày nay chúng ta có thể hiểu lý thuyết tương đối hẹp dễ dàng dựa trên các phép quay trong không gian Minkowski 4 chiều mô tả bằng các tọa độ *(x, y,z,t)*, trong đó *x, y, z* là các tọa độ không gian còn *T* là thời gian. Không gian Minkowski M^4 hoàn toàn tương đương với không gian Euclid R^4 , chỉ có một khác biệt duy nhất là khoảng trong không gian này được định nghĩa như sau

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \qquad (1)$$

Khác biệt là ở dấu âm và có sự xuất hiện của vận tốc ánh sáng *C* = 300.000 km/s.

Các phép quay Lorentz giữ bất biến khoảng trong không gian Minkowski, tương tự như các phép quay giữ nguyên khoảng cách thông thường trong không gian Euclid. Do đó, các quay Lorentz đảm bảo vận tốc ánh sáng trong mọi hệ quy chiếu và theo mọi phương là không đổi. Điều này đã được các nhà vật lý Albert Michelson và Edward Morley kiểm chứng bằng thực nghiệm từ năm 1887.

Trong không gian Minkowski có 6 phép quay, 3 phép quay trong các mặt phẳng *(x,y)*, *(y,z)* và *(z,x)*, 3 phép quay Lorentz trong các mặt phẳng *(x,t)*, *(y,t)* và *(z,t)*. Poincaré là người đầu tiên nhận ra rằng các phép quay Lorentz chính là phép biến đổi một hệ quy chiếu thành một hệ quy chiếu khác chuyển động quán tính so với nó với một vận tốc không đổi. Như vậy các phép quay Lorentz là để chuyển đổi các tọa độ giữa các hệ quy chiếu chuyển động đều so với nhau, và đảm bảo vận tốc ánh sáng trong mọi hệ quy chiếu như thế đều phải như nhau.

Chúng ta hãy xét phép biến đổi Lorentz trong mặt phẳng *(x,t)*, biến đổi các tọa độ *(x,y,z,t)* thành các tọa độ *(x', y', z', t')* trong hệ quy chiếu chuyển động với vận tốc *v* so với hệ ban đầu như sau

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(t - vx/c^2) \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x - vt) \qquad (2) \\ y' &= y,\ z' = z \end{aligned}$$

Chúng ta có thể kiểm tra dễ dàng bất biến khoảng giữa hai sự kiện bất kỳ khi thay đổi hệ tọa độ.

Với các vận tốc nhỏ hơn nhiều so với vận tốc ánh sáng *v* << *c*, phép biến đổi trên quy về phép biến đổi thông thường, chúng ta vẫn hay dùng trong trường trung học. Quy luật đổi hệ quy chiếu đẹp đẽ mà chúng ta biết cũng chỉ là gần đúng

$$\begin{aligned} t' &= t,\ x' = x - vt \\ y' &= y,\ z' = z \qquad (3) \end{aligned}$$

Với các vận tốc *v* đủ lớn, chúng ta không thể áp dụng được phép tính gần đúng nữa. Chẳng hạn với *v* = 1/2*c*, phép biến đổi Lorentz trong công thức (3) sẽ trở thành

$$t' = \frac{2}{\sqrt{3}}(t - x/2c) \quad , \quad x' = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - ct/2)$$
$$y' = y \quad , \quad z' = z. \qquad (4)$$

Như vậy, thời gian trên hai hệ quy chiếu trôi đi không giống nhau, như trong công thức biến đổi (3) thông thường giữa các hệ chuyển

động với vận tốc nhỏ. Việc mỗi hệ quy chiếu có thời gian riêng đảo lộn hệ thống thế giới đã được Newton xây dựng với thời gian tuyệt đối giống nhau cho mọi hệ quy chiếu. Trong ứng dụng thực tiễn, không được phép giả thiết bất cứ điều gì, hay tin ở giáo điều nào chưa qua kiểm nghiệm. Nếu bạn nói một điều là hiển nhiên, xin hãy chứng minh, hoặc bạn phải nói bạn là Toán cho một thế giới khác với giả thiết mới. Hệ quả của việc đồng hồ (giả thiết đều hoạt động chính xác) chạy với thời gian khác nhau trên các hệ quy chiếu chuyển động tương đối làm thay đổi một số quan niệm cũ của chúng ta. Trước hết là khái niệm đồng thời. Giả sử trên hệ quy chiếu ban đầu, có hai sự kiện xảy ra đồng thời tại cùng thời điểm $t_1 = t_2 = t$ tại hai điểm x_1 và x_2. Khi đó trên hệ quy chiếu chuyển động với tốc độ $v = 1/2c$ áp dụng công thức (4) chúng ta sẽ có

$$t_1' - t_2' = \frac{x_2 - x_1}{c\sqrt{3}} \neq 0. \qquad (5)$$

Giả sử có hai sự kiện xảy ra cùng một nơi $x_1 = x_2 = x$ tại hai thời điểm t_1 và $t_2 = t_1 + t_0$ cách nhau một khoảng thời gian t_0.

Khi đó, trên hệ quy chiếu thứ hai ta sẽ có

$$t_1' - t_2' = \frac{2t_0}{\sqrt{3}} \sim 1.15t_0. \qquad (6)$$

Như vậy, thời gian giữa hai sự kiện quan sát từ hệ quy chiếu thứ hai sẽ dài hơn so với khi quan sát trên sự kiện thứ nhất.

Một cách tổng quát, hai sự kiện xảy ra đồng thời trong hệ quy chiếu này sẽ không còn là đồng thời nếu quan sát từ hệ quy chiếu khác. Các phép đo thời gian và độ dài trong các hệ quy chiếu khác nhau đều thay đổi.

Phép biến đổi Lorentz còn cho phép suy ra công thức nổi tiếng liên hệ giữa năng lượng và khối lượng của một vật

$$E = mc^2 \qquad (7)$$

Thay vì sử dụng công thức này để sản xuất năng lượng phục vụ phát triển, con người đã nghĩ ngay tới việc sản xuất ra bom nguyên tử có sức tàn sát chưa từng có trong lịch sử. Đó là lỗi của con người còn để những ý đồ xấu điều khiển, không phải là lỗi của khoa học.

Nhóm SO(3,1)

Các phép quay không gian thông thường và các phép biến đổi Lorentz lập thành nhóm Lorentz. Nếu chỉ như vậy, sẽ không có gì liên quan tới các phép biến đổi *CPT*.

Tuy vậy trong Toán học người ta thường dùng bất biến để định nghĩa các nhóm. Bởi nhóm Lorentz bảo toàn bất biến khoảng cách trong công thức (1), người ta định nghĩa nhóm $SO(3,1)$ là nhóm đối xứng làm bất biến khoảng này. Ở đây có một sự khác biệt tinh tế về mặt toán học giữa nhóm Lorentz và nhóm $SO(3,1)$.

Nhóm $SO(3,1)$ không phải là nhóm Lie liên thông mà gồm có 4 tờ liên thông. Một tờ liên thông trong số đó là nhóm Lorentz. Ba tờ kia sinh ra do nhân các phép biến đổi Lorentz với các phép biến đổi rời rạc *C,P* và *T*. Như vậy cách định nghĩa nhóm đối xứng thông qua khoảng cách bất biến đã vô tình làm các đối xứng *C,P* và *T*, vốn không có trong lý thuyết tương đối hẹp, "chui" vào vật lý.

Mặt khác, các nhà vật lý cũng góp phần giúp cho việc "nhập lậu" các đối xứng *CPT* vào vật lý mà chưa kiểm nghiệm. Họ thường chọn những mô hình toán học đẹp đẽ và thường là tự động có đối xứng *C,P* và *T*. Trước năm 1956, không có ai đặt vấn đề nghi ngờ ở đối xứng với nhóm biến đổi $SO(3,1)$.

Trong trường hợp phương trình Dirac, cũng đã có việc "nhập lậu" đối xứng *CP*. Đúng ra, nếu đi tìm phương trình chỉ mô tả electron, đáng lẽ Dirac phải tìm cách sử dụng biểu diễn tối giản của nhóm $SO(3,1)$. Các hạt cơ bản, cũng như các trường vật lý khác nhau thuộc về các biểu diễn tối giản khác nhau của nhóm đối xứng. Hàm sóng Dirac, mô tả bằng các spinor 4 chiều Dirac thực chất là tổng trực tiếp của 2 biểu diễn tối giản của nhóm $SO(3,1)$ liên hệ với nhau qua phép liên hợp điện tích.

Trong trường hợp này chúng ta gặp may, thiếu chặt chẽ trong toán học đã dẫn tới phát kiến ra phản vật chất, một trong những thành tựu rực rỡ nhất của nhân loại. Người ta thường nói hai cái sai có khi thành một cái đúng. Việc sử dụng biểu diễn không tối giản

www.tapchipi.com

kết hợp với nghiệm có năng lượng âm đã mở đường tới phương trình Dirac và phản vật chất.

Kết luận

Chân lý chỉ có một, nhưng có nhiều con đường đi tới chân lý. Qua câu chuyện về đối xứng *CPT* được nhập lậu vào vật lý, chúng ta có thể học được vài điều thú vị, có thể có ích khi ứng dụng Toán học vào thực tiễn.

Trước hết, về mặt Toán học cần phải chặt chẽ, luôn cẩn thận kiểm nghiệm trước khi chấp nhận những chân lý hay giáo điều được coi là hiển nhiên. Thực tế thường không thích bị gò bó bởi các giáo điều.

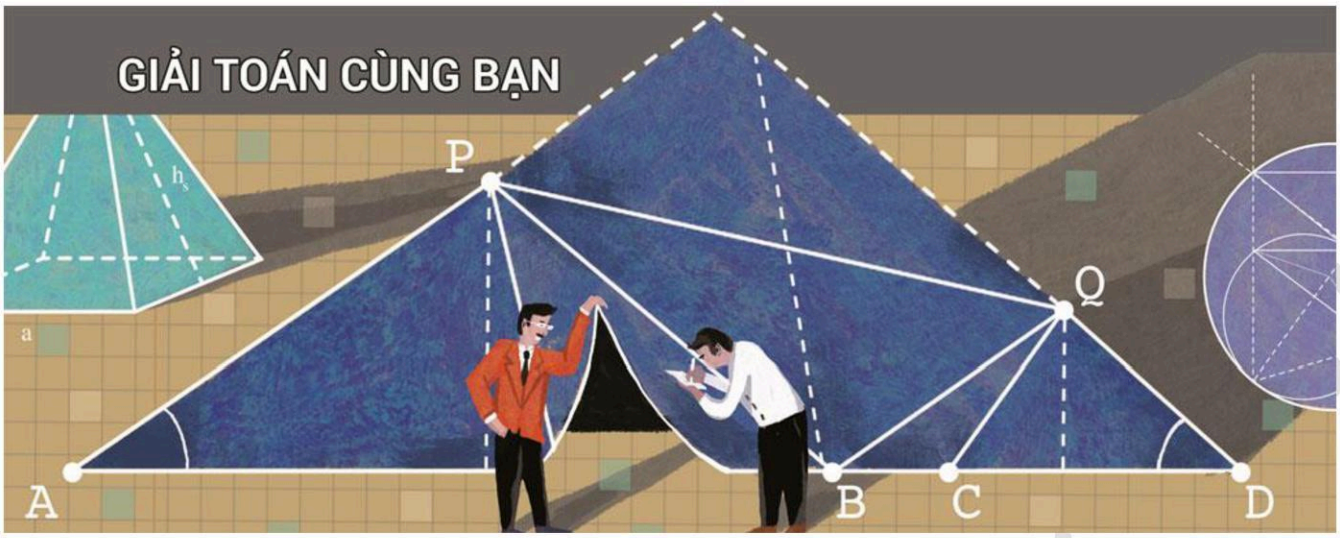
Thứ hai, cũng không cần cầu toàn quá với các giả thiết. Một giả thiết đôi khi có ích, trong việc xây dựng một mô hình Toán học ứng dụng dù là ở mức gần đúng nào đó. Sau đó chúng ta có thể qua kiểm nghiệm thực tế để điều chỉnh nó.

Nếu ngay từ đầu các nhà vật lý đã đòi hỏi xây dựng một lý thuyết có đầy đủ vi phạm *CP*, có lẽ chúng ta đã không thể có lý thuyết Chuẩn thống nhất các tương tác điện từ và tương tác yếu cùng với các cơ chế sinh khối lượng cho vật chất.

Điều may mắn của chúng ta là sống trong một thế giới có chân lý thường ở gần cái đẹp, dù sai lệch chút ít. Sự sai lệch chút ít này làm con người phải cố gắng tự hoàn thiện mình để tôn vinh cái đẹp và chân lý. Chính vì thế cuộc sống của chúng ta có ý nghĩa hơn.

Nguồn ảnh: Internet

www.toankho.com



Kẻ thêm đoạn thẳng TRONG CHỨNG MINH HÌNH HỌC

Vũ Hữu Bình

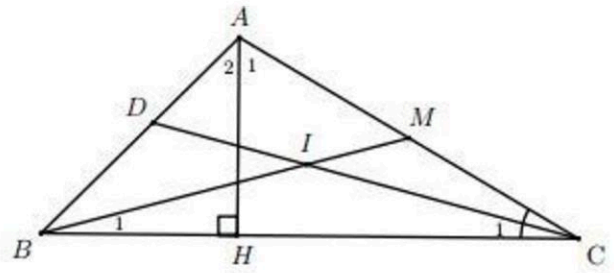
Một đường nét được kẻ thêm
Biết bao quan hệ hiện lên rõ rang

Nhiều bài toán hình học đòi hỏi phải lấy thêm những điểm mới, vẽ thêm những đường mới (nói một cách khái quát là dựng thêm những hình mới), nhằm mục đích tạo ra các liên kết cần thiết giữa các yếu tố đã cho trong hình. Đôi khi, chỉ với một đoạn thẳng được vẽ thêm mà bài toán sẽ trở nên "sáng sủa" hơn rất nhiều. Không có một "lí thuyết" chung nào cho việc dựng thêm những hình mới cần thiết cho việc giải một bài toán hình học. Mỗi hình mới được dựng thêm để giải một bài toán hình học thể hiện một nét sáng tạo của người giải bài.

Trong bài viết này, thông qua việc phân tích các tình huống cụ thể, chúng ta sẽ cùng làm quen với việc kẻ thêm các đoạn thẳng để giải các bài toán hình học phẳng, trong phạm vi chương trình Hình học cấp Trung học cơ sở hiện hành. Đoạn thẳng cần được kẻ thêm có thể là một đường nối hai điểm đã có trong hình, là đường trung tuyến, đường phân giác hay đường cao của một tam giác, cũng có thể là một đoạn thẳng có độ dài bằng độ dài của một đoạn thẳng đã có, ...

Bài 1. Cho tam giác ABC có $\angle A = 105^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, đường trung tuyến BM cắt đường phân giác CD tại I. Chứng minh rằng $IB = IC$.

Phân tích và giải. Yêu cầu chứng minh $IB = IC$ tương đương với yêu cầu chứng minh tam giác BIC cân tại I. Với chú ý rằng các dữ liệu cho trong giả thiết của bài ra là số đo của các góc, có thể nghĩ tới việc chứng minh tam giác BIC cân tại I thông qua việc tính góc $\angle B_1$ (xem Hình 1).



Hình 1

Theo hướng này, ta nghĩ tới việc dựng thêm các đường mới để kết nối góc $\angle B_1$ với các góc đã biết số đo.

Với chú ý

$$\angle B_1 = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle C_1) = 45^\circ$$

và $AM = MC$, ta kẻ $AH \perp BC$ và kẻ đoạn thẳng HM, làm xuất hiện tam giác vuông cân AHB và tam giác đều AHM, nhằm tạo ra tam giác cân BHM có góc $\angle B_1$ là góc đáy.

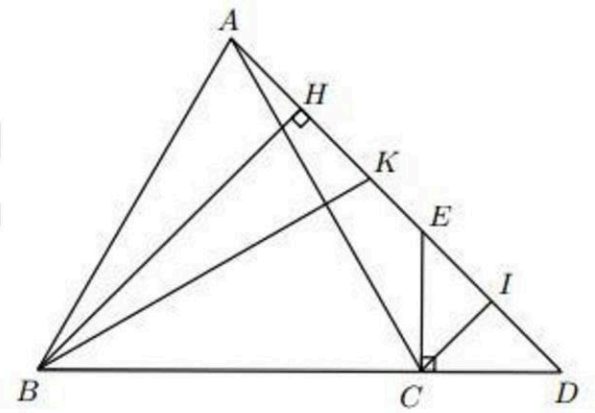
Với việc kẻ thêm các đường mới như trên, ta sẽ có $\angle BHM = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Suy ra

$$\angle B_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ.$$

Mà $\angle C_1 = \frac{1}{2}\angle C = 15^\circ$ nên suy ra tam giác BIC cân tại I. Vì thế $IB = IC$.

Bài 2. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối của tia CB, lấy điểm D sao cho $\angle CAD = 15^\circ$. Đường vuông góc với BC tại C cắt AD ở E. Tia phân giác của góc B cắt AD ở K. Chứng minh rằng $AK = ED$.

Phân tích và giải. (Xem Hình 2)



Hình 2

Ta phát hiện hai tam giác cân trong hình vẽ:

– Tam giác DCE vuông cân tại C vì

$$\angle D = \angle ACB - \angle CAD = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

– Tam giác ABK cân tại B vì

$$\angle BAK = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$$

và

$$\angle BKA = 180^\circ - \angle ABK - \angle BAK = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ.$$

Với phát hiện đó, ta *kẻ BH và CI vuông góc với AD.* Xuất hiện quan hệ $AH = \frac{1}{2}AK$ và $CI = IE = ID = \frac{1}{2}ED$ Chỉ cần chứng minh $AH = CI$.

Dễ dàng chứng minh điều đó, vì $\Delta ABH = \Delta ACI$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Từ đó $AH = CI$, suy ra $AK = ED$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D và E thuộc cạnh BC sao cho $\angle DAE = 45^\circ$ (D nằm giữa B và E). Chứng minh rằng $BD^2 + CE^2 = DE^2$.

Phân tích và giải. Ta sẽ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng BD, CE, DE (xem Hình 3).

Kẻ CK ⍰ BC và lấy $CK = BD$ (K và A cùng phía đối với BC). Chỉ cần chứng minh $KE = DE$.

Ta có:

$\angle C_2 = 90^\circ - \angle C_1 = 90^\circ - 45^\circ = \angle B$

$CK = BD$ (theo cách dựng)

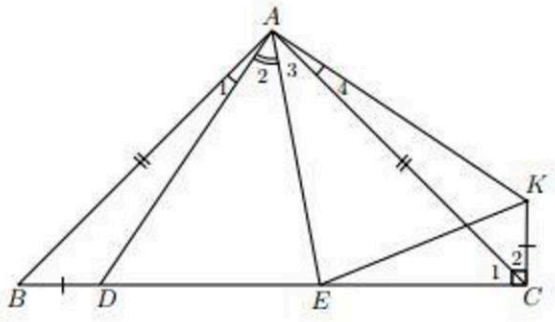
$AC = AB$ (theo giả thiết).

Do đó $\Delta ACK = \Delta ABD$ (c.g.c).

Suy ra $AK = AD$ và $\angle A_4 = \angle A_1$.

Ta lại có $\angle A_2 = 45^\circ$ (giả thiết) nên $\angle A_1 + \angle A_3 = 45^\circ$.

Suy ra $\angle EAK = \angle A_4 + \angle A_3 = 45^\circ = \angle EAD$.



Hình 3

Do đó $\Delta EAK = \Delta EAD$ (c.g.c).

Suy ra $KE = DE$. Từ đây, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho $AE = BD$. Qua A kẻ đường vuông góc với DE, cắt BC ở K. Chứng minh rằng $DE = AK$.

Phân tích và giải. Xét AK là cạnh của tam giác AKC, ta sẽ tạo ra tam giác bằng tam giác AKC và có một cạnh là DE.

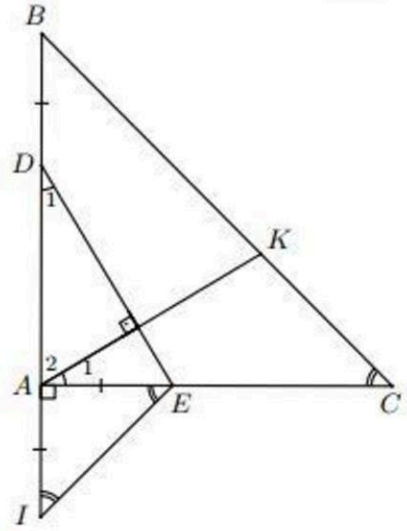
Trên tia đối của tia AB, lấy điểm I sao cho AI = AE = BD (xem Hình 4).

Ta có:

$DI = AD + AI = AD + BD = AB = AC$

$\angle D_1 = \angle A_1$ (cùng phụ $\angle A_2$)

$\angle I = 45^\circ = \angle C$.



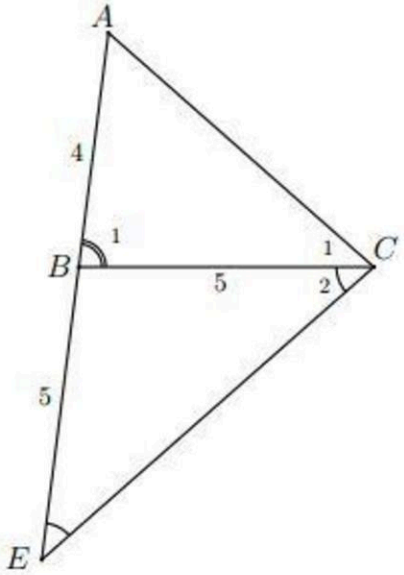
Hình 4

Do đó $\Delta DEI = \Delta AKC$ (c.g.c).

Suy ra $DE = AK$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $\angle B = 2\angle C$, $AB = 4$cm, $BC = 5$cm. Tính độ dài AC.

Giải. Trên tia đối của tia BA, *lấy điểm E sao cho* $BE = BC = 5cm$ (xem Hình 5).



Hình 5

Đặt $\angle E = \angle C_2 = \alpha$, ta có

$\angle B_1 = \angle E + \angle C_2 = 2\alpha$.

Lại có $\angle B_1 = 2\angle C_1$ (giả thiết) nên $\angle C_1 = \alpha$.

Suy ra $\angle ACE = 2\alpha = \angle ABC$.

Do đó $\Delta ACE \sim \Delta ABC$ (g.g).

Suy ra $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$. Do đó

$AC^2 = AB \cdot AE = 4 \cdot 9 = 36.$

Vì vậy, $AC = 6$(cm).

Các bài tập dưới đây dành cho bạn đọc tự luyện.

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC có đường trung tuyến BM bằng đường cao CH. Tính số đo góc $\angle ABM$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm của BC. Lấy điểm D tùy ý nằm giữa M và C. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ điểm B đến AD. Chứng minh rằng HM là tia phân giác của góc $\angle BHD$.

toanki.com

Bài 8. Cho tam giác ABC có $\angle A = 60^\circ$, $\angle B > \angle C > 30^\circ$. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $\angle CBE = 30^\circ$, điểm F thuộc cạnh AB sao cho $\angle BCF = 30^\circ$. Chứng minh rằng $BF = CE$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB = 4$cm, $BC = 5$cm, $AC = 6$cm. Chứng minh rằng $\angle B = 2\angle C$.

Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Xét điểm M di chuyển trên đường kính AB. Vẽ dây CD đi qua M sao cho $\angle AMC = 45^\circ$. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên đoạn AB thì tổng $MC^2 + MD^2$ không đổi.

MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC - TỔ HỢP (tiếp theo)

Hà Huy Khoái

3. Tính chia hết

Ta bắt đầu với bài toán đơn giản sau.

Bài toán 6.

Cho số nguyên $n > 2016$. Tìm tất cả các bộ số nguyên $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ có các tính chất sau:

1. $2017 \in A$;
2. *Mỗi nhóm tùy ý gồm 2016 số thuộc A đều có thể chia thành 4 nhóm con có số số bằng nhau và tổng của các số trong mỗi nhóm con đều bằng nhau.*

Phân tích - Lời giải.

Tính chất 2 của A cho ta thấy rằng, tổng của 2016 số tùy ý thuộc A là một số chia hết cho 4.

Vì vậy, với một nhóm tùy ý gồm 2016 số thuộc A, tính chất chia hết cho 4 của tổng các số trong nhóm không hề thay đổi, khi thay một số bất kỳ trong nhóm bởi một số tùy ý thuộc A nhưng không thuộc nhóm đó. Suy ra, mọi số thuộc A đều đồng dư nhau theo modulo 4.

Hơn thế, còn có thể thấy tính chất 2 là một ràng buộc rất mạnh đối với các số thuộc A. Nó dẫn ta đến dự đoán rằng mọi số thuộc A đều bằng nhau.

Để kiểm chứng dự đoán nêu trên, ta xét bộ số $B = (a_1 - a, a_2 - a, ..., a_n - a)$, trong đó a là số nhỏ nhất của A. Rõ ràng, bộ số B cũng có tính chất 2 như bộ số A. Do đó, mọi số thuộc B cũng đồng dư với nhau theo modulo 4, và vì $0 \in B$ nên suy ra mọi số của B đều chia hết cho 4. Điều này cho thấy bộ số B', nhận được từ B bằng cách thay mỗi $b \in B$ bởi b/4, cũng có những tính chất như bộ số B, xét theo modulo 4. Cụ thể, ta cũng có $0 \in B'$ và mọi số thuộc B' đều chia hết cho 4. Vì thế, bằng suy luận "quy nạp lùi" quen thuộc, dễ thấy mọi số thuộc B đều bằng 0 (vì nếu ngược lại, sẽ phải có $0 \equiv 1 \pmod 4$).

Dựa vào các phân tích trên đây, bạn đọc tự trình bày lời giải cho bài toán.

Bài toán 7.

Với mỗi số nguyên dương d, kí hiệu $f(d)$ là số nguyên dương nhỏ nhất có đúng d ước số dương. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 0$, $f(2^{k+1})$ chia hết cho $f(2^k)$.

Phân tích - Lời giải.

Để giải bài này, rõ ràng ta cần biết những số nào sẽ có 2^k ước dương, sau đó mới tìm số nhỏ nhất trong những số như vậy. Lẽ tự nhiên là ta nghĩ ngay đến việc phân tích một số nguyên dương n ra thừa số nguyên tố. Vì cần có công thức cho n tổng quát (khi chưa có thông tin gì về các ước nguyên tố của nó), ta viết

$$n = \prod_p p^{\alpha(p)},$$

trong đó $\alpha(p)$ là các số nguyên không âm, đồng thời chỉ có hữu hạn số khác 0.

Nếu gọi $d(n)$ là số ước dương của n thì

$$d(n) = \prod_p (\alpha(p) + 1).$$

www.toanhoc.com

Như vậy, $d(n)$ là một lũy thừa của 2 khi và chỉ khi với mọi p, tồn tại $b(p) \geq 0$ sao cho

$$\alpha(p) = 2^{b(p)} - 1.$$

Để có thể nhìn rõ hơn "cấu trúc" của n, ta viết số mũ thành tổng (và khi đó sẽ có biểu diễn của n dưới dạng tích):

$$\alpha(p) = 2^{b(p)} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{b(p)-1},$$

$$n = \prod_p \prod_{i=0}^{b(p)-1} p^{2^i}.$$

Khi đó

$$d(n) = 2^k \text{ với } k = \sum_p b(p).$$

Như vậy các số n cần tìm là tích của những số nào đó có dạng p^{2^r} với p là số nguyên tố và r là số nguyên không âm.

Từ phân tích trên đây, ta thấy rằng nếu số p^{2^r} có mặt trong biểu diễn n dưới dạng tích, thì những số p^{2^m} với $m < r$, cũng có mặt trong tích đó. Nghĩa là, nếu một số nào đó có mặt trong biểu diễn dưới dạng tích của n thì mọi ước số của nó cũng đều tham gia trong biểu diễn ấy. Do đó, ta có kết luận sau đây: *nếu gọi S là tập hợp các số dạng* p^{2^r}, *với p là số nguyên tố và* r *là số nguyên không âm, thì d(n) là một lũy thừa của 2 khi và chỉ khi n là tích các phần tử thuộc một tập con hữu hạn T của S có tính chất sau: với mọi t ∈ T, nếu s ∈ S và s t thì s ∈ T. Hơn nữa, nếu d(n) = 2^k thì tập hợp T gồm k phần tử.*

Dễ thấy rằng, với mọi k nguyên dương, tập hợp T_k gồm k phần tử nhỏ nhất của S thỏa mãn tính chất trên, suy ra $f(2^k)$ chính là tích các phần tử thuộc T_k. Từ đó suy ra ngay kết luận của bài toán.

Nhận xét: Có thể thấy

$$S = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, \ldots\}$$

suy ra

$$f(2) = 2; f(2^2) = 2 \cdot 3 = 6;$$
$$f(2^3) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$$
$$f(2^4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$$
$$f(2^5) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 840; \ldots$$

Biểu diễn số

Có rất nhiều bài toán liên quan đến việc biểu diễn số nguyên (dương) dưới một dạng nào đó. Nhìn chung, lời giải thường xuất phát từ việc xem xét kỹ những trường hợp riêng rẽ, đặc biệt là khi các số đang xét tương đối nhỏ.



Ta xét ví dụ sau đây.

Bài toán 8.

Tìm số nguyên dương k lớn nhất có tính chất sau: tập hợp các số nguyên dương phân hoạch được thành k tập con $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sao cho với mọi n ≥ 15, với mỗi i ∈ {1; 2; ...; k}, tồn tại hai phần tử khác nhau của Ai có tổng bằng n.

Phân tích - Lời giải.

Ta bắt đầu với trường hợp $k = 2$. Rõ ràng có thể phân hoạch tập hợp các số nguyên dương thành hai tập con: $A_1 = \{2n, n \geq 3\} \cup \{1, 2\}$ có tính chất: mọi số nguyên dương lớn hơn 6 đều biểu diễn được dạng tổng hai số thuộc A1, cũng như tổng hai số thuộc A_2. Khi $k = 3$, dĩ nhiên việc phân hoạch thành "chẵn, lẻ" như trên được thay bởi phân hoạch theo modulo 3, và cũng như trước, cần thêm vào mỗi lớp đồng dư modulo 3 một số số đầu tiên để bảo đảm mọi số lớn hơn hoặc bằng 15 đều biểu diễn được dưới dạng tổng hai số thuộc mỗi tập. Có thể chọn phân hoạch sau đây:

$$A_1 = \{1, 2, 3\} \cup \{3m; m \geq 4\},$$
$$A_2 = \{4, 5, 6\} \cup \{3m - 1; m \geq 4\},$$
$$A_3 = \{7, 8, 9\} \cup \{3m - 2; m \geq 4\}.$$

Dễ thử lại rằng, phân hoạch trên đây thỏa mãn bài ra. Hơn nữa, có thể nhận thấy rằng, điều kiện biểu diễn được mọi số lớn hơn hoặc bằng 15 đối với phân hoạch trên đây đã rất "chặt", chẳng hạn số 14 không thể biểu diễn được dưới dạng tổng hai số thuộc A_2 hoặc hai số thuộc A_3. Từ đó có thể dự đoán rằng, $k = 3$ là giá trị lớn nhất có thể để tồn tại phân hoạch thỏa mãn bài ra.

Ta sẽ chứng minh dự đoán trên, nghĩa là, với $k \geq 4$ không thể phân hoạch tập các số nguyên dương thành k tập hợp con thỏa mãn bài ra.

Rõ ràng, nếu với $k \geq 4$ nào đó mà tồn tại phân hoạch thỏa mãn, thì phân hoạch như vậy cũng tồn tại với $k = 4$: chỉ cần lấy phân hoạch $A_1, A_2, A_3, A_4 \cup A_5 \cup \cdots \cup A_k$ ta được phân hoạch gồm 4 tập hợp thỏa mãn bài ra. Như vậy chỉ cần chứng minh không thể tồn tại phân hoạch gồm 4 tập con thỏa mãn bài ra.

Giả sử tồn tại một phân hoạch như vậy: A_1, A_2, A_3, A_4. Như ta đã thấy trong các ví dụ khi $k = 2,3$, các tập hợp A_i phải chứa những số nào đó trong những số tự nhiên đầu tiên. Xét tập $A = \{15, 16,..., 24\}$, gồm 10 số nhỏ nhất mà mỗi số đều biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số thuộc mỗi tập A_i.

Vì mỗi số thuộc A chỉ có thể là tổng của hai số thuộc tập $B = \{1, 2, ..., 23\}$ nên mỗi tập A_i cần chứa ít nhất 5 số thuộc B (do $10 = C_5^2$). Do bốn tập A_i rời nhau mà B chỉ có 23 phần tử nên phải tồn tại tập A_j nào đó chứa đúng 5 số thuộc B, giả sử đó là các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Vì mỗi số thuộc A đều là tổng của 2 trong 5 số vừa nêu và số phần tử của A bằng C_5^2 nên $A = \{x_k + x_l, k \neq l, 1 \leq k, l \leq 5\}$.

Từ đó suy ra:

$$15 + 16 + \cdots + 24 = 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

vì mỗi số x_i tham gia trong đúng 4 cặp số. Đẳng thức trên đây cho ta mâu thuẫn vì tổng ở vế trái là 195, trong khi vế phải chia hết cho 4.

Bài toán 9.

Với mỗi số nguyên dương m, ký hiệu k_m là số nguyên dương lớn nhất để tồn tại tập hợp S gồm m số nguyên sao cho mỗi số nguyên từ 1 đến km đều hoặc thuộc S, hoặc là tổng của hai số (không nhất thiết khác nhau) thuộc S. Ví dụ: $k_3 = 8$ do có $S = \{1; 3; 4\}$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:

$$\frac{m(m+6)}{4} \leq k_m \leq \frac{m(m+3)}{2}.$$

Phân tích - Lời giải.

Điều kiện bài toán gợi cho ta thấy cần phải tính số phần tử của tập hợp $S \cup (S+S)$, trong đó

$$S + S = \{x + y \mid x, y \in S\}.$$

Nếu với mỗi tập hợp A, ký hiệu A là số phần tử của nó, thì ta có bất đẳng thức hiển nhiên sau:

$$|S \cup (S+S)| \leq |S| + |S+S|.$$

Mỗi phần tử của $S+S$ nhận được bằng cách lấy tổng của hai số (bằng nhau hoặc khác nhau) thuộc S nên suy ra ta có bất đẳng thức sau:

$$|S+S| \leq |S| + C_{|S|}^2 = \frac{1}{2}|S|(|S|+1).$$

Trong hai bất đẳng thức cần chứng minh, bất đẳng thức bên phải tương đối dễ thấy. Theo định nghĩa, k_m là số nguyên dương lớn nhất sao cho tồn tại tập S gồm m số nguyên dương thỏa mãn

$$\{1; 2; \ldots; k_m\} \subset S \cup (S+S).$$

Theo chứng minh trên ta có

$$\begin{aligned} k_m \leq |S \cup (S+S)| &\leq |S| + \frac{1}{2}|S|(|S|+1) \\ &= \frac{1}{2}|S|(|S|+3) \\ &= \frac{m(m+3)}{2}. \end{aligned}$$

Ta tìm cách chứng minh bất đẳng thức bên trái.

Trước tiên, tập hợp S cần tìm phải chứa một số số tự nhiên liên tiếp nào đó, giả sử là {1, 2,...,t} với $t < m$. Khi đó, tập $S \cup (S+S)$ chứa các số 1, 2,..., $2t$. Như vậy, để số tiếp theo, $2t + 1$, thuộc $S \cup (S+ S)$ trong tập S cần có thêm số $2t + 1$. Lúc này, tập $S \cup (S + S)$ sẽ chứa các số 1, 2,..., $3t + 1$. Do vậy, để số tiếp theo, $3t + 2$, thuộc $S \cup (S + S)$ trong tập S cần có thêm số $3t + 2, \ldots$

Lập luận trên đây chỉ ra rằng tập S thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng:

$$S=\{1;2;\ldots;t\}\cup\{(k+1)t+k;\ k=1,2,\ldots,m-t\}.$$

Khi đó, dễ thấy rằng

$$\{1;2;\ldots;m+(m+1)t-t^2\}\subset S\cup(S+S)$$

và $m+1+(m+1)t-t^2\notin S\cup(S+S)$.

Như vậy, k_m chính là giá trị lớn nhất của $m + (m + 1)t - t^2$, với $1 \le t < m$. Dễ chứng minh rằng đại lượng này đạt giá trị lớn nhất khi $t = \left[\frac{m+1}{2}\right]$ và giá trị đó là $\left[\frac{m(m+6)+1}{4}\right]$

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

www.toankho.cc.vn



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn) và phải được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kì này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ trên trang bài toán hoặc bài giải. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán đề xuất đã gửi cho Chuyên mục không được công bố hoặc gửi đăng ở bất cứ nơi nào khác, khi chưa có sự đồng ý của Tạp chí Pi.
- Pi tin chắc rằng các lời giải đã được đăng tải trên Tạp chí cho các bài toán của "Thách thức kì này" chưa hẳn đã là những lời giải tốt nhất có thể cho các bài toán đó. Vì thế, Pi rất vui lòng đón nhận từ bạn đọc những lời giải mới tốt hơn, hay hơn cho các bài toán đã có lời giải được đăng tải trên Tạp chí.

Thách thức kì này

Dành cho cấp THCS

P41. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn đúng 3 trong 4 điều kiện dưới đây:

1/ $a = 5b+9$;

2/ $a+6$ chia hết cho b;

3/ $a+2017b$ chia hết cho 5;

4/ $a+7b$ là số nguyên tố.

Hà Huy Khoái (Hà Nội)

P42. Hỏi có thể chọn ra tối đa bao nhiêu số từ 2017 số nguyên dương đầu tiên, sao cho tổng lập phương của hai số bất kì trong các số được chọn ra là một số không chia hết cho 4?

Lưu Thanh Hà (Kiên Giang)

P43. Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(2-a)(2-b)(2-c) \geq abc.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Võ Quốc Bá Cẩn (Hà Nội)

P44. Cho tam giác nhọn ABC, với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên OT. Đường tròn ngoại tiếp tam giác TBH cắt (O) tại điểm thứ hai D khác B, BD cắt AO tại L. Chứng minh rằng

$$\frac{HT}{HO} = 2\frac{KT}{KO}.$$

Nguyễn Lê Phước (Hà Nội)

Dành cho cấp THPT

P45. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD, $CD = 2AB$. Gọi P là trung điểm của CD. Trên các đường thẳng BC,AD, lấy các điểm M,N tùy ý ($M \in BC$, $N \in AD$). PA cắt DM tại R và PB cắt CN tại Q. Các đường tròn (PAB) và (PQR) cắt nhau tại điểm thứ hai X khác B. Trên đường tròn (PQR), lấy điểm Y sao cho $PY \parallel QR$. Gọi H là trực tâm của tam giác PAB và gọi K là điểm đối xứng với H qua QR. Chứng minh rằng $XK \perp XY$.

Trần Quang Hùng (Hà Nội)

P46. Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực, bậc n và có n nghiệm thực đôi một phân biệt ($n \geq 2$).

a) Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) = P(x) + P'(x)$$

cũng có n nghiệm thực đôi một phân biệt.

b) Gọi $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ là các nghiệm của $P(x)$ và $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ là các nghiệm của $Q(x)$. Chứng minh rằng

$$\min_{1\leq i\leq n-1}(a_{i+1}-a_i) \leq \min_{1\leq i\leq n-1}(b_{i+1}-b_i).$$

Nhóm "TTTH" st.

P47. Tìm số thực k bé nhất sao cho với mọi bộ ba số thực không âm a,b,c, ta luôn có

$$abc + k\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)+2 \geq a+b+c.$$

Nguyễn Văn Huyện (Tp. Hồ Chí Minh)

P48. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ và tất cả các bộ n số nguyên $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ sao cho đa thức

$$S(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 3$$

phân tích được thành tích của hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Nguyễn Tuấn Ngọc (Tiền Giang)

P49. Kí hiệu S là tập hợp gồm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện

$$(2^n+3^n)(3^n+5^n) \equiv 0 \pmod{n^2}.$$

a) Chứng minh rằng nếu $n \in S$ và $n \geq 5$ thì $n \equiv 0 \pmod{2015}$.

b) Chứng minh rằng S là tập vô hạn.

Hà Duy Hưng (Hà Nội)

P50. Hai số nguyên dương a,b được gọi là bạn bè nếu $\frac{a}{b} \in \left\{2; 3; 5; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right\}$. Hỏi trong 1000 số nguyên dương đôi một phân biệt có nhiều nhất bao nhiêu cặp bạn bè.

Trần Nam Dũng (Tp. Hồ Chí Minh)

Giải bài kì trước

- *Do sơ suất kĩ thuật, trong số trước, mã bài của bài* ***P10*** *đã bị in nhầm thành* ***P20****. Rất mong bạn đọc thông cảm và chữa lại giúp. Chân thành cảm ơn các bạn.*

- *Nhằm tăng thời gian giải bài và gửi bài giải về Tạp chí, trong số này, Pi chỉ đăng lời giải của các bài* ***P24, P25, P26, P27*** *và* ***P20****. Lời giải của các bài* ***P21, P22, P23, P28, P29*** *và* ***P30*** *sẽ được đăng trên số tiếp theo.*

P24. Tại mỗi đỉnh của một hình lục giác đều cho trước, có một con bướm đậu. Vào cùng một thời điểm, tất cả 6 con bướm cùng bay lên khỏi các đỉnh của lục giác và lại vào cùng một thời điểm, cả 6 con bướm cùng đậu xuống các đỉnh của lục giác đó một cách tùy ý, sao cho tại mỗi đỉnh chỉ có một con bướm đậu (các con bướm không nhất thiết phải đậu xuống vị trí trước khi bay lên của mình). Chứng minh rằng tồn tại 3 con bướm mà trước khi bay lên, chúng đậu tại 3 đỉnh, gọi là A,B,C, còn sau khi đậu xuống, chúng đậu tại 3 đỉnh, gọi là A',B',C',

www.toanRD.com

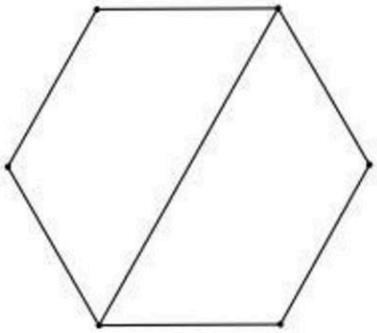
có tính chất: tam giác tạo bởi 3 đỉnh A',B',C' bằng tam giác tạo bởi 3 đỉnh A,B,C.

Lời giải

Nhằm tránh dài dòng, trong phần trình bày dưới đây, khi nói "tam giác", ta hiểu là "tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của lục giác đều đã cho".

Cách 1 *(của tác giả bài toán).*

Ta gọi đường chéo nối hai đỉnh đối xứng nhau qua tâm của lục giác đều là *đường chéo chính* của lục giác đều đó (xem Hình 1 dưới đây). Như vậy, một lục giác đều sẽ có 3 đường chéo chính.



Hình 1

Dễ thấy, hai tam giác, mà mỗi tam giác có một cạnh là đường chéo chính của lục giác đều, là hai tam giác bằng nhau.

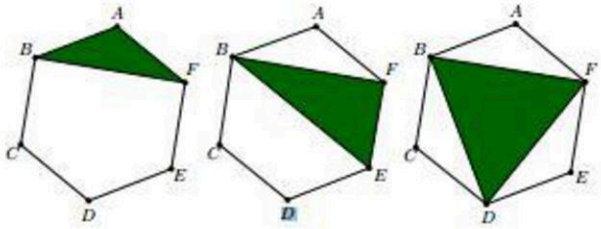
Xét 2 con bướm, gọi là X và Y, mà trước khi bay lên, chúng đậu ở hai đầu mút của một đường chéo chính. Xảy ra một trong hai trường hợp sau:

- *Trường hợp 1: Sau khi đậu xuống, X và Y lại đậu ở hai đầu mút của một đường chéo chính.* Khi đó, theo nhận xét nêu trên, X,Y cùng với con bướm Z tùy ý khác sẽ là 3 con bướm thỏa mãn yêu cầu đề bài.
- *Trường hợp 2: Sau khi đậu xuống, X và Y đậu ở hai đầu mút của hai đường chéo chính.* Gọi Z là con bướm mà sau khi đậu xuống, nó và X đậu tại hai đầu mút của một đường chéo chính. Theo nhận xét nêu trên, X,Y và Z là 3 con bướm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán được chứng minh.

Cách 2 *(theo lời giải của bạn Đoàn Hồng Anh (Catherina Đoàn), 11 tuổi, học sinh lớp 6, trường Bessborough, Moncton, NB, Canada).*

Ta phân chia các tam giác thành ba loại, như Hình 2 dưới đây:



Hình 2

Dễ thấy, hai tam giác cùng loại bằng nhau và hai tam giác khác loại không bằng nhau.

Vì thế, theo bài ra, ta phải chứng minh tồn tại 3 con bướm, mà trước khi bay lên và sau khi đậu xuống, chúng đậu tại các đỉnh của hai tam giác cùng loại.

Bằng cách đếm trực tiếp, ta thấy có 6 tam giác loại 1, 12 tam giác loại 2 và 2 tam giác loại 3. Như thế, số tam giác loại 2 lớn hơn tổng số tam giác thuộc hai loại còn lại ($12 > 6 + 2$). Suy ra, phải có 3 con bướm mà trước khi bay lên, chúng đậu tại 3 đỉnh của một tam giác loại 2 và sau khi đậu xuống, chúng cũng đậu tại 3 đỉnh của một tam giác loại này. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét.

1. Hai lời giải nêu trên thể hiện hai cách tiếp cận khác nhau trong việc giải bài toán. Ở cách giải thứ nhất, sự tồn tại của 3 con bướm thỏa mãn yêu cầu đề bài được khẳng định bằng cách chỉ ra cụ thể 3 con bướm đó. Ở cách giải thứ hai, sự tồn tại của 3 con bướm được khẳng định về nguyên tắc, nhờ các nguyên lí. Hai cách tiếp cận vừa nêu cũng là hai cách tiếp cận thường gặp trong việc giải các bài toán với yêu cầu chứng minh sự tồn tại của một tập hợp (một cấu hình) với các tính chất xác định nào đó.

2. Sử dụng ý tưởng và phương pháp của cách giải thứ nhất, bạn đọc có thể dễ dàng giải được bài toán sau, nhận được từ bài đã ra bằng cách "không gian hóa":

www.toanhoc.com

"Tại mỗi đỉnh của một khối lập phương cho trước, có một con bướm đậu. Vào cùng một thời điểm, tất cả 8 con bướm cùng bay lên khỏi các đỉnh của khối lập phương và lại vào cùng một thời điểm, cả 8 con bướm cùng đậu xuống các đỉnh của khối lập phương đó một cách tùy ý, sao cho tại mỗi đỉnh chỉ có một con bướm đậu (các con bướm không nhất thiết phải đậu xuống vị trí trước khi bay lên của mình). Chứng minh rằng tồn tại 3 con bướm mà trước khi bay lên, chúng đậu tại 3 đỉnh, gọi là A,B,C, còn sau khi đậu xuống, chúng đậu tại 3 đỉnh, gọi là $A\,0$,$B\,0$,$C\,0$, có tính chất: tam giác tạo bởi 3 đỉnh $A\,0$,$B\,0$,$C\,0$ bằng tam giác tạo bởi 3 đỉnh A,B,C."

3. Kết quả của bài đã ra (cũng như bài toán vừa nêu trên) không thay đổi, khi thay bướm bởi một động vật biết bay bất kì khác.

Nguyễn Khắc Minh

P25. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x+5}{x+1}$

a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị không thẳng hàng.

b) Gọi *A,B,C* là ba điểm cực trị nói trên. Tính diện tích tam giác *ABC* và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Lời giải *(dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Hữu Thắng, lớp 11A1, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An).*

a) Ta có

$$f'(x)=\frac{(3x^2-6x+3)(x+1)-(x^3-3x^2+3x+5)}{x+1}=\frac{x^3-3x-1}{(x+1)^2}.$$

Đặt $g(x)=x^3-3x-1$. Ta có $g(-2)=-3$, $g(-1)=1$, $g(0)=-1$ và $g(2)=1$ nên phương trình $g(x)=0$ có ba nghiệm thực phân biệt; gọi là x_1, x_2, x_3. Suy ra đồ thị của hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), x_3, f(x_3)$.

Theo công thức tính giá trị của hàm phân thức tại các điểm cực trị, ta có

$$f(x_i)=3(x_i^2-2x_i+1)=3(x_i-1)^2$$

với mỗi $i=1,2,3$.

Suy ra, các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ nằm trên parabol $y=3(x-1)^2$ và do đó, chúng không thẳng hàng.

b) Kí hiệu S_{ABC} là diện tích tam giác *ABC*, ta có

$$\begin{aligned}S_{ABC}&=\frac{1}{2}\big|(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_3))\\&\quad-(x_1-x_3)(f(x_1)-f(x_2))\big|\\&=\frac{3}{2}\big|(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)\big|\\&=\frac{3}{2}\big|x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2-x_1^2x_2-x_2^2x_3-x_3^2x_1\big|\\&=\frac{3}{2}\big|P-Q\big|.\end{aligned}$$

trong đó, $P=x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2$

và $Q=x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1$

Theo định lí Viét, ta có $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-3$ và $x_1x_2x_3=1$.

Do đó

$$\begin{aligned}&P+Q\\&=x_1x_2(x_1+x_2)+x_2x_3(x_2+x_3)+x_3x_1(x_3+x_1)\\&=-3x_1x_2x_3=-3\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}P\cdot Q&=(x_1x_2)^3+(x_2x_3)^3+(x_3x_1)^3\\&\quad+x_1x_2x_3(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+3(x_1x_2x_3)^2\\&=(x_1x_2)^3+(x_2x_3)^3+(x_3x_1)^3\\&\quad+x_1^3+x_2^3+x_3^3+3.\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3+x_3^3&=(x_1+x_2+x_3)^3\\&\quad-3(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)\\&=3x_1x_2x_3=3\end{aligned}$$

và

$$
\begin{aligned}
&(x_1x_2)^3+(x_2x_3)^3+(x_3x_1)^3\\
&=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3\\
&\quad -3(x_1x_2+x_2x_3)(x_2x_3+x_3x_1)(x_3x_1+x_1x_2)\\
&=(-3)^3-3x_1x_2x_3(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)\\
&=-27+3=-24.
\end{aligned}
$$

Suy ra $P\cdot Q=-24+3+3=-18.$

Do đó

$$
\begin{aligned}
(P-Q)^2&=(P+Q)^2-4P\cdot Q\\
&=(-3)^2+72=81.
\end{aligned}
$$

Suy ra $P-Q=9$.

Vì vậy $S_{ABC}=\dfrac{27}{2}$

Bây giờ, ta sẽ tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng cách thiết lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm A,B,C. Với mỗi $i=1,2,3$, đặt $y_i=f(x_i)$, với lưu ý xi là nghiệm của phương trình $g(x)=0$, ta có:

$$
\begin{aligned}
y_i^2&=9(x_i-1)^4\\
&=9(x_i^4-4x_i^3+6x_i^2-4x_i+1)\\
&=9\left[x_i(x_i^3-3x_i-x_i)-4(x_i^3-3x_i-x_i)\right.\\
&\quad \left.+9x_i^2-15x_i-3\right]\\
&=9(8x_i^2-15x_i-3)\\
&=-x_i^2+82(x_i^2-2x_i+1)+29x_i-109\\
&=-x_i^2+\frac{82}{3}y_i+29x_i-109
\end{aligned}
$$

Suy ra $\left(x_i-\dfrac{29}{2}\right)^2+\left(y_i-\dfrac{41}{3}\right)^2=\dfrac{10369}{36}$

Do đó các điểm A,B,C nằm trên đường tròn có phương trình:

$$\left(x_i-\frac{29}{2}\right)^2+\left(y_i-\frac{41}{3}\right)^2=\frac{10369}{36}$$

Vì vậy, $R=\dfrac{\sqrt{10369}}{6}$

Nhận xét.

1. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ ta có:

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Do đó, với $c\in\mathbb{R}$ mà $f'(c)=0$, ta có:

$$u'(c)v(c)-u(c)v'(c)=0$$

Suy ra $f(c)=\dfrac{u'(c)}{v'(c)}$ Đây là công thức tính giá trị của hàm phân thức tại các điểm cực trị, được nói tới trong lời giải trên.

Công thức nêu trên *không* phải là công thức L'Hopitale như một số bạn lầm tưởng.

2. Phương pháp thiết lập phương trình đường tròn trong lời giải trên được gọi là *phương pháp gián tiếp viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A,B,C.* Cụ thể, để thiết lập phương trình của đường tròn đi qua các điểm (x_i, y_i), ta tìm cách biến đổi đẳng thức $y_i=f(x_i)$ về dạng $(x_i-a)^2+(y_i-a)^2=r^2$, trong đó a, b, r là các hằng số; chứ không phải theo cách truyền thống là đi tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

**3*. *Các bạn* Trịnh Hoàng Hiệp, Nguyễn Hoàng Đức, Nguyễn Tấn Tài *(cùng là học sinh lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước) cũng có lời giải đúng. Ở lời giải của mình, để tính diện tích tam giác* ABC, *các bạn Hiệp, Đức, Tài đã dùng phép đặt lượng giác* x = 2cost* để giải phương trình

$$x^3-3x-1=0,$$

từ đó chuyển bài toán về việc tính giá trị của các biểu thức lượng giác; đối với bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, các bạn đã dùng công thức $R=\dfrac{abc}{4S}$ để tính, thông qua định lý Viét.

Trần Nam Dũng

P26. Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}+\frac{3}{5abc}\geq\frac{18}{5}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Lời giải *(theo lời giải của tác giả bài toán).*

Trước hết, ta chứng minh các nhận xét sau:

Nhận xét 1. Với mọi $a,b,c>0$, ta có

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geq a+b+c. \quad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow \frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+b+c+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+c\\&\quad+a+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}+a+b\\&\quad\geq 3(a+b+c)\\&\Leftrightarrow (a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{a^2-ab+b^2}\right)\geq 3(a+b+c). \quad (2)\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}+\frac{1}{a^2-ab+b^2}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}. \quad (3)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned}&3(a^3+b^3+c^3)\\&\geq(a+b+c)[2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca]. \quad (4)\end{aligned}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có:

$$\begin{aligned}&(a+b+c)[2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca]\\&=2(a^3+b^3+c^3)+a^2(b+c)+b^2(c+a)\\&\quad+c^2(a+b)-3abc\\&\leq 3(a^3+b^3+c^3).\end{aligned}$$

(4) được chứng minh. Từ (3) và (4), hiển nhiên ta có (2). Vì thế, (1) được chứng minh.

Căn cứ điều kiện xảy ra dấu đẳng thức ở các bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và Schur, ta được dấu đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét 2. Nếu các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$ thì

$$(a+b+c)^5\geq 243abc. \quad (5)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^6&=[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)]^3\\&\geq 3^3(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2\\&=81(ab+bc+ca)^2\\&\geq 243abc(a+b+c).\end{aligned}$$

Vì thế, (5) được chứng minh.

Căn cứ điều kiện xảy ra dấu đẳng thức trong các đánh giá vừa nêu trên, ta được dấu đẳng thức ở (5) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Trở lại bài toán.

Theo các bất đẳng thức (1) và (5), ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}+\frac{3}{5abc}\geq a+b+c+\frac{729}{5(a+b+c)^5}\\&=5\cdot\frac{a+b+c}{5}+\frac{729}{5(a+b+c)^5}\\&\geq\sqrt[6]{\frac{(a+b+c)^5}{5^5}\cdot\frac{729}{5(a+b+c)^5}}\\&=\frac{18}{5}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức của đề bài được chứng minh.

Căn cứ điều kiện xảy ra dấu đẳng thức ở các bất đẳng thức (1) và (5), ta được dấu đẳng thức ở bất đẳng thức đó xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét.

1. Các bạn *Trịnh Hoàng Hiệp, Nguyễn Hoàng Đức, Nguyễn Tấn Tài* (cùng là học sinh lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước) có lời giải đúng. Tiếc rằng, sau khi chứng minh được bất đẳng thức (1) (bất đẳng thức "chìa khóa") trong lời giải nêu trên, các bạn đã dùng phép đặt biến phụ $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$ để thực hiện các biến đổi, đánh giá tiếp theo, nên đã gặp phải các tính toán cồng kềnh, phức tạp.

2. Nhận xét 2 trong lời giải trên là một bài toán trong kì thi chọn đội tuyển Saudi Arabia (Ả-rập Xê-út) tham dự JBMO (Junior Balkan Mathematical Olympiad) 2015.

Võ Quốc Bá Cẩn

P27. Cho số nguyên $n \geq 12$. Cho P(x) là đa thức bậc n, với hệ số nguyên và thỏa mãn điều kiện: tồn tại ít nhất $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ giá trị x nguyên sao cho $P(x) = 1$. Chứng minh rằng không thể phân tích đa thức $P(x)$ thành tích của hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Lời giải.

Cách 1 *(dựa theo lời giải của bạn Phạm Quang Toàn, lớp 12, THPT Indoopilly, Queensland, Australia).*

Giả sử phản chứng rằng $P(x) \equiv G(x) \cdot H(x)$ trong đó $G(x)$ và $H(x)$ là hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Không mất tổng quát, giả sử $degG \leq degH$; khi đó, ta có

$$\deg G \leq [n/2]. \qquad (1)$$

Theo giả thiết của bài ra, tồn tại $k \geq [n/2] + 1$ số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_k$ đôi một phân biệt sao cho $|P(a_i)| = |G(a_i)| \cdot |H(a_i)| = 1$. Từ đây, vì $G(a_i)$ và $H(a_i)$ là các số nguyên dương (do $G(x)$ và $H(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên) nên suy ra

$$|G(a_i)| = 1 \quad \text{với mọi } 1 \leq i \leq k. \qquad (2)$$

Do (1) nên phương trình

$$G(x) - 1 = 0$$

có tối đa $[n/2] < k$ nghiệm. Vì thế, từ (2) suy ra

$$\exists b \in \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}, \quad G(b) = -1. \qquad (3)$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng suy ra:

$$\exists c \in \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}, \quad G(c) = 1. \qquad (4)$$

Tiếp theo, giả sử trong k số nguyên $a_1; a_2; \ldots; a_k$ có ít nhất 4 số a_i để $G(a_i) = 1$.

Không mất tổng quát, giả sử

$$G(a_1) = G(a_2) = G(a_3) = G(a_4) = 1.$$

Khi đó,

$$G(x) - 1 \equiv (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) \cdot Q(x)$$

trong đó, $Q(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên.

Thay $x = b$ vào đồng nhất thức trên, với lưu ý tới (3), ta được

$$-2 = (b - a_1)(b - a_2)(b - a_3)(b - a_4) \cdot Q(b).$$

Như vậy, -2 phân tích được thành tích của ít nhất 4 số nguyên đôi một phân biệt. Điều này là không thể. Vì vậy, chỉ có thể có tối đa 3 số a_i sao cho $G(a_i) = 1$. (5)

Hoàn toàn tương tự, nhờ (4), ta cũng chứng minh được rằng chỉ có thể có tối đa 3 số aj sao cho $G(a_j) = -1$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $k \leq 6$, dẫn tới $n \leq 10$, trái với giả thiết của đề bài. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ giả sử phản chứng là sai. Bài toán được chứng minh.

Cách 2 *(phỏng theo lời giải của bạn Huỳnh Nhật Hào, lớp 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bình Định).*

Lời giải được trình bày dưới đây là lời giải cho bài toán, nhận được từ bài đã ra bằng cách thay giả thiết $n \geq 12$ bởi giả thiết $n \geq 10$.

Theo giả thiết của bài ra, tồn tại $k \geq [n/2] + 1 \geq 6$ số nguyên $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ sao cho $P(a_i) = 1$ với mọi $1 \leq i \leq k$. Vì đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên nên

$$(a_i - a_j) \mid (P(a_i) - P(a_j)) \qquad (1)$$

với mọi $1 \leq i < j \leq k$. Chọn i,j sao cho $j - i \geq 3$; khi đó $a_j - a_i \geq 3$. Mà $P(a_i) - P(a_j) \leq 2$ (do $P(a_i) = P(a_j) = 1$) nên từ (1) suy ra $P(a_i) = P(a_j)$ với mọi $i,j \in \{1; 2;...; k\}$ mà $j - i \geq 3$. Từ đây, do $k \geq 6$ nên ta có:

$$P(a_1) = P(a_j) \quad \text{với mọi } 4 \leq j \leq k;$$
$$P(a_2) = P(a_j) \quad \text{với mọi } 5 \leq j \leq k;$$
$$P(a_3) = P(a_j) \quad \text{với mọi } 6 \leq j \leq k.$$

Từ đó suy ra $P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_k)$. (2)

Bây giờ, giả sử phản chứng rằng

$$P(x) \equiv G(x) \cdot H(x)$$

trong đó $G(x)$ và $H(x)$ là hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Không mất tổng quát, giả sử $degG \leq degH$.

Khi đó, ta có $degG \leq [n/2]$.

Vì với mọi $1 \leq i \leq k$,

$$|P(a_i)| = |G(a_i)| \cdot |H(a_i)| = 1$$

và $G(a_i)$, $H(a_i)$ là các số nguyên dương (do $G(x)$ và $H(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên) nên suy ra

$$|G(a_i)| = 1 \quad \text{với mọi } 1 \leq i \leq k.$$

Từ đó, vì $G(x)$ là đa thức với hệ số nguyên nên bằng cách thay $P(x)$ bởi $G(x)$ trong các lập luận suy ra (2) từ (1) ở trên, ta được:

$$G(a_1) = G(a_2) = \cdots = G(a_k).$$

Suy ra $k \leq degG$ (do $G(x)$ khác hằng); dẫn tới $[n/2] + 1 \leq [n/2]$. Điều vô lí này chứng tỏ giả sử phản chứng là sai. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét.

1. Trong lời giải của mình, bạn *Huỳnh Nhật Hào* đã hơi "vội vàng" trong các lập luận để suy từ (1) ra (2) (ở lời giải Cách 2). Vì thế, bạn đã không nhận ra khả năng làm nhẹ giả thiết $n \geq 12$ của bài đã ra.

2. Các bạn *Nguyễn Hoàng Đức, Trịnh Hoàng Hiệp* và *Nguyễn Tấn Tài* (cùng là học sinh lớp 11A, THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước) cũng có lời giải đúng. Ý tưởng giải của 3 bạn tương tự như ý tưởng giải của lời giải Cách 1 trên đây.

Nguyễn Duy Thái Sơn

P20. Hai người, *A* và *B*, chơi trò "rót bia" như sau. Có ba cái cốc dung tích một lít. Ban đầu, mỗi cốc chứa a lít bia. Hai người luân phiên nhau rót bia từ cốc này sang các cốc kia. Ở lượt chơi của mình, mỗi người sẽ chọn ra một cốc bia tùy ý và san một ít phần bia từ cốc này sang hai cốc còn lại một cách tùy ý. *A* là người đầu tiên rót bia và muốn làm tràn bia ở một cốc nào đó; ngược lại, *B* luôn tìm cách ngăn cản *A* thực hiện ý muốn của mình. *A* được coi là người thắng cuộc nếu ở lượt chơi nào đó của mình, *A* làm một cốc nào đó tràn bia; ngược lại, nếu *A* không thể làm bất cứ cốc nào tràn bia thì *B* được coi là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến lược thắng, nếu:

a) $a = 0,5$.

b) $a = 0,4$.

c) $0 < a < 1$ bất kì.

Lời giải *(dựa theo lời giải của tác giả bài toán).*

• Dễ thấy, người A sẽ thắng ngay ở lần rót đầu tiên của mình, nếu $\frac{1}{2} < a < 1$

Xét $0 < a \leq \frac{1}{2}$

Xét cách rót bia như sau của người A ở mỗi lượt chơi của mình:

- Lượt 1: San đều toàn bộ lượng bia ở một cốc tùy ý sang 2 cốc còn lại.

- Lượt 2: Chọn 2 cốc có nhiều bia nhất, rót toàn bộ lượng bia ở một trong hai cốc đó sang cốc còn lại.

Với cách rót như trên, sau lượt 1 của A, lượng bia trong 3 cốc sẽ là: $\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}, 0$

Khi đó, sau lượt rót bia thứ nhất của B, lượng bia trong 3 cốc sẽ là: $x, \frac{3a}{2}+y, z;$ với $x, y, z \geq 0$ và $x+y+z=\frac{3a}{2}$

Ta có:

$$\frac{3a}{2}+y+\max\{x,z\} \geq \frac{3a}{2}+\frac{x+y+z}{2}=\frac{9a}{4}.$$

Vì thế, nếu $\frac{1}{2} \geq a > \frac{4}{9}$ thì ở lượt thứ 2 của mình, A sẽ làm tràn bia ở một cốc nào đó (do $\frac{9a}{4}>1$).

Như vậy, nếu $1 > a > \frac{4}{9}$ thì A là người có chiến lược thắng.

• Xét $0 < a \leq \frac{4}{9}$

Giả sử, sau lần rót bia nào đó của A, lượng bia trong các cốc là: x, y, z; với $1 \geq x \geq y \geq z \geq 0$ và $x+y+z = 3a$.

Xét cách rót bia như sau của *B*, sau lần rót vừa nêu trên của *A*:

- *Tình huống 1:* Nếu $y \geq \frac{3a}{4}$ thì *B* rót bia ở cốc có x lít bia sang cốc có z lít bia sao cho lượng bia trong 2 cốc đó bằng nhau.

- Tình huống 2: Nếu $0 \leq y < \frac{3a}{4}$ thì B rót $x-\frac{3a}{4}$ lít bia ở cốc có x lít bia sang hai cốc còn lại sao cho lượng bia ở hai cốc đó bằng nhau (B có thể làm được như vậy vì trong trường hợp này ta có $x > \frac{3a}{2}$ và $y-z < \frac{3a}{4} < x-\frac{3a}{4}$)

Với cách rót bia như trên, sau lượt rót của *B*, lượng bia trong mỗi cốc đều không ít hơn $\frac{3a}{4}$ (lít).

Thật vậy, hiển nhiên ta có điều vừa nêu trên nếu tình huống 2 xảy ra. Trường hợp xảy ra tình huống 1, do

$$x+z \geq \frac{x+y}{2}+z \geq \frac{x+y+z}{2}=\frac{3a}{2}$$

nên ta có $\frac{x+z}{2} \geq \frac{3a}{4}$.

Như vậy, sau lần rót bia của *B*, tổng lượng bia trong 2 cốc tùy ý không vượt quá

$$3a-\frac{3a}{4}=\frac{9a}{4} \leq 1 \quad (\text{do } 0 < a \leq \frac{4}{9}).$$

Vì thế, sau mỗi lần rót bia của *B*, *A* không thể làm tràn bia ở bất cứ cốc nào.

Hiển nhiên, với $0 < a \leq \frac{4}{9}$, *A* không thể làm tràn bia ở bất cứ cốc nào, sau lần rót bia đầu tiên của mình. Vì thế, lập luận trên đây cho thấy, trong trường hợp này, *B* là người có chiến lược thắng.

• Vậy, tóm lại, *A* có chiến lược thắng khi và chỉ khi $\frac{4}{9} < a < 1$; *B* có chiến lược thắng khi và chỉ khi $0 < a \leq \frac{4}{9}$. Từ đây, hiển nhiên ta có câu trả lời cho các câu hỏi a), b) và c) của bài toán.

Nhận xét.

1. Dễ thấy, để cản trở *A* thắng cuộc, *B* phải cố gắng hết mức có thể để sau lần rót của mình, tổng lượng bia ở 2 cốc có nhiều bia nhất không vượt quá 1 (lít). Đây chính là chìa khóa để xây dựng chiến lược thắng của mỗi người (khi điều kiện cho phép), trong lời giải trên.

2. Tất cả các bạn đã gửi lời giải cho bài toán tới Tòa soạn đều cảm nhận được chìa khóa nêu trên và đều tìm cách sử dụng chìa khóa đó để xây dựng chiến lược thắng cho mỗi người, *A* và *B*, trong các trường hợp có thể. Tuy nhiên, việc sử dụng chìa khóa của các bạn

www.toanhoc.com

chưa tốt, thể hiện qua việc các bạn bị sa đà vào việc chia nhỏ các trường hợp khi xây dựng chiến lược thắng cho *B*, khi $0 < a \le \frac{4}{9}$. Đặc biệt, có bạn đã khá "dại dột" khi cố gắng chứng minh A có chiến lược thắng chỉ khi $1 > a > \frac{4}{9}$, thay vì chỉ ra chiến lược thắng của B khi $0 < a \le \frac{4}{9}$

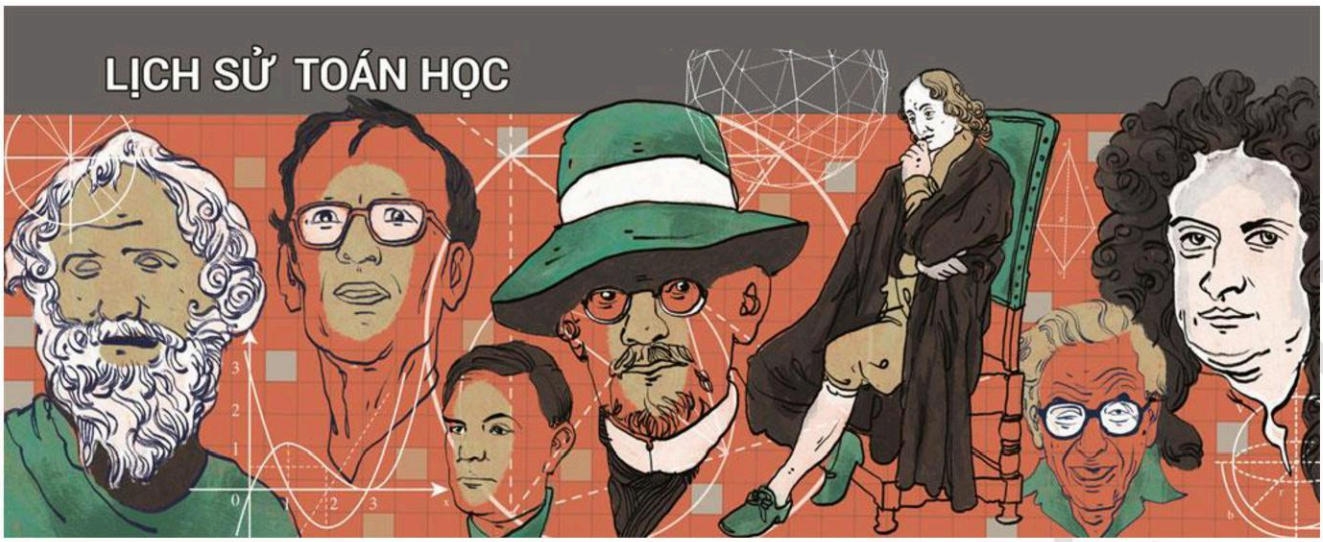
3. Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Nguyễn, Phan Quốc Vượng* (cùng là học sinh lớp 10T, trường PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh); *Phạm Quang Toàn* (lớp 12, THPT Indoopilly, Queensland, Australia); *Nguyễn Đức Trung* (sinh viên Khoa KSTN Toán Tin, K60, ĐH Bách khoa Hà Nội) và một bạn không ghi tên. Trong đó, bạn *Phan Quốc Vượng* có lời giải tốt hơn cả.

4. Để đảm bảo tính chính xác Toán học, trong bài ra cần bổ sung giải thiết "bia không sủi bọt, khi được rót từ cốc này sang cốc khác" hoặc "bia dùng trong cuộc chơi là bia không bọt"!

Nguyễn Khắc Minh



www.toankhoa.com



Đời sống toán học Ở NƯỚC VIỆT NAM DÂN CHỦ CỘNG HÒA

Alexander Grothendieck
(Dịch từ nguyên bản tiếng Pháp: Phan Thị Hà Dương)

Lời tựa (Ngô Việt Trung) Đây là bản dịch bài báo cáo của Grothendieck về chuyến đi thăm Việt Nam tháng 11/1967 được viết theo lời mời của Khoa Toán, Đại học Khoa học Paris: "La Vie Mathematique en République Démocratique du Vietnam (Exposé fait le 20 Décembre 1967, sur invitation du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Paris)." Bản báo cáo được đánh máy ngay sau chuyến đi. Trong bản báo cáo có câu "có một nền toán học Việt Nam thực sự ở nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa", được gạch thêm bên dưới để nhấn mạnh. Grothendieck có lẽ là nhà toán học phương Tây đầu tiên đến thăm miền Bắc Việt Nam. Chuyến đi của ông gây một tiếng vang lớn trong nền khoa học thế giới vì nó xảy ra trong lúc miền Bắc đang bị máy bay Mỹ đánh bom dữ dội và Grothendieck là nhà toán học nổi tiếng nhất thời bấy giờ. Bản báo cáo này đã được dịch sang tiếng Đức ngay lập tức và được Hội sinh viên Đại học Bonn (Đức) phân phát trong cuộc "Cách mạng sinh viên" năm 1968.

Qua bài báo có thể thấy tình cảm của Grothendieck đối với nhân dân Việt Nam và những dự định của ông nhằm giúp đỡ nền toán học Việt Nam non trẻ. Rất tiếc là những dự định này không thực hiện được do hoàn cảnh lúc đó. Sau này, chỉ có một người trong số người ông dự kiến đưa sang Pháp làm việc trở thành học trò của ông. Đó là GS. Hoàng Xuân Sính, bảo vệ luận án tiến sĩ về đề tài Gr - phạm trù năm 1975.

Chúng ta có rất ít tư liệu về chuyến đi Việt Nam của Grothendieck. Rất mong những người đã từng tiếp xúc với ông viết lại những kỷ niệm về chuyến đi này. Đó sẽ là những tư liệu quý giá không chỉ cho nền khoa học Việt Nam mà còn cho cả nền khoa học thế giới về một con người vĩ đại. Gần đây, GS. Neal Koblitz (Đại học Washington) có viết một bài báo về chuyến đi Việt Nam của Grothendieck nhân dịp đến thăm nơi Grothendieck đã giảng bài ở Thái Nguyên (Grothendieck's 1967 Lectures in the Forest in Vietnam, Mathematical Intelligencer 35, No. 2, 32 - 34, 2013). Chẳng lẽ, chúng ta lại không quan tâm đến chính một phần lịch sử của chúng ta.

I. Đầu năm nay, qua vài người trung gian, tôi nhận được từ phía một số nhà toán học Việt Nam lời đề nghị tất cả các bản in rời về đề tài Hình học đại số và Đại số mà tôi có thể tìm

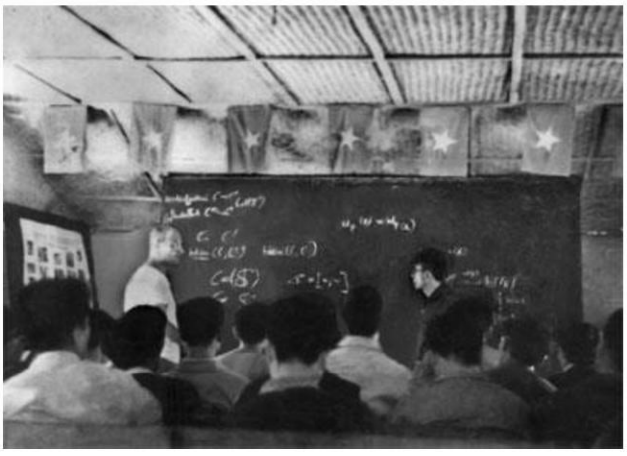
được. Chắc hẳn giống như hầu hết các đồng nghiệp "phương Tây" của mình, cho đến lúc đó tôi không biết gì về sự tồn tại một đời sống toán học ở nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa (Việt Nam DCCH), huống hồ những đồng nghiệp Việt Nam nơi đó lại mong muốn cập nhật một phần của toán học hiện đại vốn không được xem là dễ như Hình học đại số. Khỏi cần phải nói rằng tôi cảm thấy rất vui mừng vì có thể hữu ích cho những đồng nghiệp Việt Nam, và tôi đã nhanh chóng cho gửi đồng thời tất cả các bản in rời cá nhân tôi có cũng như tất cả các tài liệu toán được Viện Nghiên cứu Khoa học Cao cấp (l'I.H.E.S, ở Paris) phụ trách phát hành. Như về sau tôi cũng có thể nhận thấy trong chuyến đi mới đây của tôi đến Việt Nam DCCH, tất cả những tài liệu đó đều đã đến đúng địa chỉ, và điều hay hơn nữa là một số trong đấy đã được các nhà toán học ở đó sử dụng.



Đội mũ rơm phòng không, 1967

Sự tiếp xúc gián tiếp đầu tiên đó đã cho tôi ý tưởng, vào tháng Năm năm nay, về việc đề xuất đến Việt Nam hai đến ba tháng, để giảng dạy hoặc trình bày semina về toán, và chủ đề cũng như trình độ sẽ được xác định tùy theo nhu cầu tại chỗ. Tôi đã gửi đề xuất này đến ông Mai Văn Bộ, Đại sứ Việt Nam DCCH tại Pháp, người đã rất nhiệt tình tiếp nhận đề xuất này và đã chuyển nó đến các cơ quan chức năng ở Hà Nội. Trái với dự đoán và bất chấp những khó khăn trong việc tổ chức một chuỗi các hội thảo cho một người ngoại quốc ở Việt Nam DCCH trong những điều kiện hiện nay, vào đầu tháng Mười, tôi đã nhận được một lời mời chính thức của Hội Toán học Việt Nam cho thời hạn từ tháng Mười một năm 1967. Về phía mình, l'I.H.E.S đã chấp nhận cho tôi một kỳ phép trong thời gian này, và điều tốt hơn là đã đảm bảo chi phí chuyến đi, chi phí này (thiếu dự toán trước) đã không thể được phía Việt Nam DCCH tài trợ. Điều này cũng đã được minh chứng sau đó qua việc Bộ phận Quan hệ văn hoá của Bộ Ngoại giao ở Paris đã không gây bất cứ khó khăn nào trong việc tài trợ tất cả chi phí của chuyến đi.

Thật không may, do sự thiếu liên lạc giữa các bộ phận hữu quan, khởi hành từ Paris ngày 31 tháng Mười, tôi buộc phải chờ khoảng mười ngày ở Phnom Penh (Campuchia) trước khi đến Hà Nội vào ngày 10 tháng Mười một bằng một chuyến bay hàng tuần của Ủy ban kiểm soát quốc tế, đây là máy bay duy nhất bay chặng Phnom Penh – Hà Nội. Tôi rời Hà Nội ngày 1 tháng Mười hai, như vậy là tôi đã trải qua tất cả đúng 21 ngày ở Việt Nam DCCH, nghĩa là ba tuần. Mục đích bài phát biểu của tôi hôm này là ôn lại một số ấn tượng và quan sát của mình trong chuyến đi này, quả là khá ngắn ngủi - quá ngắn ngủi so với ý muốn của tôi bởi vì đất nước này vô cùng hấp dẫn – nhưng đầy ắp những ấn tượng phong phú và mạnh mẽ.



Lớp học trong rừng

II. Chuyến đi của tôi được tổ chức như sau. Trong vòng một tuần (chính xác hơn là chín ngày), tôi ở lại Hà Nội để trình bày một số bài giảng có tính chất chung cho một cử tọa tương đối rộng, khoảng sáu mươi người trong ngày đầu tiên, không giới hạn chỉ cho các nhà toán học mà cho cả những nhà khoa học khác (ít nhất là có một số nhà vật lý). Sau đó tôi đến nơi sơ tán của Trường Đại học Tổng hợp (cách thủ đô khoảng một trăm kilômét) trong mười ngày, dành phần lớn thời gian cho một semina chuyên môn hơn về các phạm trù và Đại số đồng điều, với khoảng ba mươi đến bốn mươi người nghe mà phần lớn theo tôi từ Hà Nội nơi họ đã nghe những bài giảng đại chúng của tôi. Các giảng viên Việt Nam DCCH có một lịch làm việc rất dày đặc, những người dự kiến tham dự các buổi trình bày của tôi đã được miễn giảm tất cả các trách nhiệm khác (việc giảng dạy hay tất cả các việc phụ khác) trong thời gian lưu trú của tôi. Hầu hết những người tham dự được phân bố khá đều từ hai cơ sở lớn và ít nhiều tương đương nhau của Giáo dục đại học của Việt Nam DCCH là Đại học Tổng hợp Hà Nội và Đại học Sư phạm (của Hà Nội và của Vinh), mỗi trường sơ tán về những nơi khác nhau ở nông thôn Việt Nam. Như vậy là mỗi người phải trước tiên đến Hà Nội (hầu hết bằng xe đạp, hiện nay xe đạp đang là phương tiện thông dụng nhất ở Việt Nam), rồi tất cả đến nơi sơ tán của Trường Đại học Tổng hợp, trường sẽ phải đảm bảo việc ăn ở và phương tiện đi lại cho những người đến từ nơi khác. Thêm vào đó là những sự chăm sóc tận tình đối với người thuyết trình, như tất cả các khách ngoại quốc đến Việt Nam DCCH, luôn có mặt một công chức (của "Ủy ban khoa học nhà nước") lo toan cho tôi trong toàn bộ thời gian lưu trú để đảm bảo cho sự an toàn, sự tiện nghi và các sinh hoạt thường ngày của tôi, ngoài ra còn có một người lái xe trong thời gian tôi ở Hà Nội, và rồi thêm cả một người đầu bếp trong thời gian tôi ở nông thôn – ta có thể tưởng tượng rằng cả ba người rất nhàn rỗi trong thời gian họ được giao chăm lo cho tôi. Vì vậy, ta phải băn khoăn về việc tổ chức quá chu đáo ở Việt Nam DCCH cho một kỳ semina ba tuần tầm thường. Nỗ lực này cũng điển hình cho một sự nỗ lực có tính hệ thống được triển khai tại Việt Nam DCCH dành cho tất cả các hoạt động để khuyến khích việc giảng dạy ở mọi trình độ, trong những điều kiện rất khó khăn và bất chấp các mệnh lệnh quốc phòng.

Như phần lớn các hoạt động ít nhiều công cộng, các buổi hội thảo diễn ra từ khoảng sáu giờ đến mười giờ sáng, vì các trận oanh tạc thường diễn ra ban ngày và hiếm khi trước mười một giờ sáng. Bầu trời khá u ám suốt phần lớn thời gian tôi ở lại đây, và vì vậy cũng có ít trận ném bom. Những trận oanh tạc nghiêm trọng đầu tiên đã được dự báo, và quả thực đã xảy ra, vào ngày hôm trước chuyến đi về nông thôn của chúng tôi, thứ Sáu ngày 17 tháng Mười một. Bài nói của tôi bị còi báo động ngắt quãng ba lần, trong lúc đó chúng tôi trú ẩn dưới hầm. Mỗi lần báo động kéo dài khoảng mươi phút. Điều gây sửng sốt với một người mới đến lúc ban đầu là thái độ rất bình tĩnh, gần như thản nhiên, của dân chúng đối với còi báo động, điều đã trở thành thói quen hàng ngày. Tôi có thể quan sát nhiều người trong các đợt báo động, dù trên đường hay trong hầm, kể cả trẻ em và người già, nhưng không thấy ai có dấu hiệu của sự căng thẳng. Cũng cần phải nói rằng đã có sự tổ chức cực kỳ hiệu quả để giảm thiểu các nạn nhân của các trận bom: hầm cá nhân hoặc hầm tập thể ở khắp nơi trong thành phố, sự phân công trách nhiệm rất chặt chẽ khi có báo động, theo từng khu và theo từng phố, bao gồm các công tác sơ cứu – một lá cờ chữ thập đỏ nhỏ để làm dấu hiệu cho những trạm cứu thương đã được cẩn thận che dấu khỏi tầm nhìn từ trên cao của các máy bay địch. Ta nhận thấy một sự tin tưởng lớn trong dân chúng, bao gồm cả sự tin tưởng vào tính hiệu quả của các D. C. A của họ, và sự quan tâm chung dồn vào số máy bay bị bắn hạ (đề tài bàn luận này có vẻ như thay thế cho chuyện trời nắng hay mưa) nhiều hơn là vào các thiệt hại mà các trận oanh tạc gây ra – về những đề tài này thì thậm chí đài phát thanh chỉ thông báo dè dặt, vì những lý do hiển nhiên. Ngay sau khi báo động qua đi, tất cả mọi người (ít ra là ở các khu phố không bị ảnh hưởng) lại tiếp tục công việc như chưa có gì xảy ra.

Trong một lần báo động vào buổi sáng thứ sáu ấy, một quả bom bi nổ chậm đã rơi xuống sân trường Đại học Bách khoa Hà Nội, và khi tiếng còi báo động đã kết thúc, vụ nổ đó đã làm chết hai giảng viên toán của trường. Ông Tạ Quang

Bửu, một nhà toán học và đồng thời cũng là Bộ trưởng Bộ Đại học và trung học chuyên nghiệp (và cũng tham dự các bài giảng của tôi trong thời gian tôi ở Hà Nội) đã kín đáo thông báo tin đó trong giờ giảng của tôi và đã vội đi ngay, trong khi những người khác tiếp tục theo dõi bài giảng đồng thời chờ đợi lần báo động tiếp theo. Bài giảng ngày hôm sau đã phải dời sang tuần sau đó, ở nơi sơ tán của trường Đại học Tổng hợp, để tránh việc tập trung nhiều cán bộ ở Hà Nội trong thời kỳ bị ném bom. Có vẻ như đây là lần đầu tiên từ khi chiến tranh leo thang có giảng viên toán bị chết trên tổng số cũng vào khoảng hai đến ba trăm hoặc có thể hơn (theo tôi hình dung). Thực tế, mặc dù mỗi trận bom đều gây ra một số nạn nhân (khoảng hai mươi người ngày hôm đó), khả năng một người bị chết là khá nhỏ, ngay cả trong suốt nhiều năm, như ví dụ trên vừa thể hiện. Qua những lần trò chuyện với người Việt Nam, tôi có cảm tưởng rằng những gia đình có người chết trong thời gian chiến tranh leo thang là ngoại lệ, chứ không phải thường lệ. Tất nhiên là khả năng bị chết còn thấp hơn đối với một người nước ngoài chỉ ở lại vài tuần và luôn nhận được một sự đề phòng tối đa để đảm bảo cho sự an toàn của anh ta.

Những bài giảng được trình bày bằng tiếng Pháp, khoảng một nửa cử tọa hiểu được tương đối tốt (trong khi đó hầu như không ai nói tiếng Anh). Trong số những đồng nghiệp Việt Nam dưới ba mươi tuổi, rất ít người nói tiếng Pháp, mà nhiều người nói tiếng Nga vì đã học đại học ở Liên bang Xô Viết. Những bài giảng được một người nghe dịch trực tiếp ra tiếng Việt. Tôi lưu ý rằng ngôn ngữ khoa học tiếng Việt đang được các nhà khoa học Việt Nam xây dựng trong mọi ngành từ khoảng mươi năm nay, một công việc tất nhiên còn lâu mới hoàn thiện. (Trong Toán học, những bước đầu tiên cho hướng đi này được nhà toán học Việt Nam Hoàng Xuân Hãn khởi xướng, ông đã xây dựng nên cuốn từ điển toán Pháp - Việt đầu tiên (vào khoảng những năm 1940)). Việc dịch nói chung cũng không được kỹ lưỡng lắm, chỉ để có cơ hội trao đổi ngắn bằng tiếng Việt. Ông Tạ Quang Bửu là một trong những người chú ý cho việc dịch được đúng hoàn hảo, và thường tham gia bằng một số chú ý nhanh về thuật ngữ. Về phần cử toạ, cảm nhận chung của tôi là phần lớn người nghe hiểu ý chung, ít nhất là như vậy, những gì tôi nói (hay những gì người dịch nói), và phần lớn quan tâm theo dõi. Trong mọi trường hợp, không nghi ngờ gì rằng người dịch đã luôn hiểu rất tốt, và đã được đề nghị làm nhiệm vụ phiên dịch của mình để có một sự hài lòng chung. Người dịch thay đổi tùy theo chủ đề bài giảng, nhưng sau một số buổi và có vẻ như được một sự đồng tình chung giữa những người nghe, sự lựa chọn đã dừng lại ở ông Đoàn Quỳnh, giảng viên của Trường Sư phạm, chắc hẳn là một trong các nhà toán học vững vàng và tài năng nhất trong số đồng nghiệp của chúng ta ở Việt Nam DCCH.



Ở nơi sơ tán cùng giáo sư Hoàng Tụy (người đầu tiên bên phải)

Hệ thống dịch đồng thời này theo tôi là tuyệt vời, và thật dễ chịu với cả người nói lẫn người nghe. Việc dịch từng câu từng câu một này đã cho phép người giảng bài có được sự thích thú khi tập hợp các ý tưởng của mình từng ý từng ý một trong quá trình thuyết trình mà không cần tập trung quá mức, và nó cũng cho phép người nghe có thể theo dõi với một nhịp độ hợp lý hơn là nghe một bài giảng không ngắt quãng.

Bốn giờ giảng với nhịp độ này (với hai lần nghỉ ngắn) với tôi có vẻ như đỡ mệt hơn nhiều so với hai giờ giảng bình thường. Tuy nhiên phải nói rằng công việc của người dịch nặng nhọc hơn nhiều, và đến cuối kỳ làm việc của tôi ở Việt Nam DCCH, tôi rất khoẻ khoắn và hoàn toàn thư giãn trong khi đó ông Quỳnh trông phờ phạc rõ ràng.

Tất cả các bài giảng đều được bà Hoàng Xuân Sính ghi chép lại, bà cũng từ trường Đại học Sư phạm, và là một trong số hiếm hoi các nhà

toán học (hơn nữa là nhà toán học nữ) được đào tạo tại Pháp (bà đã lấy bằng Agrégation năm 1959). Những ghi chép này được hình thành và chép lại bằng tiếng Pháp. Buổi sáng thường được dành cho các bài giảng miệng, và buổi chiều thường để những người nghe trao đổi lại với nhau về các chủ đề được đề cập đến trong buổi sáng, và để làm sáng tỏ những điểm có vẻ chưa rõ ràng với người này hay người khác. Một cách chung và chính thức, phương pháp làm việc tự nguyện là phương pháp làm việc cùng nhau, bao gồm cả đối với kế hoạch khoa học. Tất nhiên là phương pháp này là tuyệt vời nếu tính đến một trình độ nào đó, nhưng ta sẽ nhận ra nó có những bất tiện cực kỳ nghiêm trọng nếu muốn áp dụng nó vào trình độ nghiên cứu; tôi sẽ trở lại vấn đề này sau. Mặt khác, hầu hết ngày nào buổi chiều tôi cũng đón tiếp các nhà toán học trẻ để bàn luận về các chủ đề khác nhau. Họ thường đến theo nhóm hai hoặc nhiều hơn, nhưng không bao giờ ít hơn. Có lẽ giống như tuyệt đối các điều khác ở Việt Nam DCCH (ít nhất là trong thời kỳ này), những buổi đón tiếp cũng được tổ chức một cách chăm chút, như tôi có thể nhận ra sau một thời gian: những nhà toán học muốn gặp tôi cần phải báo trước cho "người chịu trách nhiệm" nếu như chính họ không phải là người chịu trách nhiệm, và phải làm một báo cáo về những đề tài thảo luận của họ. Như vậy, tôi nghĩ là tất cả người nghe nào có ý định nói chuyện với tôi một hay vài lần đều có khả năng thực hiện nó. Để có một ví dụ khác về thói quen tập thể ở Việt Nam DCCH, tôi lưu ý rằng khoảng gần cuối kỳ làm việc của tôi đã có một buổi trao đổi chung dự kiến có sự tham dự của tất cả những người đã nghe giảng, buổi trao đổi mà mục đích là để mỗi người xác định rõ tác dụng chính xác cho riêng họ từ các bài giảng mà họ đã nghe. Chắc hẳn là phần lớn chúng ta sẽ cảm thấy phiền toái khi phải trả lời nếu người ta đặt ra cho ta những câu hỏi như vậy sau một bài giảng hay một semina.

Có lẽ cũng thú vị nếu kể ra đây chi tiết chương trình của các bài giảng của tôi, một chương trình đã được xây dựng cùng với các đồng nghiệp Việt Nam:

Các bài giảng định hướng chung.

– Thứ Hai ngày 13: *Đào tạo những người nghiên cứu toán và điều kiện chung cho nghiên cứu khoa học.*

– Thứ Ba ngày 14: *Khái niệm lược đồ.*

– Thứ Tư ngày 15: *Giải tích hàm.*

– Thứ Năm ngày 16: *Đại số đồng điều.*

– Thứ Sáu ngày 17: *Đại số đồng điều. Lý thuyết bó.*

– Thứ Hai ngày 20: *Tô pô (và đại số).*

– Thứ Hai ngày 27 và thứ năm ngày 30: *Giả thuyết của Weil (tổng cộng bốn giờ).*

Các semina chi tiết hơn.

(a) Tích tenxơ tô pô và các không gian hạch (hai ngày).

(b) Đại số đồng điều (bảy ngày).

Các ý tưởng của các bài giảng trong hội thảo này đều trong phạm vi đã biết và phần lớn đã được công bố trên giấy trắng mực đen của các tạp chí có tiếng. Vì lý do này, tôi nghĩ kỳ làm việc của tôi có ích về mặt tinh thần, như một kích thích với những người bạn toán Việt Nam của chúng ta, hơn là về mặt kế hoạch thâu nhận kiến thức hữu hiệu. Và những bài giảng định hướng chung rõ ràng có ích hơn nhiều những bài giảng nhiều kỹ thuật trong hai semina. Trong một đất nước vì hoàn cảnh bắt buộc mà có ít quan hệ với bên ngoài (nếu ta không tính những trận bom bi trong số các quan hệ đó), điều đặc biệt khó khăn đối với một nhà toán học ít kinh nghiệp là tự định hướng trong hằng hà những hướng đi khác nhau, là phân biệt được đâu là vấn đề đáng quan tâm và không đáng quan tâm. Có thể hữu ích đối với họ khi được nghe những sự thật như, chẳng hạn, Tô pô đại cương phải được xem như một ngôn ngữ không thể thiếu và chỉ thế thôi chứ không phải là một ngành khoa học đòi hỏi các nghiên cứu khác, và việc hiểu biết về một số hướng trong chuyên ngành đó chỉ liên hệ với bản thân Tô pô mà thôi. Hoặc là Giải tích hàm vẫn còn mang đến một số vấn đề thú vị cho các chuyên gia, nhưng không cần thiết phải dành hết đời mình cho giải tích hàm, vv. Đáng tiếc thay, khả năng hạn chế của mình đã cản trở tôi có thể trở nên hữu ích cho những đồng nghiệp Việt Nam làm giải tích, và cũng vậy với các "nhà đại số". Chắc chắn sẽ rất hữu ích nếu một nhà giải tích kỳ cựu, như L. Schwartz hay B. Malgrange chẳng hạn, có thể làm một chuyến đi Việt Nam DCCH như tôi đã làm. Những

người Việt Nam (có trách nhiệm cũng như các nhà toán học đầu ngành) tuyên bố với tôi rằng họ sẽ vô cùng hài lòng được đón tiếp những nhà toán học Pháp khác, ngay khi các hoàn cảnh cho phép. Đáng buồn thay điều đó có vẻ không thành hiện thực trong một tương lai gần vì sự tăng cường của các trận oanh tạc từ tháng Mười vừa qua (nó cũng đã làm hủy chuyến đi dự định vào tháng Mười một của tôi; chỉ là do sơ suất, vì không biết chuyện hủy này, mà dù sao cuối cùng tôi đã đến được Hà Nội vì nhận được sự ưu tiên của các cấp có thẩm quyền Việt Nam, những người đã muốn tránh cho tôi phải trở về Paris tay không!).

III. Sau những nhìn nhận chung về chương trình khoa học và việc tổ chức chuyến đi của tôi ở Việt Nam DCCH, đã đến lúc quay về chủ đề chính và nói về những gì tôi có thể thấy và nghe được về đời sống toán học ở Việt Nam. Một phát hiện đầu tiên, và thậm chí là một phát hiện đáng kinh ngạc khi xét đến hoàn cảnh, đó là đã thực sự có một đời sống toán học xứng đáng với tên gọi của nó ở Việt Nam DCCH.

Để đánh giá đúng giá trị của "Định lý tồn tại" này, cần phải ghi nhớ rằng, trước hết vào năm 1954 khi kết thúc cuộc chiến tranh giải phóng kéo dài tám năm của Việt Nam chống lại sự chiếm đóng của thực dân Pháp, nghĩa là cách đây 13 năm, giáo dục đại học hầu như không tồn tại ở Việt Nam DCCH. Trong cuộc chiến tranh vô cùng khốc liệt 1946 - 1954, nỗ lực chính của việc giảng dạy là xóa nạn mù chữ cho quần chúng nông dân trên diện rộng, những năm tiếp theo đó nỗ lực này được duy trì liên tục để đạt được mục tiêu cuối cùng, cho đến khoảng năm 1958 khi đã xoá hết nạn mù chữ ở các vùng đồng bằng. (Xem "Giáo dục ở Việt Nam DCCH", trong Nghiên cứu về Việt Nam, tháng Năm 1965, có những nghiên cứu rất thú vị về các vấn đề của việc giảng dạy ở Việt Nam DCCH cho đến năm 1965). Vào thời gian đó, nếu tôi không nhầm, ở Việt Nam DCCH có một và duy nhất một nhà toán học có bằng tiến sĩ: ông Lê Văn Thiêm, ông đã làm luận án tiến sĩ ở Pháp vào khoảng năm 1942, và rồi đã quay trở về Việt Nam (trong chiến tranh). Một nhà toán học khác ít nhiều tự học (mà tôi đã nói đến), Tạ Quang Bửu, thì lại ngập đầu với công việc của Bộ trưởng Bộ quốc phòng; (chính ông đã ở đoàn Việt Nam để ký Hiệp ước Genève năm 1954). Như vậy là phải xây dựng nền giáo dục đại học gần như từ số không. Phương pháp được áp dụng (và chắc hẳn là phương pháp duy nhất khả thi) là gửi thanh niên sang học đại học ở các nước xã hội chủ nghĩa, nhất là ở Liên bang Xô Viết. Trong số khoảng một trăm giảng viên toán ở Đại học Tổng hợp và Đại học sư phạm, khoảng 30 người đã được đào tạo như vậy ở nước ngoài trong khoảng thời gian từ bốn đến sáu năm. Họ có trình độ của bằng "tiến sĩ candidate" của Nga, bằng này có lẽ hơi thấp hơn bằng tiến sĩ Pháp một chút (phải có một bằng khác trình độ cao hơn thì mới đủ điều kiện để có một ghế ở trường Đại học). Điều đó có nghĩa là mỗi người đều đã phải công bố một công trình khoa học hoặc thậm chí là hai, thường là trong một tạp chí xô viết hoặc của một nước Đông Âu. (Trong những năm gần đây, họ cũng công bố trực tiếp bằng tiếng Việt, và khi tôi ra đi thì nhận được một tập các bản in rời công bố bằng tiếng Việt). Trong số họ có rất ít người có chức danh giáo sư, hầu hết là có chức danh giảng viên. Còn khoảng ba mươi người khác đang tu nghiệp về toán vẫn đang ở nước ngoài, và họ sẽ trở về Việt Nam DCCH trong vòng vài năm tới sau khi học xong. Hai phần ba đội ngũ giảng viên toán hiện nay đã được đào tạo tại chỗ trong những năm gần đây. Đó là những giảng viên vẫn còn ít kinh nghiệm giảng dạy và còn ít hơn nữa kiến thức toán. Sự gia tăng số lượng sinh viên toán (năm trăm chỉ tính riêng trường Đại học sơ tán của Hà Nội) và sự tản mác bắt buộc trong điều kiện chiến tranh kể từ khi chiến tranh leo thang - sự tản mác đòi hỏi phải có trung bình một giảng viên trên mười sinh viên - đã đặt ra những vấn đề gấp rút trong việc đào tạo các giảng viên (cũng tương tự như những vấn đề ở mọi cấp của giáo dục từ ngày thành lập nước Việt Nam Dân chủ Cộng hoà năm 1945). Như vậy là phần lớn giảng viên còn ít nhiều bỡ ngỡ trước các bài kiểm tra trong chương trình mà chính họ sẽ phải giảng dạy, gần như không có sự chuyển tiếp.

Một hoàn cảnh thứ hai khiến cho việc tồn tại một đời sống toán học ở Việt Nam DCCH trở nên phi thường là những điều kiện sống và làm việc cực kỳ khó khăn do sự leo thang chiến tranh của người Mỹ gây ra. Cần phải

nhớ lại rằng, không tính đến Hà Nội, tất cả các thành phố khác của Việt Nam DCCH đã hầu như bị tàn phá, và từ đầu năm người ta đã dự đoán việc ngay chính Hà Nội cũng sẽ chịu sự tàn phá là một khả năng có thể xảy ra, đến nỗi mà một nửa dân số Hà Nội đã sơ tán ở các vùng nông thôn, cũng như các cơ quan hành chính trọng yếu, bao gồm cả của cơ quan giáo dục. Các khoa khác nhau của Trường đại học Tổng hợp Hà Nội (hay của hai trường Sư phạm) đã tản mác đi đến các ngôi làng khác nhau. Sự xuất hiện của Trường đại học ở làng này hay làng khác được giữ bí mật nghiêm ngặt, mỗi làng đều coi như không biết gì về sự tồn tại của việc giáo dục này khác ở các làng bên cạnh và ngay cả tại chỗ mình: nhờ một sự kỷ luật cực kỳ nghiêm ngặt mà vị trí của các ngôi làng này đã không bị người Mỹ phát hiện và vì thế mà chúng còn chưa bị những cuộc tấn công có hệ thống cào bằng. Cuộc sống ở đây rất đơn sơ. Tất cả mọi người, những người phụ trách chính của trường đại học, các giảng viên hay sinh viên sống trong những túp lều của nông dân làm bằng tre, với những bức tường bằng bùn và nền bằng đất nện giữa những khung cửa sổ luôn bị bật tung mỗi khi gió thổi. Một số sống ở nhà nông dân, số khác sống trong những nhà tập thể thường do chính họ dựng nên. Điện để chiếu sáng chưa được biết đến, người ta chiếu sáng bằng đèn dầu, nước sinh hoạt được lấy từ giếng. Như hầu hết những người dân khác, rất ít giảng viên sống cùng gia đình: chồng làm việc một nơi, vợ và các con sơ tán ở một nơi khác, hoặc là vợ làm việc một nơi và các con thì gửi cho một người thân trong gia đình ở một nơi thứ ba. Gia đình chỉ đoàn tụ khi có dịp và có khi chỉ một ngày mỗi tháng, và họ thường phải mất hàng chục giờ để đi và về, lại còn bằng xe đạp. Việc di chuyển chủ yếu vào ban đêm để tránh bị ném bom trên đường giữa ban ngày. Những con đường liên tục bị tàn phá rồi sửa chữa, nên cách tốt nhất để di chuyển một mình là đi xe đạp, người ta có thể cõng nó trên vai không khó khăn để có thể vượt qua những đoạn đường bị phá. Ở làng mạc cũng như ở thành phố người ta luôn sống với nỗi ám ảnh sẽ xuất hiện một cuộc tấn công trên không. Rất thường xuyên, khi trời đẹp, trường đại học bị những máy bay địch phát hiện, rồi chúng thả bom, một cách ngẫu nhiên, để xả hết bom trước khi trở về căn cứ, và đôi khi làm bị thương hay làm chết những người dân thường. Tháng trước khi tôi đến đây, hai trẻ em nông dân đã bị giết chết như vậy. Cho đến nay, hiện chưa có một cuộc không kích nào nhằm vào một trong các ngôi làng nơi sơ tán của trường đại học Tổng hợp hay hai trường Sư phạm. Giống như ở các nơi khác, các giảng viên được đào tạo "tự vệ" để sử dụng súng trường chống lại các cuộc không kích có thể đến. Tất cả mọi người đều dự phòng tự bảo vệ chống lại bom bi bằng cách đội mũ chống-bi, nhưng ở nông thôn khá yên tĩnh nên các hướng dẫn an toàn không phải lúc nào cũng được chỉ dẫn. Tuy nhiên có những hầm gia đình ở gần tất cả các lều, những hầm này chôn dưới đất, có mái bằng tre được phủ bằng đất, rất hiệu quả để chống lại những sức ép của các quả bom và các vụ nổ. Sự đề phòng các tình huống bất ngờ được thực hiện ở các phòng học hay phòng họp, cũng giống như trong các lớp học của trẻ em. Có một hệ thống giao thông hào, thường bắt đầu từ trong phòng và được che chắn ở bên ngoài, cho phép việc sơ tán từ trong phòng mà không bị máy bay địch phát hiện. Những giao thông hào này phổ biến nhất ở ngay dưới ghế băng, nằm về hai phía của phòng, cho phép mọi người có thể trú ẩn ngay lập tức khi có tấn công. Những phòng học thường nằm một nửa dưới mặt đất, phần tường bằng bùn trên mặt đất được gia cố bằng một lớp đất khô, dày khoảng một mét để bảo vệ khỏi các vụ nổ. Mái nhà là phần yếu nhất vì dễ bị xuyên thủng do các vụ nổ, đặc biệt là của loại bom chùm, chúng thường nổ từ trên cao khoảng vài mét để sát thương dân chúng một cách hiệu quả. Vấn đề ứng dụng khoa học, đối với các nhà toán học là đơn giản, đang đặt ra hàng loạt câu hỏi cho các đồng nghiệp ở những khoa khác. Vậy mà tôi đã thấy một phòng thí nghiệm hóa học đang hoạt động với khoảng hai mươi sinh viên đang làm thí nghiệm về thắp sáng bằng đèn dầu (thậm chí rất hoàn hảo, với công suất sáng tương đương bóng đèn điện loại mạnh). Ông Nguyễn Hoàn, trưởng khoa hóa, đã làm tôi rất ngưỡng mộ khi thấy trong phòng thí nghiệm của ông nước máy được chứa trong thùng xăng của một máy bay Mĩ đã bị bắn hạ ở trong vùng, thùng chứa này đã được ngụy trang kỹ bởi một mái bằng tre để tránh tầm nhìn từ trên

cao. Những học trò của ông đến lượt mình làm việc "bơm vặt", để làm đầy một thùng chứa với một bơm tay bơm nước đến từ một thùng chứa thấp hơn, lấy nước từ một nguồn nước. Trong những trường hợp cần thiết, trong phòng thí nghiệm, người ta cũng trang bị điện từ máy nổ.

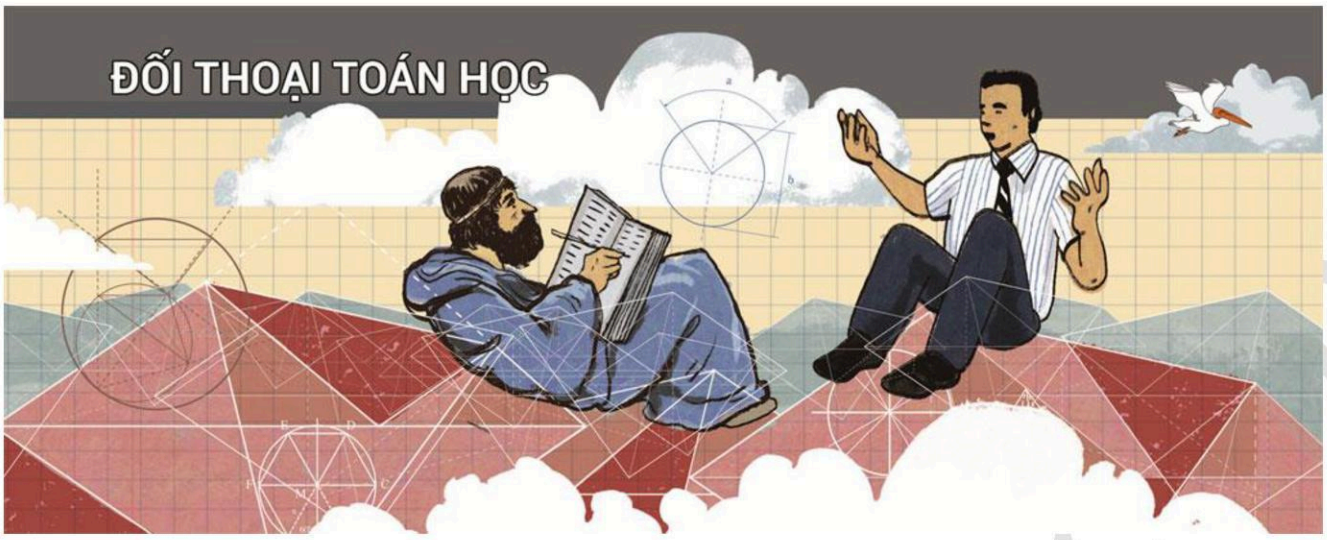
Thực phẩm được tiết kiệm một cách nghiêm ngặt, tuy nhiên vẫn chưa đến nỗi như những gì chúng ta biết ở Pháp trong cuộc chiến vừa qua. Mọi người trông không đến nỗi đói khổ, ở thành phố cũng như ở nông thôn. Những việc đồng áng có vẻ diễn ra với nhịp độ bình thường. Một số công việc được thực hiện vào đêm để tránh máy bay. Các giảng viên cũng như sinh viên được đề nghị chăn nuôi (gà, thỏ, v.v.) và làm vườn, để giúp giải quyết vấn đề lương thực; các giảng viên dành ra khoảng nửa giờ mỗi ngày, sinh viên thì nhiều hơn. Nhìn chung tôi có cảm giác rằng những nhu cầu thiết yếu về ăn, mặc, ở, chăm sóc y tế vẫn được đảm bảo cho mọi người, hoặc hầu hết mọi người, không chỉ riêng cho các cán bộ nhờ có những cố gắng trong việc tổ chức và sự bền bỉ phi thường.

Như tôi đã nói, lịch làm việc của một đồng nghiệp Việt Nam là rất dày đặc. Anh ta phải giảng dạy mười hai tiếng mỗi tuần, thêm vào đó thời gian di chuyển đôi khi rất lớn do những làng nơi anh ta giảng dạy có thể khá xa nhau. Ngoài ra còn có khá nhiều những cuộc họp chung mà anh ta phải tham gia. Mỗi tuần có hai buổi họp ba tiếng dành cho việc thảo luận chung để những giảng viên có kinh nghiệm giúp đỡ những người mới giải quyết các vấn đề của họ trong việc giảng dạy. Khi những vấn đề chung đã được thảo luận xong, thật khó hình dung còn chuyện gì để bàn trong những buổi họp như vậy, trong trường hợp khả dĩ những người "lớn tuổi" giúp đỡ những người trẻ hơn giải quyết các bài toán của họ, những người này đến lượt mình lại giao cho sinh viên; trong những trường hợp tệ hơn họ cố gắng phát hiện với ít nhiều niềm tin vai trò của chủ nghĩa duy vật biện chứng trong nhánh này hay nhánh khác của toán học. Mỗi tuần còn có một buổi chiều dành cho bài giảng nâng cao về chủ nghĩa Marx - Lenin, tổng cộng khoảng sáu tiếng (hai buổi ba tiếng), dường như tất cả các giảng viên chủ chốt đều phải tham dự, gồm cả những người đã có dịp hoàn thiện môn học này từ mười năm hay hơn nữa. Nói chung, đời sống chính trị có ảnh hưởng vô cùng lớn tới đời sống cá nhân cũng như đời sống chuyên môn của từng người, và hiển nhiên rằng ngay cả khi không tính đến những hoàn cảnh do chiến tranh tạo nên, thì điều đó cũng đã gây ra cho những người bạn Việt Nam của chúng ta sự thiếu hụt trầm trọng của hoạt động sáng tạo trí tuệ, những hoạt động cần nỗ lực liên tục và không chia sẻ. Ngoài những hoạt động chính trị kể trên và một số hoạt động khác tùy theo hoàn cảnh, còn những việc vặt khác bởi hoàn cảnh chiến tranh: sửa chữa nhà cửa hỏng hóc do thời thiết, đào giao thông hào, tiếp nhiên liệu, và thêm cả việc làm vườn, chăn nuôi đã kể trên. Với tất cả những việc đó, những đồng nghiệp Việt Nam của chúng ta chỉ còn lại một ngày mỗi tuần mà anh ta có thể dành cho công việc cá nhân, để nâng cao hiểu biết của mình và nếu thuận tiện thì còn có thể nghiên cứu nữa. Và rất hiếm khi anh ta thật sự có một ngày thảnh thơi trọn vẹn.

(còn tiếp)

Nguồn ảnh: Do GS Hoàng Xuân Sính cung cấp

www.tapchipi.com



Thầy của các thầy ngành toán sư phạm:

"Tôi chỉ là người dạy toán"

Thư Hiên (thực hiện)

Giáo sư, nhà giáo nhân dân Ngô Thúc Lanh là một trong những người đầu tiên tham gia xây dựng nền móng cho "ngôi nhà" toán học Việt Nam, được mệnh danh là thầy của những thầy ngành toán sư phạm. Nhưng trả lời phỏng vấn Pi, ông vẫn một mực khẳng định mình chỉ là một người dạy toán, còn các vai trò nọ kia nếu có chẳng qua là do "lịch sử tạo nên".

Chúng tôi bắt đầu câu chuyện với GS Ngô Thúc Lanh bằng những câu hỏi về mối quan hệ giữa ông và nhà toán học nổi tiếng Ngô Bảo Châu. GS Ngô Thúc Lanh trả lời:

Tôi và ông Ngô Huy Cẩn, bố của anh Ngô Bảo Châu, là anh em con chú con bác. Nghĩa là bố tôi và ông nội anh Châu là anh em ruột. Như vậy tôi chỉ là bác họ của anh Châu thôi.

Nghề nghiệp của cụ liệu đã từng gây ảnh hưởng gì tới GS Ngô Bảo Châu khi anh ấy còn nhỏ?

Con đường đi của Châu không liên quan gì đến tôi. Khi Châu còn là học sinh, tôi chỉ biết đó là một người cháu họ của mình và cháu rất giỏi toán. Công tác của tôi rất bận, hai gia đình sống cũng không gần nhau nên chẳng mấy khi chúng tôi được gặp nhau. Giữa chúng tôi, mối dây liên hệ duy nhất là có họ hàng.

Vậy con cháu họ Ngô, ngoài cụ và GS Ngô Bảo Châu ra, có nhiều người làm toán không?

Làm toán thực sự thì chỉ có mỗi Ngô Bảo Châu. Còn tôi cũng không phải là người làm toán. Tôi chỉ là người dạy toán, vả lại tài năng của tôi đâu có ra gì! Tôi cũng thường thôi.

Nhưng trong các tài liệu nói về buổi sơ khai của nền toán học Việt Nam có nhắc đến cụ như là một trong những người đầu tiên tham gia xây dựng nền móng cho ngành khoa học này?

À, vâng, bởi là thế này. Thời Pháp thuộc, người Việt chúng ta chỉ được dạy toán trong trường phổ thông thôi, gọi là toán sơ cấp. Thành thử trong nước chỉ có tú tài toán thôi.

www.toankho.com

Ngay cả trong những trường cao đẳng kỹ thuật, trình độ toán học cũng không vượt quá chương trình giải tích lớp 12 hiện nay. Còn số người được học và biết toán cao cấp rất ít, mà cũng là nhờ sang tận Pháp để học, ví dụ như ông Tạ Quang Bửu, hay ông Ngụy Như Kon Tum. Nhưng năm 1941 vì có chiến tranh, con em người Pháp không về Pháp được, nên họ mới mở ở Đông Dương một trường CĐ khoa học, nhờ vậy mà người Việt mới được học toán cao cấp. Các ông Nguyễn Văn Triển, hay Đào Văn Tiến. . . là những sinh viên khóa đầu của trường này. Còn tôi học khóa 3, học xong toán học đại cương (năm nhất), thì diễn ra Cách mạng tháng Tám và sau đó là toàn quốc kháng chiến chống Pháp. Tôi bắt đầu vào ngành giáo dục và được phân công dạy toán. Như vậy việc tôi dạy toán chỉ là do thời cuộc đưa đẩy mà thôi.



Giáo sư Ngô Thúc Lanh. Ảnh: Thư Hiên

Toán học Việt Nam buổi sơ khai đó như thế nào, thưa cụ?

Sau Cách mạng tháng Tám, Chính phủ thành lập trường Đại học Khoa học nhưng chỉ hoạt động được vài tháng thì phải đình giảng do nổ ra kháng chiến chống Pháp. Trong kháng chiến, ở Nghệ An và ở Việt Bắc cũng có một số lớp toán học đại cương được tổ chức bởi các anh Nguyễn Thúc Hào, Nguyễn Xiển, nhưng chỉ đến khi chính phủ thành lập trường Sư phạm Cao cấp và GS Lê Văn Thiêm (từ Pháp về) làm hiệu trưởng thì nền tảng ngành toán học mới thực sự được xây dựng. Thực ra ban đầu có cùng lúc hai trường, trường Sư phạm cao cấp và trường Khoa học cơ bản, và GS Lê Văn Thiêm làm hiệu trưởng cả hai. Nhưng trường Khoa học cơ bản chỉ tồn tại 2 năm (1952, 1953). Khi thành lập thì hai trường đóng ở Chiêm Hoá, Tuyên Quang, sau đó được chuyển sang Khu học xá trung ương đặt ở Nam Ninh, Trung Quốc.

Hồi ở Khu học xá thì có những ai nào? Ban đầu chỉ có anh Lê Văn Thiêm và anh Nguyễn Xiển, còn anh Nguyễn Cảnh Toàn là trợ lý cho họ. Còn tôi lúc ấy chỉ dạy trung cấp. Anh Hoàng Tuy ban đầu định đến để học trường Khoa học cơ bản, nhưng khi đến nơi thì thấy những gì anh ấy tự học đã vượt quá chương trình, nên anh Tuy cũng được điều sang dạy Trung cấp Sư phạm. Chỉ có 3 – 4 người chia nhau ra mà làm.

Đến khi về Hà Nội dạy toán cao cấp, anh Nguyễn Xiển đi làm chính trị không dạy nữa. Nhưng lại có thêm tôi, anh Nguyễn Thúc Hào từ khu Tư ra, anh Khúc Ngọc Khảm. Về Hà Nội, thì anh Tuy sang Trường Đại học Tổng hợp khi trường này được thành lập. Trong đội ngũ trên, phải nói là anh Nguyễn Cảnh Toàn và anh Hoàng Tuy rất có khả năng về toán, đặc biệt là anh Hoàng Tụy. Chỉ tiếc anh Toàn về sau làm lãnh đạo nên không còn nhiều thời gian dành cho toán. Người theo đuổi sự nghiệp làm toán thành công nhất là anh Hoàng Tụy. Điều đó đúng thôi, vì anh đã giỏi lại rất đam mê.

Như vậy GS Nguyễn Cảnh Toàn và cụ là những giảng viên đầu tiên của Khoa toán Trường Đại học Sư phạm Hà Nội?

Đúng rồi. Ban đầu trường sư phạm có một khoa toán lý, về sau mới tách thành khoa toán riêng (giờ là khoa toán tin - PV). Nhiệm vụ của chúng tôi là đào tạo giáo viên dạy toán cấp 3. Tuy nhiên, những người xuất sắc nhất thì được giữ lại làm giảng viên của khoa và đội ngũ này lại trở thành hạt nhân xây dựng lực lượng giảng viên ngành toán khi chính phủ thành lập các trường đại học mới. Chủ nhiệm khoa đầu tiên là anh Nguyễn Cảnh Toàn, sau

www.tapchipi.com

đó anh ấy làm hiệu trưởng thì giao nhiệm vụ phụ trách khoa cho tôi. Tôi làm trưởng khoa một thời gian khá dài.



Chụp với các GS (từ trái sang): Lê Khả Kế, Dương Trọng Bái, Lê Thạc Cát, Lê Văn Thiêm, Nguyễn Xiển, Hồ Đắc Di, Võ Thuần Nho, Ngụy Như Kon Tum

Như trên tôi đã nói, cán bộ giảng dạy của chúng tôi phần lớn được đào tạo ngay trong trường sư phạm. Nhờ tốt nghiệp xuất sắc mà họ được giữ lại, sau đó lại dược cử đi học tập ở nước ngoài. Trong những khóa đầu tiên được giữ lại ấy có ông Lê Hải Châu, Nguyễn Bá Thịnh, Đoàn Quỳnh, Lại Đức Thịnh, Vũ Tuấn... Người được đào tạo bài bản ở nước ngoài về tham gia giảng dạy thì mãi đến năm 1959 mới có cô Hoàng Xuân Sính (lúc đó cũng chỉ mới là thạc sĩ). Chương trình đào tạo chủ yếu là toán cao cấp, ngoài ra có một phần toán sơ cấp và phương pháp (thực hành) để phục vụ việc giảng dạy ở trường phổ thông cho giáo sinh khi họ ra trường.

Chỉ với kiến thức toán học ở Trường Cao đẳng Khoa học Đông Dương, việc giảng dạy toán cao cấp của cụ có gặp nhiều khó khăn không?

Cũng không khó khăn gì lắm, vì chỉ là dạy những điều mình đã học. Cũng có những cái mới, do hồi đi học thì học theo giáo trình Pháp, mà đi dạy thì chủ yếu dựa vào giáo trình của Liên Xô. Nhưng chúng tôi phải tự học, vì nhiệm vụ bắt buộc phải thế. Chỉ có điều lúc đầu ít cán bộ quá thôi, về sau nhờ bổ sung được thêm người thì đỡ hơn.

Ban đầu dạy bằng giáo trình dịch. Dạy đến đâu dịch đến đó, chỉ sau một năm là đã có thể in tài liệu phổ biến cho sinh viên. Về sau những người trực tiếp tham gia giảng dạy thì đồng thời cũng viết giáo trình luôn. Những tác giả các cuốn giáo trình ban đầu cũng chỉ loanh quanh Nguyễn Cảnh Toàn, Ngô Thúc Lanh (cười), tôi viết về đại số, anh Toàn viết hình học. Về sau cán bộ đông lên, người nào dạy cái gì thì họ biên soạn cái đó. Ngay từ những buổi đầu chúng tôi đã kết hợp giảng dạy với nghiên cứu. Việc nghiên cứu ngày càng mạnh nhờ đội ngũ được gửi đi bồi dưỡng ở nước ngoài về đông lên.



Giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn.

Chúng tôi đều phải tự học hết. Vì nhiệm vụ đặt ra thì phải làm. Mãi sau này chúng ta mới có đào tạo nghiên cứu sinh, chứ suốt mấy chục năm làm gì có. Cho đến năm 1992, khi tôi về hưu, ai muốn bảo vệ tiến sĩ trong nước thì chỉ là tập hợp các công trình của mình lại rồi bảo vệ, làm gì có ai đào tạo!

Điều kiện làm việc hồi ấy chắc khổ sở, thiếu thốn lắm?

Thì hoàn cảnh chung lúc đó là thế nên tôi cũng chẳng thấy khổ gì. Chỉ có điều là phải vừa làm vừa nâng cao trình độ để đáp ứng yêu cầu của công tác thôi. Chúng tôi vẫn phải theo dõi sự phát triển của toán quốc tế, thông qua các báo chuyên môn mà anh em mang về từ nước ngoài. Về sau quan hệ với các nước rộng ra nên tài liệu cũng không đến nỗi thiếu thốn quá, mình vẫn mua được.

Hồi ấy những người đặt nền móng xây dựng ngành toán có kỳ vọng gì nhiều vào sự phát triển của nền toán học?

Lúc đó chúng tôi cũng đặt mục tiêu là Việt Nam có các nhà toán học trình độ quốc tế để phát triển ngành toán của mình. Niềm hy vọng đó được gửi gắm ở những cán bộ mà chúng tôi gửi đi bồi dưỡng ở nước ngoài. Trong số các cán bộ hồi đó chúng tôi cử đi có anh Phan Đình Diệu. Ra nước ngoài anh ấy đã đạt đến trình độ quốc tế, nhưng sau khi anh ấy có học vị tiến sĩ khoa học rồi thì anh ấy lại không đi dạy nữa mà trên lại đưa đi làm quản lý.

Hồi ấy toán học rất được nhà nước ưu ái phải không ạ?

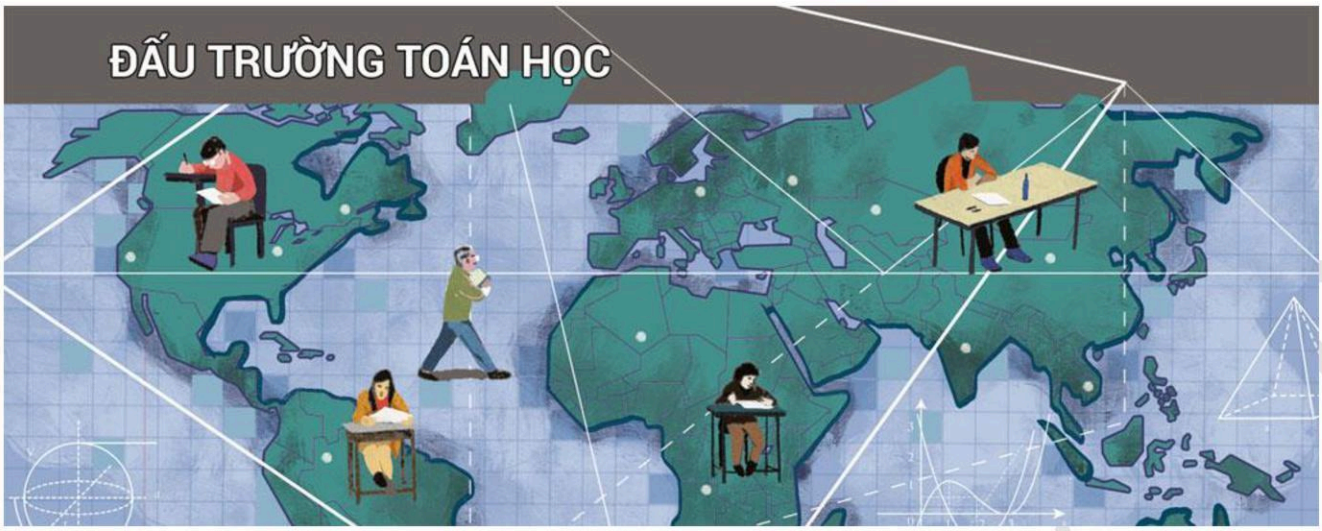
Nhà nước ưu ái nhiều thứ, đâu phải mỗi toán! Nhưng cái gì mình cũng đi sau nên không thể nào bắt mình phải ngang hàng với thế giới được. Tuy nhiên nhờ có nước ngoài đào tạo mà mình cũng đã có được những nhà khoa học tầm cỡ thế giới, như Ngô Bảo Châu, Vũ Hà Văn (toán), Đàm Thanh Sơn (vật lý). . . Ngoài các anh ấy ra, tôi nghĩ nước mình cũng có nhiều người có tư chất xuất sắc, chỉ có điều họ không may mắn nên không được trở thành tài năng nổi tiếng thế giới thôi, nhưng những gì họ đã làm được cũng chứng tỏ họ rất có tài.

Cháu xin được hỏi cụ một câu cuối, các con của cụ có ai học toán và làm toán không?

Các con tôi đều học chuyên toán, nhưng không ai làm toán. Có người làm nghiên cứu sinh về toán, nhưng lại làm nghề khác để sống. Về việc này thì tôi phải xin giải thích luôn là do các anh chị ấy không ai thực sự giỏi toán. Muốn giỏi toán thì phải có năng khiếu và có đam mê. Không có năng khiếu, không có đam mê thì làm sao thành nhà toán học được!

Cảm ơn giáo sư, nhà giáo nhân dân Ngô Thúc Lanh!

www.tapchipi.edu.vn



BA LAN VÀ CÁC KỲ THI TOÁN KHU VỰC

Nguyễn Hùng Sơn

Ba Lan là một trong các nước có truyền thống lâu năm về tổ chức các kỳ thi toán dành cho học sinh. Lâu đời nhất là kỳ thi Olympic toán quốc gia (OM) được tổ chức lần đầu vào năm 1950. Ba Lan cũng là một trong 8 nước đồng sáng lập kỳ thi Olympic Toán Quốc tế (IMO) vào năm 1959. Bài viết này giới thiệu tới bạn đọc một số kỳ thi toán thường niên mà Ba Lan cùng tổ chức với các nước láng giềng trong khu vực Trung Âu và Bắc Âu.

1. Kỳ thi Toán học Áo - Ba Lan

Đây là kỳ thi toán học dành cho học sinh do hai nước Áo và Ba Lan lần lượt thay nhau tổ chức vào khoảng cuối tháng sáu đầu tháng bảy hàng năm.

Ý tưởng tổ chức cuộc thi Áo - Ba Lan được đề xuất lần đầu tiên trong thời gian tổ chức cuộc thi IMO lần thứ 18 tại thủ đô Viên năm 1976. Ngày 16 tháng 5 năm 1977 Bộ trưởng Giáo dục hai nước Áo và Ba Lan ký công hàm quyết định tổ chức cuộc thi hàng năm cho học sinh hai nước và kỳ thi đầu tiên sẽ diễn ra vào năm 1978 tại Ba Lan. Một trong những người trực tiếp chỉ đạo thực hiện và đã liên tục gắn bó với cuộc thi này là giáo sư Gerd Baron, trưởng ban giám khảo kỳ thi Toán Quốc tế IMO 1976. Tham gia cuộc thi là đội hình "dự bị" của hai nước. Mỗi nước được cử một đội tuyển 6 người gồm các thí sinh trẻ (chưa quá 17 tuổi, không phải là thành viên đội tuyển quốc gia thi IMO trong năm học đó, và năm tiếp theo vẫn là học sinh phổ thông).



Giáo sư Gerd Baron

Các thí sinh tham gia hai vòng thi cá nhân (viết trong 2 ngày, mỗi ngày phải giải 3 bài toán) và một vòng thi đồng đội (gồm từ 3 đến 4 bài toán). Các thí sinh viết lời giải bằng ngôn ngữ của nước mình. Mỗi năm ban tổ chức trao từ 5 đến 9 giải thưởng cá nhân cho các thí sinh có điểm cao nhất và giải thưởng đồng đội cho đội thắng cuộc ở kỳ thi đồng đội. Ở giải đồng đội, khi hai đội có cùng số điểm thì sẽ xét

thắng thua tùy theo thời gian làm bài của mỗi đội.

Cần phải nhắc lại một chút về bối cảnh lịch sử lúc bấy giờ. Khi đó Áo và Ba Lan đại diện hai "phe": Ba Lan đại diện cho khối Đông Âu, trong khi Áo là đại diện của Tây Âu. Vì vậy cuộc thi cũng là một trong số ít các cơ hội để các nhà toán học có dịp giao lưu và tìm hiểu lẫn nhau. Các cựu thí sinh (hiện là các giáo sư của ĐHTH Warszawa) cho biết rằng, chương trình của các kỳ thi đầu tiên thường phong phú hơn rất nhiều so với các kỳ thi IMO cùng năm. Ngoài 3 ngày thi, các thí sinh còn được đi tham quan rất nhiều nơi và thường được các vị lãnh đạo cao cấp cỡ bộ trưởng của nước chủ nhà đón tiếp.

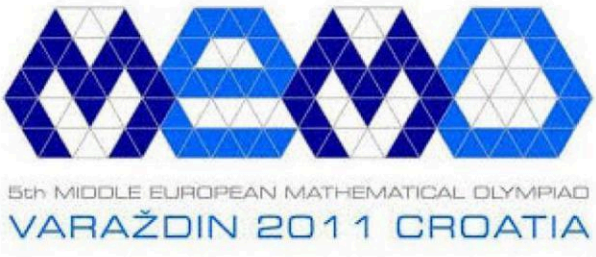
Kỳ thi Áo - Ba Lan được tổ chức 29 lần liên tục từ năm 1978 đến 2006. Hình thức lẫn nội dung của kỳ thi này được các nước khác trong khu vực đánh giá rất cao. Đây có thể coi là cuộc thi cọ xát mang tính quốc tế cho các thành viên tương lai của đội tuyển quốc gia. Rất nhiều thí sinh, sau khi tham gia kỳ thi Áo - Ba Lan đã được chọn vào đội tuyển quốc gia đi thi IMO vào những năm sau đó. Trong số đó có thể kể ra một số tên tuổi nổi tiếng của IMO, một số thí sinh có thành tích cao nhất của Ba Lan như: Grzegorz Bobinski và Tomasz Schreiber (cả hai đều được 42/42 tại IMO 1994), Michal Pilipczuk, Tomasz Hrycak, Marcin Stefaniak (cả 3 đều 3 lần tham gia IMO và đạt tất cả các màu huy chương: Vàng, Bạc, Đồng), Marcin Pilipczuk (2 lần tham gia IMO đạt 2 huy chương: Vàng và Bạc), Eryk Kopczynski (Huy chương vàng IMO). Nhiều thí sinh của Áo tham gia cuộc thi Áo - Ba Lan sau đó cũng giành được các thành tích đáng nể tại IMO như Josef Schico (2 Huy chương Vàng và Bạc), Guenter Pollak (1 Vàng, 1 Đồng).

Ngoài ra còn có rất nhiều thí sinh đã từng tham gia cuộc thi Áo-Ba Lan và sau này trở thành các nhà khoa học nổi tiếng thế giới.

Vì vậy kể từ năm 2007 tới nay, kỳ thi này được mở rộng để nhiều quốc gia tham gia và được đổi tên thành Olympic Toán các nước Trung Âu (MEMO - Midle Europe Mathematical Olympiad).

2. MEMO

Kỳ thi Olympic Toán các nước Trung Âu (MEMO), được tổ chức lần đầu tiên tại thành phố Eisenstadt (Áo) với sự tham gia của các nước: Áo, Ba Lan, Croatia, Séc, Slovenia, Slovakia và Thụy sỹ. Thể thức của cuộc thi không thay đổi, nhưng số lượng bài thi có một chút thay đổi. Các thí sinh thi 2 ngày, ngày thứ nhất là ngày thi cá nhân, các thí sinh giải 4 bài toán trong thời gian 5 giờ. Ngày thứ hai là kỳ thi đồng đội, cũng gồm 4 bài toán. Mỗi bài thi được đánh giá từ 0 đến 8 điểm.



Logo của kỳ thi MEMO 2011 tại Croatia

Từ năm 2008 tham gia MEMO còn có Đức và Hungary, và từ 2009 có thêm Litva. Cũng kể từ năm 2009, số bài toán trong phần thi đồng đội được tăng lên 8 bài.

3. Baltic Way

Baltic Way là cuộc thi toán đồng đội được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1990 với sự tham gia của 3 nước thuộc Liên Xô cũ là Litva, Latvia và Estonia.



Logo của kỳ thi Baltic Way 2013

Kể từ năm 1992, cuộc thi được mở rộng với sự tham gia của các nước cộng hòa xung quanh biển Baltic (Ba Lan, Đan Mạch, các bang phía bắc của CHLB Đức, Na Uy, Phần Lan, Thụy Điển), đúng như tên gọi của cuộc thi. Ngoài ra còn có đội Iceland (nước đầu tiên công nhận độc lập của 3 nước Latvia, Litva và

www.toanhoc.com

Estonia) và đội tuyển thành phố Saint Petersburg (Liên bang Nga). Để tạo sự mới mẻ, thỉnh thoảng ban tổ chức của nước chủ nhà có thể mời thêm một quốc gia ngoài vùng Baltic tham gia cuộc thi.

Cuộc thi Baltic Way được tổ chức vào đầu tháng 11 hàng năm. Mỗi quốc gia cử một đội tuyển gồm 5 thí sinh là học sinh tiểu học hoặc trung học trong thời điểm diễn ra cuộc thi. Các đội phải giải 20 bài toán (gồm 5 bài đại số, 5 bài hình, 5 bài tổ hợp và 5 bài lý thuyết số) trong thời gian 4 giờ 30 phút. Mỗi bài đều được 5 điểm nên có thể đạt tối đa là 100 điểm. Cho đến nay chỉ duy nhất một lần có đội đạt điểm tối đa 100/100, đó là tại cuộc thi năm 2001 ở Hamburg (Đức), đội tuyển khách Israel đã lập nên kỳ tích này.

Đội vô địch cuộc thi sẽ được giữ cúp luân lưu (phải trao lại cho đội vô địch kỳ thi năm sau). Ban giám khảo cũng có thể trao giải đặc biệt cho những lời giải sáng tạo.

4. CZE - POL - SLO

Sau khi khối Đông Âu tan rã, ngày 1 tháng 1 năm 1993, Tiệp Khắc phân chia thành 2 nước là Cộng hòa Séc và Slovakia. Cùng với sự phân chia đó, kỳ thi Olympic Toán Tiệp Khắc (Czechoslovak Mathematical Olympiad) về hình thức được phân thành hai kỳ thi toán quốc gia mới là "Czech Mathematical Olympiad" và "Slovak Mathematical Olympiad". Tuy vậy ban tổ chức các cuộc thi này vẫn làm việc chung và các học sinh của Cộng hòa Séc và Slovakia vẫn giải các bài toán như nhau (chỉ khác là viết bằng ngôn ngữ của nước mình và kết quả thi được đánh giá riêng cho từng nước).

Ngoài ra, với mục đích thắt chặt tình hữu nghị giữa 2 nước, ban tổ chức toán quốc gia của hai nước còn tổ chức "trận thi đấu toán học" hàng năm (kể từ 1995) giữa hai đội tuyển quốc gia của Séc và Slovakia với mục đích chuẩn bị cho kỳ thi toán quốc tế IMO. Cuộc thi này thường được tổ chức vào cuối tháng 6 và được coi là lễ tổng kết trại luyện thi toán quốc tế của hai nước (thường tổ chức vào 2 tuần đầu của tháng 6).

Ba Lan cũng tổ chức trại luyện thi toán quốc tế cho các học sinh được giải vào cùng thời gian tại thành phố Zwardon (cách biên giới Slovak khoảng 200m và cách biên giới Séc khoảng 9km). Vì vậy, nhờ có sự kết nối của giáo sư Jaroslav Svr ˇ cek (Slovakia) và Józef Kalinowski ˇ (Ba Lan), trận đấu tay đôi Séc - Slovakia đã chuyển thành trận đấu toán học tay ba Séc - Ba Lan - Slovakia và được viết tắt là CZE - POL - SLO.



Giáo sư Jaroslav Svr ˇ cek



Giáo sư Józef Kalinowski

Khác với các kỳ thi khu vực khác như MEMO hoặc Baltic Way, kỳ thi CZE - POL - SLO đảm nhiệm vai trò tương tự như các trận đấu giao hữu của các đội bóng trước khi tham gia các cuộc thi đấu quốc tế. Với thể thức tương tự như IMO, tại kỳ thi này các thí sinh phải làm bài trong 2 ngày, mỗi ngày 3 bài trong thời gian 4 giờ 30 phút. Các bài cũng được chấm từ 0 đến 7 điểm, giống như tại IMO.

5. Phần kết

Mục đích chính của kỳ thi Olympic toán học của Ba Lan là khích lệ phong trào học toán ở các trường phổ thông cũng như các trường năng khiếu và tìm ra những nhà toán học trẻ. Tham gia kỳ thi Olympic toán là tự nguyện, vì vậy chỉ số quan trọng nhất đối với ủy ban Olympic toán học của Ba Lan là số lượng học sinh tham gia Olympic và số học sinh chọn ngành Toán/Tin ở Đại học. Hàng năm con số này thường dao động trên dưới 5000 học sinh.

Phần thưởng để khích lệ các học sinh tham gia Olympic toán học chính là các giải quốc gia, các giải khu vực và các giải quốc tế. Các học sinh được giải quốc gia sẽ được tuyển thẳng vào các trường đại học (không nhất thiết chỉ là khoa Toán). Tại Việt Nam đội tuyển Quốc gia chỉ gồm 6 thành viên và mục đích duy nhất của họ là tham gia thi IMO. Các học sinh không được chọn vào đội tuyển quốc gia (đứng thứ 7 trở đi) cũng là những nhân tài toán học nhưng họ thường có cảm giác chán nản và chuyển sang làm việc khác. Khác với Việt Nam, hàng năm Ba Lan chọn đội tuyển Quốc gia gồm 17 thành viên tham gia IMO, MEMO và Baltic Way. Ngoài ra, trong những năm gần đây có 4 học sinh nữ được chọn tham gia EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad). Theo tôi đây là một hướng đi đáng quan tâm cho nền Toán học Việt Nam nhằm giảm bớt nạn chảy máu nhân tài Toán học.

Đề thi và lời giải của 16 kỳ thi đầu tiên của cuộc thi Áo-Ba Lan được đăng trong cuốc sách: *"144 problems of the Austrian - Polish Mathematics Competition, 1978 - 1993"* của Marcin Kuczma (xuất bản năm 1994). Các đề thi hàng năm của các kỳ thi trên có thể tìm thấy dễ dàng trên các trang web của cuộc thi hoặc tại https://www.artofproblemsolving.com/community/c14internationalcontests.

Cuối cùng, mời các bạn đọc thử sức với đề thi Áo - Ba Lan lần thứ 27 năm 2004.

Phần thi cá nhân

Bài 1. Gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của n trong hệ thập phân. Gọi

$$N = \sum_{k=10^{2003}}^{10^{2004}-1} S(k).$$

Hãy tính giá trị của $S(N)$.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi D là giao điểm của phân giác trong của góc C với cạnh AB và gọi π là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đây luôn luôn đúng

$$\pi \cdot \left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{BD}\right) \le AB.$$

Bài 3. Hãy tìm các số thực x, y, z, t thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x - \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2} = t \\ y - \sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-t^2} = x \\ z - \sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-x^2} = y \\ t - \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = z \end{cases}$$

Bài 4. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^{10} + n^5 + 1$ là số nguyên tố.

Bài 5. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 27 \\ x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{24} \end{cases}$$

có nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong tập hợp các số thực dương.

Bài 6. Cho $n = 2^m$ (với m là số nguyên dương). Chứng minh rằng các phần tử của tập hợp $M(n) = \{1,2,\ldots,n\}$ có thể sắp xếp thành chuỗi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho với mọi i, j, k mà $1 \le i < j < k \le n$, ta luôn có $a_j - a_i \ne a_k - a_j$.

Phần thi đồng đội

www.banKKC.com

Bài 7. Hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x+1) + f(y+1),$$

với mọi cặp số nguyên tố cùng nhau.

Bài 8. Chứng minh rằng với $n = 4$ hoặc $n \geq 6$, mọi tam giác ABC đều có thể cắt thành n tam giác đồng dạng với ABC.

a) Chứng minh rằng tam giác đều không thể cắt ra thành 3 hoặc 5 tam giác đều.

b) Hãy xác định xem có tồn tại hay không tam giác ABC sao cho có thể cắt nó thành 3 cũng như thành 5 tam giác đồng dạng với ABC.

Bài 9. Cho các dãy số 2 chiều với các số hạng dương:

$$(\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots),$$
$$(\ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots),$$
$$(\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots),$$

thỏa mãn điều kiện: với mọi số nguyên n ta có:

$$a_n \geq \frac{b_{n+1} + c_{n-1}}{2}; \quad b_n \geq \frac{c_{n+1} + a_{n-1}}{2};$$
$$c_n \geq \frac{a_{n+1} + b_{n-1}}{2}.$$

Hãy xác định giá trị của a_{2005}, b_{2005}, c_{2005} biết rằng $a_5 = 26$, $b_0 = 6$, $c_0 = 2004$.

Bài 10. Với mỗi đa thức $Q(n)$ ta gọi $M(Q)$ là tập hợp các số nguyên không âm x sao cho $0 < Q(x) < 2004$. Ta hãy xét các đa thức $P_n(x)$ dạng:

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1,$$

trong đó $a_i = \pm 1$ với $i = 1, 2, \ldots, n-1$

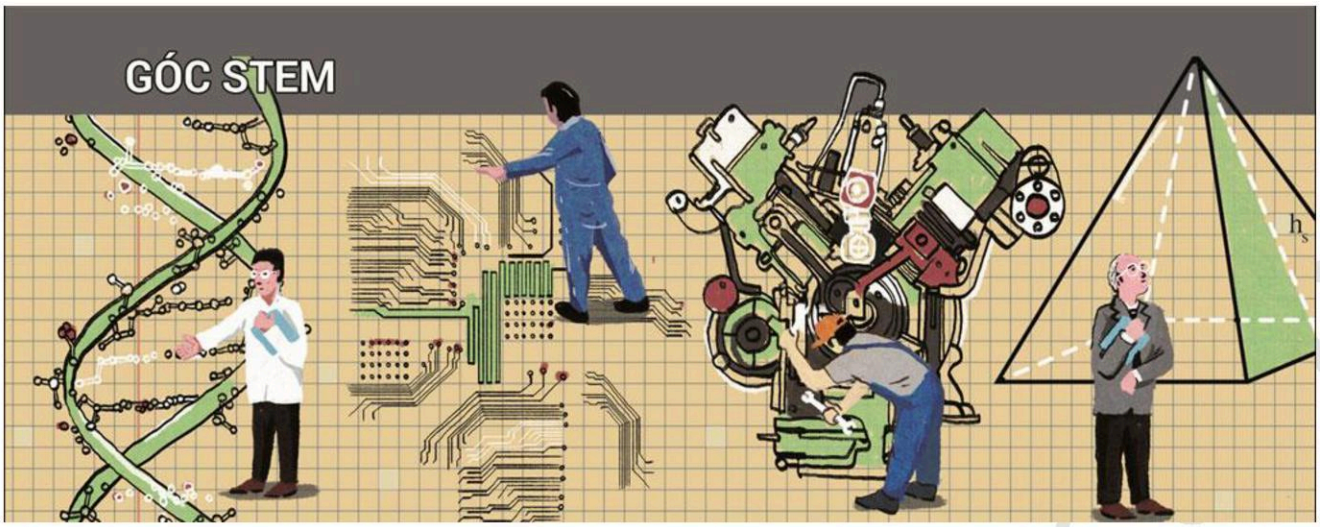
Với mọi số tự nhiên dạng $n = 3^k$, $k > 0$ hãy tìm:

a) m_n = giá trị lớn nhất của số phần tử của tập hợp $M(P_n)$ với mọi đa thức P_n;

b) Tất cả các đa thức P_n sao cho $M(Q) = m_n$.

Nguồn ảnh: Internet

www.toankho.com



Giải Đặc biệt cuộc thi TSUKUBA SCIENCE EDGE 2016

Đỗ Hoàng Sơn (thực hiện)

Đào Việt Tùng, sinh năm 1998, là du học sinh Việt tại trường Hawaii Preparatory Academy (HPA), Hawai, Mỹ sau khi học xong lớp 10 ở trường Olympia (Hà Nội).

Dự án "Dùng thiết bị sóng não để phát hiện chứng buồn ngủ và cảnh báo người lái xe" của Đào Việt Tùng đã xuất sắc vượt qua hàng trăm dự án của học sinh để giành giải Đặc biệt của cuộc thi Tsukuba Science Edge 2016 diễn ra tại Nhật Bản.

Tsukuba Science Edge 2016 là một cuộc thi STEM (Khoa học, Công nghệ, Kỹ thuật, Toán học) thường niên do Ủy ban Kế hoạch Khoa học Nhật Bản tổ chức dành cho học sinh trung học phổ thông trên toàn thế giới chia sẻ đam mê những công nghệ tầm cao. Năm 2016 có khoảng 1000 học sinh của 60 trường phổ thông đến từ các nước trên thế giới, trong đó có các nước rất mạnh về STEM như Nhật, Mỹ, Hàn Quốc, Trung Quốc, Đài Loan, Singapore. Tham gia ban giám khảo cuộc thi là nhiều nhà khoa học từ Viện Khoa học Tsukuba, trong đó có giáo sư Reona Ezaki từng đoạt giải Nobel Vật lý.

Sau đây là bài phỏng vấn Đào Việt Tùng.

Chào Tùng, xin bạn cho biết lý do vì sao bạn lại quan tam tới đề tài này và sự khác biệt trong giải pháp công nghệ của bạn so với những giải pháp khác của những người khác đã làm?

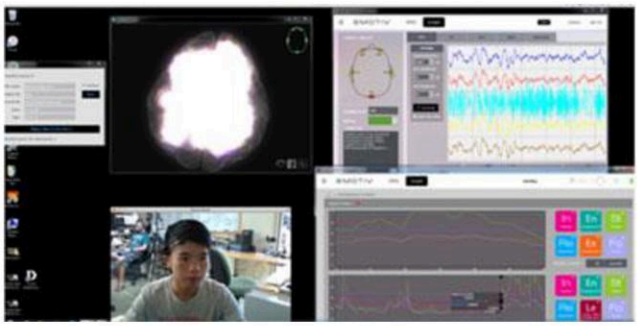
Chúng ta biết, hiện trên thế giới có rất nhiều tai nạn xe cộ, ô tô và xe tải. Ở Mỹ hằng năm có khoảng 100.000 vụ tai nạn, trong đó có 6.000 tai nạn rất nghiêm trọng dẫn đến tử vong. Từ thực trạng này đã có nhiều sáng chế được ra đời để giúp lái xe chống lại cơn buồn ngủ. Các thiết bị này dựa trên nhiều cơ sở để phát hiện cơn buồn ngủ của lái xe như căn cứ vào động tác của người ngủ gật, các thông tin về nhịp tim, cách điều khiển vô lăng hay nhận diện khuôn mặt, phân tích trạng thái mắt, từ đó đưa ra các cảnh báo đối với lái xe.

Còn ý tưởng khác biệt của dự án mà em làm là để phân tích cơn buồn ngủ của các lái xe một cách chính xác thông qua kết hợp thiết bị đo sóng não và smartphone.

Tùng đã dùng thiết bị nào để đo sóng não?

Em đã dùng chiếc mũ đọc sóng não EPOC + của Emotiv, một sáng tạo công nghệ nổi tiếng thế giới của một nhóm các chuyên gia đứng

đầu là chị Lê Thị Thái Tần, một Việt kiều có nhiều đóng góp cho khoa học công nghệ thế giới.



Dùng nền tảng công nghệ EMOTIV để miệt mài nghiên cứu sóng não

Nhóm Emotiv đã sáng chế ra một nền tảng công nghệ dễ sử dụng và không tốn kém để nghiên cứu các tín hiệu trong não của con người mà không cần phải đến các trung tâm đo điện não đồ trong các bệnh viện.

Bạn có thể nói rõ hơn về đề tài?

Hướng tiếp cận của em là sử dụng tín hiệu sóng não là một cách tiếp cận mới mẻ và độc đáo vì não là trung tâm điều khiển hành vi của toàn bộ con người. Khi người tài xế đội lên đầu thiết bị đo sóng não EEG Device, thiết bị này sẽ kết nối với smartphone (điện thoại thông minh) của họ và phát ra tín hiệu nếu phát hiện cơn buồn ngủ của người tài xế.

Em đã tiến hành phân tích các dữ liệu thu được từ thiết bị đo sóng não EEG Device để tìm ra các con số thể hiện trạng thái não bộ của lái xe như sự tỉnh táo, độ mất tập trung và cơn buồn ngủ đang ở mức độ nào. Các chỉ số về các trạng thái của não bộ sẽ được đo một cách chính xác.

Cụ thể trong trường hợp này, khi có tín hiệu thông báo là tài xế buồn ngủ thì điện thoại sẽ rung và phát chuông cảnh báo hoặc phát nhạc để giúp tài xế tỉnh táo.

Theo Tùng khâu nào là khó nhất trong dự án của bạn và vì sao?

Theo em, lập trình một khâu khó đã đành nhưng thử thách lớn nhất với em là quá trình khảo sát, thử nghiệm.

Thử thách nhất là giai đoạn nghiên cứu bởi phải chọn được người để tiến hành thử nghiệm. Và cái khó là liệu họ có sẵn sàng để cho mình thử nghiệm hay không khi phải đeo thiết bị đo sóng não trước khi đi ngủ. Em đã dành nhiều thời gian để làm quen và thuyết phục người tham gia. Để có được các số liệu phục vụ thống kê, trong thời gian học lớp 11, em đã phải tiến hành nghiên cứu trên nhiều bạn cùng học ở trường.

Dự án của em hiện đã hoàn tất quá trình nghiên cứu. Trên cơ sở xác định trạng thái buồn ngủ, em đã tiến hành việc lập trình trên điện thoại. Hiện nay em đang tiếp tục lập trình trên hệ điều hành của Android, tiếp đến sẽ là trên hệ điều hành IOS.

Tùng có thể chia sẻ kinh nghiệm giải quyết khó khăn khi khởi đầu dự án. Làm thế nào để một học sinh phổ thông vượt qua được những hạn chế để làm một dự án STEM?

Lúc mới đầu bắt tay vào các dự án khoa học công nghệ bản thân em cũng vô cùng bỡ ngỡ. Tuy nhiên khi gặp khó khăn, thay vì lẩn tránh nếu ta chia sẻ chân thành thì sẽ nhận được sự giúp đỡ của những người xung quanh. Bản thân em là một ví dụ khi nhận được sự hỗ trợ rất tích cực từ giáo sư Bill Wiecking, giám đốc Energy Lab của trường HPA. Sự động viên, hỗ trợ của thầy giáo cũng như các bạn học đã giúp em có thêm động lực để quyết tâm hiện thực hóa ý tưởng của mình.

Trong quá trình nghiên cứu có thể gặp nhiều khó khăn, thậm chí có những lúc mất phương hướng, tuy nhiên nếu ta biến nó thành niềm đam mê, giữ vững quyết tâm, tập trung vào mục tiêu thì mọi việc sẽ ổn.

Theo Tùng, trong cuộc Cách mạng Công nghiệp 4.0 đang diễn ra hiện nay, người trẻ Việt có thể cạnh tranh với các bạn bè quốc tế được hay không ?

www.tapchipi.com

Em thấy nhiều bạn trẻ Việt cũng thích thú và đầu tư vào khoa học công nghệ nhưng thực tế là hiện nay các trường của chúng ta chưa có nhiều sách của các chuyên ngành STEM và trang thiết bị hiện đại ở các phòng thí nghiệm để học sinh có thể nghiên cứu. Chính vì vậy, mình mong rằng trong thời gian tới nhà nước và các trường sẽ đầu tư nhiều hơn vào việc này.

Sau khi giành giải đặc biệt tại cuộc thi công nghệ quốc tế lớn, Tùng đã nhận được nhiều lời mời tham gia các hoạt động gì để góp phần phát triển STEM ở Việt Nam và Mỹ?

Năm 2016, em đã được tổ chức phi Chính phủ quốc tế uy tín "Islands Society" bình chọn là nhà lãnh đạo khu vực mới nổi (Local Emerging Leader) và được mời để chia sẻ kinh nghiệm trong nghiên cứu khoa học và công nghệ.

Tại Việt Nam, tranh thủ kỳ nghỉ hè em đã tham gia các hoạt động khuyến khích các em học sinh học hỏi, ứng dụng STEM thông qua việc trình bày và giới thiệu về dự án khoa học của mình. STEM là viết tắt của các từ khoa học, công nghệ, kỹ thuật và toán học. Các kiến thức và kỹ năng này (gọi là kỹ năng STEM) phải được tích hợp, lồng ghép và bổ trợ cho nhau giúp học sinh không chỉ hiểu biết về nguyên lý mà còn có thể áp dụng để thực hành và tạo ra được những sản phẩm trong cuộc sống hằng ngày.

Ngoài ra, em đã tham gia làm giám khảo cho cuộc thi Hackathon STEM IoT "Internet kết nối vạn vật" lần đầu tiên tổ chức tại Việt Nam với sự tài trợ của Công ty Intel Việt Nam và Tập đoàn công nghệ DTT về chủ đề "Hành tinh thông minh". Hackathon STEM IoT là Cuộc thi dành cho các bạn học sinh đam mê công nghệ, thích lập trình máy tính và có những ý tưởng về ứng dụng trong cuộc sống.

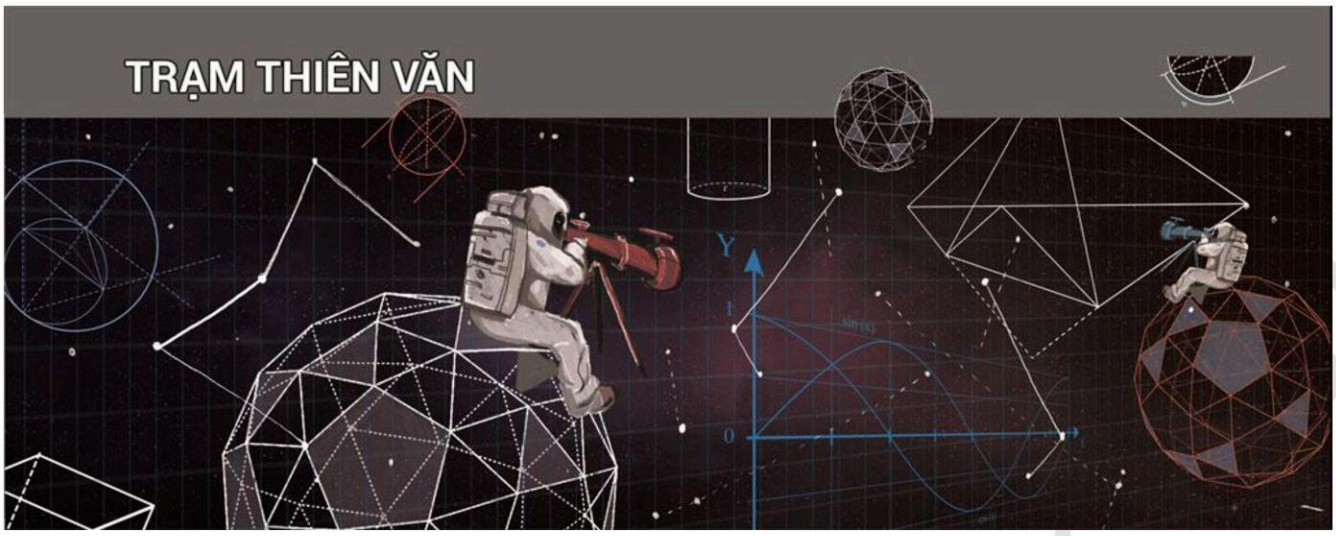
Nhìn các học sinh say sưa với những công trình đầu tay của mình, em luôn tin rằng, những Dự án như "Ứng dụng công nghệ sóng não xác định và cảnh báo sớm cơn buồn ngủ của lái xe" sẽ ngày càng nhiều hơn và các học sinh Việt Nam sẽ ngày càng có nhiều cơ hội để tham gia nghiên cứu khoa học và thực thiện nhiều dự án có ý nghĩa đối với cuộc sống.

Tùng đang chuẩn bị vào đại học, bạn sẽ học nghề gì?

Em cũng đang chọn cho mình một chuyên ngành STEM, có thể là Khoa học máy tính.

Xin cảm ơn và chúc Tùng luôn đạt được những ước mơ cao đẹp của mình!

www.tapchipi.com



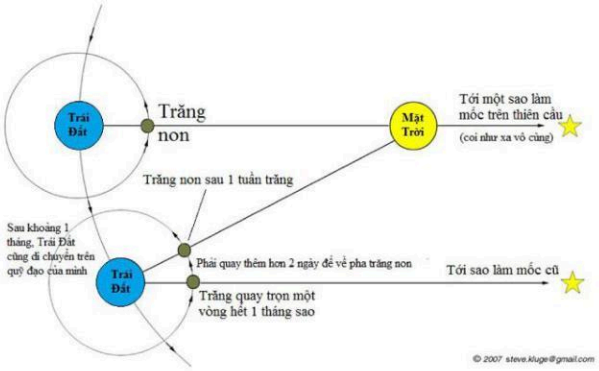
THẾ NÀO LÀ MỘT THÁNG VÀ CƠ SỞ CỦA ÂM DƯƠNG LỊCH

Phạm Vũ Lộc

Cũng như quan niệm thông thường đối với chu kỳ *năm*, thì *tháng* thường được hiểu là "chu kỳ Mặt Trăng quay một vòng quanh Trái Đất". Và cũng như vấn đề gặp phải đối với *năm*, đơn vị tháng để tính lịch lại rất khác so với định nghĩa trên.

Nếu lấy nền sao trên thiên cầu làm mốc thì thời gian để Mặt Trăng hoàn thành đúng một vòng trên bầu trời là 27,321661 ngày[1] , gọi là *tháng sao*. Các nền văn minh đều dễ dàng quan trắc được con số này và chia Hoàng đạo thành 27 hoặc 28 múi để theo dõi chuyển động của Mặt Trăng.

Tuy vậy, con người lại có ý niệm về tháng khi thấy pha trăng lúc tròn lúc khuyết, tức là dựa vào vị trí tương đối của Mặt Trăng đối với Trái Đất và Mặt Trời. Giả sử lấy mốc vào thời điểm trăng non – khi xích kinh của Mặt Trăng và Mặt Trời bằng nhau (gọi là điểm *Sóc* – ngày mùng Một âm lịch). Khi Mặt Trăng quay hết một tháng sao thì Trái Đất cũng đã quay được một cung trên quỹ đạo quanh Mặt Trời.



Tháng sao và tuần trăng

Cho nên Mặt Trăng phải quay thêm hơn 2 ngày nữa thì mới về lại pha trăng non[2] . Người ta gọi chu kỳ pha trăng này là *tuần trăng*, dài trung bình 29,530588 ngày[3]. Tương tự với năm thiên thực, *tháng thiên thực* là chu kỳ Mặt Trăng quay trở lại tiết điểm quỹ đạo (giao điểm của Bạch đạo và Hoàng đạo), dài 27,21222 ngày.

Như vậy, các chu kỳ trên đều không phải là các giá trị nguyên, nên để vừa khớp với pha trăng (âm lịch) vừa khớp với thời tiết, tức là với vị trí Mặt Trời (dương lịch), tất cả các phép làm lịch đều phải làm tròn và đưa ra các phép gần đúng để tiệm cận tới hai chu kỳ cơ bản là *năm thời tiết*[4] dài 365,24219 và *tuần*

trăng dài 29,530588 ngày. Các lịch theo được sát hai chu kỳ này được gọi là *âm dương* lịch.

Đầu tiên là để tháng lịch khớp với tuần trăng. Lịch Ai Cập định tháng có 30 ngày, nên chỉ sau $\frac{1}{2}\frac{30}{(30-29,530588)} = 31,95$ tháng đã bị lệch nửa tháng, trăng tròn vào ngày đầu tháng, đành bỏ lửng pha trăng không cần khớp với lịch nữa. Lịch Hy Lạp và Do Thái học theo lịch Babylon dùng xen kẽ tháng 29 và 30 ngày, mỗi tháng trung bình 29,5 ngày. Tức là lệch 1 ngày sau $(29,530588 - 29,5)^{-1} = 32,692559$ tháng. Tuy cũng kế thừa lịch Babylon về số ngày trong tháng xen kẽ, âm lịch Ả - rập của Đạo Hồi lại chỉ rất chú ý đến tuần trăng, họ thấy rằng sau 30 năm thì lịch ngắn hơn ($TT - 29,5)\times12\times30 = 11,0117$ ngày, nên quy ước đặt 1 ngày nhuận vào cuối các năm thứ 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26 và 29. Như vậy lịch chỉ lệch 1 ngày sau $\frac{1}{0,0117}\times30 = 2564$ năm, khá chính xác! Tuy vậy trung bình một năm lịch này chỉ có $\frac{[(30\times6+29\times6)\times30+11]}{30} = 354,366667$ ngày, chậm hơn năm thời tiết 10,875523 ngày. Do đó, tháng lễ Ramadan Đạo Hồi mỗi năm sớm hơn khoảng chục ngày nên không cố định theo mùa.

Âm lịch Á Đông có lẫn lộn các tháng đủ (30 ngày) và tháng thiếu (29 ngày). Việc xác định tháng nào là đủ hay thiếu là một thuật toán phức tạp mà các triều đại phải hiệu chỉnh liên tục trong suốt chiều dài lịch sử. Thời xưa ở nước ta, tính lịch là công việc độc quyền của một cơ quan chuyên trách là Tư Thiên Giám (triều Lê) hay Khâm Thiên Giám (thời Nguyễn). Vì hoàng đế là thiên tử nên việc in ấn và ban bố lịch cũng là độc quyền của triều đình.

Thay đổi triều đại là làm lại lịch, gọi là ban chính sóc. Thậm chí, ban lịch cho nước chư hầu cũng là một hành động mang tính ngoại giao, chính trị sâu sắc, thể hiện uy quyền cũng như vị thế văn minh. Ngày nay, Âm lịch vẫn được sử dụng rộng rãi ở nước ta bên cạnh Dương lịch với vai trò văn hóa quan trọng không thể thay thế.

Tiếp theo, để năm dân sự (số tháng, số ngày là nguyên) phù hợp với năm thời tiết, trước hết ta tính được phải nhuận 1 tháng sau $\left(\frac{365,24219}{29,530588}\right)^{-1} = 2,712423$ năm = 32,549072 tháng. Lịch Hy Lạp ban đầu đặt tháng nhuận 30 ngày 2 năm/lần, rồi 3 năm/lần, rồi 8 năm/3 lần, lúc này năm trung bình sẽ là $354 + \frac{30\times3}{8} = 365,25$ ngày. Như vậy là chỉ thừa 1 ngày sau $(365,25 - 365,24219)^{-1} = 128$ năm. Để sửa sai số này, đầu thế kỷ V trước Công nguyên, nhà thiên văn Meton đưa ra chu kỳ dài 6940 ngày (19 năm thời tiết = 6939,6016 ngày, xấp xỉ 235 tuần trăng = 6939,6882 ngày, lệch nhau chỉ hơn 2 giờ). Trong đó có $235 - 19\times12 = 7$ tháng nhuận. Sau đó, nhà thiên văn Callippus đưa ra chu kỳ dài gấp 4 để tăng độ chính xác nhưng không được dùng. Chu kỳ Meton cũng được dùng phổ biến trong lịch Do Thái với phép đặt tháng nhuận vào các năm thứ 3, 6, 8, 11, 14, 17 và 19. Thiên văn học Trung Hoa đã biết chu kỳ này rất lâu trước đó, gọi là *chương*. Chu kỳ Callipus gọi là bộ, 20 bộ là một kỷ, 3 kỷ là một *nguyên*.

Trái lại, Dương lịch (lịch Gregory – Công lịch) phổ biến ngày nay lại không thể theo sát tuần trăng mà chỉ theo được năm thời tiết như đã trình bày ở kỳ trước. Nó bắt nguồn từ lịch La Mã rất sơ sài: năm có 6 tháng 30 ngày và 4 tháng 31 ngày, 4 tháng đầu được đặt tên: 1 – Martius (Thần chiến tranh, tổ tiên của người La Mã), 2 – Aprilis (khai mở), 3 – Maius (Thần phồn thực), 4 – Iunius (Thần hôn nhân và sinh nở). 6 tên sau chỉ là số thứ tự: 5 – Quintilis, 6 – Sextilis, 7 – September, 8 – October, 9 – November, 10 – December. Năm chỉ có 304 ngày nên sai với năm thời tiết những hai tháng. Sau họ phải thêm vào hai tháng cuối năm là 11 – Januarius (Thần cửa) và 12 – Februarius (Thanh tẩy). Tháng nhuận được thêm vào tháng cuối này, vốn chỉ có 28 ngày vì bị coi là tháng hung thần.

Năm 46 trước Công nguyên, Julius Ceasar cho cải cách lịch, đổi tên tháng sinh của mình Quintilis thành Julius (người kế vị ông là Augustus cũng lấy tên mình thay cho tháng sinh Sextilis), đặt hai tháng cuối lên đầu, số ngày trong tháng được sửa lại, riêng tháng

Februarius vẫn giữ nguyên 28 ngày và ngày nhuận (4 năm 1 lần) vẫn thêm vào tháng này như ngày nay. Năm trung bình lúc này dài 365 + 1/4 = 365,25 ngày.

Sau khi Đạo Thiên Chúa ra đời, quy ước tính ngày Phục sinh của Công giáo tại Công đồng Nicea 1 vào năm 325 là "Chủ nhật đầu tiên sau ngày rằm Pác đầu mùa xuân" (tức là tính từ ngày Xuân phân – được ấn định là 21/3). Cách tính này phụ thuộc vào ngày Xuân phân nên cần khớp với năm xuân phân. Tính tới năm 1582, lịch đã lệch $\frac{(1582-325)}{(365.25-365.24237)} = 9{,}59091$ ngày. Do đó Giáo hoàng Gregory XIII cho bỏ 10 ngày trong lịch (5 - 14/10/1582) và đặt thêm phép bỏ 3 ngày ở các năm đầu thế kỷ không chia hết cho 400, để năm trung bình dài $365 + \frac{97}{400} = 365{,}2425$ ngày, rất gần với năm xuân phân dài 365,24237 ngày . Đó chính là Dương lịch ta dùng ngày nay. Tuy vậy, không phải nước nào cũng tuân theo lịch cải cách này ngay vì nhiều lý do chính trị - tôn giáo. Nước Nga tới năm 1917 thì lịch đã lệch tới $\frac{(1917-325)}{(365,25-365,24237)} = 12{,}83366$ ngày. Sau cách mạng, chính quyền Xô Viết đã bỏ 13 ngày (1 - 13/2/1918) để theo lịch Gregory. Vì thế từ đó kỷ niệm ngày Cách mạng tháng Mười Nga (23/10/1917 – lịch cũ) là ngày 7/11 hàng năm.

Khác với việc quan trắc Mặt Trời, việc xác định ngày bắt đầu (và cũng là kết thúc) của một tháng vào thời điểm trăng non chỉ bằng quan sát mắt thường là khó khăn hơn nhiều. Hơn nữa, xác định tức thời như vậy không tiện trong sinh hoạt. Đó là lý do tại sao phép làm lịch phải được công thức hóa và liên tục được hiệu chỉnh sau một thời gian (phép gần đúng càng chính xác thì càng lâu mới phải sửa). Vả lại chu kỳ Mặt Trăng dù sao cũng có ít ý nghĩa thực tế hơn chu kỳ thời tiết. Do đó, thế giới hiện nay đều dễ chấp nhận dùng Dương lịch Gregory mà chỉ giữ lịch âm vì các lý do văn hóa, tín ngưỡng.

www.toanhoc.com

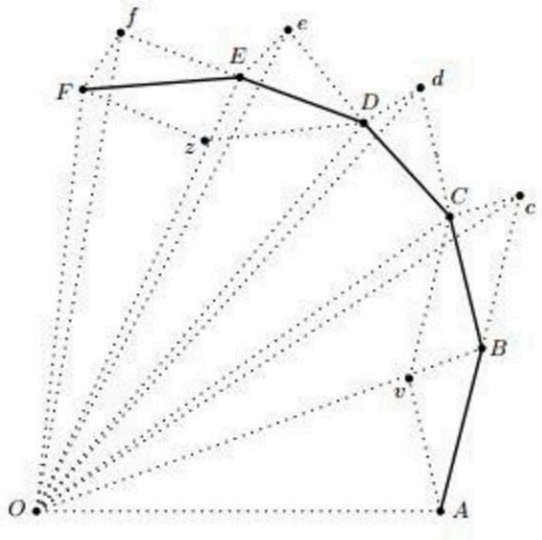


Quay quanh mặt trời

(Theo blog Thích Học Toán)

Ai cũng đã từng thắc mắc, tại sao vạn vật thì hấp dẫn nhau mà hành tinh của chúng ta vẫn nhởn nhơ quay quanh chứ không bị hút tịt vào mặt trời.

Cụ Nhiêu Tân (tên cúng cơm của cụ là Newton) nghĩ mãi mới ra. Cụ còn nhân thể nghĩ ra cái gọi là calculus. May có cụ, không thì toàn thể các nhà toán học Mỹ sẽ đói nặng, không biết dạy cái gì. Bạn không biết chứ calculus nguyên gốc tiếng Việt là "cần câu lươn". Nhưng vì có máu nghệ sĩ, cụ đã viết toàn bộ quyển principia với ngôn ngữ thuần túy hình học phẳng, tuyệt nhiên không trộn tí calculus nào.



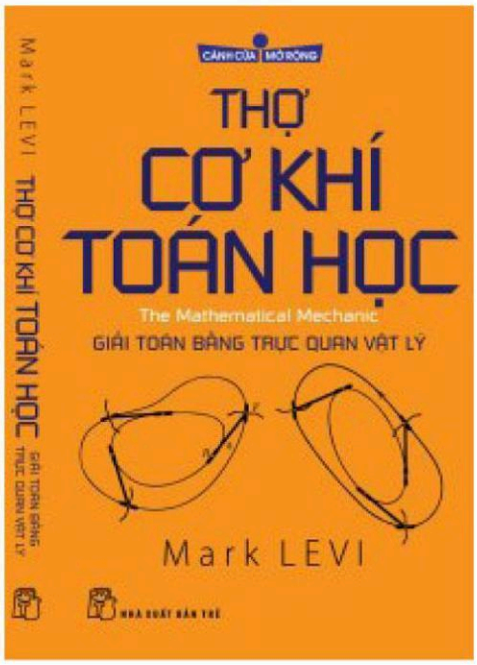
Chẳng hạn cụ vẽ cái quạt như ở trên. Trục quạt *O* là mặt trời. Các điểm *A,B,C,...* mô tả quĩ đạo của hành tinh quay quanh mặt trời. Nhận xét của cụ Nhiêu Tân là diện tích quét của nan quạt *OA* trong một đơn vị thời gian là không đổi. Vì diện tích này là không đổi, hành tinh kia khó mà tiến quá gần vào với mặt trời.

Cụ lý luận như thế này: trong một tích tắc, hành tinh nhỏ bé chuyển động từ *A* đến *B*. Nếu không có lực hấp dẫn của mặt trời, nó sẽ tiếp tục chuyển động thẳng đều để đến điểm *c* nhỏ vào tích tắc tiếp theo. Ở đây *B* là trung điểm của đoạn *Ac* cho nên hai tam giác *OAB* và *OBc* có diện tích bằng nhau.

Tuy nhiên, vì lực hấp dẫn của mặt trời, trong thực tế, hành tinh nhỏ bé không di chuyển tới *c* nhỏ, mà lại di chuyển tới điển điểm *C* to. Vec tơ *cC* thể hiện ảnh hưởng của lực hấp dẫn của mặt trời vào thời điểm mà hành tinh còn ở điểm *B*, cho nên nó song song với *OB.* Vì vậy diện tích của hai tam giác *OBc* và *OBC* là bằng nhau.

Kết luận, diện tích của hai tam giác *OAB* và *OBC* bằng nhau. Diện tích mặt quét bởi nan quạt nối mặt trời với cái hành tinh nhỏ bé của chúng ta, trong khoảnh khắc trước và trong

khoảnh khắc sau, là bằng nhau. Vậy nó là một hằng số.



Nguồn ảnh: Internet

Tất nhiên chứng minh của cụ Nhiêu Tân ở trên có tính xấp xỉ. Để cho nó đúng tuyệt đối, cụ đã phải mất công sáng tạo ra ngôn ngữ cần câu lươn cho bạn dùng. Tiếc là trên youtube chưa thấy ai pốt lên bài hát Strawberry Fields Forever của cụ Nhiêu Tân.

Nhân tiện, anh Thanh Sơn đố các bạn bài toán sau đây. Một người đi xe đạp hai bánh trong sân. Vết bánh trước và bánh sau tạo thành hai đường cong trơn khép kín không giao nhau. Chứng minh rằng diện tích hình vành khăn nằm giữa hai đường cong khép kín này là một hăng số chỉ phụ thuộc vào cái xe đạp, không phụ thuộc gì vào cơ bắp hay nghệ thuật của người đi. Bài này trích từ một quyển sách rất thú vị tên là "The mathematical mechanic: using physical reasonning to solve problems" của tác giả Mark Levi. Đừng nhầm với cái anh nhà văn chuyên viết chuyện giải khuây cho cán bộ văn phòng nhé.

Cần bao nhiêu ca nô

Phan Thanh Hồng và **Nguyễn Thị Nhung**

Một nhóm bạn trẻ yêu Toán rủ nhau đi du lịch. Họ tới một làng nọ. Trong làng có một cái hồ hình tròn, rất rộng; cảnh vật ven hồ rất hoang sơ và tuyệt đẹp. Để đi trên hồ, dân làng dùng những chiếc ca nô nhỏ, cùng kiểu.

Mỗi ca nô chỉ đi được một nửa vòng hồ là hết nhiên liệu. Trên bờ lại chỉ có đúng một trạm cấp nhiên liệu. Tuy nhiên, nhiên liệu có thể chuyển được từ ca nô này sang ca nô khác.



Minh họa: Tuấn Linh

www.toanKhoa.com

Ai trong nhóm du lịch cũng muốn đi một vòng quanh hồ để ngắm cảnh và chụp ảnh đưa lên. . . Facebook! Hiềm một nỗi, không ai trong làng cho thuê ca nô, chỉ cho mượn, mà mượn được cũng khó lắm. Thành thử, để thực hiện được ý muốn của mình, các bạn trẻ phải xúm nhau lại, tính toán, để tìm ra phương án đi được hết một vòng quanh hồ mà số ca nô cần dùng là ít nhất.

Loay hoay một hồi, rồi họ cũng đã tìm ra.

Các bạn trẻ của chúng ta đã tính toán thế nào ấy nhỉ? Bạn có biết không? Trả lời cho Pi nhé!

Phân tích số nguyên mà không cần chia cho các số nguyên tố?

Hà Huy Khoái

Hồng nhờ Lan:

– Cậu phân tích số 3229799 thành thừa số giúp tớ với! Số này to quá! Phải chia cho các số nguyên tố nhỏ hơn 1799 cậu ạ.

Hí hoáy một chút, Lan đáp:

– Làm như cậu thì bao giờ mới xong. Tớ có cách không cần chia gì hết!

– Cậu làm thế nào?

– Tớ biểu diễn $3229799 = 1800^2 - 101^2$ từ đó suy ra ngay

$3229799 = (1800+101)(1800-101) = 1799\times 1901.$

– Làm mò như cậu thì nói làm gì!

– Mò là thế nào! Tớ có phương pháp hẳn hoi nhé: Để phân tích số nguyên dương N, tớ đặt:

$$b = \sqrt{\left[\sqrt{N}\right]^2 - N},$$

trong đó, $\left[\sqrt{N}\right]$ kí hiệu phần nguyên của $\sqrt{N}$.

Nếu b nguyên, tớ sẽ được:

$$N = \left[\sqrt{N}\right]^2 - b^2 = \left(\left[\sqrt{N}\right] - b\right)\left(\left[\sqrt{N}\right] + b\right).$$

Nếu b không nguyên, tớ lại tính tiếp $\sqrt{\left(\left[\sqrt{N}\right]+1\right)^2 - N}$, $\sqrt{\left(\left[\sqrt{N}\right]+2\right)^2 - N}$ cho đến khi nhận được số nguyên.

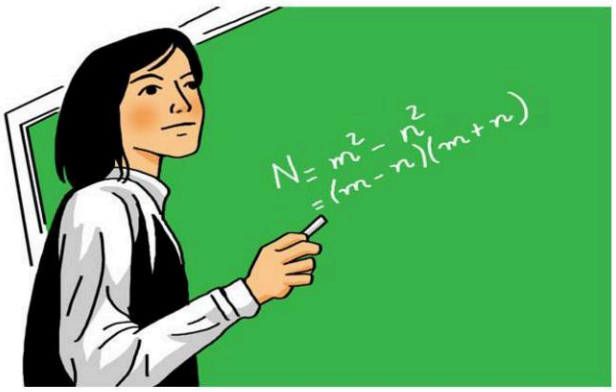
Như vừa rồi, để phân tích số $N = 3229799$ tớ làm như sau:

1/ Tính $\left[\sqrt{N}\right] = 1799;$

2/ $1799^2 - 3229799 = 6602$, không là số chính phương nên b không nguyên.

3/ $1800^2 - 3229799 = 10201 = 101^2$.

Như vậy, $3229799 = (1800 - 101)(1800 + 101) = 1799\times 1901$.



Minh họa: Linh Rab

Hồng thừa nhận:

– Tớ phục cậu tài! Nhưng khi cậu có

$$N = \left[\sqrt{N}\right]^2 - b^2 = \left(\left[\sqrt{N}\right] - b\right)\left(\left[\sqrt{N}\right] + b\right),$$

www.toanki.com

nhỡ $\left[\sqrt{N}\right]-b=1$ thì sao?

– Cậu khá đấy! Thì khi đó tớ lại tìm cách biểu diễn khác!

– Nhưng nhỡ chỉ có đúng một cách để biểu diễn N dưới dạng hiệu hai số chính phương thì sao?

– Tất nhiên là khi đó phương pháp của tớ bó tay rồi! Nhưng mà nếu N là hợp số thì luôn tồn tại hai cách biểu diễn khác nhau đấy cậu ạ!

– Thật thế à? Sao cậu giỏi thế!

– Không phải tớ giỏi, mà là tớ biết *tiêu chuẩn Euler* thôi!

– Tiêu chuẩn ấy thế nào?

– Là thế này:

Tiểu chuẩn Euler. *Nếu số lẻ $N > 1$ là hợp số thì có thể biểu diễn nó, theo ít nhất hai cách khác nhau, dưới dạng hiệu hai số chính phương. Nếu số lẻ N là số nguyên tố thì chỉ tồn tại đúng một cách biểu diễn như vậy.*

– Cậu có nhớ cách chứng minh tiêu chuẩn này không, mách tớ với. Tò mò quá! – Để xem nhé. A, tớ nhớ ra rồi! Chứng minh như thế này cậu ạ.

Chứng minh tiêu chuẩn Euler. Dĩ nhiên chỉ cần xét các số N không phải là số chính phương, vì số chính phương lớn hơn 1 là hợp số.

Giả sử N biểu diễn được dưới dạng hiệu của hai số chính phương:

$$N=m^2-n^2=(m-n)(m+n). \qquad (1)$$

Nếu N là số nguyên tố thì $m - n = 1$ và $m + n = N$. Từ đó suy ra

$$m=\frac{N+1}{2}, \quad n=\frac{N-1}{2}.$$

Các công thức trên xác định duy nhất m và n. Suy ra, N chỉ có duy nhất cách biểu diễn dưới dạng (1).

Bây giờ, giả sử N là hợp số, chẳng hạn $N = ab$, với a, b là những số lẻ lớn hơn 1.

Lấy $x=\frac{a+b}{2}, y=\frac{a-b}{2}.$ Khi đó, $a = x + y$, $b = x - y$. Suy ra

$$N=ab=x^2-y^2. \qquad (2)$$

Như vậy, trong trường hợp này, N biểu diễn được dưới dạng hiệu hai số chính phương ít nhất theo hai cách, (1) và (2) (chú ý rằng, dễ thấy $x \neq m$).

Hồng trầm trồ:

– Cậu giỏi thật đấy, Lan ạ! Nhưng tớ nghĩ không phải khi nào phương pháp của cậu cũng cho kết quả nhanh như khi phân tích 3229799 đâu!

– Cậu nói đúng đấy! Làm như trên chỉ nhanh khi N là tích hai số khá gần nhau. Mà phương pháp trên không phải của tớ đâu, nó là ***phương pháp phân tích Fermat*** đấy. Còn có cả *phương pháp phân tích Fermat mở rộng*, áp dụng tốt cho những trường hợp N là tích hai số mà thương của chúng khá gần số nguyên. Để khi nào rỗi, tớ sẽ nói cho cậu. Mà ngoài phương pháp Fermat, còn nhiều phương pháp phân tích hay lắm cậu ạ, chứ không mấy ai hùng hục ngồi chia cho từng số nguyên tố đến tận $\sqrt{N}$ đâu. Cậu đọc thêm về lý thuyết mật mã thì biết. Mà Tạp chí Pi số 1, 2, 3 đều có bài về mật mã đấy! Còn bây giờ, cậu thử dùng phương pháp Fermat để phân tích các số sau xem có nhanh hơn cách cậu vẫn chia cho các số nguyên tố không nhé: N = 410056 và N = 7884023.



Nguồn ảnh: Internet

Giải đáp bài: Sai đâu

Hà Huy Khoái

Lãn Sinh gặp sai sót khi áp dụng định lý Euler để suy ra $2^{\phi(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$. Trong trường hợp này, 2 và $p-1$ không nguyên tố cùng nhau.

Vấn đề ở đây là "chứng minh" của Lãn Sinh không thể áp dụng cho trường hợp $k = 1$, và do đó không suy ra tồn tại vô hạn số Fermat không là số nguyên tố.

"ĐỊNH LÝ" của Lãn Sinh cần phải chính xác hoá lại như sau:

Mệnh đề. Với số k nguyên lẻ tuỳ ý, $k \neq 1$, có vô hạn n sao cho $L_n = 2^{2n} + k$ là hợp số.

Chứng minh chính xác của Mệnh đề vừa phát biểu trên đây như sau.

Lấy số n tuỳ ý. Nếu L_n là hợp số thì ta chọn n lớn hơn. Giả sử L_n là nguyên tố, đặt $2^{2n} + k = p$.

Do k lẻ khác 1, ta có $k - 1 = 2^s \cdot l$, với $s > 0$, l lẻ nào đó. Khi đó, nếu n dủ lớn thì $p-1 = 2^s \cdot t$, với t lẻ nào đó.

Do n chọn tuỳ ý nên có thể xem $n \geq s$. Đặt $m = n + \phi(t)$, dễ chứng minh:

$$2^{2^m} + k \equiv 2^{2^n} + k \pmod{p}$$

Như vậy, ta được hợp số $L_m > L_n$.

Nhận xét: Số $F_n = 2^{2n} + 1$ được gọi là số *Fermat thứ n*. Fermat phát biểu giả thuyết nói rằng, F_n là số nguyên tố với mọi n. Khẳng định của Fermat đúng với $n = 1,2,3,4$. Tuy nhiên, năm 1732, Euler phát hiện ra rằng, F5 có ước là 641. Cho đến nay, người ta vẫn chưa phát hiện thêm số nguyên tố Fermat nào ngoài 4 số kể trên (nếu không tính $n = 0$, $F_0 = 3$).

Những câu hỏi sau đây vẫn chưa có câu trả lời:

1/ Tồn tại hữu hạn hay vô hạn số Fermat là số nguyên tố?

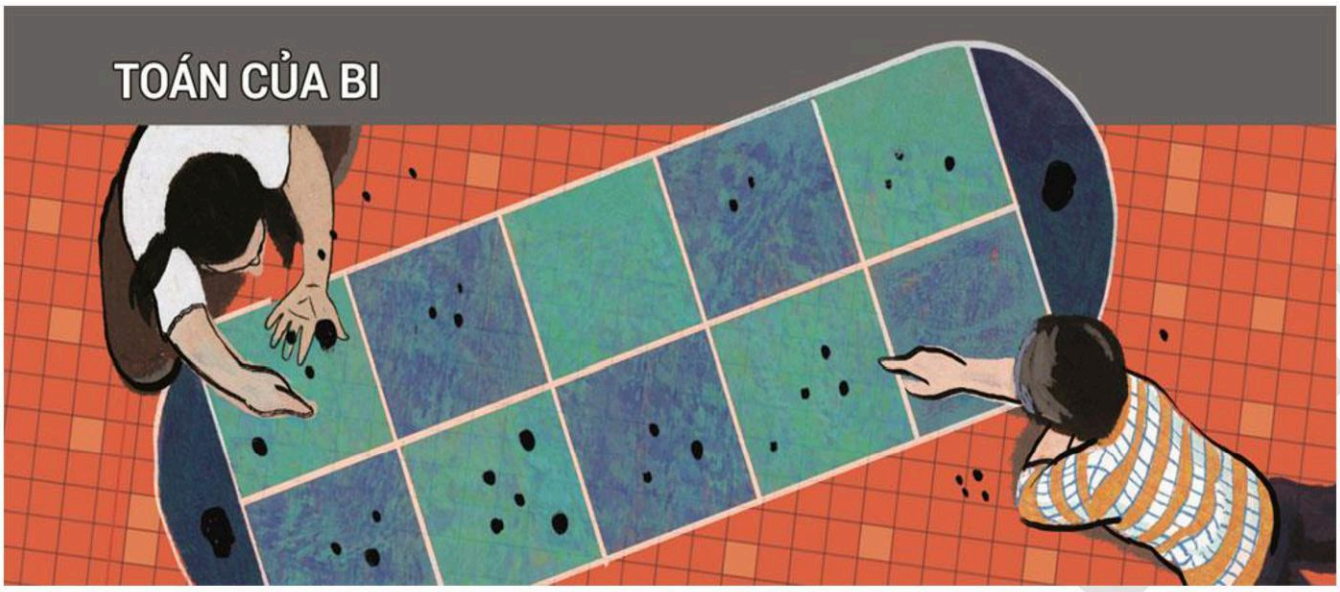
2/ Tồn tại hữu hạn hay vô hạn số Fermat là hợp số?

Những câu hỏi trên là những bài toán rất khó của Toán học, nên Lãn Sinh tin mình sẽ nhận được Giải thưởng Fields khi "chứng minh" được rằng có vô hạn số Fermat là hợp số!

Các bạn thấy đấy, chỉ "bỏ qua" giả thiết $k \neq 1$ mà một vấn đề lớn của Toán học trở thành bài tập nhỏ của học sinh.



Nguồn ảnh: Internet



Khám phá những viên gạch đặc biệt - Kì 1 -

Chu Cẩm Thơ[1] và **Nguyễn Quỳnh Anh**[2]

Trong bài viết này, chúng tôi mời các bạn đến thăm một địa danh du lịch nổi tiếng ở miền nam Tây Ban Nha, để cùng khám phá những chi tiết toán học thú vị ẩn chứa đằng sau nét kiến trúc độc đáo của nơi này.

Quần thể cung điện Alhambra, Granada, Tây Ban Nha là công trình do những người Maroc (người lai Arab và Berber đến từ Tây Bắc châu Phi), từng thống trị ở Tây Ban Nha thời trung cổ, xây dựng. Nơi đây đặc biệt ấn tượng với những viên gạch lát lạ mắt, ẩn chứa những kiến thức toán học thú vị. Các bạn thấy không, bức tường như hình bên là một trong những họa tiết hình học thú vị ở cung điện này đó.

Nếu nhìn kĩ, các bạn sẽ thấy những viên gạch lát tường không phải có hình vuông, hình lục giác như thường thấy, mà chúng có hình dạng vô cùng đặc biệt.

Mỗi người có những liên tưởng khác nhau về viên gạch lát này. Người thì gọi đó là hình cánh quạt, người thì gọi đó là hình con chim đang xòe đôi cánh, hình người đang nhảy, hình con cá, . . .



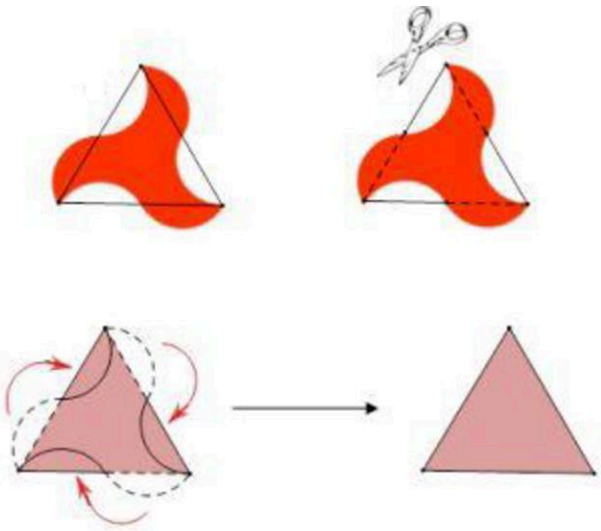
Trước tiên, hãy cùng khám phá xem bằng cách nào, các viên gạch đặc biệt này được tạo ra nhé!

Ta đánh dấu các đỉnh của hình và nối các điểm đó với nhau xem sao. Có vẻ như đó là một tam giác đều. Bí mật của viên gạch này hẳn là nằm ở đây rồi đó!

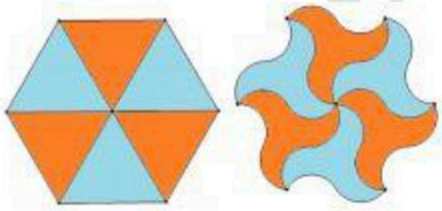
www.toanhoc.org



Giờ, ta dùng kéo cắt rời các miếng hình quạt theo các cạnh của tam giác đều và ghép các mảnh lại với nhau. Kì lạ thật, chúng vừa khít để tạo ra một hình tam giác đều đấy!



Vì có thể dùng các hình tam giác đều để phủ khít phần mặt phẳng xung quanh một điểm (do số đo của góc đầy bằng 360°, bằng 6 lần số đo góc tại một đỉnh của tam giác đều) nên ta có thể giải thích vì sao dùng những viên gạch hình thù kì lạ như trên lại có thể lát kín bức tường.

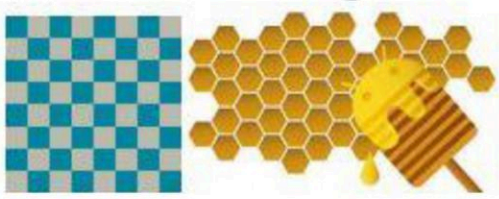


Vậy là cứ theo nguyên tắc cắt ghép như trên, chúng ta có thể tạo ra vô số những mẫu gạch lát có hình dạng khác nhau từ các tam giác đều phải không nào.

Ta gọi việc lát kín mặt phẳng bằng các hình có hình dạng giống nhau sao cho không có hai hình nào chờm lên nhau và không có kẽ hở giữa các hình là *lát mặt phẳng*; hình đa giác xuất phát (như hình tam giác đều ở trên) được gọi là *hình đa giác cơ sở*, các "viên gạch" kì dị cuối cùng được tạo ra để lát mặt phẳng gọi là *hình đơn vị*. Quá trình biến đổi từ hình đa giác cơ sở sang hình đơn vị là sự sáng tạo vô tận mà chúng ta có thể vận dụng sự tưởng tượng, kinh nghiệm và sự khéo léo của bản thân mình.

Dưới đây là một số câu hỏi thú vị về lát mặt phẳng dành cho bạn đọc.

Câu hỏi 1: Như trên đã thấy, tam giác đều là một hình đa giác cơ sở. Các hình dưới đây cho thấy hình vuông, hình lục giác đều cũng là các hình đa giác cơ sở. Bạn hãy giải thích vì sao.



Câu hỏi 2: Ngoài ba loại đa giác đều kể trên, còn những loại đa giác đều nào là các hình đa giác cơ sở?

Câu hỏi 3: Không chỉ trong kiến trúc, lát mặt phẳng còn có ứng dụng rất lớn trong ngành công nghiệp thời trang, để tạo ra các họa tiết bắt mắt. Hình dưới đây là họa tiết trên một chiếc cravat.

a) Em hãy cho biết hình đa giác xuất phát để tạo ra họa tiết nói trên là hình gì.

b) Hãy thực hành cắt ghép trên giấy để biến từ hình đa giác cơ sở thành hình đơn vị trong cách "lát" mặt phẳng cravat nêu trên.



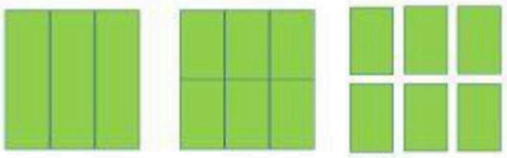
Góc sáng tạo: Các bạn hãy tự tạo ra cho mình các họa tiết trang trí bắt mắt từ hình tam giác để trang trí cho góc học tập của mình nhé!

www.toanhoc.com

Giải đáp bài Chia bánh chưng

(Xem đề bài trong Tạp chí Pi tập 1 số 2, tháng 2 năm 2017)

Chờ đã lâu mà mới chỉ có hai bạn mách cho Bi cách chia chiếc bánh chưng thành 6 phần đều nhân, đều vỏ. Một bạn học sinh Tiểu học đã khuyên Bi chia bánh thành 6 phần như hình dưới đây (Hình 1):



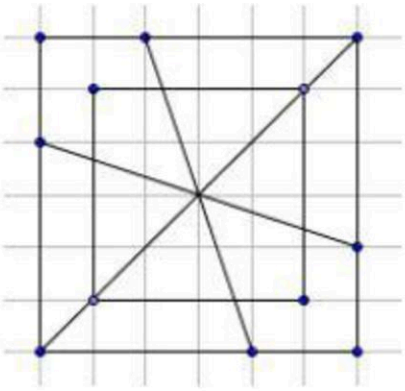
Hình 1

Với cách chia trên, rõ ràng chúng ta có 6 phần bánh bằng nhau, nếu không phân biệt riêng phần nhân và phần vỏ. Tuy nhiên, nếu xét riêng từng phần, nhân và vỏ, thì 6 phần bánh trên không có phần vỏ bằng nhau, cũng không có phần nhân bằng nhau. Hẳn các bạn cũng đồng ý với Bi rằng, các phần bánh ở góc có nhiều vỏ hơn các phần bánh nằm ở trong (và do đó, các phần bánh nằm ở trong sẽ có nhiều nhân hơn các phần bánh nằm ở góc).

Cảm ơn bạn nhé, nhưng rất tiếc là bạn chưa chia được bánh như Bi mong muốn rồi.

Bạn thứ hai, cũng là một học sinh Tiểu học, mách Bi chia bánh thế này:

Lấy các điểm chia mỗi cạnh của chiếc bánh chưng thành 3 phần bằng nhau, rồi cắt bánh theo các đường nối như Hình 2 dưới đây, ta sẽ được 6 phần bánh có phần vỏ bằng nhau, cũng đồng thời có phần nhân bằng nhau (trong hình 2, hình vuông lớn thể hiện chiếc bánh chưng, hình vuông nhỏ nằm trong hình vuông lớn thể hiện phần nhân bánh):

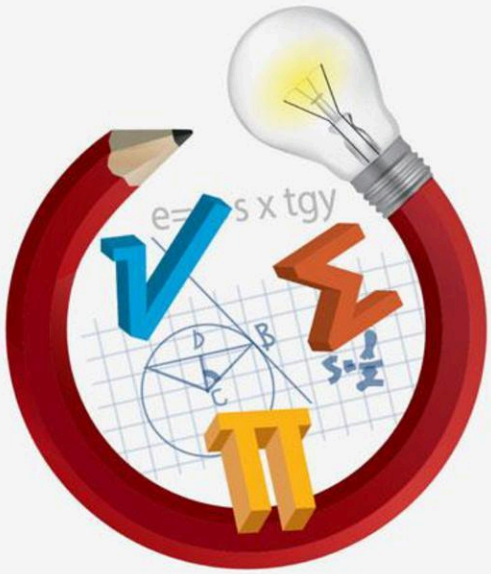


Hình 2

Quan sát hình, Bi thấy quả là có những phần bánh có phần vỏ bằng nhau và phần nhân cũng bằng nhau, nhìn cái là biết! Nhưng Bi lại cũng thấy có những phần bánh mà cái sự bằng nhau ấy (nếu có) chẳng hề hiển nhiên qua quan sát, như phần bánh ở góc và phần bánh nằm ngay cạnh nó, chẳng hạn. Bi phân vân quá, chia như trên đã đúng ý mình chưa đây? Ý các bạn thế nào? Hãy gửi ý kiến của mình về Tòa soạn Tạp chí Pi để giúp Bi gỡ rối nhé. Cảm ơn các bạn nhiều hen!

www.toanki.com

CUỘC THI TÔI & TOÁN HỌC



Để cùng nhau trao đổi nhẹ nhàng và ngắn gọn những suy nghĩ của bạn về Toán học, Tạp chí Pi mở cuộc thi "Tôi & Toán học", với thể lệ như sau:

1. Nội dung Viết về "Tôi & Toán học": tại sao bạn yêu Toán, tại sao không yêu Toán, tại sao sợ Toán, Toán có ích gì cho bạn,....

2. Hình thức: bài viết không quá 700 chữ (khoảng 1 trang A4, cỡ chữ 12).

3. Bài gửi về: ***BBT@pi.edu.vn***. Subject: **Bài dự thi "Tôi & Toán học".**

4. Thời gian nhận bài: từ 14/3 đến 22/7, năm 2017
(lưu ý: 14/3 hàng năm được lấy làm "Pi day", do viết là 3,14; còn 22/7 chính là giá trị gần đúng của số π đã được biết đến từ lâu).

5. Bài dự thi hợp lệ: tuân thủ đúng những quy định nêu trên (về độ dài, thời gian gửi, địa chỉ gửi, subject thư), có ghi rõ Tên người dự thi, địa chỉ liên hệ, nơi học tập, làm việc, năm sinh.

6. Bài viết có chất lượng sẽ được đăng trên Tạp chí Pi.

7. Giải thưởng: Chia thành 4 đối tượng:
- Tiểu học
- THCS
- THPT
- Khác

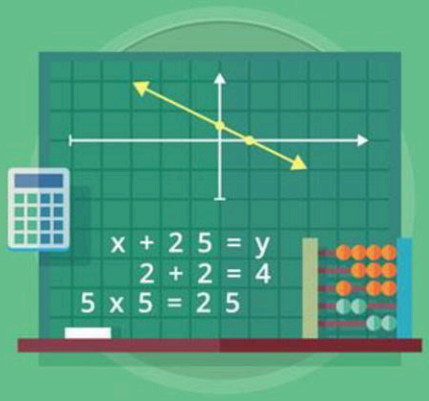
Trong mỗi đối tượng có:
- 01 giải nhất: mỗi giải gồm 01 năm báo Pi + 10 Pi tiền mặt
- 02 giải nhì, mỗi giải gồm 01 năm báo Pi + 7 Pi tiền mặt
- 03 giải ba, mỗi giải gồm 01 năm báo Pi + 3 Pi tiền mặt
- 10 giải khuyến khích, mỗi giải gồm 01 năm báo Pi.

Ghi chú: 1 Pi tiền mặt bằng 314.159 đồng.

Ban Giám khảo:
- **Ngô Bảo Châu,**
- **Hà Huy Khoái,**
- **Nguyễn Ái Việt.**

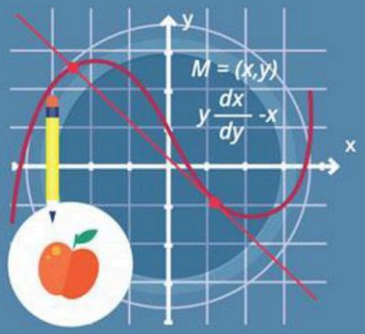
π JOURNAL

Nhà tài trợ TH true MILK



THỂ LỆ GỬI BÀI:

- Bài gửi email đến **bbt@pi.edu.vn** cần ghi rõ ở Chủ đề (Subject) của email: Lời giải của bài toán nào; Bài toán đề xuất; Bài viết cho chuyên mục gì; hoặc Bài viết không theo chuyên mục nào.
- Trên trang đầu bản thảo từng bài toán, bài viết cần ghi rõ họ tên tác giả, địa chỉ thư tín, e-mail và số điện thoại để tiện liên hệ.
- Các bài toán đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về khối lớp. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn.
- Bản thảo gửi theo email với định dạng latex hoặc word, cùng với file định dạng pdf.
- Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.



ĐỊA CHỈ GỬI BÀI:

- Qua email: **bbt@pi.edu.vn**
- Qua bưu điện:

  Tòa soạn Tạp chí Pi
  Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu,
  Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,
  Đường Đại Cồ Việt, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.



THỂ LỆ ĐẶT BÁO:

Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- **Đặt tại các bưu cục trong cả nước.** Mã của Tạp chí Pi là C057.

  Bạn đọc gặp vướng mắc trong đặt và nhận báo qua bưu điện xin gọi đường dây nóng 1900 545481 để được hỗ trợ.
- **Đặt tại website www.pi.edu.vn:** chọn nút Đặt tạp chí và làm theo hướng dẫn.
- **Đặt với Tòa soạn:** điền vào biểu mẫu tại đường dẫn **http://gg.gg/DatTapChiPi.**

  Thanh toán vào tài khoản của Tạp chí Pi:
  Tài khoản số: 0851000012293
  Ngân hàng Vietcombank chi nhánh Hà Thành.
  (trong nội dung chuyển tiền cần ghi rõ họ tên, điện thoại người chuyển)

  Sau khi thanh toán xong gửi email đến **info@pi.edu.vn** để được xác nhận.
- **Đặt mua bản điện tử tại Alezaa.com**.

[toankho.com]: Sharing nice and hard problems.

Get more books at http://book.toankho.com

www.toankho.com

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái **(Tổng Biên tập)**
Trần Nam Dũng **(Phó Tổng Biên tập)**
Nguyễn Thị Lê Hương **(Thư ký Tòa soạn)**
Nguyễn Khắc Minh **(Trưởng ban Biên tập)**

Ngô Bảo Châu, Phạm Huy Điển, Nguyễn Thành Nam,
Trần Văn Nhung, Nguyễn Duy Thái Sơn, Chu Cẩm Thơ,
Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn, Nguyễn Ái Việt, Lê Anh Vinh.

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYÊN

Hạ Vũ Anh, Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Ngọc Điệp, Lưu Thị Thanh Hà,
Trần Minh Hiền, Phan Thanh Hồng, Trần Quang Hùng, Hà Duy Hưng,
Đậu Hoàng Hưng, Nguyễn Văn Huyện, Vũ Thế Khôi, Nguyễn Duy Liên,
Phạm Vũ Lộc, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh, Nguyễn Thị Nhung,
Đặng Văn Sơn, Đỗ Hoàng Sơn, Lê Xuân Sơn, Lưu Bá Thắng,
Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thu.

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Đường Đại Cồ Việt, P. Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Email gửi bài: *bbt@pi.edu.vn*. Giao dịch: *info@pi.edu.vn*
Điện thoại: 04.3215.1407 Fax: 04.3623.1543
Website: *www.pi.edu.vn*

Chế bản: Lê Quốc Tuấn, Trần Minh Tâm
Đồ họa: Nguyên Trần, Đoàn Xuân Trường
Ảnh bìa 1: GS Grothendieck tại khu sơ tán Đại Từ - Thái Nguyên (1967)
(Ảnh do GS Hoàng Xuân Sính cung cấp)

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty Cổ phần In Hà Nội
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 25.000 đồng